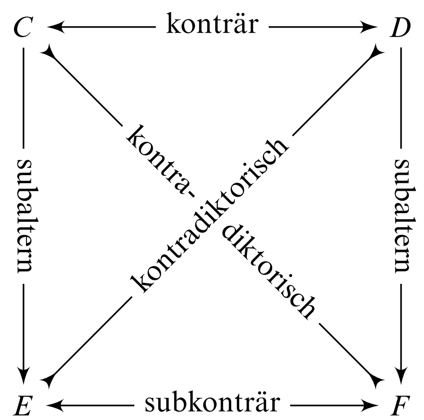
Proseminar Einführung in die Logik — WS 2015/16

Übungsblatt 13 — T. Piecha

Aufgabe 1

In einem logischen Quadrat



gilt für beliebige Formeln C, D, E, F:

(i) Nicht sowohl $\mathfrak{M} \vDash C$ als auch $\mathfrak{M} \vDash D$;

(ii) nicht sowohl $\mathfrak{M} \nvDash E$ als auch $\mathfrak{M} \nvDash F$;

(iii) $C \vDash E$;

(iv) $D \vDash F$;

(v) $\mathfrak{M} \vDash C$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \nvDash F$;

(vi) $\mathfrak{M} \vDash D$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \nvDash E$.

Ordnen Sie die Formelschemata

$$\exists x(A(x) \wedge \neg B(x)), \quad \forall x(A(x) \to B(x)), \quad \exists x(A(x) \wedge B(x)), \quad \forall x(A(x) \to \neg B(x))$$

in einem logischen Quadrat an. Was müssen Sie zusätzlich fordern, damit dies gelingt? Zeigen Sie anschließend (ii), (iv) und (vi).

Aufgabe 2

Führen Sie die folgenden Substitutionen aus, sofern dies möglich ist. Geben Sie andernfalls an, warum die Substitution nicht erlaubt ist.

(a) $\exists x \forall z R(x, y, z)\,[y/z]$

(b) $\exists x \forall z R(x, y, z)\,[y/z_1]$

(c) $\exists x \forall z R(x, y, z)\,[x/z]$

(d) $\exists x \forall z R(x, y, z)\,[y/y]$

(e) $\forall x \forall z (T(x, y) \to \exists z_1 R(z_1, y, z)) [y/z]$

(f) $\forall x \forall z (T(x, y) \to \exists z_1 R(z_1, y, z)) [y/z_1]$

(g) $\forall x \forall z (T(x, y) \to \exists z_1 R(z_1, y, z)) [y/x]$

(h) $\forall x \forall z (T(x, y) \to \exists z_1 R(z_1, y, z)) [y/z_2]$

Aufgabe 3

Formen Sie schrittweise in eine pränexe Normalform um:

(a) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x P(x) \vee \neg \forall x Q(x))$

(b) $(\forall x R(x, y) \to \exists z \neg T(x, z)) \vee \forall z S(z, z)$

(c) $P(x) \to (P(y) \to (P(z) \to \forall x \neg \forall y \forall z S(x, y, z)))$

(d) $((\forall x \forall y \forall z S(x, y, z) \to P(x)) \to P(y)) \to P(z)$

(e) $P(x) \wedge (\forall x \forall y (Q(y) \to R(x)) \to S(x))$

(f) Geben Sie für den Kern der pränexen Normalform zu (b) eine konjunktive Normalform an.