

Mathematische Logik I

Blatt 4

Aufgabe 12: Es sei \circ ein zweistelliger Junktor, sodass die folgenden beiden Formeln Tautologien sind.

$$p \circ (q \circ p) \quad ; \quad \neg((p \circ p) \circ \neg(p \circ p))$$

Zeigen Sie, dass \circ die Implikation ist. Nehmen Sie anschließend an, dass die beiden Formeln Kontradiktionen sind. Bestimmen Sie unter dieser Voraussetzung die Wahrheitsfunktion f_\circ von \circ .

Aufgabe 13 (DNF und KNF): Geben Sie für die folgende Formel ihre vollständige Wahrheitstafel an.

$$\phi := \neg((p_1 \vee (p_2 \wedge p_3)) \vee \neg p_4)$$

Nutzen Sie die Wahrheitstafel, um aus ihren Zeilen eine disjunktive Normalform von ϕ abzulesen. Wandeln Sie anschließend diese mithilfe algebraischer Umformungen in eine konjunktive Normalform von ϕ um. (Begründen Sie dabei jede einzelne Umformung.)

DEF (Deduktiver Abschluss): Der *deduktive Abschluss* $\text{Ded}(\Gamma)$ einer Formelmenge $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ ist wie folgt definiert:

$$\text{Ded}(\Gamma) := \{\phi \in \text{PROP}; \Gamma \models \phi\}$$

Aufgabe 14 (Deduktiver Abschluss): Zeigen Sie, dass der deduktive Abschluss die folgenden Eigenschaften hat:

1. *extreme Werte:* $\text{Ded}(\perp) = \text{PROP}$, $\text{Ded}(\neg\perp) = \text{TAUT}$
2. *reflexiv:* $\Gamma \subseteq \text{Ded}(\Gamma)$
3. *abgeschlossen:* $\text{Ded}(\Gamma) = \text{Ded}(\text{Ded}(\Gamma))$
4. *monoton:* $\Delta \subseteq \Gamma \Rightarrow \text{Ded}(\Delta) \subseteq \text{Ded}(\Gamma)$
5. *endlich (2 Pkt):* $\phi \in \text{Ded}(\Gamma) \Rightarrow \exists \Delta \subseteq \Gamma : \phi \in \text{Ded}(\Delta)$, Δ endlich.

Dabei ist TAUT die Menge aller Tautologien von PROP. Teilaufgabe (5) zählt als Zusatzaufgabe im Wert von 2 Punkten.

Aufgabe 15 (Zweiter Versuch): Lösen Sie Aufgabe (6), Blatt 2, erneut.

Hinweis (Zweiter Versuch): Eine Bearbeitung des zweiten Versuches erfolgt freiwillig, nur der bessere Versuch fließt in die Bewertung ein.

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, dem 14. Mai.