# Mathematische Logik I

## — Foliensatz 9 —

Dr. Michael Arndt

Wintersemester 2014/15

# Vorbemerkung

Im Folgenden soll die Bedeutung quantorenlogischer Sprachen $\mathfrak{L}$ eingeführt werden.

Während in der Aussagenlogik dafür nur die Bewertung aller Formeln benötigt wurde, gestaltet es sich in der Quantorenlogik aufwendiger.

Zunächst muss der Strukturbegriff eingeführt werden. Dabei handelt es sich im Wesentlichen um eine Menge, in der die nichtlogischen Zeichen von $\mathfrak{L}$ interpretiert werden.

Anschließend werden Belegungen von Variablen definiert. Damit können Terme zu Individuen sowie Formeln zu Wahrheitswerten ausgewertet werden.

Es wird stets eine Sprache $\mathfrak{L}$ mit Signatur $\langle I, \sigma, \tau \rangle$ vorausgesetzt.

# Struktur

## Definition 1 (Struktur)

Das geordnete Paar $\langle A, \Omega \rangle$ heißt $\mathfrak{L}$-Struktur, falls $A \neq \varnothing$ eine nichtleere Menge und $\Omega$ eine Abbildung auf ganz $I \uplus K \uplus L$ ist, so dass folgendes gilt:

1. Für jedes $i \in I$ ist $c_i =_{\text{def}} \Omega(i) \in A$ ein Element von $A$.
2. Für jedes $k \in K$ ist $f_k =_{\text{def}} \Omega(k)$ eine $\sigma(k)$-stellige Funktion. Also: $f_k : A^{\sigma(k)} \to A$.
3. Für jedes $l \in L$ ist $R_l =_{\text{def}} \Omega(l)$ eine $\tau(l)$-stellige Relation. Also: $R_l \subseteq A^{\tau(l)}$.

# Struktur

**Bemerkungen:**

1. Strukturen werden druch Frakturbuchstaben dargestellt: $\mathfrak{A} =_{\text{def}} \langle A, \Omega \rangle$.
2. Die Abbildung $\Omega$ ist wohldefiniert (funktional), da die Mengen $I$, $K$, $L$ paarweise disjunkt sind.
3. Die Menge $A$ wird *Grundbereich*, *Grundmenge*, *Trägermenge*, *Individuenbereich* oder auch *Universum* genannt.

   Für das Universum einer Struktur $\mathfrak{A}$ schreibt man auch $|\mathfrak{A}|$.
4. Häufig notieren wir in Strukturen die ausgezeichneten Objekte anstatt der Abbildung $\Omega$ und geben so $\Omega$ implizit an.

   Wir schreiben also: $\big\langle A, \langle c_i \rangle_{i \in I}, \langle f_k \rangle_{k \in K}, \langle R_l \rangle_{l \in L} \big\rangle$.

# Struktur

5 Die Abbildung $\Omega$ legt fest, durch welche Objekte die sprachlichen Zeichen interpretiert werden. Die Bilder von $\Omega$ werden *Interpretation der nicht-logischen Zeichen unter* $\Omega$ oder auch *ausgezeichnete Objekte* genannt.

Wir verwenden manchmal die Schreibweise $\zeta^{\mathfrak{A}}$ um die Interpretation eines nicht-logischen Zeichens $\zeta$ in der Struktur $\mathfrak{A}$ zu bezeichnen.

# Struktur

6 Die Signatur der Sprache $\mathfrak{L}$ läßt sich auch anhand einer $\mathfrak{L}$-Struktur feststellen.

Jeder Konstanten entspricht ein ausgezeichnetes Element, jedem Funktions- und Relationszeichen eine Funktion bzw. eine Relation gleicher Stellenzahl.

Entsprechend werden wir auch von der Signatur einer $\mathfrak{L}$-Struktur sprechen.

Verschiedene $\mathfrak{L}$-Strukturen zu einer Sprache $\mathfrak{L}$ sind sich aufgrund ihrer gemeinsamen Signatur ähnlich.

Entsprechend wird die Signatur einer $\mathfrak{L}$-Struktur als *Ähnlickeitstyp* bezeichnet.

# Struktur

**Beispiel:**

1. Die additive Gruppe der Ganzen Zahlen $\mathfrak{Z} =_{\text{def}} \langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ ist zusammen mit dem ausgezeichnetem Element $0 \in \mathbb{Z}$ und der Addition in $\mathbb{Z}$ eine $\mathfrak{L}_G$-Struktur.

   Zeichnet man zusätzlich die Abbildung $- : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto -x$ und die zweistellige Relation $\leq$ aus, erhält man mit $\mathfrak{Z}' =_{\text{def}} \langle \mathbb{Z}, 0, +, -, \leq \rangle$ eine $\mathfrak{L}_{G'}$-Struktur zur Sprache $\mathfrak{L}_{G'}$.

# Struktur

Detailiert und formal korrekt:

Für $\mathfrak{Z}$:

$A =_{\text{def}} \mathbb{Z}$
$\Omega(0) =_{\text{def}} 0$
$\Omega(+) =_{\text{def}} f_+ : A \times A \to A : (x, y) \mapsto x + y$

Für $\mathfrak{Z}'$ zusäzlich:

$\Omega(-) =_{\text{def}} f_- : A \to A : x \mapsto -x$
$\Omega(\leq) =_{\text{def}} \{(x, y) : \ x \leq y\} \subset A^2$

Es ist zu beachten, dass $\Omega$ als Argument uninterpretierte Elemente aus den einzelnen Index-Mengen hat und als Bild uns bekannte Elemente, Funktionen und Relationen, die wir hier lediglich gleich notieren.

# Struktur

2 Die Einheitengruppe der Ganzen Zahlen $\mathfrak{E} =_{\mathsf{def}} \langle\{-1,+1\},\cdot,1\rangle$ ist zusammen mit dem ausgezeichnetem Element 1 und der gewohnten Multiplikation eine $\mathfrak{L}_G$-Struktur.

$A =_{\mathsf{def}} \{-1,+1\}$
$\Omega(0) =_{\mathsf{def}} 5$
$\Omega(+) =_{\mathsf{def}} f_+ : A \times A \to A : (x,y) \mapsto x \cdot y$

# Struktur

3. $\mathfrak{L}_G$-Strukturen müssen keine Gruppen sein, obwohl die Sprache mit dieser Intention erklärt wurde! Interpretationen der nicht-logischen Zeichen können auch „wild“ gewählt werden. Sie müssen lediglich zur Signatur passen.

$$A =_{\text{def}} \mathbb{N}$$
$$\Omega(0) =_{\text{def}} 5$$
$$\Omega(+) =_{\text{def}} f_+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (x, y) \mapsto \min(x, y)$$

Das Tupel $\mathfrak{W} =_{\text{def}} \langle A, \Omega \rangle$ ist eine $\mathfrak{L}_G$-Struktur.

# Belegung

## Definition 2 (Belegung)

1. Eine Abbildung $v : \mathrm{VAR} \to |\mathfrak{A}|$ heißt *Belegung* der Individuenvariablen in $\mathfrak{A}$.
2. Für $a \in |\mathfrak{A}|$ und eine Variable $x \in \mathrm{VAR}$ ist $v[x \mapsto a]$ diejenige Belegung $w$ mit:

$$w(y) = \begin{cases} a & \text{falls } y \doteq x \\ v(y) & \text{falls } y \not\doteq x \end{cases}$$

$v[x \mapsto a]$ heißt *Variante* (oder genauer $x$-*Variante*) von $v$.

# Auswertung

**Bemerkungen:**

1. Nachdem die Bedeutungen der nicht-logischen Zeichen und der Variablen festgelegt sind, können die Terme und Formeln ausgewertet werden.

   Das bedeutet: Man bestimmt diejenigen Individuen, auf die Terme verweisen, und den Wahrheitswert von Formeln.

2. Die Auswertungen erfolgen immer in Abhängigkeit von einer Belegung in einer vorgegebenen Struktur.

   Damit spielen Strukturen und Belegungen in der Quantorenlogik eine ähnliche Rolle wie Wahrheitswertzuordnungen in der Aussagenlogik.

# Auswertung

## Definition 3 (Auswertung von Termen)

Sei $v : \mathrm{VAR} \to |\mathfrak{A}|$ eine Belegung der Variablen in $\mathfrak{A}$.
Die Auswertung von Termen ist eine Abbildung

$$[\![\cdot]\!]_v^{\mathfrak{A}} : \mathrm{TERM} \to |\mathfrak{A}|$$

die wie folgt über den Aufbau von Termen definiert ist:

1. $[\![x_n]\!]_v^{\mathfrak{A}} =_{\mathrm{def}} v(x_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$
2. $[\![\dot{c}_i]\!]_v^{\mathfrak{A}} =_{\mathrm{def}} c_i$ für jedes $i \in I$
3. $[\![\dot{f}_k(t_1, \ldots t_{\sigma(k)})]\!]_v^{\mathfrak{A}} =_{\mathrm{def}} f_k([\![t_1]\!]_v^{\mathfrak{A}}, \ldots [\![t_{\sigma(k)}]\!]_v^{\mathfrak{A}})$
   für jedes $k \in K$

# Auswertung

**Bemerkungen:**

1. Durch die Definition ist intendiert, dass jedes Zeichen durch die zugehörige Interpretation in der Struktur ausgewertet wird.
2. Man beachte, dass innerhalb der Semantik-Klammern Zeichen des Alphabets stehen (angedeutet durch den Punkt über dem jeweiligen Zeichen), rechts des Gleichheitszeichens jedoch von den ausgezeichneten Objekten und Funktionen der Struktur gesprochen wird.

# Auswertung

**Beispiele:**

Terme in der $\mathfrak{L}_{G'}$-Struktur $\mathfrak{Z}' = \langle \mathbb{Z}, 0, +, -, \leq \rangle$ unter der Belegung $v : \mathrm{VAR} \to \mathbb{Z} : x_n \mapsto n$ werden schrittweise ausgewertet:

1. $$\begin{aligned} [\![ \dot{f}_+(\dot{c}_0, \dot{c}_0) ]\!]_v^{\mathfrak{Z}'} &= f_+\big([\![ \dot{c}_0 ]\!]_v^{\mathfrak{Z}'}, [\![ \dot{c}_0 ]\!]_v^{\mathfrak{Z}'}\big) \\ &= [\![ \dot{c}_0 ]\!]_v^{\mathfrak{Z}'} + [\![ \dot{c}_0 ]\!]_v^{\mathfrak{Z}'} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} [\![ \dot{f}_-(x_1) ]\!]_v^{\mathfrak{Z}'} &= f_-\big([\![ x_1 ]\!]_v^{\mathfrak{Z}'}\big) \\ &= -[\![ x_1 ]\!]_v^{\mathfrak{Z}'} \\ &= -v(x_1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

# Auswertung

3

$$
\begin{aligned}
[\![\overline{(x_2 \dotplus \overline{x_3})}]\!] &= -[\![(x_2 \dotplus \overline{x_3})]\!] \\
&= -([\![x_2]\!] + [\![\overline{x}_3]\!]) \\
&= -([\![x_2]\!] + (-[\![x_3]\!])) \\
&= -(v(x_2) + (-v(x_3))) \\
&= -(2 + (-3)) \\
&= -(-1) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

# Auswertung

**Bemerkung:**

Die ersten beiden Beispiele wurden formal korrekt aufgeschrieben.

Für das letzte Beispiel wurde zur Schreiberleichterung die Angabe der Abhängigkeiten der Auswertungsfunktion von der Struktur $\mathfrak{J}'$ und der Belegung $v$ nicht notiert. Sofern die Struktur und die Belegung aus dem Kontaxt heraus offensichtlich sind, ist diese Schreiberleichterung unproblematisch.

# Auswertung

**Definition 4 (Auswertung von Formeln)**

Sei $v : \mathrm{VAR} \to A$ eine Belegung der Variablen in $\mathfrak{A}$. Die Auswertung von Formeln ist eine Abbildung

$$[\![\cdot]\!]_v^{\mathfrak{A}} : \mathfrak{L} \to \{0, 1\}$$

die wie folgt über den Aufbau von Formeln definiert ist:

1. $[\![\dot{R}_l(t_1, \dots t_{\tau(l)})]\!]_v^{\mathfrak{A}}$
$$=_{\mathrm{def}} \begin{cases} 0 & \text{falls } \left([\![t_1]\!]_v^{\mathfrak{A}}, \dots [\![t_{\tau(l)}]\!]_v^{\mathfrak{A}}\right) \notin R_l \\ 1 & \text{falls } \left([\![t_1]\!]_v^{\mathfrak{A}}, \dots [\![t_{\tau(l)}]\!]_v^{\mathfrak{A}}\right) \in R_l \end{cases}$$

# Auswertung

**Definition 4 (Auswertung von Formeln (Forts.))**

2. $[\![(t_1 \doteq t_2)]\!]^{\mathfrak{A}}_v =_{\text{def}} \begin{cases} 0 & \text{falls } [\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}_v \neq [\![t_2]\!]^{\mathfrak{A}}_v \\ 1 & \text{falls } [\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}_v = [\![t_2]\!]^{\mathfrak{A}}_v \end{cases}$
3. $[\![\bot]\!]^{\mathfrak{A}}_v =_{\text{def}} 0$
4. $[\![\neg\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_v =_{\text{def}} f_\neg\big([\![\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_v\big)$
5. $[\![(\phi \circ \psi)]\!]^{\mathfrak{A}}_v =_{\text{def}} f_\circ\big([\![\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_v, [\![\psi]\!]^{\mathfrak{A}}_v\big)$
6. $[\![(\forall x\, \phi)]\!]^{\mathfrak{A}}_v =_{\text{def}} \min\big\{[\![\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_{v[x\mapsto a]} : a \in |\mathfrak{A}|\big\}$

   $[\![(\exists x\, \phi)]\!]^{\mathfrak{A}}_v =_{\text{def}} \max\big\{[\![\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_{v[x\mapsto a]} : a \in |\mathfrak{A}|\big\}$

# Auswertung

**Bemerkungen:**

1. Die Auswertung von Formeln funktioniert analog zur Auswertung von Termen. Entsprechend wird das gleiche Symbol verwendet; die Bemerkungen zur Auswertung von Termen gelten analog.
2. Einstellige Relationen drücken Eigenschaften von Individuen aus. Nullstellige Relationen spielen in der Quantorenlogik die Rolle von Aussagenvariablen.

# Auswertung

3. Klausel (6) führt den Wahrheitswert einer quantifizierten Formel auf den Wahrheitswert einer offenen Formel zurück. Das stellt den wesentlichen Grund für die Einführung von Belegungen dar.

   Würden wir Variablen nicht mithilfe von Belegungen eine (künstliche) Bedeutung zuweisen, könnten durch All- oder Existenzquantifikation entstehende Formeln nicht interpretiert werden. Selbst dann nicht, wenn sie keine freien Variablen enthalten.

# Auswertung

4. Im Gegensatz zu anderen Ansätzen (vgl. etwa van Dalen) benötigen wir zur Auswertung der Quantoren keine objektsprachlichen Namen für jedes Objekt des Universums und ersparen uns damit die Betrachtung von Spracherweiterungen.
5. In der Metasprache müssen wir über die Objekte des Universums sprechen und quantifizieren können, um die Quantoren $\forall$ und $\exists$ auswerten zu können. Diese Auswertungen sind für unendliche Strukturen daher nicht effektiv berechenbar.

# Koinzidenz-Lemma

## Lemma 5 (Koinzidenz)

*Für Terme $t$ und Formeln $\phi$ von $\mathfrak{L}$ und allen $\mathfrak{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt:*
*Sind $v, w$ zwei Belegungen, die auf den freien Variablen von $t$ bzw. $\phi$ übereinstimmen, dann gilt schon:*

$$[\![t]\!]_v^{\mathfrak{A}} = [\![t]\!]_w^{\mathfrak{A}} \quad \textit{bzw.} \quad [\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = [\![\phi]\!]_w^{\mathfrak{A}}$$

# Koinzidenz-Lemma

**Bemerkung:**

Das Lemma besagt, dass zur Auswertung einer Formel eine Belegung nur auf den freien Variablen der Formel betrachtet werden muss.

Insbesondere sind damit die Auswertungen von Aussagen $\phi$, d.h. Formeln $\phi$ mit $\mathrm{FV}(\phi) = \varnothing$, unter allen Belegungen gleich.

# Koinzidenz-Lemma

Beweis:

Zunächst wird die Behauptung induktiv für Terme gezeigt.

Dies ist für Individuen-Konstanten $\dot{c}$ und Variablen $x$ trivial.

Sei also $t \doteq \dot{f}(t_1, \ldots, t_n)$ für Terme $t_1, \ldots, t_n$ und seien $v, w$ zwei Belegungen, die auf den freien Variablen von $t$ übereinstimmen.

Insbesondere stimmen die Belegungen jeweils auch auf den freien Variablen von $t_1, \ldots, t_n$ überein und damit kann die IV verwendet werden:

$$[\![ t ]\!]_v^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}([\![ t_1 ]\!]_v^{\mathfrak{A}}, \ldots, [\![ t_n ]\!]_v^{\mathfrak{A}}) \overset{(IV)}{=} f^{\mathfrak{A}}([\![ t_1 ]\!]_w^{\mathfrak{A}}, \ldots, [\![ t_n ]\!]_w^{\mathfrak{A}}) = [\![ t ]\!]_w^{\mathfrak{A}}$$

# Koinzidenz-Lemma

Damit kann man die Behauptung für beliebige Formeln zeigen:

<u>I. Induktionsvoraussetzung</u>

$\phi$ ist atomar.

Für $\phi \triangleq \dot{P}(t_1, \ldots, t_n)$ oder $\phi \triangleq (t \doteq s)$ verwenden wir die analoge Aussage über Terme.

Für $\phi \triangleq \perp$ trivial.

<u>II. Induktionsvoraussetzung</u>

Die Behauptung gelte für Formeln $\phi$ und $\psi$.

# Koinzidenz-Lemma

III. Induktionsschluss

Für aussagenlogische Kombinationen ist die Aussage trivial, da die Auswertung funktional ist. Die interessanten Fälle sind $\phi \doteq (\forall x \psi)$ und $\phi \doteq (\exists x \psi)$, da im Allgemeinen nicht gilt: $\mathrm{FV}(\psi) \subseteq \mathrm{FV}(\phi)$.

Seien also $v, w$ zwei Belegungen, die auf $\mathrm{FV}(\phi)$ übereinstimmen, dann ist:

$$\begin{aligned} [\![\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_{v} &= \min \left\{ [\![\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_{v[x \mapsto a]} : a \in |\mathfrak{A}| \right\} \\ [\![\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_{w} &= \min \left\{ [\![\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_{w[x \mapsto a]} : a \in |\mathfrak{A}| \right\} \end{aligned}$$

Wir können hier die IV anwenden, da $v[x \mapsto a]$ und $w[x \mapsto a]$ zwei Belegungen sind, die auf $\mathrm{FV}(\phi) \cup \{x\} = \mathrm{FV}(\psi)$ übereinstimmen!

Damit wurde die Behauptung gezeigt. $\square$

# Gültigkeit

**Definition 6 (Gültigkeit in Strukturen)**

Sei $\phi \in \mathfrak{L}$ eine Formel, $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ eine Menge von Formeln, $\mathfrak{A}$ eine $\mathfrak{L}$-Struktur und $v$ eine Belegung.

1. $\phi$ ist in $\mathfrak{A}$ unter $v$ *gültig* genau dann, wenn $[[\phi]]_v^{\mathfrak{A}} = 1$.

   Schreibe: $\mathfrak{A} \models_v \phi$. Ist dies nicht der Fall, schreibe: $\mathfrak{A} \not\models_v \phi$.
2. $\mathfrak{A}$ ist ein *Modell* von $\phi$ genau gann, wenn $\mathfrak{A} \models_v \phi$ für alle Belegungen $v$.

   Schreibe: $\mathfrak{A} \models \phi$. Ist dies nicht der Fall, schreibe: $\mathfrak{A} \not\models \phi$.
3. $\mathfrak{A}$ ist ein *Modell* von $\Gamma$ genau dann, wenn für jedes $\phi \in \Gamma$ gilt: $\mathfrak{A} \models \phi$.

   Schreibe: $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Ist dies nicht der Fall, schreibe: $\mathfrak{A} \not\models \Gamma$.

# Gültigkeit

**Bemerkungen:**

1. Man sagt, dass $\phi$ bzw. $\Gamma$ in $\mathfrak{A}$ gültig ist (unabhängig von einer konkreten Belegung), wenn $\mathfrak{A}$ ein Modell für $\phi$ bzw. $\Gamma$ ist.
2. ACHTUNG: $\mathfrak{A} \not\models \phi$ bedeutet *nicht*, dass $\phi$ unter keiner Belegung in $\mathfrak{A}$ gültig ist, sondern dass $\phi$ nicht unter allen Belegungen in $\mathfrak{A}$ gültig ist! D.h. es kann trotzdem eine Belegung $v$ geben mit $\mathfrak{A} \models_v \phi$.

   Damit ist durch $\mathfrak{A} \not\models \phi$ im Allgemeinen *nicht* nicht dasselbe ausgedrückt wie durch $\mathfrak{A} \models \neg\phi$.

# Gültigkeit

**Alternative Notation (Belegungen):**

1. Wir schreiben statt $\mathfrak{A} \models_v \phi$ auch $\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$, falls folgendes gilt:

   $\mathrm{FV}(\phi) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ und $i_1 < \ldots < i_n$ und $v(x_{i_k}) = a_k$.

   D.h.: die $k$-te freie Variable von $\phi$ wird durch $a_k$ belegt.
2. Entsprechend verwenden wir die Vektor-Notation: $\mathfrak{A} \models \phi[\vec{a}]$.

# Gültigkeit

**Beispiele (Gültigkeit in Strukturen):**

Wir betrachten die Sprache $\mathfrak{L}_G$ der Gruppentheorie.

In den beiden Beispielen sei stets $\phi \doteq_{\text{def}} (x \doteq x \dot{+} x) \in \mathfrak{L}_G$.

1. $\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ ist eine $\mathfrak{L}_G$-Struktur.

   Sei $v$ eine Belegung mit $v(x) = 0$.

   Dann ist $[\![\phi]\!]^{\mathfrak{Z}}_v = 1$, denn in $\mathfrak{Z}$ gilt:
   $$\begin{aligned} [\![x]\!]^{\mathfrak{Z}}_v &= v(x) = 0 = 0 + 0 = v(x) + v(x) \\ &= [\![x]\!]^{\mathfrak{Z}}_v + [\![x]\!]^{\mathfrak{Z}}_v = [\![x \dot{+} x]\!]^{\mathfrak{Z}}_v \end{aligned}$$

   Also: $\mathfrak{Z} \models_v \phi$.

# Gültigkeit

Für eine Belegung $w$ mit $w(x) = 3$ gilt hingegen:

$$\begin{aligned} [\![x]\!]_v^{\mathfrak{Z}} &= v(x) = 3 \neq 3 + 3 = v(x) + v(x) \\ &= [\![x]\!]_v^{\mathfrak{Z}} + [\![x]\!]_v^{\mathfrak{Z}} = [\![x \dot{+} x]\!]_v^{\mathfrak{Z}} \end{aligned}$$

Damit dann: $[\![x \doteq x \dot{+} x]\!]_w^{\mathfrak{Z}} = 0$, und daher $\mathfrak{Z} \not\models_w \phi$.

Aus letzterem folgt wiederum: $\mathfrak{Z} \not\models (x \doteq x \dot{+} x)$.

Das bedeutet: Die offene Formel $\phi$ ist zwar unter der Belegung $v$ in $\mathfrak{Z}$ gültig, insgesamt ist sie aber in der Struktur $\mathfrak{Z}$ nicht gültig.

$\mathfrak{Z}$ ist also kein Modell der Formel.

# Gültigkeit

2 Auch die Strukur $\mathfrak{W} = \langle \mathbb{N}, 5, \min \rangle$ ist eine $\mathfrak{L}_G$-Struktur.

Sei $v$ eine beliebige Belegung.

Es ist $[\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{W}} = 1$, da in $\mathfrak{W}$ gilt:

$$\begin{aligned} [\![x]\!]_v^{\mathfrak{W}} &= v(x) = \min\{v(x), v(x)\} \\ &= \min\{[\![x]\!]_v^{\mathfrak{W}}, [\![x]\!]_v^{\mathfrak{W}}\} = [\![x \dotplus x]\!]_v^{\mathfrak{W}} \end{aligned}$$

Damit gilt unter der Belegung $v$ die Formel $\phi$ in der Struktur $\mathfrak{W}$, in Zeichen: $\mathfrak{W} \models_v \phi$.

Da die Belegung $v$ beliebig gewählt war, gilt $\mathfrak{W} \models_v \phi$ schon für jede Belegung.

Also: $\mathfrak{W} \models (x \doteq x \dotplus x)$.

Das bedeutet: Die offene Formel $\phi$ ist unter allen Belegungen $v$ in $\mathfrak{Z}$ gültig.

$\mathfrak{Z}$ ist daher ein Modell der Formel.

# Eigenschaften der Gültigkeit

**Theorem 7**

*Seien $\phi, \psi \in \mathfrak{L}$ Formeln. Dann gilt für jede $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$:*

1. *Wenn $\mathfrak{A} \models \neg\phi$, dann $\mathfrak{A} \not\models \phi$.*
2. *Es ist $\mathfrak{A} \models \phi$ und $\mathfrak{A} \models \psi$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi$.*
3. *Wenn $\mathfrak{A} \models \phi$ oder $\mathfrak{A} \models \psi$, dann $\mathfrak{A} \models \phi \vee \psi$.*
4. *Wenn $\mathfrak{A} \models \phi \rightarrow \psi$, dann mit $\mathfrak{A} \models \phi$ auch $\mathfrak{A} \models \psi$.*
5. *Wenn $\mathfrak{A} \models \phi \leftrightarrow \psi$, dann $\mathfrak{A} \models \phi$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \psi$.*

# Eigenschaften der Gültigkeit

Beweis von (1):

Es gelte $\mathfrak{A} \models \neg\phi$.

Damit gilt für jede Belegung $v$: $\mathfrak{A} \models_v \neg\phi$.

Das bedeutet: $[\![\neg\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = 1$.

Sei $v$ beliebige Belegung.

$$[\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = 1 - [\![\neg\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = 1 - 1 = 0$$

Es gilt also für diese Belegung $v$: $\mathfrak{A} \not\models_v \phi$.

Insgesamt gilt also: $\mathfrak{A} \not\models \phi$.

# Eigenschaften der Gültigkeit

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Gegenbeispiel:

Sei $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ eine $\mathfrak{L}$-Struktur zu einer beliebigen Sprache $\mathfrak{L}$, wobei $A = \{0, 1\}$ zweielementig ist, und sei $\phi \mathrel{\hat{=}}_{\text{def}} (x \doteq y) \in \mathfrak{L}$.

Für eine Belegung $v$ mit $v(x) = 1 \neq 0 = v(y)$ ist $[\![\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_{v} = 0$.

Dager gilt: $\mathfrak{A} \not\models \phi$.

Für eine Belegung $w$ mit $w(x) = 0 = w(y)$ ist $[\![\neg\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_{v} = 0$.

Daher gilt ebenso: $\mathfrak{A} \not\models \neg\phi$.

# Eigenschaften der Gültigkeit

<u>Beweis von (2):</u>

Es gelte $\mathfrak{A} \models \phi$ und $\mathfrak{A} \models \psi$ für zwei Formeln $\phi$ und $\psi$.

Damit gilt für jede Belegung $v$: $\mathfrak{A} \models_v \phi$ und $\mathfrak{A} \models_v \psi$.

Das bedeutet: $[\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = [\![\psi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = 1$. $\quad (\star)$

Sei $v$ eine beliebige Belegung. Dann gilt:

$$[\![\phi \wedge \psi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = [\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} \cdot [\![\psi]\!]_v^{\mathfrak{A}} \stackrel{(\star)}{=} 1 \cdot 1 = 1$$

Das bedeutet: $\mathfrak{A} \models_v \phi \wedge \psi$.

Da $v$ beliebig gewählt war, gilt: $\mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi$.

# Eigenschaften der Gültigkeit

Gilt hingegen $\mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi$, dann gilt für eine beliebige Belegung $v$:

$$[\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} \geq [\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} \cdot [\![\psi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = [\![\phi \wedge \psi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = 1$$

Also gilt insbesondere auch $\mathfrak{A} \models \phi$.

Analog erhält man auch: $\mathfrak{A} \models \psi$.

Damit wurden beide Richtungen gezeigt. $\square$

# Eigenschaften der Gültigkeit

**Theorem 8**

*Sind* $\phi, \psi$ $\mathfrak{L}$*-Aussagen, d.h.* $\mathsf{FV}(\phi) = \mathsf{FV}(\psi) = \varnothing$*, dann gilt zusätzlich:*

1. *Wenn* $\mathfrak{A} \not\models \phi$*, dann* $\mathfrak{A} \models \neg\phi$*.*
3. *Wenn* $\mathfrak{A} \models \phi \vee \psi$*, dann* $\mathfrak{A} \models \phi$ *oder* $\mathfrak{A} \models \psi$*.*
4. *Wenn mit* $\mathfrak{A} \models \phi$ *auch* $\mathfrak{A} \models \psi$*, dann* $\mathfrak{A} \models \phi \rightarrow \psi$*.*
5. *Wenn* $\mathfrak{A} \models \phi$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{A} \models \psi$*, dann* $\mathfrak{A} \models \phi \leftrightarrow \psi$*.*

# Eigenschaften der Gültigkeit

Beweis von (1):

Es gelte: $\mathfrak{A} \not\models \phi$.

Damit gibt es (mindestens) eine Belegung $w$, so dass: $\mathfrak{A} \not\models_w \phi$.

Also $[\![\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_w = 0$. Damit gilt auch: $[\![\neg\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_w = 1 - [\![\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_w = 1 - 0 = 1$.

Sei $v$ beliebige Belegung.

Da $\mathrm{FV}(\neg\phi) = \mathrm{FV}(\phi) = \varnothing$ folgt mit dem Koinzidenz-Lemma:

$$[\![\neg\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_v = [\![\neg\phi]\!]^{\mathfrak{A}}_w = 1$$

Da $v$ beliebig gewählt, gilt auch: $\mathfrak{A} \models \neg\phi$. $\square$

# Allabschluss

**Definition 9 (Allabschluss)**

Sei $\phi \in \mathfrak{L}$ Formel, so dass $\mathrm{FV}(\phi) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ mit $i_1 < \ldots < i_n$.

Die Aussage $\forall(\phi) \doteq_{\mathsf{def}} \forall x_{i_1} \ldots \forall x_{i_n} \phi \in \mathfrak{L}$ heißt dann der *Allabschluss* von $\phi$.

**Lemma 10 (Allabschluss)**

*Sei $\phi \in \mathfrak{L}$ eine Formel. In jeder $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt:*

$$\mathfrak{A} \models \forall(\phi) \quad \textit{genau dann, wenn} \quad \mathfrak{A} \models \phi.$$

# Allabschluss

Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\forall(\phi) \doteq \forall x_{i_1} \dots \forall x_{i_n} \phi$.

Wir schreiben $\vec{x}$ für $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$.

„$\Leftarrow$“:

Falls $\mathfrak{A} \not\models \forall(\phi)$, dann gibt es Belegung $v$ und ein $\vec{a} \in A^n$
mit $[[\phi]]^{\mathfrak{A}}_{v[\vec{x} \mapsto \vec{a}]} = 0$.

Also wurde mit $v[\vec{x} \mapsto \vec{a}]$ eine Belegung gefunden, unter der $\phi$ mit
0 ausgewertet wurde.

Damit gilt schon: $\mathfrak{A} \not\models \phi$.

# Allabschluss

„$\Rightarrow$“:

Sei $v$ eine beliebige Belegung. Es gilt $v(\vec{x}) = \vec{b}$ für ein $\vec{b} \in A^n$.

Aus $\mathfrak{A} \models \forall(\phi)$ folgt: $\mathfrak{A} \models_v \forall(\phi)$.

Also: $[\![\forall(\phi)]\!]_v^{\mathfrak{A}} = 1$.

Das bedeutet ($n$-fache Auswertung des Allquantors), dass für alle $\vec{a} \in A^n$: $[\![\phi]\!]_{v[\vec{x} \mapsto \vec{a}]}^{\mathfrak{A}} = 1$.

Insbesondere gilt damit auch: $[\![\phi]\!]_{v[\vec{x} \mapsto \vec{b}]}^{\mathfrak{A}} = 1$.

$\square$

# Erfüllbarkeit

**Definition 11 (Erfüllbarkeit)**

Sei $\phi \in \mathfrak{L}$ eine Formel.

1. Eine Formel $\phi$ heißt *erfüllbar* (*konsistent*), falls es eine Struktur $\mathfrak{A}$ gibt, in der $\phi$ gültig ist.
   D.h.: falls $\mathfrak{A} \models \phi$.

   Ansonsten heißt $\phi$ *unerfüllbar*.
2. Eine Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathfrak{L}$ heißt *erfüllbar*, falls es eine Struktur $\mathfrak{A}$ gibt, sodass jede Formel $\phi \in \Gamma$ in $\mathfrak{A}$ gültig ist.
   D.h.: falls $\mathfrak{A} \models \phi$ für jedes $\phi \in \Gamma$.

   Ansonsten heißt $\Gamma$ *unerfüllbar*.