

Übungen zur Mathematischen Logik I

Blatt 12

Aufgabe 48: Beantworten Sie die folgenden Fragen möglichst prägnant:

- (1) Was versteht man unter der Henkinisierung einer Theorie?
- (2) Welche technischen Schwierigkeiten müssen dabei gelöst werden?
- (3) Inwiefern wird die Henkinisierung benötigt?

Aufgabe 49: Sei \mathcal{L} eine formale Sprache, so dass die beiden Konstanten \dot{c} und \dot{d} die einzigen nichtlogischen Zeichen sind.

Geben Sie eine Formel $\phi \in \mathcal{L}$ an, die genau dann in einer \mathcal{L} -Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ gültig ist, wenn A 2-elementig ist.

Sei dann $\Gamma := \{\phi, \dot{c} \neq \dot{d}\}$ und $T := \text{Ded}(\Gamma)$ die resultierende Theorie. Prüfen Sie, ob T eine Henkintheorie ist.

Wieviele Konstanten kommen in der Henkintheorie $T_{(H)}$ von T vor, wieviele und welche Elemente hat das Modell von T , das wie im Modell-Existenz-Satz konstruiert wurde?

Aufgabe 50: Sei I beliebige Indexmenge, $M := \{T_i; i \in I\}$ eine Menge von Theorien. Es gelte zudem, dass die Mengeninklusion „ \subseteq “ die Menge M linear (!) ordnet. Weiter sei $T := \bigcup M = \bigcup \{T_i; i \in I\}$ die Vereinigung aller Theorien $T_i \in M$. Zeigen Sie:

- (a) T ist eine Theorie, die jede Theorie $T_i \in M$ erweitert.
- (b) Falls alle $T_i \in M$ konsistent sind, dann auch T .

Hinweis: Die Menge I ist tatsächlich beliebig. Es darf insbesondere nicht vorausgesetzt werden, dass die Menge I endlich, abzählbar oder in irgendeiner Weise geordnet ist.

Aufgabe 51: Zeigen Sie für die Struktur \mathfrak{A} aus dem Modell-Existenz-Satz die folgenden Aussagen:

- (a) Die Funktion $f^{\mathfrak{A}}$ ist wohldefiniert. Das bedeutet:
Wenn $t_1 \sim s_1, \dots, t_n \sim s_n$, dann ist $f^{\mathfrak{A}}(\overline{t_1}, \dots, \overline{t_n}) = f^{\mathfrak{A}}(\overline{s_1}, \dots, \overline{s_n})$.
- (b) Für alle geschlossenen Terme t gilt: $\llbracket t \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \overline{t}$.