Einführung in die Logik

Vorlesung für Studierende der Philosophie
von
Peter Schroeder-Heister

Skriptum:
Jörn Jörns
Tobias Müller
Thomas Piecha

1996, 2008
Universität Tübingen
Philosophisches Seminar
und
Wilhelm-Schickard-Institut für Informatik

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung **2**

1 Die formale Sprache der Junktorenlogik **3**

2 Semantik der Junktorenlogik **5**

3 Junktorenlogische Normalformen **11**

4 Funktionale Vollständigkeit **14**

5 Analytische Tableaux **17**

6 Die formale Sprache der Quantorenlogik **23**

7 Die Semantik der Quantorenlogik **26**

8 Grundlegende Gesetze der Quantorenlogik **29**

9 Quantorenlogische Tableaux **33**

10 Syllogistik **40**

0 Einleitung

Das vorliegende Skriptum ist eine Kurzfassung meiner Vorlesung zur Einführung in die Logik, die ich seit dem Wintersemester 1995/96 mehrfach an der Philosophischen Fakultät (seit 2001 "Fakultät für Philosophie und Geschichte") der Universität Tübingen gehalten habe. Es enthält in gedrängter Form ihre 'technischen' Kapitel. Diejenigen Teile der Vorlesung, die sich mit den für die Logik relevanten sprachphilosophischen Gegebenheiten befassen, etwa mit der Erwähnung und Verwendung von Ausdrücken, der Wahl der grundlegenden syntaktischen Kategorien, der logischen Form elementarer und zusammengesetzter (insbesondere quantifizierter) Aussagen, und ganz allgemein mit dem Problem der Strukturierung von Aussagen (einschließlich Formalisierungsübungen) – allesamt unverzichtbare Bestandteile einer an Studierende der Philosophie gerichteten Einführung – sind nicht Bestandteil des Skriptums. Hierzu verweise ich auf die ersten beiden Kapitel des Lehrbuchs von Peter Hinst: *Logische Propädeutik* (München 1974).

Im Aufbau der Vorlesung habe ich mich der von Walter Hoering etablierten Tübinger Tradition angeschlossen, das Smullyansche Tableauverfahren als Grundlage des junktoren- und quantorenlogischen Beweisbegriffs zu wählen. Es bietet sich aufgrund seiner intuitiven Plausibilität an, hat allerdings den Nachteil, daß die syntaktische Konzeption eines 'Kalküls' als eines formalen Systems nur eingeschränkt vermittelt wird.

Gelegentlich habe ich zwischen Junktoren- und Quantorenlogik zwei Vorlesungen über die aristotelische Syllogistik eingefügt, da hier die historisch erste Form einer Axiomatisierung logischen Schließens vorliegt, die über mehr als 2000 Jahre als paradigmatisches Beispiel gedient hat. Dementsprechend enthält das Skriptum jetzt ein abschließendes Kapitel über die Syllogistik.

Peter Schroeder-Heister

1 Die formale Sprache der Junktorenlogik

Gegeben sei eine Menge $\mathcal{A}$ von Aussagesymbolen ("propositional letters", "propositional variables", "sentential letters"). In der Regel nimmt man an, daß $\mathcal{A}$ abzählbar unendlich ist.
Wir werden meistens als Standardmenge

$$\mathcal{A} = \{A, B, C, D, \ldots, A_1, A_2, \ldots, A'_1, A'_2, \ldots\}$$

verwenden.
Gebräuchlich ist auch $\{p, q, r, \ldots, p_1, q_1, r_1, \ldots\}$.

Definition 1.1
Die *junktorenlogischen Formeln* über $\mathcal{A}$ sind wie folgt definiert:

(i) Jedes Aussagesymbol in $\mathcal{A}$ ist eine junktorenlogische Formel.

(ii) $\top$ und $\bot$ sind Formeln ("verum" / "falsum", "das Wahre" / "das Falsche").

(iii) Wenn ϕ eine Formel ist, dann auch $\neg\phi$.

(iv) Wenn ϕ und ψ Formeln sind, dann auch $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$.

Bemerkung.
Diese Definition ist eine Aussage der Metasprache. "ϕ" und "ψ" sind metasprachliche Zeichen, um über objektsprachliche Formeln zu reden.

Beispiele.
(i) Sei $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, \ldots\}$. Dann sind folgende Ausdrücke Formeln:

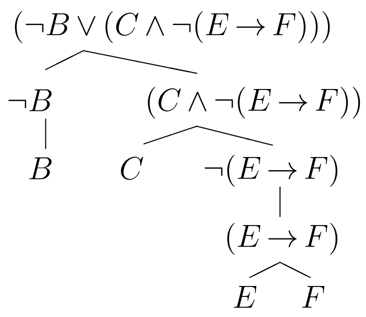
$$(A \rightarrow B)$$
$$(A \rightarrow \top)$$
$$(\bot \rightarrow A)$$
$$(\neg A \rightarrow (B \vee C))$$
$$(\neg B \vee (C \wedge \neg(E \rightarrow F)))$$

(ii) $A \rightarrow B$ ist hier keine Formel, da die Außenklammern fehlen.

(iii) Sei $\mathcal{A} = \{\text{Otto ist dumm}, \text{Elke ist fleißig}\}$. Dann sind folgende Ausdrücke Formeln:

$$(\text{Otto ist dumm} \rightarrow \top)$$
$$((\neg\text{Elke ist fleißig} \rightarrow \text{Otto ist dumm}) \vee \text{Otto ist dumm})$$

Aufgrund der Definition können wir Ableitungsbäume gemäß den Bildungsregeln angeben:



Regeln zur Klammerersparnis:

(i) Außenklammern können wegfallen.

(ii) $\wedge$ und $\vee$ binden stärker als $\to$ und $\leftrightarrow$.

(iii) $(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n)$ steht für $(\ldots((\phi_1 \wedge \phi_2) \wedge \phi_3) \ldots) \wedge \phi_n)$
$(\phi_1 \vee \phi_2 \vee \ldots \vee \phi_n)$ steht für $(\ldots((\phi_1 \vee \phi_2) \vee \phi_3) \ldots) \vee \phi_n)$
(Linksklammerung)

Beispiele.

(i) $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \to A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4$
steht für
$((((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \wedge A_4) \to (((A_1 \vee A_2) \vee A_3) \vee A_4))$

(ii) $A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3 \wedge A_4) \wedge A_5$
steht für
$((A_1 \wedge ((A_2 \wedge A_3) \wedge A_4)) \wedge A_5)$

Die Formel $((A \vee B) \vee (A \vee C))$ kann abgekürzt werden zu $A \vee B \vee (A \vee C)$, aber nicht zu $A \vee B \vee A \vee C$. Letztere Formel steht vielmehr für $(((A \vee B) \vee A) \vee C)$. Aus der durch Klammerersparnis abgekürzten Schreibweise muß *eindeutig* hervorgehen, welche Formel im Sinne von Definition 1.1 gemeint ist. Wir werden zwar zeigen, daß $((A \vee B) \vee (A \vee C))$ und $(((A \vee B) \vee A) \vee C)$ inhaltlich (semantisch) gleichwertig sind. Das ändert jedoch nichts daran, daß es sich um syntaktisch verschiedene Formeln handelt.

2 Semantik der Junktorenlogik

Wir formulieren eine Semantik für junktorenlogische Formeln, in der wir Aussagesymbole durch die Wahrheitswerte w oder f interpretieren. Diese Semantik ist also nur auf Aussagen anwendbar, die junktorenlogisch aus atomaren Aussagen zusammengesetzt sind, die entweder wahr oder falsch sind, d. h. einen Wahrheitswert haben (*Wahrheitsdefinitheit*). Diese Einschränkung soll hier nicht philosophisch verteidigt werden. Sie führt in der Tat zu gewissen Problemen, insbesondere bei der Behandlung der Subjunktion. In weiterführenden Veranstaltungen, die sogenannte “nichtklassische” Logiken behandeln, kommen diese Probleme zur Sprache.

Ferner gehen wir davon aus, daß der Wahrheitswert einer komplexen Aussage eine Funktion der Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen ist (*Wahrheitsfunktionalität*). Auch diese Einschränkung wird aus Einfachheitsgründen vorgenommen. Das Beispiel

$$\boxed{\text{Es ist notwendig, daß } \boxed{\text{jeder Gegenstand mit sich selbst identisch ist. }_{\mathrm{w}}}\ _{\mathrm{w}}}$$

$$\boxed{\text{Es ist notwendig, daß } \boxed{\text{Konstanz am Bodensee liegt. }_{\mathrm{w}}}\quad _{\mathrm{f}}}$$

zeigt, daß es Aussagen gibt, bei denen die Ersetzung einer wahren Teilaussage durch eine andere wahre Teilaussage den Wahrheitswert der Gesamtaussage verändert. Auch dies ist Thema weiterführender Veranstaltungen (z. B. zur Modallogik). Hier nehmen wir an: Von den inhaltlichen (deskriptiven) Bestandteilen einer Aussage interessiert nur der Wahrheitswert.

Im folgenden sei $\mathcal{A}$ immer die Menge $\{A, B, C, \ldots, A_1, A_2, \ldots, A'_1, A'_2, \ldots\}$ von Aussagesymbolen.

Definition 2.1
Eine *Bewertung* $\mathcal{I}$ ist eine Funktion, die jedem Aussagesymbol einen der Wahrheitswerte w oder f zuordnet: $\quad \mathcal{I} : \mathcal{A} \to \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$.

Falls ϕ zu $\mathcal{A}$ gehört, ist ϕ *wahr unter* $\mathcal{I}$, falls $\mathcal{I}(\phi) = \mathrm{w}$, und *falsch unter* $\mathcal{I}$, falls $\mathcal{I}(\phi) = \mathrm{f}$.

$$\begin{array}{rl}
\top \text{ ist } \textit{wahr unter } \mathcal{I}. & \\[1em]
\bot \text{ ist } \textit{falsch unter } \mathcal{I}. & \\[1em]
\neg\phi \text{ ist } \textit{wahr unter } \mathcal{I}, & \text{falls } \phi \textit{ falsch unter } \mathcal{I} \text{ ist,} \\
\textit{falsch unter } \mathcal{I}, & \text{falls } \phi \textit{ wahr unter } \mathcal{I} \text{ ist.} \\[1em]
\phi \wedge \psi \text{ ist } \textit{wahr unter } \mathcal{I}, & \text{falls } \phi \text{ und } \psi \textit{ wahr unter } \mathcal{I} \text{ sind,} \\
\textit{falsch unter } \mathcal{I} & \text{sonst.} \\[1em]
\phi \vee \psi \text{ ist } \textit{wahr unter } \mathcal{I}, & \text{falls } \phi \textit{ wahr unter } \mathcal{I} \text{ oder } \psi \textit{ wahr unter } \mathcal{I} \\
 & \text{oder beides der Fall ist,} \\
\textit{falsch unter } \mathcal{I} & \text{sonst.}
\end{array}$$

$\phi \rightarrow \psi$ ist *wahr unter* $\mathcal{I}$,	falls es nicht der Fall ist, daß ϕ *wahr unter* $\mathcal{I}$ und ψ *falsch unter* $\mathcal{I}$ ist,
falsch unter $\mathcal{I}$	sonst.
$\phi \leftrightarrow \psi$ ist *wahr unter* $\mathcal{I}$,	falls ϕ und ψ beide *wahr unter* $\mathcal{I}$ oder beide *falsch unter* $\mathcal{I}$ sind,
falsch unter $\mathcal{I}$	sonst.

Andere Schreibweisen:
$\mathcal{I} \models \phi$: ϕ ist wahr unter $\mathcal{I}$.
$\mathcal{I} \not\models \phi$: ϕ ist falsch unter $\mathcal{I}$.

Ausdruck der Wahrheitswertabhängigkeit durch Wahrheitstafeln:

Negation

ϕ	$\neg\phi$
w	f
f	w

Konjunktion

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Adjunktion

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Subjunktion

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Bisubjunktion

ϕ	ψ	$\phi \leftrightarrow \psi$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Grenzfälle

$\top$
w

$\bot$
f

Definition 2.2

(i) ϕ heißt *allgemeingültig* oder eine *Tautologie*, wenn ϕ unter allen Bewertungen wahr ist. Schreibweise: $\models \phi$

(ii) ϕ heißt *kontradiktorisch* oder eine *Kontradiktion*, wenn ϕ unter keiner Bewertung wahr ist.

(iii) ϕ heißt *konsistent*, wenn ϕ unter mindestens einer Bewertung wahr ist.

(iv) ϕ heißt *kontingent*, wenn ϕ weder allgemeingültig noch kontradiktorisch ist.

Wahrheitstafelverfahren

Beispiele.

A	B	A	$\vee$	B	$\to$	A
w	w		w		**w**	
w	f		w		**w**	
f	w		w		**f**	
f	f		f		**w**	

konsistent, kontingent

A	B	A	$\wedge$	B	$\to$	A
w	w		w		**w**	
w	f		f		**w**	
f	w		f		**w**	
f	f		f		**w**	

allgemeingültig, konsistent

A	$\neg$	$\neg$	A	$\to$	A
w	w	f		**w**	
f	f	w		**w**	

Tautologie, konsistent

	$\top$	$\to$	$\bot$
	w	**f**	f

kontradiktorisch

A	B	A	$\to$	$(\neg B$	$\to$	$A)$
w	w		**w**	f	w	
w	f		**w**	w	w	
f	w		**w**	f	w	
f	f		**w**	w	f	

Tautologie, konsistent

Definition 2.3

Aus $\psi_1, \ldots, \psi_n$ *folgt logisch* ϕ (im Sinne der Junktorenlogik), falls ϕ unter allen Bewertungen wahr ist, unter denen auch $\psi_1, \ldots, \psi_n$ wahr sind.

Schreibweise: $\underbrace{\psi_1, \ldots, \psi_n}_{\text{Prämissen}} \models \underbrace{\phi}_{\text{Konklusion}}$

Formale Definition:

$\psi_1, \ldots, \psi_n \models \phi \iff_{\text{def}}$ Für jede Bewertung $\mathcal{I}$ gilt:
Wenn $\mathcal{I} \models \psi_1, \ldots, \mathcal{I} \models \psi_n$, dann $\mathcal{I} \models \phi$.

$\psi \mathrel{=\!|\!\models} \phi \iff_{\text{def}} \psi \models \phi$ und $\phi \models \psi$ (logische Äquivalenz)

Wahrheitstafelverfahren bei Folgerungsbeziehungen

Beispiele.

(i) $A \vee B, \neg A \models B$

	A	B	$A \vee B$	$\neg A$	B	$\models$
	w	w	w	f	w	
	w	f	w	f	f	
→	f	w	w	w	w	✓
	f	f	f	w	f	

gilt!

(ii) $A \vee B, A \models B$

	A	B	$A \vee B$	A	B	$\models$
→	w	w	w	w	w	✓
→	w	f	w	w	f	✗
	f	w	w	f	w	
	f	f	f	f	f	

gilt nicht!

Satz 2.4
$\psi_1, \ldots, \psi_n \models \phi$ genau dann, wenn $\models \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \phi$.

Beweis.
Zum einen muß bewiesen werden, daß wenn $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \phi$, dann $\models \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \phi$ ("$\Longrightarrow$"), zum anderen, daß wenn $\models \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \phi$, dann $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \phi$ ("$\Longleftarrow$").

"$\Longrightarrow$": $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \phi$ wird vorausgesetzt.
Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Bewertung, dann gibt es zwei Fälle:

1. Fall: Sei $\mathcal{I}(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) = \text{w}$.
Nach Definition der Konjunktion ist dann $\mathcal{I}(\psi_1) = \ldots = \mathcal{I}(\psi_n) = \text{w}$, und nach Voraussetzung ist dann $\mathcal{I}(\phi) = \text{w}$.
Mit der Definition der Subjunktion folgt dann $\mathcal{I}(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \phi) = \text{w}$.

2. Fall: Sei $\mathcal{I}(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) = \text{f}$.
Nach Definition der Subjunktion ist dann $\mathcal{I}(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \phi) = \text{w}$.

In beiden Fällen ist $\mathcal{I}(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \phi) = \text{w}$, und da $\mathcal{I}$ beliebig, ist $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \phi$ allgemeingültig, d. h. $\models \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \phi$.

"$\Longleftarrow$": $\models \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \phi$ wird vorausgesetzt.
Sei $\mathcal{I}$ eine Bewertung, so daß $\mathcal{I}(\psi_1) = \ldots = \mathcal{I}(\psi_n) = \text{w}$. Nach Definition der Konjunktion ist dann $\mathcal{I}(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) = \text{w}$. Nach Voraussetzung kann es nicht sein, daß zwar $\mathcal{I}(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) = \text{w}$ aber $\mathcal{I}(\phi) = \text{f}$, also muß $\mathcal{I}(\phi) = \text{w}$ sein. □

Korollar 2.5
Insbesondere gilt: $\psi \models \phi$ genau dann, wenn $\models \psi \rightarrow \phi$.

Wichtige Tautologien, Folgerungen bzw. Äquivalenzen

(Genauer gesagt: Schemata, da ϕ, ψ, π für beliebige Formeln stehen)

$$\left.\begin{array}{l}\phi \wedge \psi \dashv\models \psi \wedge \phi \\ \phi \vee \psi \dashv\models \psi \vee \phi\end{array}\right\} \text{Kommutativität von } \wedge \text{ und } \vee$$

$$\left.\begin{array}{l}(\phi \wedge \psi) \wedge \pi \dashv\models \phi \wedge (\psi \wedge \pi) \\ (\phi \vee \psi) \vee \pi \dashv\models \phi \vee (\psi \vee \pi)\end{array}\right\} \text{Assoziativität von } \wedge \text{ und } \vee$$

$$\left.\begin{array}{l}(\phi \wedge \psi) \vee \phi \dashv\models \phi \\ (\phi \vee \psi) \wedge \phi \dashv\models \phi\end{array}\right\} \text{Verschmelzung}$$

$$\left.\begin{array}{l}(\phi \wedge \psi) \vee \pi \dashv\models (\phi \vee \pi) \wedge (\psi \vee \pi) \\ (\phi \vee \psi) \wedge \pi \dashv\models (\phi \wedge \pi) \vee (\psi \wedge \pi)\end{array}\right\} \text{Distributivität von } \wedge \text{ und } \vee$$

$$\left.\begin{array}{l}\phi \wedge \top \dashv\models \phi \\ \phi \vee \bot \dashv\models \phi\end{array}\right\} \text{Neutralität von } \top \text{ und } \bot$$

$$\begin{array}{ll}\phi \wedge \neg\phi \dashv\models \bot & \text{insbesondere } \models \neg(\phi \wedge \neg\phi) \\ \phi \vee \neg\phi \dashv\models \top & \text{insbesondere } \models \phi \vee \neg\phi\end{array}$$

Dies sind Gesetze, die in einer beliebigen *Booleschen Algebra* gelten. Mengentheoretische Analoga erhält man über folgende Korrespondenz:

$\wedge$	$\sim$	$\cap$	(Schnitt)
$\vee$	$\sim$	$\cup$	(Vereinigung)
$\neg$	$\sim$	$\setminus$	(Komplement)
$\bot$	$\sim$	$\emptyset$	(Leere Menge)
$\top$	$\sim$	$\bigvee$	(Allmenge)
$\dashv\models$	$\sim$	$=$	(Gleichheit)

Weitere Gesetze:

$\neg\neg\phi \dashv\models \phi$ doppelte Negation

$$\left.\begin{array}{l}\neg(\phi \wedge \psi) \dashv\models \neg\phi \vee \neg\psi \\ \neg(\phi \vee \psi) \dashv\models \neg\phi \wedge \neg\psi\end{array}\right\} \text{De Morgansche Gesetze}$$

$$\left.\begin{array}{l}\phi \wedge \phi \dashv\models \phi \\ \phi \vee \phi \dashv\models \phi\end{array}\right\} \text{Idempotenz}$$

Mit Subjunktion:

$\phi \to \psi, \phi \models \psi$ modus (ponendo) ponens

$\phi \to \psi, \neg\psi \models \neg\phi$ modus (tollendo) tollens

$\phi \to \bot \dashv\models \neg\phi$

$\top \to \phi \mathrel{=\mkern-6mu|\mkern-6mu\models} \phi$

$\neg\phi \to \bot \mathrel{=\mkern-6mu|\mkern-6mu\models} \phi$

$\phi \to \psi, \psi \to \pi \models \phi \to \pi$ Transitivität

$\phi \vee \psi \to \pi \mathrel{=\mkern-6mu|\mkern-6mu\models} (\phi \to \pi) \wedge (\psi \to \pi)$

$\phi \wedge \psi \to \pi \mathrel{=\mkern-6mu|\mkern-6mu\models} (\phi \to \pi) \vee (\psi \to \pi)$

$\phi \to \psi \wedge \pi \mathrel{=\mkern-6mu|\mkern-6mu\models} (\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \pi)$

$\phi \to \psi \vee \pi \mathrel{=\mkern-6mu|\mkern-6mu\models} (\phi \to \psi) \vee (\phi \to \pi)$

Eine Auflistung dieser und anderer wichtiger junktorenlogischer Gesetze findet sich in diversen Lehrbüchern, z. B. bei Oberschelp: *Logik für Philosophen*, Mannheim 1992, S. 56 f.

3 Junktorenlogische Normalformen

Definition 3.1

(i) ϕ ist *unmittelbare Teilformel* von $\neg\phi$.

(ii) ϕ und ψ sind *unmittelbare Teilformeln* von $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \psi$, $\phi \leftrightarrow \psi$.

(iii) ϕ ist *Teilformel* von ψ, wenn ϕ mit ψ identisch ist oder Teilformel einer unmittelbaren Teilformel von ψ ist.

Theorem 3.2 (Ersetzungstheorem)
Angenommen, ϕ kommt in ψ als Teilformel vor. Es entstehe ψ' aus ψ durch Ersetzung dieses Vorkommens von ϕ durch ϕ'. Falls $\phi \mathrel{=\!\mid\!\models} \phi'$ gilt, dann gilt auch $\psi \mathrel{=\!\mid\!\models} \psi'$.

Beispiel.
Da $A \wedge B \mathrel{=\!\mid\!\models} B \wedge A$, ist auch $(A \wedge B) \vee C \mathrel{=\!\mid\!\models} (B \wedge A) \vee C$.

Beweis.
Da $\phi \mathrel{=\!\mid\!\models} \phi'$, ist die Hauptspalte der Wahrheitstafel für ϕ mit der für ϕ' identisch. Also ändert sich an der Hauptspalte für ψ nichts, wenn wir ϕ durch ϕ' ersetzen. Also $\psi \mathrel{=\!\mid\!\models} \psi'$. □

Adjunktive Normalformen

Beispiel.
Betrachte folgende Wahrheitstafel einer Formel ϕ:

ψ_1	ψ_2	ψ_3	ϕ			
w	w	w	w		$(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3)$	
w	w	f	f			
w	f	w	w	$\vee$	$(\psi_1 \wedge \neg\psi_2 \wedge \psi_3)$	
w	f	f	f			adjunktive Normalform
f	w	w	f			
f	w	f	f			
f	f	w	w	$\vee$	$(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2 \wedge \psi_3)$	
f	f	f	f			

Es gilt: $\phi \mathrel{=\!\mid\!\models} (\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3) \vee (\psi_1 \wedge \neg\psi_2 \wedge \psi_3) \vee (\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2 \wedge \psi_3)$

Dieses Verfahren heißt Konstruktion einer adjunktiven Normalform zu ϕ.

Konkretes Beispiel.

A	B	C	$A \vee B \to C$		
w	w	w	w		$(A \wedge B \wedge C)$
w	w	f	f		
w	f	w	w	$\vee$	$(A \wedge \neg B \wedge C)$
w	f	f	f		
f	w	w	w	$\vee$	$(\neg A \wedge B \wedge C)$
f	w	f	f		
f	f	w	w	$\vee$	$(\neg A \wedge \neg B \wedge C)$
f	f	f	w	$\vee$	$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

Grenzfall: Keine Aussagesymbole

$(\bot$	$\to$	$\bot)$	$\to$	$(\top$	$\to$	$\top)$	
f	w	f	**w**	w	w	w	$\top$

$\top$	$\to$	$\bot$	
w	**f**	f	$\bot$

Definition 3.3

(i) Ein *Literal* ist ein Aussagesymbol oder dessen Negation.

(ii) Eine *Elementarkonjunktion* ist eine Konjunktion von Literalen.

(iii) Eine *Elementaradjunktion* ist eine Adjunktion von Literalen.

(iv) Eine *adjunktive Normalform* ist eine Adjunktion von Elementarkonjunktionen.

(v) Eine *konjunktive Normalform* ist eine Konjunktion von Elementaradjunktionen.

(vi) Grenzfälle: $\top$ ist die leere Konjunktion, $\bot$ die leere Adjunktion.

Satz 3.4

Zu jeder Formel läßt sich eine äquivalente adjunktive Normalform sowie konjunktive Normalform angeben. Diese heißt eine adjunktive, bzw. konjunktive Normalform dieser Aussage.

Beweis.

Die aus der Wahrheitstafel für ϕ gebildete adjunktive Normalform ϕ' hat dieselbe Hauptspalte wie ϕ. Also gilt: $\phi \mathrel{=\!\mid\!\models} \phi'$

Zur Konstruktion einer konjunktiven Normalform bilden wir eine adjunktive Normalform zu $\neg\phi$. D. h.

$$\neg\phi \mathrel{=\!\mid\!\models} (\phi_{11} \wedge \ldots \wedge \phi_{1n_1}) \vee \ldots \vee (\phi_{j1} \wedge \ldots \wedge \phi_{jn_j})$$

mit Literalen ϕ_{ij}.

Durch Negation auf beiden Seiten erhält man:

$$\neg\neg\phi \mathrel{=\!\mid\!\models} \neg((\phi_{11} \wedge \ldots \wedge \phi_{1n_1}) \vee \ldots \vee (\phi_{j1} \wedge \ldots \wedge \phi_{jn_j}))$$

Nach Wegstreichen der doppelten Negation auf der linken Seite erhält man

$$\phi \mathrel{=\!\mid\!\models} \neg((\phi_{11} \wedge \ldots \wedge \phi_{1n_1}) \vee \ldots \vee (\phi_{j1} \wedge \ldots \wedge \phi_{jn_j}))$$

Die rechte Seite wird mit De Morgan umgeformt zu

$$\phi \mathrel{=\!\mid\!\models} \neg(\phi_{11} \wedge \ldots \wedge \phi_{1n_1}) \wedge \ldots \wedge \neg(\phi_{j1} \wedge \ldots \wedge \phi_{jn_j})$$

und weiter zu

$$\phi \mathrel{=\!\mid\!\models} (\neg\phi_{11} \vee \ldots \vee \neg\phi_{1n_1}) \wedge \ldots \wedge (\neg\phi_{j1} \vee \ldots \vee \neg\phi_{jn_j})$$

Nach Wegstreichen doppelter Negationen bei jenen Literalen ϕ_{ij}, die negierte Aussagesymbole sind, liegt dann die konjunktive Normalform zu ϕ vor. (Achtung: implizit Ersetzungstheorem benutzt.) □

Beispiel.
Konstruktion einer konjunktiven Normalform zu $A \vee B \rightarrow C$:

1. Adjunktive Normalform zu $\neg(A \vee B \rightarrow C)$ konstruieren:

A	B	C	$\neg(A \vee B \rightarrow C)$		
w	w	w	f		
w	w	f	w		$(A \wedge B \wedge \neg C)$
w	f	w	f		
w	f	f	w	$\vee$	$(A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
f	w	w	f		
f	w	f	w	$\vee$	$(\neg A \wedge B \wedge \neg C)$
f	f	w	f		
f	f	f	f		

2. Negation der adjunktiven Normalform zu $\neg(A \vee B \rightarrow C)$ mit De Morgan in konjunktive Normalform umformen:

$$\begin{aligned} A \vee B \rightarrow C &\mathrel{=\!\mid\!\models} \neg((A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)) \\ &\mathrel{=\!\mid\!\models} \neg(A \wedge B \wedge \neg C) \wedge \neg(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \wedge \neg(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \\ &\mathrel{=\!\mid\!\models} (\neg A \vee \neg B \vee \neg\neg C) \wedge (\neg A \vee \neg\neg B \vee \neg\neg C) \wedge (\neg\neg A \vee \neg B \vee \neg\neg C) \\ &\mathrel{=\!\mid\!\models} (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \end{aligned}$$

4 Funktionale Vollständigkeit

Ein n-stelliger Junktor J ist ein Operator der grammatischen Kategorie

$$\frac{s}{\underbrace{s \ldots s}_{n\text{-mal}}}$$

Eine Formel mit Hauptjunktor J hat die Form $J(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ für Formeln $\phi_1, \ldots, \phi_n$.
Statt $\neg(\phi)$ haben wir $\neg\phi$ geschrieben.
Statt $\wedge(\phi_1, \phi_2)$: $(\phi_1 \wedge \phi_2)$ (Infixnotation).

Wir betrachten jetzt beliebige Junktoren J.
Die Semantik von J wird dadurch gegeben, daß man festlegt, wann J unter einer Bewertung wahr ist in Abhängigkeit von den Argumenten von J, d. h. durch eine Wahrheitstafel.

Beispiel.

ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	$J(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$
w	w	w	w
w	w	f	f
w	f	w	f
w	f	f	f
f	w	w	f
f	w	f	f
f	f	w	f
f	f	f	w

J läßt sich also so ausdrücken: $J(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \mathrel{=\!\!|\!\!\models} (\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3) \vee (\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2 \wedge \neg\phi_3)$

Satz 4.1
Jeder Junktor läßt sich durch $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\top$, $\perp$ definieren.

Beweis.
Bilde eine adjunktive oder konjunktive Normalform. □

Satz 4.2

(i) Jeder Junktor läßt sich durch $\wedge$, $\neg$ definieren.

(ii) Jeder Junktor läßt sich durch $\vee$, $\neg$ definieren.

(iii) Jeder Junktor läßt sich durch $\rightarrow$, $\neg$ definieren.

(iv) Jeder Junktor läßt sich durch $\rightarrow$, $\perp$ definieren.

Man sagt auch: $\{\wedge, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, \perp\}$ sind wahrheitsfunktional (kurz: funktional) vollständige Mengen von Junktoren.

Beweis.

(i) $\phi \vee \psi \dashv\models \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$
$\top \dashv\models \neg(\phi \wedge \neg\phi)$
$\bot \dashv\models \phi \wedge \neg\phi$
Damit folgt die Behauptung aus Satz 4.1

(ii) $\phi \wedge \psi \dashv\models \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$
$\top \dashv\models \phi \vee \neg\phi$
$\bot \dashv\models \neg(\phi \vee \neg\phi)$
Damit folgt die Behauptung aus Satz 4.1

(iii) $\phi \vee \psi \dashv\models \neg\phi \to \psi$
$\phi \wedge \psi \dashv\models \neg(\phi \to \neg\psi)$
$\top \dashv\models \phi \to \phi$
$\bot \dashv\models \neg(\phi \to \phi)$
Damit folgt die Behauptung aus Satz 4.1

(iv) $\neg\phi \dashv\models \phi \to \bot$
$\top \dashv\models \bot \to \bot$
Damit folgt die Behauptung aus (iii). □

Bemerkung.

In den Fällen (i)–(iii) ist zu beachten, daß für die Definition von $\top$ und $\bot$ ein beliebiges Aussagesymbol ϕ im definiens zur Verfügung stehen muß. Verlangt man also bei der Definierbarkeit, daß im definiens keine neuen Aussagensymbole gegenüber dem definiendum eingeführt werden, so sind $\top$ und $\bot$ nicht durch $\{\wedge, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$ oder $\{\to, \neg\}$ definierbar.

Definition 4.3

Die Negatkonjunktion $\downarrow$ ist definiert durch:

ϕ	ψ	$\phi \downarrow \psi$	
w	w	f	
w	f	f	"weder ... noch ..."
f	w	f	"nicht eines von beiden"
f	f	w	

Offensichtlich gilt: $\phi \downarrow \psi \dashv\models \neg(\phi \vee \psi)$ ("Negation der Adjunktion", "NOR")
$\dashv\models \neg\phi \wedge \neg\psi$ ("Konjunktion der Negate")

Weitere Bezeichnungen: "Peircescher Junktor" (C. S. Peirce, 1880, publ. 1933), "Shefferscher Strich" (H. M. Sheffer, 1913)

Satz 4.4

Mit der Negatkonjunktion läßt sich jeder Junktor definieren.

Beweis.
Die Menge $\{\neg, \wedge, \vee\}$ ist wahrheitsfunktional vollständig und es gilt:

(i) für die Negation: $\neg\phi \dashv\models \phi \downarrow \phi$

(ii) für die Adjunktion: $\phi \vee \psi \dashv\models \neg(\phi \downarrow \psi) \dashv\models (\phi \downarrow \psi) \downarrow (\phi \downarrow \psi)$

(iii) für die Konjunktion: $\phi \wedge \psi \dashv\models \neg\phi \downarrow \neg\psi \dashv\models (\phi \downarrow \phi) \downarrow (\psi \downarrow \psi)$ □

Bemerkung.
Für $\top$ und $\bot$ gilt das nur mit der in der Bemerkung nach Satz 4.2 erwähnten Einschränkung.

Beispiel.
Darstellung des Beispieljunktors $J(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ durch die Negatkonjunktion, ausgehend von der adjunktiven Normalform:

$$\begin{aligned}
J(\phi_1, \phi_2, \phi_3) &\dashv\models (\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3) \vee (\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2 \wedge \neg\phi_3) \\
&\dashv\models (\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3) \vee ((\phi_1 \downarrow \phi_1) \wedge (\phi_2 \downarrow \phi_2) \wedge (\phi_3 \downarrow \phi_3)) \\
&\dashv\models (((\phi_1 \downarrow \phi_1) \downarrow (\phi_2 \downarrow \phi_2)) \wedge \phi_3) \vee ((\phi_1 \downarrow \phi_1) \wedge (\phi_2 \downarrow \phi_2) \wedge (\phi_3 \downarrow \phi_3)) \\
&\dashv\models \underbrace{((((\phi_1 \downarrow \phi_1) \downarrow (\phi_2 \downarrow \phi_2)) \downarrow ((\phi_1 \downarrow \phi_1) \downarrow (\phi_2 \downarrow \phi_2))) \downarrow (\phi_3 \downarrow \phi_3))}_{\alpha} \\
&\qquad \vee \underbrace{(((\phi_1 \downarrow \phi_2) \downarrow (\phi_1 \downarrow \phi_2)) \downarrow \phi_3)}_{\beta} \\
&\dashv\models \neg(\alpha \downarrow \beta) \dashv\models (\alpha \downarrow \beta) \downarrow (\alpha \downarrow \beta)
\end{aligned}$$

Man beachte, daß $\downarrow$ nicht assoziativ ist, d. h. es gilt *nicht* notwendigerweise:

$$(\phi_1 \downarrow \phi_2) \downarrow \phi_3 \dashv\models \phi_1 \downarrow (\phi_2 \downarrow \phi_3)$$

Die zu $\downarrow$ duale Negatadjunktion $\uparrow$, die man ebenfalls als "Shefferschen Strich" bezeichnet, wird in den Übungen behandelt. Für den historischen Zusammenhang vergleiche die Artikel "Negatadjunktion", "Negatkonjunktion", "Peircescher Junktor" und "Shefferscher Strich" in der *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie* (hrsg. von Jürgen Mittelstraß, Mannheim bzw. Stuttgart 1984–1996).

5 Analytische Tableaux

Die Wahrheitstafelmethode erlaubt die semantische Prüfung von Formeln durch Betrachtung aller Wahrheitswertverteilungen (Bewertungen) für Aussagesymbole. Ein anderes Verfahren besteht in der systematischen Suche nach Gegenbeispielen mit Hilfe von “analytischen Tableaux”. Dieses Verfahren wurde von Raymond M. Smullyan entwickelt (*First-Order Logic*, 1968, 1995). Es erlaubt, im Rahmen der anschaulichen Entwicklung einer Formeltafel (eines Tableaus) immer dann ein Gegenbeispiel zu einer Formel (d. h. eine Bewertung, unter der sie falsch wird) zu erzeugen, wenn es ein Gegenbeispiel gibt. Umgekehrt gestattet es damit, aus der Nichterzeugbarkeit eines Gegenbeispiels auf die Allgemeingültigkeit der Formel zu schließen. Dieser Ansatz ist auch brauchbar in Fällen, in denen die Wahrheitstafelmethode versagt (Quantorenlogik).

Beispiele.

(i) Tableau für $A \land B \to A$

$$\begin{array}{lcl}
1. & \text{f } A \land B \to A & \\
2. & \text{w } A \land B & (1) \\
3. & \text{f } A & (1) \\
4. & \text{w } A & (2) \\
5. & \underline{\text{w } B} & (2) \\
 & 3 \mathsf{~x~} 4 &
\end{array}$$

(ii) Tableau für $A \to \neg B \lor A$

$$\begin{array}{lcl}
1. & \text{f } A \to \neg B \lor A & \\
2. & \text{w } A & (1) \\
3. & \text{f } \neg B \lor A & (1) \\
4. & \text{f } \neg B & (3) \\
5. & \underline{\text{f } A} & (3) \\
 & 2 \mathsf{~x~} 5 &
\end{array}$$

(iii) Tableau für $\neg(A \lor B) \to \neg A \land \neg B$

$$\begin{array}{lcl|cl}
1. & \multicolumn{4}{c}{\text{f } \neg(A \lor B) \to \neg A \land \neg B} \\
2. & \multicolumn{3}{c}{\text{w } \neg(A \lor B)} & (1) \\
3. & \multicolumn{3}{c}{\text{f } \neg A \land \neg B} & (1) \\
4. & \multicolumn{3}{c}{\text{f } A \lor B} & (2) \\
5. & \multicolumn{3}{c}{\text{f } A} & (4) \\
6. & \multicolumn{3}{c}{\text{f } B} & (4) \\
7. & \text{f } \neg A & (3) & \text{f } \neg B & (3) \\
8. & \underline{\text{w } A} & (7) & \underline{\text{w } B} & (7) \\
 & 5 \mathsf{~x~} 8 & & 6 \mathsf{~x~} 8 &
\end{array}$$

(iv) Tableau für $A \lor B \to A$

$$\begin{array}{lcl|cl}
1. & \multicolumn{4}{c}{\text{f } A \lor B \to A} \\
2. & \multicolumn{3}{c}{\text{w } A \lor B} & (1) \\
3. & \multicolumn{3}{c}{\text{f } A} & (1) \\
4. & \underline{\text{w } A} & (3) & \underline{\text{w } B} & (2) \\
 & 3 \mathsf{~x~} 4 & & \circ &
\end{array}$$

Leseweise

Links am Rand sind die Zeilen fortlaufend durchnummeriert. Die oberste Formel ist diejenige, zu der ein Gegenbeispiel gesucht wird, bzw. die man versucht, dadurch zu begründen, daß man ihr Gegenteil zum Widerspruch führt. Daher ist sie mit f signiert. Rechts am Rand steht jeweils in Klammern die Zeilennummer, *aus der* sich die gegenwärtige Zeile durch Anwendung einer Regel ergibt. Der senkrechte Strich trennt Zweige des Tableaus. Der waagerechte Strich am Ende eines Zweiges wertet ihn aus:

$n \mathsf{~x~} m$ besagt, daß in diesem Zweig zwischen der Zeile n und der Zeile m ein Widerspruch besteht, dieser Zweig also kein Gegenbeispiel liefert.

○ besagt, daß in diesem Zweig kein Widerspruch auftritt, obwohl alle nichtatomaren signierten Formeln ausgewertet worden sind, d. h., daß dieser Zweig ein Gegenbeispiel liefert.

Zum Beispiel wird im dritten Tableau die Formel $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$ dadurch bewiesen, daß die Annahme, sie sei falsch, in allen Zweigen zu einem Widerspruch geführt wird. Im linken Zweig besteht ein Widerspruch zwischen den Zeilen 5 und 8, im rechten Zweig zwischen den Zeilen 6 und 8.

Definition 5.1

(i) *Signierte Formeln* sind Ausdrücke der Form $\mathrm{w}\,\phi$ oder $\mathrm{f}\,\phi$ für Formeln ϕ (metasprachliche Variablen für signierte Formeln: α, α_1, α_2, β, β_1, β_2, σ, σ').

(ii) Ein *analytisches Tableau* ist eine Baumstruktur von signierten Formeln, die nach folgenden Regeln generiert wird:

$$\begin{array}{c} \mathrm{w}\ \phi \rightarrow \psi \\ \mathrm{f}\ \phi \mid \mathrm{w}\ \psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{f}\ \phi \rightarrow \psi \\ \mathrm{w}\ \phi \\ \mathrm{f}\ \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{w}\ \phi \wedge \psi \\ \mathrm{w}\ \phi \\ \mathrm{w}\ \psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{f}\ \phi \wedge \psi \\ \mathrm{f}\ \phi \mid \mathrm{f}\ \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{w}\ \phi \vee \psi \\ \mathrm{w}\ \phi \mid \mathrm{w}\ \psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{f}\ \phi \vee \psi \\ \mathrm{f}\ \phi \\ \mathrm{f}\ \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{w}\ \neg\phi \\ \mathrm{f}\ \phi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{f}\ \neg\phi \\ \mathrm{w}\ \phi \end{array}$$

(iii) Ein *Tableau für* ϕ ist ein Tableau das mit $\mathrm{f}\,\phi$ beginnt.

(iv) Ein *Tableau für* $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$ ist ein Tableau, das mit

$$\begin{array}{c} \mathrm{w}\ \phi_1 \\ \vdots \\ \mathrm{w}\ \phi_n \\ \mathrm{f}\ \psi \end{array}$$

beginnt.

(v) Ein *Zweig* eines Tableau heißt *geschlossen*, wenn er sowohl $\mathrm{w}\,\phi$ als auch $\mathrm{f}\,\phi$ enthält für ein beliebiges ϕ.

(vi) Ein *Zweig* eines Tableau heißt *offen*, wenn

1. auf jede komplexe signierte Formel in diesem Zweig eine Regel angewendet wird,
2. für kein ϕ sowohl $\mathrm{w}\,\phi$ als auch $\mathrm{f}\,\phi$ auftritt.

(vii) Ein *Tableau* heißt *geschlossen*, wenn alle seine Zweige geschlossen sind.

(viii) Ein *Tableau* heißt *offen*, wenn es einen offenen Zweig enthält.

Beispiele.

(i) Tableau für $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$

1.			f $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$			
2.			w $A \wedge B \to C$			(1)
3.			f $A \to (B \to C)$			(1)
4.	f $A \wedge B$			(2)	w C	(2)
5.	f A	(4)	f B	(4)	w A	(3)
6.	w A	(3)	w A	(3)	f $B \to C$	(3)
7.	f $B \to C$	(3)	f $B \to C$	(3)	w B	(6)
8.	5 x 6		w B	(7)	f C	(6)
9.			f C	(7)	4 x 8	
			5 x 8			

In welcher Reihenfolge die Zeilen ausgewertet werden spielt keine Rolle. Zum Beispiel ist auch das folgende ein Tableau für $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$:

1.			f $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$			
2.			w $A \wedge B \to C$			(1)
3.			f $A \to (B \to C)$			(1)
4.			w A			(3)
5.			f $B \to C$			(3)
6.			w B			(5)
7.			f C			(5)
8.	f $A \wedge B$			(2)	w C	(2)
9.	f A	(8)	f B	(8)	7 x 8	
	4 x 9		6 x 9			

(ii) Tableau für $A \vee B \to A \wedge B$

1.				f $A \vee B \to A \wedge B$				
2.				w $A \vee B$				(1)
3.				f $A \wedge B$				(1)
4.	w A			(2)	w B			(2)
5.	f A	(3)	f B	(3)	f A	(3)	f B	(3)
	4 x 5		○		○		4 x 5	

Das zweite Beispiel zeigt, daß ein offener Zweig ein Gegenbeispiel liefert: Sowohl unter der Bewertung w A und f B (zweitlinker Zweig) als auch unter der Bewertung w B und f A (zweitrechter Zweig) wird $A \vee B \to A \wedge B$ falsch.

Wir teilen die Tableauregeln in α-Regeln und β-Regeln ein.

Definition 5.2

(i) Regeln der Form $\begin{array}{c}\alpha\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{array}$ oder $\begin{array}{c}\alpha\\ \alpha_1\end{array}$ heißen *α-Regeln.*

(ii) Regeln der Form $\begin{array}{c}\beta\\ \beta_1 \mid \beta_2\end{array}$ heißen *β-Regeln.*

Bemerkung.
Eine Regel der Form $\begin{array}{c}\alpha\\ \alpha_1\end{array}$ wird hier für die Negation benötigt. Alternativ könnte man für die Negation auch eine β-Regel der Form $\begin{array}{c}\beta\\ \beta_1 \mid \beta_1\end{array}$ verwenden. Dies führt jedoch zu unnötigen Verzweigungen.

Definition 5.3

(i) w ϕ *stimmt unter einer Bewertung $\mathcal{I}$*, falls ϕ unter $\mathcal{I}$ wahr ist.

(ii) f ϕ *stimmt unter einer Bewertung $\mathcal{I}$*, falls ϕ unter $\mathcal{I}$ falsch ist.

Lemma 5.4
Für unsere Tableauregeln gilt:

(i) bei α-Regeln: Wenn α_1 und α_2 stimmen, dann stimmt auch α.
bei β-Regeln: Wenn β_1 stimmt, dann stimmt auch β.
Wenn β_2 stimmt, dann stimmt auch β.

(ii) bei α-Regeln: Wenn α stimmt, dann stimmt sowohl α_1 als auch α_2.
bei β-Regeln: Wenn β stimmt, dann stimmt β_1 oder β_2 (oder beide).

Das alles ist relativ zu einer Bewertung $\mathcal{I}$.

Beweis durch Inspektion der Tableauregeln und Vergleich mit den Wahrheitstafeln der Junktoren.

Theorem 5.5
Falls ein Tableau einen offenen Zweig hat, dann gibt es eine Bewertung $\mathcal{I}$, unter der alle signierten Formeln in diesem Zweig stimmen.

Beweis.
Gegeben sei ein offener Zweig. Für Aussagesymbole ϕ sei

$$\mathcal{I}(\phi) =_{\text{def}} \begin{cases} \text{w} & \text{falls w}\,\phi \text{ in dem Zweig vorkommt,} \\ \text{f} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da der betrachtete Zweig offen ist, kommt für kein ϕ sowohl w ϕ als auch f ϕ vor. $\mathcal{I}$ ist also wohldefiniert.

Wir führen Induktion über der Komplexität der signierten Formeln σ im Zweig:

1. Fall: σ ist w ϕ oder f ϕ für ein Aussagesymbol ϕ. Dann stimmt σ nach Definition.

2. Fall: σ ist ein α im Sinne von Definition 5.2. Dann kommen α_1 und α_2 (bzw. nur α_1 im Fall der Negation) in dem betrachteten Zweig vor. Da α_1 und α_2 weniger komplex als α sind, können wir annehmen (nach Induktionsvoraussetzung), daß α_1 und α_2 beide stimmen. Aus Lemma 5.4 (i) ergibt sich die Behauptung.

3. Fall: σ ist ein β im Sinne von Definition 5.2. Dann kommt β_1 oder β_2 in dem betrachteten Zweig vor. Da β_1 bzw. β_2 weniger komplex ist als β, können wir annehmen (nach Induktionsvoraussetzung), daß es (β_1 bzw. β_2) stimmt. Also stimmt auch β nach Lemma 5.4 (i). □

Folgerung 5.6 (Semantische Vollständigkeit des Tableauverfahrens)
Wenn ϕ eine Tautologie ist, dann gibt es kein offenes Tableau für ϕ, d. h. jedes Tableau für ϕ läßt sich zu einem geschlossenen Tableau erweitern (dadurch, daß man alle möglichen Auswertungen vornimmt).

Beweis.
Wenn ϕ eine Tautologie ist, dann gibt es keine Bewertung unter der ϕ falsch ist. Also stimmt f ϕ bei keiner Bewertung. Als oberste Formel gehört f ϕ jedoch zu jedem Zweig eines beliebigen Tableaus für ϕ. □

Theorem 5.7
Falls es eine Bewertung $\mathcal{I}$ gibt, unter der eine signierte Formel σ stimmt, dann gibt es kein geschlossenes Tableau, das mit σ beginnt.

Folgerung 5.8 (Semantische Korrektheit des Tableauverfahrens)
Falls es ein geschlossenes Tableau für ϕ gibt, dann ist ϕ eine Tautologie.

Beweis von Theorem 5.7.
Wir betrachten ein beliebiges Anfangsstück

$$\begin{array}{c} \sigma \\ \vdots \\ \sigma' \end{array}$$

eines Zweiges. Wenn alle signierten Formeln zwischen σ und σ' stimmen, dann stimmt nach Lemma 5.4 (ii) auch mindestens eine der Fortsetzungen davon (wenn es eine Fortsetzung gibt):

$$\begin{array}{c} \sigma \\ \vdots \\ \alpha \\ \alpha_1 \\ \end{array} \qquad \begin{array}{c} \sigma \\ \vdots \\ \alpha \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \sigma \\ \vdots \\ \beta \\ \beta_1 \mid \beta_2 \\ \end{array}$$

(wobei σ' entweder α oder β ist), d. h. alle signierten Formeln zwischen σ und α_1 bzw. zwischen σ und α_2 bzw. zwischen σ und β_1 oder σ und β_2 stimmen. Durch Iteration dieses Verfahrens, ausgehend von σ als einem Anfangsstück der Länge 1, erhält man, wenn σ stimmt, einen Zweig, in dem alle signierten Formeln stimmen. Damit kann das gegebene Tableau nicht geschlossen sein. $\square$

6 Die formale Sprache der Quantorenlogik

Gegeben sei eine Menge $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ die folgendes umfaßt:

$\mathcal{A}_1$: Menge von *Aussagesymbolen.*

$\mathcal{A}_2$: Menge von *Prädikatsymbolen*, wobei jedes Prädikatsymbol eine feste Stellenzahl hat. Metasprachliche Variablen: $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \dots$

$\mathcal{A}_3$: Menge von *Individuenkonstanten*, kurz: Konstanten.
Metasprachliche Variablen: $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$

Jede dieser Mengen kann leer sein. (Ist $\mathcal{A}_2$ leer, kommen wir nicht über die Junktorenlogik hinaus.) Die drei Mengen müssen paarweise disjunkt sein.
Ferner sei eine abzählbar unendliche Menge von Individuenvariablen (kurz: Variablen) gegeben: $\{x, y, z, u, v, w, x_1, x_2, \dots\}$. Metasprachliche Variablen: $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$

Wir definieren Terme und Formeln über $\mathcal{A}$, lassen jedoch den Bezug auf $\mathcal{A}$ als selbstverständlich weg.

Definition 6.1 (Terme)
Terme sind wie folgt definiert:

(i) Jede Konstante ist ein Term.

(ii) Jede Variable ist ein Term.

Metasprachliche Variablen für Terme: $\tau, \tau_1, \tau_2, \dots$

Definition 6.2 (Atomformeln)
(i) Jedes Aussagesymbol ist eine Atomformel.

(ii) Ist Π ein n-stelliges Prädikatsymbol ($n \geq 1$) und sind $\tau_1, \dots, \tau_n$ Terme, dann ist $\Pi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ eine Atomformel.

BEMERKUNG.
Wir können Aussagesymbole als 0-stellige Prädikatsymbole betrachten.

Definition 6.3 (Formeln)
(i) Jede Atomformel ist eine Formel.

(ii) $\top$ und $\bot$ sind Formeln.

(iii) Mit ϕ ist auch $\neg\phi$ eine Formel.

(iv) Mit ϕ und ψ sind auch $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$ Formeln.

(v) Ist ϕ eine Formel und ξ eine Variable, dann sind $\forall\xi\phi$ und $\exists\xi\phi$ Formeln.
Metasprachliche Variablen für Formeln: $\phi, \psi, \phi_1, \dots$

Ableitungsbaum gemäß Bildungsregeln:

$$\forall x \exists y (P(x,y) \vee \exists z (Q(z) \to \neg P(x,y)))$$
$$|$$
$$\exists y (P(x,y) \vee \exists z (Q(z) \to \neg P(x,y)))$$
$$|$$
$$P(x,y) \vee \exists z (Q(z) \to \neg P(x,y))$$
$$P(x,y) \qquad \exists z (Q(z) \to \neg P(x,y))$$
$$|$$
$$Q(z) \to \neg P(x,y)$$
$$Q(z) \qquad \neg P(x,y)$$
$$|$$
$$P(x,y)$$

Regeln zur Klammerersparnis:

Wie früher. Zusätzlich gilt als abgekürzte Schreibweise bei Atomformeln: $\Pi\tau_1 \ldots \tau_n$ statt $\Pi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, falls keine Mißverständnisse möglich sind.
Der Begriff des *Vorkommens* eines Zeichens in einem anderen Zeichen sei nur intuitiv erläutert: Zum Beispiel enthält $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ drei Vorkommen von x.

Definition 6.4 (frei/gebunden)

(i) Jedes Variablenvorkommen in einer Atomformel ist frei.

(ii) Die freien bzw. gebundenen Variablenvorkommen in ϕ und ψ sind auch freie bzw. gebundene Variablenvorkommen in $\neg\phi$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \to \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$.

(iii) Jedes freie Vorkommen von ξ in ϕ ist ein gebundenes Vorkommen von ξ in $\forall\xi\phi$ und $\exists\xi\phi$. Alle anderen freien bzw. gebundenen Variablenvorkommen in ϕ sind auch freie bzw. gebundene Variablenvorkommen in $\forall\xi\phi$ und $\exists\xi\phi$. Wir sagen von den freien Vorkommen von ξ in ϕ auch, daß sie im Wirkungsbereich des Quantors $\forall\xi\phi$ bzw. $\exists\xi\phi$ liegen.

Beispiel.
$\forall x (Px \wedge Qxy) \to \exists y Rxy$

$\forall x$	– x weder frei noch gebunden
$\exists y$	– y weder frei noch gebunden
Px, Qxy	– x gebunden
Rxy	– y gebunden
Qxy	– y frei
Rxy	– x frei

(alles bezogen auf die Gesamtformel)

Definition 6.5

(i) ξ ist frei bzw. gebunden in ϕ / ξ ist freie bzw. gebundene Variable von $\phi \Leftrightarrow_{\text{def}}$ in ϕ gibt es ein freies bzw. gebundenes Vorkommen von ξ.

(ii) Eine Formel, die mindestens eine freie Variable enthält, heißt offen. Eine Formel ohne freie Variable heißt geschlossene Formel oder *Aussage* (im technischen Sinn, zu unterscheiden vom philosophischen Sinn von “Aussage”).

Definition 6.6 (Substitution)

(i) $\phi[\xi/\alpha]$ ist das Ergebnis der Ersetzungen aller freien Vorkommen von ξ in ϕ durch α.

(ii) $\phi[\xi/\xi']$ ist nicht definiert, falls ξ in ϕ im Wirkungsbereich eines Quantors $\forall\xi'$ oder $\exists\xi'$ vorkommt. Ansonsten ist es das Ergebnis der Ersetzung aller freien Vorkommen von ξ in ϕ durch ξ'.

Bemerkungen.

(i) $\phi[\xi/\xi'] \equiv \phi$ falls ξ in ϕ nicht frei vorkommt.

(ii) $[\ /\ ]$ bezieht sich immer auf die ganze vorangegangene Formel. Sonst ist Klammerung nötig. Zum Beispiel ist $Px \vee (Rxy\ [x/z]) \equiv Px \vee Rzy$, während $Px \vee Rxy\ [x/z] \equiv Pz \vee Rzy$ ist.

Beispiele.

(i) $\forall x(Px \wedge Qy)\ [y/a]$ ist $\forall x(Px \wedge Qa)$

(ii) $\exists x(Pxy \rightarrow Qy)\ [y/a]$ ist $\exists x(Pxa \rightarrow Qa)$

(iii) $\forall xPxy\ [y/x]$ ist nicht definiert.

7 Die Semantik der Quantorenlogik

In der Junktorenlogik verstanden wir bisher unter einer Interpretation (Bewertung) eine Funktion von Aussagesymbolen in Wahrheitswerte.

Wir nehmen jetzt ein Universum U ('universe of discourse') von Individuen (Gegenständen) an. U sei nicht leer.
Wir nehmen ferner an, daß es zu jedem $u \in U$ einen Namen $\underline{u}$ gibt. Um diese Namen erweitern wir unsere quantorenlogische Sprache.

Definition 7.1
Eine *U-Formel* bzw. ein *U-Term* entsteht aus einer Formel bzw. einem Term dadurch, daß man eine oder mehrere freie Variablen durch Namen von Objekten in U ersetzt.

Beispiele.
$P(\underline{u_1}, \underline{u_2}, z, a)$ für $u_1, u_2 \in U$ ist eine U-Formel,
$\forall x \exists y (P(\underline{u}, x) \rightarrow Q(y))$ für $u \in U$ ist eine U-Formel.

Definition 7.2
Eine *Interpretation $\mathcal{I}$ über U* ist eine Funktion, die folgende Zuordnungen enthält:
$\mathcal{A}_1 \longrightarrow \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$ (Aussagesymbolen werden Wahrheitswerte zugeordnet.)
$\mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathrm{Attr}(U)$ (Prädikatsymbolen werden Attribute über U zugeordnet.)
$\mathcal{A}_3 \longrightarrow U$ (Konstanten werden Gegenstände zugeordnet.)
Ferner gilt: $\underline{u} \mapsto u$.
Hierbei ist $\mathrm{Attr}(U)$ die Menge der Attribute über U. Durch ein n-stelliges Attribut ($n \geq 1$) ist von jedem n-Tupel $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ festgelegt, ob das Attribut auf dieses zutrifft oder nicht.

Beispiel.
$A \mapsto \mathrm{w}$
$P \mapsto \mathcal{P} \in \mathrm{Attr}(U)$
$a \mapsto u \in U$

Definition 7.3
'*Eine geschlossene U-Formel ϕ ist wahr unter $\mathcal{I}$*' bzw. '*eine geschlossene U-Formel ϕ ist falsch unter $\mathcal{I}$*' ('$\mathcal{I} \models \phi$' bzw. '$\mathcal{I} \not\models \phi$') ist wie folgt definiert:

$$\left.\begin{array}{lll} \mathcal{I} \models \phi & \text{falls} & \mathcal{I}(\phi) = \mathrm{w} \\ \mathcal{I} \not\models \phi & \text{falls} & \mathcal{I}(\phi) = \mathrm{f} \end{array}\right\} \text{falls } \phi \text{ Aussagesymbol}$$

$\mathcal{I} \models \Pi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ falls das Attribut $\mathcal{I}(\Pi)$ auf die Individuen $\mathcal{I}(\tau_1), \ldots, \mathcal{I}(\tau_n)$ zutrifft.
$\mathcal{I} \not\models \Pi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ falls dies nicht der Fall ist.

$\mathcal{I} \models \top$
$\mathcal{I} \not\models \bot$

$\mathcal{I} \models \neg\phi$ falls $\mathcal{I} \not\models \phi$
$\mathcal{I} \not\models \neg\phi$ falls $\mathcal{I} \models \phi$

$\mathcal{I} \models \phi \wedge \psi$ falls $\mathcal{I} \models \phi$ und $\mathcal{I} \models \psi$
$\mathcal{I} \not\models \phi \wedge \psi$ falls dies nicht der Fall ist.

$\mathcal{I} \models \phi \vee \psi$ falls $\mathcal{I} \models \phi$ oder $\mathcal{I} \models \psi$
$\mathcal{I} \not\models \phi \vee \psi$ falls dies nicht der Fall ist.

$\mathcal{I} \models \phi \rightarrow \psi$ falls nicht: ($\mathcal{I} \models \phi$ und $\mathcal{I} \not\models \psi$)
$\mathcal{I} \not\models \phi \rightarrow \psi$ falls $\mathcal{I} \models \phi$ und $\mathcal{I} \not\models \psi$

$\mathcal{I} \models \phi \leftrightarrow \psi$ genau dann, wenn ($\mathcal{I} \models \phi$ und $\mathcal{I} \models \psi$) oder ($\mathcal{I} \not\models \phi$ und $\mathcal{I} \not\models \psi$).

$\mathcal{I} \models \forall\xi\phi$ falls für alle $u \in U$: $\mathcal{I} \models \phi\ [\xi/\underline{u}]$
$\mathcal{I} \not\models \forall\xi\phi$ falls für mindestens ein $u \in U$: $\mathcal{I} \not\models \phi\ [\xi/\underline{u}]$

$\mathcal{I} \models \exists\xi\phi$ falls für mindestens ein $u \in U$: $\mathcal{I} \models \phi\ [\xi/\underline{u}]$
$\mathcal{I} \not\models \exists\xi\phi$ falls für alle $u \in U$: $\mathcal{I} \not\models \phi\ [\xi/\underline{u}]$

Definition 7.4
Eine offene Formel ϕ mit den freien Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ist *wahr unter* $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \models \phi$), falls $\mathcal{I} \models \forall\xi_1 \ldots \forall\xi_n\phi$ und *falsch unter* $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \not\models \phi$), falls $\mathcal{I} \not\models \forall\xi_1 \ldots \forall\xi_n\phi$.
$\mathcal{I}$ heißt *Modell* für eine Formel ϕ, falls $\mathcal{I} \models \phi$.

Definition 7.5
Eine Formel ϕ (nicht U-Formel) ist *allgemeingültig* (*logisch wahr*), wenn für jedes U und jedes $\mathcal{I}$ über U gilt: $\mathcal{I} \models \phi$. Schreibweise: $\models \phi$.
ψ *folgt logisch* aus einer Menge von Formeln Φ, wenn für jedes U und jedes $\mathcal{I}$ über U gilt: Falls $\mathcal{I} \models \phi$ für jedes $\phi \in \Phi$, dann $\mathcal{I} \models \psi$. Schreibweise: $\Phi \models \psi$.

Bemerkungen.

(i) Wir benötigen die U-Formeln zur Interpretation von Quantoren.

(ii) Man kommt auch ohne die Annahme aus, daß jedes Objekt einen Namen hat. Die Semantik wird dann etwas komplizierter.

(iii) Es gilt nicht mehr allgemein: $\phi \models \psi \;\Leftrightarrow\; \models \phi \rightarrow \psi$ (vgl. Satz 2.4).
Genauer: '$\Leftarrow$' gilt allgemein, '$\Rightarrow$' gilt nur für geschlossene Formeln.

Beispiel.
Es ist $Px \models \forall y Py$, d. h. $\forall y Py$ folgt logisch aus Px:
Sei $\mathcal{I}$ beliebig. Sei $\mathcal{I} \models Px$.
Das bedeutet nach Def. 7.4, daß $\mathcal{I} \models \forall x Px$.
Damit gilt auch $\mathcal{I} \models \forall y Py$.

Jedoch gilt nicht: $\models Px \rightarrow \forall y Py$.
Denn $\mathcal{I} \models Px \rightarrow \forall y Py$ bedeutet $\mathcal{I} \models \forall x(Px \rightarrow \forall y Py)$.
Gegenbeispiel:
$U = \{0, 1\}$
$P \overset{\mathcal{I}}{\mapsto} \mathcal{P}$, wobei $\mathcal{P}(0)$ gilt, $\mathcal{P}(1)$ jedoch nicht.
Dann $\mathcal{I} \models P\underline{0}$, aber $\mathcal{I} \not\models \forall y Py$.

(iv) Entsprechend gelten die junktorenlogischen Bewertungsregeln nicht mehr allgemein.

Beispiel.
$\mathcal{I} \models \phi \vee \psi \Leftrightarrow \mathcal{I} \models \phi$ oder $\mathcal{I} \models \psi$ gilt nicht allgemein für offene Formeln.

Denn: $\underbrace{\mathcal{I} \models Px \vee Qx}_{\substack{\text{bedeutet} \\ \mathcal{I} \models \forall x(Px \vee Qx)}} \qquad \underbrace{\mathcal{I} \models Px}_{\substack{\text{bedeutet} \\ \mathcal{I} \models \forall x Px}} \qquad \underbrace{\mathcal{I} \models Qx}_{\substack{\text{bedeutet} \\ \mathcal{I} \models \forall x Qx}}$

Dann ist z. B. für $U =$ *Menschen* und $\mathcal{I}(P) =$ *ist groß* und $\mathcal{I}(Q) =$ *ist klein* $\mathcal{I} \models \forall x(Px \vee Qx)$, aber nicht: $\mathcal{I} \models \forall x Px$ oder $\mathcal{I} \models \forall x Qx$.

8 Grundlegende Gesetze der Quantorenlogik

Satz 8.1

(i) $\models \neg\forall\xi\phi \leftrightarrow \exists\xi\neg\phi$

(ii) $\models \neg\exists\xi\phi \leftrightarrow \forall\xi\neg\phi$

(iii) $\models \forall\xi\phi \leftrightarrow \neg\exists\xi\neg\phi$

(iv) $\models \exists\xi\phi \leftrightarrow \neg\forall\xi\neg\phi$

Beweis.

(i) Sei $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ die Menge der freien Variablen in $\forall\xi\phi$.
Dann ist zu zeigen:
$\mathcal{I} \models \forall\xi_1 \ldots \forall\xi_n(\neg\forall\xi\phi \leftrightarrow \exists\xi\neg\phi)$ für beliebiges $\mathcal{I}$ über beliebigem Bereich U.

D. h. für alle $u_1, \ldots, u_n \in U$:

$$\mathcal{I} \models \neg\forall\xi\, \underbrace{\phi[\xi_1/\underline{u}_1] \ldots [\xi_n/\underline{u}_n]}_{\phi'} \leftrightarrow \exists\xi\neg\, \underbrace{\phi[\xi_1/\underline{u}_1] \ldots [\xi_n/\underline{u}_n]}_{\phi'}$$

D. h.: $\mathcal{I} \models \neg\forall\xi\phi' \leftrightarrow \exists\xi\neg\phi'$.

D. h. (a) Nicht: sowohl $\mathcal{I} \models \neg\forall\xi\phi'$ als auch $\mathcal{I} \not\models \exists\xi\neg\phi'$.

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \models \neg\forall\xi\phi' &\Rightarrow \mathcal{I} \not\models \forall\xi\phi' \\ &\Rightarrow \text{es gibt } u \in U \text{ mit } \mathcal{I} \not\models \phi'\ [\xi/\underline{u}] \\ &\Rightarrow \text{es gibt } u \in U \text{ mit } \mathcal{I} \models \neg\phi'\ [\xi/\underline{u}] \\ &\Rightarrow \mathcal{I} \models \exists\xi\neg\phi' \end{aligned}$$

(b) Nicht: sowohl $\mathcal{I} \models \exists\xi\neg\phi'$ als auch $\mathcal{I} \not\models \neg\forall\xi\phi'$.

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \models \exists\xi\neg\phi' &\Rightarrow \text{es gibt ein } u \in U \text{ mit } \mathcal{I} \models \neg\phi'\ [\xi/\underline{u}] \\ &\Rightarrow \text{es gibt ein } u \in U \text{ mit } \mathcal{I} \not\models \phi'\ [\xi/\underline{u}] \\ &\Rightarrow \mathcal{I} \not\models \forall\xi\phi' \\ &\Rightarrow \mathcal{I} \models \neg\forall\xi\phi'. \end{aligned}$$

(ii)–(iv) analog. □

Bemerkung.

Der Übergang von Formeln mit freien Variablen zu solchen ohne freie Variablen ist offensichtlich. Wir können daher künftig o. B. d. A. in den Beweisen annehmen, daß die vorkommenden Formeln geschlossen sind.

Satz 8.2

(i) $\models \forall\xi_1\forall\xi_2\phi \leftrightarrow \forall\xi_2\forall\xi_1\phi$

(ii) $\models \exists\xi_1\exists\xi_2\phi \leftrightarrow \exists\xi_2\exists\xi_1\phi$

(iii) $\models \forall\xi\phi \leftrightarrow \phi$ *falls ξ nicht frei in ϕ.*

(iv) $\models \exists\xi\phi \leftrightarrow \phi$ *falls ξ nicht frei in ϕ.*

Beweis.

(i) $\mathcal{I} \models \forall\xi_1\forall\xi_2\phi \Leftrightarrow \mathcal{I} \models \phi\ [\xi_1/\underline{u}_1]\,[\xi_2/\underline{u}_2]$ für alle $u_1,\ u_2 \in U$
$\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \phi\ [\xi_2/\underline{u}_2]\,[\xi_1/\underline{u}_1]$ für alle $u_1,\ u_2 \in U$
$\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \forall\xi_2\forall\xi_1\phi$

(ii)–(iv) analog. □

Satz 8.3

(i) $\models \forall\xi(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall\xi\phi \wedge \forall\xi\psi$

(ii) $\models \exists\xi(\phi \vee \psi) \leftrightarrow \exists\xi\phi \vee \exists\xi\psi$

(iii) $\models \forall\xi(\phi \vee \psi) \leftrightarrow \forall\xi\phi \vee \psi$ *falls ξ nicht frei in ψ.*

(iv) $\models \exists\xi(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \exists\xi\phi \wedge \psi$ *falls ξ nicht frei in ψ.*

Beweis.

(ii) $\mathcal{I} \models \exists\xi(\phi \vee \psi) \Leftrightarrow \mathcal{I} \models (\phi \vee \psi)\ [\xi/\underline{u}]$ für ein $u \in U$
$\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \phi\ [\xi/\underline{u}] \vee \psi\ [\xi/\underline{u}]$ für ein $u \in U$
$\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \phi\ [\xi/\underline{u}]$ oder $\mathcal{I} \models \psi\ [\xi/\underline{u}]$
$\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \exists\xi\phi$ oder $\mathcal{I} \models \exists\xi\psi$.

Die anderen Fälle gelten analog. □

Satz 8.4 (Gebundene Umbenennung)

Falls ξ_2 nicht frei in ϕ vorkommt, dann gilt:

(i) $\models \forall\xi_1\phi \leftrightarrow \forall\xi_2(\phi\ [\xi_1/\xi_2])$

(ii) $\models \exists\xi_1\phi \leftrightarrow \exists\xi_2(\phi\ [\xi_1/\xi_2])$

Beweis.

Offensichtlich, da wir Substitution global und nicht induktiv erklärt haben. □

Beispiele.

(i) $\models \forall xPx \leftrightarrow \forall yPy$

(ii) $\models \forall x\exists yPxy \leftrightarrow \forall x\exists vPxv$

(iii) $\models \forall xPx \vee Qy \leftrightarrow \forall yPy \vee Qy$

(iv) Jedoch: $\not\models \forall xPxy \leftrightarrow \forall yPyy$

Definition 8.5

Die Definition von Teilformeln (Def. 3.1) wird wörtlich übernommen und ergänzt um die Klausel:

$$\phi \text{ ist unmittelbare Teilformel von } \exists\xi\phi \text{ und } \forall\xi\phi.$$

Dies gilt entsprechend auch für U-Formeln.

Theorem 8.6 (Ersetzungstheorem, vgl. Theorem 3.2)
ϕ komme in ψ als Teilformel vor. ψ' entstehe aus ψ durch Ersetzung dieses Vorkommens von ϕ durch ϕ'. Falls $\models \phi \leftrightarrow \phi'$, dann $\models \psi \leftrightarrow \psi'$.

Beweis.
Induktion über den Aufbau von Formeln.

(i) ψ sei atomar. Dann ist ϕ mit ψ identisch.

(ii) ϕ ist unmittelbare Teilformel von ψ und ψ beginnt nicht mit einem Quantor: junktorenlogisches Argument.

(iii) ψ sei $\exists\xi\phi$ (z. z.: $\models \psi \leftrightarrow \psi'$)
Falls $\mathcal{I} \models \exists\xi\phi$, dann $\mathcal{I} \models \phi\ [\xi/\underline{u}]$ für ein $u \in U$.
Dann $\mathcal{I} \models \phi'\ [\xi/\underline{u}]$ aus $\models \phi \leftrightarrow \phi'$.
Dann $\mathcal{I} \models \exists\xi\phi'$, d. h. $\mathcal{I} \models \psi'$.

(iv) Entsprechend für $\forall$. □

Satz 8.7
Falls ξ nicht frei in ψ ist, gilt:

(i) $\models (\forall\xi\phi \to \psi) \leftrightarrow \exists\xi(\phi \to \psi)$

(ii) $\models (\exists\xi\phi \to \psi) \leftrightarrow \forall\xi(\phi \to \psi)$

(iii) $\models (\psi \to \forall\xi\phi) \leftrightarrow \forall\xi(\psi \to \phi)$

(iv) $\models (\psi \to \exists\xi\phi) \leftrightarrow \exists\xi(\psi \to \phi)$

Beweis.

$$
\text{(i)} \models \begin{array}{rll|l}
(\forall\xi\phi \to \psi) & \leftrightarrow & \neg\forall\xi\phi \lor \psi & \text{Junktorenlogik} \\
 & \leftrightarrow & \exists\xi\neg\phi \lor \psi & 8.1 + 8.6 \\
 & \leftrightarrow & \exists\xi\neg\phi \lor \exists\xi\psi & 8.2 + 8.6 \\
 & \leftrightarrow & \exists\xi(\neg\phi \lor \psi) & 8.3 + 8.6 \\
 & \leftrightarrow & \exists\xi(\phi \to \psi) & \text{Junktorenlogik}
\end{array}
$$

Die übrigen Beweise zu (ii)–(iv) werden analog geführt. □

Satz 8.8
Falls ξ nicht frei in ψ, dann gilt:

$$\models \mathsf{Q}\xi\phi * \psi \leftrightarrow \mathsf{Q}\xi(\phi * \psi)$$

für $*$ als $\land$ oder $\lor$ und Q als $\forall$ oder $\exists$.

Beweis.
Als Beispiel $\forall$ und $\land$:

$$
\begin{array}{l|l}
\models (\forall\xi\phi \land \psi) \leftrightarrow (\forall\xi\phi \land \forall\xi\psi) & 8.2 + 8.6 \\
\models (\forall\xi\phi \land \forall\xi\psi) \leftrightarrow \forall\xi(\phi \land \psi) & 8.3 + 8.6
\end{array}
$$

□

Definition 8.9
Eine Formel ist in *pränexer Normalform*, falls sie die Form $\mathsf{Q}_1\xi_1 \ldots \mathsf{Q}_n\xi_n\phi$ hat, wobei Q_i beliebige Quantoren sind und ϕ quantorenfrei ist.
ψ heißt *pränexe Normalform zu* ϕ, falls ψ in pränexer Normalform ist und $\models \phi \leftrightarrow \psi$.

Beispiele.

(i) $\forall x \exists y \forall z (Pxyz \rightarrow Qxyz)$ ist in pränexer Normalform.

(ii) $\forall x \exists y (Pxy \rightarrow \forall z Qz)$ ist nicht in pränexer Normalform.

Theorem 8.10
Zu jeder Formel gibt es eine (nicht notwendigerweise eindeutige) pränexe Normalform.

Beweis.
Wir geben ein Umformungsverfahren an:

(i) Streiche leere Quantoren (Satz 8.2)

(ii) Benenne gebundene Variablen so um (Satz 8.4), daß alle Quantoren verschiedene Variablen haben und keine Variable sowohl frei als auch gebunden vorkommt.

(iii) Ziehe Quantoren gemäß den Sätzen 8.1, 8.7, 8.8 nach außen. □

Beispiele.

$$\models (\exists x Px \rightarrow \forall x Px) \leftrightarrow (\exists x Px \rightarrow \forall y Py) \leftrightarrow \forall x (Px \rightarrow \forall y Py) \leftrightarrow \forall x \forall y (Px \rightarrow Py)$$

$$\begin{aligned} \models (\exists x Px \rightarrow \neg \forall z Px) \vee (\exists x \neg Qxz \wedge Ry) &\leftrightarrow (\exists x Px \rightarrow \neg Px) \vee (\exists x \neg Qxz \wedge Ry) \\ &\leftrightarrow (\exists z_1 Pz_1 \rightarrow \neg Px) \vee (\exists x \neg Qxz \wedge Ry) \\ &\leftrightarrow (\exists z_1 Pz_1 \rightarrow \neg Px) \vee (\exists z_2 \neg Qz_2 z \wedge Ry) \\ &\leftrightarrow \forall z_1 (Pz_1 \rightarrow \neg Px) \vee \exists z_2 (\neg Qz_2 z \wedge Ry) \\ &\leftrightarrow \forall z_1 \exists z_2 ((Pz_1 \rightarrow \neg Px) \vee (\neg Qz_2 z \wedge Ry)) \end{aligned}$$

Bemerkung.
Die Bedeutung pränexer Normalformen liegt in der Trennung von junktorenlogischen und quantorenlogischen Bestandteilen im Formelaufbau. Dies ist wichtig für das automatische Beweisen.

9 Quantorenlogische Tableaux

Um das Tableauverfahren auf die Quantorenlogik ausdehnen zu können, erweitern wir unsere quantorenlogische Sprache um eine abzählbar unendliche Menge von neuen Konstanten, genannt *Individuenparameter* (kurz: *Parameter*). So ist garantiert, daß wir unbegrenzt viele Konstanten zur Verfügung haben.
In der Praxis sind Parameter einfach Konstanten, die in der betrachteten Formel nicht vorkommen.

Definition 9.1
Ein *analytisches Tableaux* ist eine Baumstruktur von signierten, *geschlossenen* Formeln, die nach den in Definition 5.1 genannten junktorenlogischen Regeln sowie nach folgenden Regeln generiert wird:

$$\gamma\text{-Regeln}\begin{cases} \text{w } \forall\xi\phi & \\ \text{w } \phi\ [\xi/\alpha] & \alpha \text{ beliebige Konstante (einschließlich Parameter)} \\ & \\ \text{f } \exists\xi\phi & \\ \text{f } \phi\ [\xi/\alpha] & \alpha \text{ beliebige Konstante (einschließlich Parameter)} \end{cases}$$

$$\delta\text{-Regeln}\begin{cases} \text{w } \exists\xi\phi & \\ \text{w } \phi\ [\xi/\alpha] & \alpha \text{ neuer Parameter} \\ & \\ \text{f } \forall\xi\phi & \\ \text{f } \phi\ [\xi/\alpha] & \alpha \text{ neuer Parameter} \end{cases}$$

Ein *neuer* Parameter ist dabei ein Parameter, der in dem betreffenden Zweig noch nicht vorgekommen ist.
Ein *Zweig heißt geschlossen*, wenn er sowohl w ϕ als auch f ϕ für ein beliebiges ϕ enthält. Ein *Tableau heißt geschlossen*, wenn alle seine Zweige geschlossen sind. Ein Tableau für ϕ ist ein mit f ϕ beginnendes Tableau. Ein geschlossenes Tableau für ϕ heißt auch *Beweis* von ϕ.
Ein Tableau für $\phi_1, \dots, \phi_n \models \phi$ ist ein Tableau, das mit

$$\begin{array}{c} \text{w } \phi_1 \\ \vdots \\ \text{w } \phi_n \\ \text{f } \phi \end{array}$$

beginnt (ϕ_i, ϕ geschlossen).

Bemerkung.
Offene Tableaux definieren wir nicht. Der Grund dafür liegt darin, daß γ-Regeln beliebig oft angewendet werden können, so daß Zweige unendlich lang werden können. In der Junktorenlogik kommt man damit aus, jede Formel maximal *einmal* auszuwerten. In der Quantorenlogik ist dies aufgrund der γ-Regeln nicht der Fall.

Wir schreiben $\dfrac{\gamma}{\gamma_\alpha}$ für γ-Regeln und $\dfrac{\delta}{\delta_\alpha}$ für δ-Regeln.

In den folgenden Beispielen seien a, b, c als Parameter verstanden.

1. Beispiel.
Tableau für $\exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$

$$\begin{array}{lcr}
1. & \text{f } \exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y) & \\
2. & \text{w } \exists x \forall y P(x,y) & (1) \\
3. & \text{f } \forall y \exists x P(x,y) & (1) \\
4. & \text{w } \forall y P(a,y) & (2) \\
5. & \text{f } \exists x P(x,b) & (3) \\
6. & \text{f } P(a,b) & (5) \\
7. & \underline{\text{w } P(a,b)} & (4) \\
 & 6 \times 7 &
\end{array}$$

Bemerkung.
In Zeile 5 wurde eine δ-Regel auf Zeile 3 angewendet, und daraufhin in Zeile 7 eine γ-Regel auf Zeile 4. Hätte man zuerst eine γ-Regel auf Zeile 4 und dann eine δ-Regel auf Zeile 3 angewendet, wäre kein Widerspruch aufgetreten, da man bei der Anwendung der δ-Regel einen *neuen* Parameter einführen muß. Generell gilt als taktisches Prinzip, δ-Regeln *vor* γ-Regeln anzuwenden.

2. Beispiel.
Tableau für $\exists y(Py \to \forall x Px)$

$$\begin{array}{lcr}
1. & \text{f } \exists y(Py \to \forall x Px) & \\
2. & \text{f } Pa \to \forall x Px & (1) \\
3. & \text{w } Pa & (2) \\
4. & \text{f } \forall x Px & (2) \\
5. & \text{f } Pb & (4) \\
6. & \text{f } Pb \to \forall x Px & (1) \\
7. & \text{w } Pb & (6) \\
8. & \underline{\text{f } \forall x Px} & (6) \\
 & 5 \times 7 &
\end{array}$$

Die zweimalige Anwendung der γ-Regel auf Zeile 1 in den Zeilen 2 und 6 ist charakteristisch für dieses Beispiel.

Analog verfährt man in der folgenden pränexen Variante:

Tableau für $\exists y \forall x(Py \to Px)$

1.	f $\exists y \forall x(Py \to Px)$	
2.	f $\forall x(Pa \to Px)$	(1)
3.	f $Pa \to Pb$	(2)
4.	w Pa	(3)
5.	f Pb	(3)
6.	f $\forall x(Pb \to Px)$	(1)
7.	f $Pb \to Pc$	(6)
8.	w Pb	(7)
9.	f Pc	(7)
	5 x 8	

3. Beispiel.
Tableau für $\exists x Px \to \forall x Px$

1.	f $\exists x Px \to \forall x Px$	
2.	w $\exists x Px$	(1)
3.	f $\forall x Px$	(1)
4.	w Pa	(2)
5.	f Pb	(3)

Bemerkung.
Das Tableau ist nicht geschlossen. Wiederholte Anwendung der δ-Regel auf die Zeilen 2 und 3 würde an dieser Situation nichts ändern, da jedes Mal neue Parameter eingeführt werden müßten.
Ein Gegenbeispiel zu $\exists x Px \to \forall x Px$ erhält man aus den letzten beiden Zeilen: Es ist $U = \{a, b\}$ und $P \mapsto \mathcal{P}$, wobei $\mathcal{P}$ auf a, aber nicht auf b zutrifft. (Die Parameter a und b werden hier als Gegenstände des Universums U aufgefaßt – das ist charakteristisch für Gegenbeispiele.)

4. Beispiel.
Tableau für $\forall x(Px \vee Qx) \to \forall x Px \vee \forall x Qx$

$$
\begin{array}{r|cc|cc||cc|cc}
1. & \multicolumn{8}{c}{\text{f } \forall x(Px \vee Qx) \to \forall x Px \vee \forall x Qx} \\
2. & \multicolumn{7}{c}{\text{w } \forall x(Px \vee Qx)} & (1) \\
3. & \multicolumn{7}{c}{\text{f } \forall x Px \vee \forall x Qx} & (1) \\
4. & \multicolumn{7}{c}{\text{w } Pa \vee Qa} & (2) \\
5. & \multicolumn{7}{c}{\text{f } \forall x Px} & (3) \\
6. & \multicolumn{7}{c}{\text{f } \forall x Qx} & (3) \\
7. & \multicolumn{3}{c}{\text{w } Pa} & (4) & \multicolumn{3}{c}{\text{w } Qa} & (4) \\
8. & \multicolumn{3}{c}{\text{f } Pb} & (5) & \multicolumn{3}{c}{\text{f } Pb} & (5) \\
9. & \multicolumn{3}{c}{\text{f } Qc} & (6) & \multicolumn{3}{c}{\text{f } Qc} & (6) \\
10. & \multicolumn{3}{c}{\text{w } Pb \vee Qb} & (2) & \multicolumn{3}{c}{\text{w } Pb \vee Qb} & (2) \\
11. & \underline{\text{w } Pb} & (10) & \text{w } Qb & (10) & \underline{\text{w } Pb} & (10) & \text{w } Qb & (10) \\
 & 8 \text{ x } 11 & & \vdots & & 8 \text{ x } 11 & & \vdots &
\end{array}
$$

Bemerkung.
Man ‘sieht’, daß wiederholte Anwendung der γ-Regel auf Zeile 2 nicht zum Abschluß aller Zweige führen würde.

In einem Tableau werden durch Anwendung von δ-Regeln neue Parameter eingeführt. Diese sind zunächst uninterpretiert. Daher definieren wir:

Definition 9.2
$\mathcal{I}'$ ist eine *Erweiterung* von $\mathcal{I}$, wenn $\mathcal{I}'$ Konstanten interpretiert, die von $\mathcal{I}$ nicht interpretiert werden, ansonsten aber mit $\mathcal{I}$ identisch ist.

Bemerkung.
Damit gilt: $\mathcal{I} \models \phi \Rightarrow \mathcal{I}' \models \phi$.
$\mathcal{I} \not\models \phi \Rightarrow \mathcal{I}' \not\models \phi$.

Definition 9.3
Eine signierte geschlossene Formel $\mathrm{w}\,\phi$ *stimmt* unter $\mathcal{I}$, falls $\mathcal{I} \models \phi$. Entsprechend *stimmt* $\mathrm{f}\,\phi$ unter $\mathcal{I}$, falls $\mathcal{I} \not\models \phi$.

Lemma 9.4

(i) Wenn γ unter $\mathcal{I}$ stimmt, dann gibt es eine Erweiterung $\mathcal{I}'$ von $\mathcal{I}$, so daß γ_τ unter $\mathcal{I}'$ stimmt.

(ii) Wenn δ unter $\mathcal{I}$ stimmt, dann gibt es eine Erweiterung $\mathcal{I}'$ von $\mathcal{I}$, so daß δ_τ unter $\mathcal{I}'$ stimmt.

Beweis.

(i) Falls τ von $\mathcal{I}$ nicht interpretiert wird, dann interpretiere τ in $\mathcal{I}'$ beliebig.

(ii) Interpretiere τ in $\mathcal{I}'$ durch dasjenige d, für das $\delta_{\underline{d}}$ unter $\mathcal{I}$ stimmt. □

Theorem 9.5 (Semantische Korrektheit des Tableauverfahrens)
Gegeben sei ein geschlossenes Tableau für eine geschlossene Formel ϕ.
Dann gilt $\models \phi$.

Beweis.
Falls ϕ nicht allgemeingültig wäre, würde es eine Interpretation $\mathcal{I}$ geben mit $\mathcal{I} \not\models \phi$, unter der also $\mathrm{f}\,\phi$ stimmen würde. D. h. die oberste U-Formel des Tableaus würde unter $\mathcal{I}$ stimmen. Durch Verwendung von Lemma 5.4 und Lemma 9.4 ließe sich eine Erweiterung $\mathcal{I}'$ von $\mathcal{I}$ konstruieren, unter der alle U-Formeln von mindestens einem Zweig des Tableaus stimmen würden.
Dann würde jedoch eine Formel unter $\mathcal{I}'$ zugleich gelten und nicht gelten, da alle Zweige geschlossen sind. □

Bemerkung.
Wir nehmen im folgenden an, daß die zur Verfügung stehenden Parameter eine feste Reihenfolge haben, und entsprechend, daß die in einem Zweig vorkommenden Konstanten (einschl. Parameter) eine feste Reihenfolge haben.

Definition 9.6
Ein *systematisches Tableau* wird nach folgenden Regeln entwickelt: Wir zählen bei γ-Formeln die Anzahl der Auswertungen. Solange das Tableau nicht geschlossen ist und γ-Formeln enthält, wird folgendes Verfahren iteriert:

(i) Wähle die höchste signierte nichtatomare Formel, die noch nicht ausgewertet wurde. Wenn es mehrere gibt, wähle die linkeste.

(ii) Wenn alle Formeln ausgewertet worden sind, wähle das höchste und linkeste γ aus, das am wenigsten oft ausgewertet worden ist.

(iii) Werte die ausgewählte Formel in allen nicht geschlossenen Zweigen aus, die von ihr ausgehen. Wenn es sich um ein δ handelt, wähle δ_α derart, daß α der erste im jeweiligen Zweig noch nicht vorkommende Parameter ist. Wenn es sich um ein γ handelt, wähle γ_α derart, daß α die erste im jeweiligen Zweig vorkommende Konstante (einschl. Parameter) ist, so daß γ_α im Zweig noch nicht vorkommt, und der erste im Zweig noch nicht vorkommende Parameter, falls eine solche Konstante nicht existiert. Erhöhe die Zahl der Auswertungen dieser γ-Formel um 1.

Ein nicht geschlossenes systematisches Tableau ist offenbar endlich, wenn es keine γ-Formel enthält, ansonsten unendlich. Im Rest dieses Kapitels wird bewiesen, daß jeder nichtgeschlossene Zweig eines solchen Tableaus ein Gegenbeispiel liefert.

Für den endlichen Fall ist das 3. Beispiel oben eine Illustration, für den unendlichen Fall folgendes Beispiel:

$$\begin{array}{rcl}
1. & \text{f } \forall x\exists y Pxy \rightarrow \exists y\forall x Pxy & \\
*2. & \text{w } \forall x\exists y Pxy & (1) \\
*3. & \text{f } \exists y\forall x Pxy & (1) \\
4. & \text{w } \exists y Pa_1y & (2) \\
5. & \text{f } \forall x Pxa_1 & (3) \\
6. & \text{w } Pa_1a_2 & (4) \\
7. & \text{f } Pa_3a_1 & (5) \\
8. & \text{w } \exists y Pa_2y & (2) \\
9. & \text{w } Pa_2a_4 & (8) \\
10. & \text{f } \forall x Pxa_2 & (3) \\
11. & \text{f } Pa_5a_2 & (10) \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Sterne ($*$) deuten die erneute Auswertung von γ-Formeln an. Das Gegenbeispiel (Gegenmodell) zu $\forall x\exists y Pxy \rightarrow \exists y\forall x Pxy$ erhält man wie folgt:

$U = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$
$P \mapsto \mathcal{P}$, wobei $\mathcal{P}$ zutrifft auf

$$\{\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_2, a_4\rangle, \langle a_3, a_6\rangle, \ldots\},$$

nicht zutrifft auf

$$\{\langle a_3, a_1\rangle, \langle a_5, a_2\rangle, \langle a_7, a_3\rangle, \ldots\}$$

und ansonsten beliebig ist.

Entsprechende unendliche Gegenbeispiele würde man etwa aus den offenen Zweigen des 4. Beispiels oben erhalten.

Das Verfahren besteht darin, aus den mit w und f bewerteten atomaren Aussagen Attribute von Konstanten zu machen. Man spricht auch von "Termmodellen", da das Universum U aus Termen (hier Konstanten) besteht.

Nun die formale Darstellung:

Satz 9.7
Ein systematisches Tableau hat folgende Eigenschaften:
Es gibt eine abzählbare Menge $\mathcal{K}$ von Konstanten (einschl. Parametern), so daß für jeden nicht geschlossenen Zweig S gilt:

$$(\mathrm{H}) \begin{cases} \textit{Für kein atomares } \phi \textit{ ist sowohl } \mathrm{w}\,\phi \textit{ als auch } \mathrm{f}\,\phi \textit{ in } S. \\ \textit{Wenn } \alpha \textit{ in } S, \textit{ dann } \alpha_1 \textit{ und } \alpha_2 \textit{ in } S. \\ \textit{Wenn } \beta \textit{ in } S, \textit{ dann } \beta_1 \textit{ oder } \beta_2 \textit{ in } S. \\ \textit{Wenn } \gamma \textit{ in } S, \textit{ dann } \gamma_\tau \textit{ in } S \textit{ für jede Konstante } \tau. \\ \textit{Wenn } \delta \textit{ in } S, \textit{ dann } \delta_\tau \textit{ in } S \textit{ für mindestens eine Konstante } \tau. \end{cases}$$

Beweis.
Ergibt sich aus der Konstruktion eines systematischen Tableaus gemäß Def. 9.6. □

Satz 9.8
Jede Menge S von geschlossenen Formeln mit den Eigenschaften (H) *– auch "Hintikka-Menge" genannt – ist erfüllbar, genauer: es gibt eine Interpretation $\mathcal{I}$ über $\mathcal{K}$, unter der alle Elemente von S stimmen.*

Beweis.
$\mathcal{I}$ sei wie folgt definiert:
Universum $\mathcal{K}$
$a \mapsto a$ für jede Konstante a.
$P \mapsto \mathcal{P}$, wobei $\mathcal{P}$ auf $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ zutrifft, falls w $P(a_1, \ldots, a_n)$ in S, und $\mathcal{P}$ nicht auf $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ zutrifft, falls f $P(a_1, \ldots, a_n)$ in S. Für andere Argumente sei $\mathcal{P}$ beliebig.

Dann gilt für atomare ϕ:
$\mathcal{I} \models \phi$ falls w ϕ in S.
$\mathcal{I} \not\models \phi$ falls f ϕ in S.

D. h. alle atomaren ϕ stimmen unter $\mathcal{I}$.
Daraus ergibt sich mit den Eigenschaften (H) durch Induktion über dem Formelaufbau, daß alle komplexen ϕ unter $\mathcal{I}$ stimmen. □

Theorem 9.9 (Semantische Vollständigkeit des Tableauverfahrens)
Falls $\models \phi$, dann gibt es ein geschlossenes Tableau für ϕ.

BEWEIS.
Falls es kein geschlossenes Tableau für ϕ gibt, gibt es kein geschlossenes systematisches Tableau, das mit f ϕ beginnt. Jedes systematische Tableau hat also einen nicht geschlossenen Zweig. Nach Theorem 5.7 und Folgerung 5.8 gibt es aber eine Interpretation, bei der f ϕ stimmt. Also gilt $\not\models \phi$. □

BEMERKUNGEN.

(i) Damit gilt insbesondere: Die systematische Entwicklung eines Tableaus führt entweder zu einem Beweis oder zu einem Gegenbeispiel. Da man nach endlich vielen Schritten nicht notwendigerweise weiß, welche der beiden Optionen sich ergibt, spricht man von *Semi-Entscheidbarkeit* (*Wenn* ϕ allgemeingültig ist, findet man dies durch systematische Tableau-Entwicklung heraus; *ob* ϕ allgemeingültig ist oder nicht, ist nicht notwendigerweise in endlich vielen Schritten entscheidbar.)

(ii) Der Schluß von der Nicht-Abschließbarkeit eines Tableaus auf die Existenz eines nicht-geschlossenen Zweiges ist im unendlichen Fall nicht trivial. Hier wird das sogenannte "Lemma von Kőnig" verwendet, das in der mathematischen Grundlagenforschung eine bedeutende Rolle spielt.

Theorem 9.10 (Löwenheim–Skolem)
Falls ϕ erfüllbar ist, dann ist ϕ im Abzählbaren erfüllbar.

BEWEIS.

ϕ erfüllbar $\Rightarrow$ $\not\models \neg\phi$
$\Rightarrow$ Systematisches Tableau für f $\neg\phi$ nicht geschlossen (Korrektheit)
$\Rightarrow$ Systematisches Tableau für w ϕ nicht geschlossen
$\Rightarrow$ Es gibt eine Interpretation $\mathcal{I}$ über $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{I} \models \phi$ für abzählbares $\mathcal{K}$.
□

10 Syllogistik

Literatur

Aristoteles, *Erste Analytiken*, Diverse Ausgaben.

R. Smith, “Aristotle’s Logic”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2007 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL = http://plato.stanford.edu/archives/win2007/entries/aristotle-logic/

P. Thom, “Syllogistik”, *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, Bd. X, Basel/Stuttgart 1980, S. 687–707.

F. von Kutschera, *Elementare Logik*, Wien/New York 1967, S. 340–349.

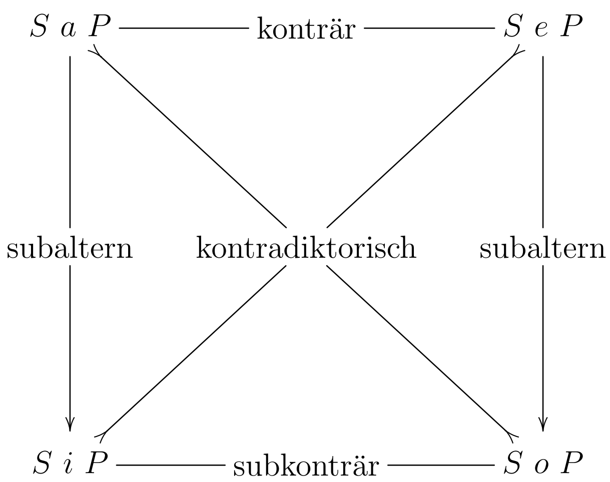
Die traditionelle Syllogistik, begründet von Aristoteles, behandelt Aussagen (Urteile) der Form

Alle S sind P (kurz: $S\ a\ P$)
Einige S sind P (kurz: $S\ i\ P$)
Alle S sind nicht P (Kein S ist P) (kurz: $S\ e\ P$)
Einige S sind nicht P (kurz: $S\ o\ P$)

Hierbei steht die Abkürzung a für das universell affirmative Urteil und i für das partikulär affirmative Urteil (von ***a**ffirmo*); e steht für das universell negative Urteil und o für das partikulär negative Urteil (von *n**e**g**o***):

	affirmativ	negativ
universell	a	e
partikulär	i	o

Achtung: Statt „Alle S sind P“ sagt Aristoteles „P kommt allen S zu“, etc. Im Anschluß an diese Redeweise formalisieren neuere Darstellungen der Syllogistik häufig syllogistische Urteile mit umgekehrter Reihenfolge der Teilterme, d. h. $P\ a\ S$ oder $A(P, S)$ oder ähnlich. Auf die entsprechenden Konventionen ist bei Heranziehung von Sekundärliteratur immer zu achten.
Die deduktiven Beziehungen zwischen den vier Urteilsformen werden traditionell in Form des sogenannten *logischen Quadrats* dargestellt:



$S\ a\ P$ und $S\ e\ P$ bilden *konträre Gegensätze*, können also nicht beide wahr sein. $S\ i\ P$ und $S\ o\ P$ bilden *subkonträre Gegensätze*, können also nicht beide falsch sein. Die diagonal gegenüberliegenden Urteilsformen bilden *kontradiktorische Gegensätze*; das eine ist also äquivalent zur Negation des anderen. Von den universellen Urteilen kann zu den partikulären Urteilen übergegangen werden (*Subalternation*).

Die traditionelle Syllogistik geht davon aus, daß die verwendeten Begriffe nichtleer sind, also nichtleeren Umfang haben, weshalb es möglich ist von den universellen auf die entsprechenden partikulären Urteile zu schließen.

Bemerkung.
Die syllogistischen Urteile würde man in moderner logischer Notation (siehe dazu die Kapitel zur Quantorenlogik) folgendermaßen repräsentieren:

$$\begin{array}{ll} S\ a\ P & \forall x(Sx \to Px) \\ S\ i\ P & \exists x(Sx \land Px) \\ S\ e\ P & \forall x(Sx \to \neg Px) \\ S\ o\ P & \exists x(Sx \land \neg Px) \end{array}$$

Da man in der modernen Logik den Fall einbezieht, daß S leeren Umfang hat, ist es dann allerdings nicht mehr der Fall, daß man aus $\forall x(Sx \to Px)$ auf $\exists x(Sx \land Px)$, bzw. von $\forall x(Sx \to \neg Px)$ auf $\exists x(Sx \land \neg Px)$ schließen kann.

In der traditionellen Syllogistik betrachtet man Syllogismen mit zwei Prämissen und einer Konklusion, wobei insgesamt drei Begriffe beteiligt sind:

(i) Ein Begriff, der sogenannte *Mittelbegriff*, kommt in beiden Prämissen vor, aber nicht in der Konklusion.

(ii) Der *Subjektbegriff* der Konklusion kommt in der zweiten Prämisse vor, aber nicht in der ersten Prämisse.

(iii) Der *Prädikatbegriff* der Konklusion kommt in der ersten Prämisse vor, aber nicht in der zweiten Prämisse.

S und P nennt man auch die *Außenbegriffe*. Die erste Prämisse heißt auch *Obersatz* (*maior*), die zweite Prämisse *Untersatz* (*minor*). Geht man von dieser Klassifikation aus, dann gibt es genau vier mögliche Anordnungen von Prämissen und Konklusion, d. h. vier Schemata oder *Figuren* für logische Schlüsse:

I	II	III	IV
$M\ x\ P$	$P\ x\ M$	$M\ x\ P$	$P\ x\ M$
$S\ y\ M$	$S\ y\ M$	$M\ y\ S$	$M\ y\ S$
$S\ z\ P$	$S\ z\ P$	$S\ z\ P$	$S\ z\ P$

Anstelle der Variablen x, y und z stehen die Bezeichnungen der Urteilsformen a, e, i und o. Setzt man konkrete Werte ein, so erhält man einen *Syllogismus* oder einen *syllogistischen Modus*.

Setzt man z. B. in der dritten Figur für x e, für y a und für z o ein, so erhält man den syllogistischen Modus:

$$\begin{array}{c} M\ e\ P \\ \underline{M\ a\ S} \\ S\ o\ P \end{array}$$

Die Redeweise von syllogistischen Modi hat sich erst später eingebürgert. Aristoteles spricht einfach von *Syllogismen*. Wir werden im folgenden die Ausdrücke *Modus* und *Syllogismus* synonym verwenden. Man könnte eine Unterscheidung derart einführen, daß ein Modus das abstrakte Schlußschema ist, während ein Syllogismus ein konkreter Schluß ist, bei dem an den Stellen von S, M und P konkrete Begriffe stehen; aber diese Unterscheidung wollen wir hier nicht machen.

Bemerkung.
Bei Aristoteles gibt es nur drei syllogistische Schlußfiguren, nämlich die Schemata I–III. Das hängt damit zusammen, daß Aristoteles sich nicht unmittelbar mit der Frage beschäftigte, welche Kombinationen von Prämissen und Konklusion gültig sind, sondern mit der Frage: Gegeben zwei Prämissen, welche Konklusionen folgen daraus? Wenn wir nur die Prämissen betrachten, dann gibt es tatsächlich auch nur drei Figuren, nämlich die Figur, bei welcher der Mittelbegriff diagonal angeordnet ist, die Figur, bei welcher der Mittelbegriff auf der rechten Seite angeordnet ist, und die Figur, bei welcher der Mittelbegriff auf der linken Seite angeordnet ist. Die erste und die vierte Figur könnte man danach gar nicht unterscheiden, da sie durch Prämissenvertauschung auseinander hervorgehen. Wenn man die Konklusion miteinbezieht, gehen sie natürlich nicht auseinander hervor. Aristoteles sah sich gezwungen – da er keine separate vierte Figur annahm – zusätzliche sogenannte *indirekte Modi* der ersten Figur zu betrachten. Dabei handelt es sich um eine Variante der ersten Figur, bei der aber die Reihenfolge von Subjekt- und Prädikatbegriff umgekehrt ist. D. h. man hat Prämissen wie in der ersten Figur, aber eine Konklusion, bei der P der Subjekt- und S der Prädikatbegriff ist. Solche Syllogismen entsprechen dem, was man später als Syllogismen der vierten Figur bezeichnet hat. Die vierte Figur ist später von Galen eingeführt worden (ob das historisch stimmt, wird noch diskutiert).[1]

Im folgenden wollen wir die Syllogistik unter dem Gesichtspunkt der Axiomatik betrachten, d. h. unter dem Gesichtspunkt, wie man Syllogismen aus anderen Syllogismen herleiten kann. Dies war auch eines der Hauptanliegen von Aristoteles. Die aristotelische Idee bestand im wesentlichen darin, die Syllogismen der zweiten und dritten Figur aus den Syllogismen der ersten Figur herzuleiten. Für die vierte Figur kann man entsprechendes durchführen. Aristoteles war der Auffassung, daß die Syllogismen der ersten Figur *vollkommene Syllogismen* sind; vollkommen in dem Sinne, daß sie unmittelbar einsichtig sind, und daher als Axiome genommen werden können. Er konnte dann zeigen, daß man alle anderen Syllogismen aus den

[1] Vgl. J. Mittelstraß/P. Schroeder-Heister, *Rescher on Greek Philosophy and the Syllogism*, in: *Festschrift N. Rescher (80th birthday)*; siehe http://www-ls.informatik.uni-tuebingen.de/psh/forschung/ (ab ca. Mitte Februar).

Syllogismen der ersten Figur mit Hilfe von geeigneten Deduktionsprinzipien herleiten kann.

Wir skizzieren im folgenden in groben Zügen sowohl aristotelische als auch spätere Ansätze, eine Systematik der Syllogismen herzustellen. Kombinatorisch sind 256 Modi möglich. Von diesen 256 Modi sind nur 24 gültig. Letztere sind in der folgenden Tabelle angegeben, wobei die lateinischen Merkwörter für die dort genannten Modi durch die in ihnen enthaltenen Vokale die Urteilsform der jeweiligen syllogistischen Figur angeben, wenn man sie in der im Merkwort vorhandenen Reihenfolge von oben nach unten für x, y und z in die Figur einsetzt. Über die Rolle der Konsonanten in diesen Merkwörtern wird später noch etwas gesagt.

Tabelle der gültigen syllogistischen Modi

I	II	III	IV
$M\ x\ P$	$P\ x\ M$	$M\ x\ P$	$P\ x\ M$
$S\ y\ M$	$S\ y\ M$	$M\ y\ S$	$M\ y\ S$
$S\ z\ P$	$S\ z\ P$	$S\ z\ P$	$S\ z\ P$
barbara	*cesare*	*datisi*	*calemes*
celarent	*camestres*	*disamis*	*dimatis*
darii	*festino*	*ferison*	*fresison*
ferio	*baroco*	*bocardo*	*fesapo*[1]
		darapti[1]	*bamalip*[2]
		felapton[1]	
barbari[3]	*cesaro*[3]		*calemos*[3]
celaront[3]	*camestros*[3]		

Manche der Syllogismen setzen voraus, daß Begriffe nichtleer sind. Nimmt man die Syllogismen heraus, die diese Voraussetzung nicht machen, bleiben nur noch 15 Syllogismen übrig, die auch vom heutigen Standpunkt aus uneingeschränkt gültig sind.
In den beiden untersten Zeilen der Tabelle sind diejenigen Syllogismen aufgelistet, die einfach durch Subalternation aus darüber stehenden Syllogismen hervorgehen. Das sind die sogenannten *subalternen Modi*. Zum Beispiel ergibt sich sofort *barbari* aus *barbara* dadurch, daß man die a-Konklusion von *barbara* zu i abschwächt. Entsprechend *celaront* aus *celarent*, *cesaro* aus *cesare*, *camestros* aus *camestres* und *calemos* aus *calemes*. Wenn man diese subalternen Modi wegläßt, weil sie sozusagen 'unmittelbare' Konsequenzen der gültigen Syllogismen mit universeller Konklusion sind, dann bleiben nur noch 19 'eigentliche' Syllogismen übrig. Der folgende traditionelle Merkvers aus Hexametern listet diese Syllogismen auf:

[1] M nichtleer
[2] P nichtleer
[3] S nichtleer

Barbara Celarent Darii Ferioque prioris,
Cesare Camestres Festino Baroco secundae,
Tertia *Darapti Disamis Datisi Felapton*
Bocardo Ferison habet; quarta insuper addit
Bamalip Calemes Dimatis Fesapo Fresison.

Ein anderer Vers lautet:

Barbara Celarent primae, *Darii Ferioque;*
Cesare, Camestres, Festino, Baroco secundae,
Tertia grande sonans recitat *Darapti Felapton,*
Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison; quartae
sunt *Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison.*

Konversionsregel

i-Urteile und e-Urteile lassen sich konvertieren in dem Sinne, daß man einfach die Begriffe vertauschen kann. Wenn wir ^{s} definieren durch

$$(S\ i\ P)^s := P\ i\ S$$
$$(S\ e\ P)^s := P\ e\ S$$

dann gilt für syllogistische Urteile J

$$J \mathrel{=\!\!|\!\models} J^s$$

Man spricht hier von *einfacher Konversion* (*conversio simplex*). Von der einfachen Konversion unterscheidet Aristoteles noch die *partielle Konversion* oder *conversio per accidens*, die eine Mixtur von einfacher Konversion und Subalternation darstellt. Hier erlaubt es Aristoteles, von $S\ a\ P$ zu $P\ i\ S$ überzugehen. Definiert man ^{p} durch

$$(S\ a\ P)^p := P\ i\ S$$

dann gilt

$$J \models J^p$$

10.1 Axiomatik im Anschluß an Aristoteles (I)

Axiome sind die Syllogismen der ersten Figur. Genaugenommen nur die vier eigentlichen Syllogismen der ersten Figur, im folgenden auch die *vollkommenen Syllogismen* genannt. (Zu den subalternen Modi wird später noch etwas gesagt.)
Als *Schlußregeln* stehen folgende Regeln zur Verfügung:
m (*mutatio*): Prämissen dürfen vertauscht werden

$$\begin{array}{c} J_1 \\ J_2 \\ \hline J_3 \end{array} \quad \xrightarrow{m} \quad \begin{array}{c} J_2 \\ J_1 \\ \hline J_3 \end{array}$$

s (*conversio simplex*): J darf ersetzt werden durch J^s

$$\begin{array}{c} \vdots \\ J \\ \vdots \end{array} \quad \xrightarrow{s} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ J^s \\ \vdots \end{array}$$

p (*conversio per accidens*): J darf in der Konklusion durch J^p ersetzt werden

$$\begin{array}{c} J_1 \\ J_2 \\ \hline J_3 \end{array} \quad \xrightarrow{p} \quad \begin{array}{c} J_1 \\ J_2 \\ \hline J_3^p \end{array}$$

und J^p darf in den Prämissen durch J ersetzt werden

$$\begin{array}{c} \vdots \\ J^p \\ \vdots \\ \hline J' \end{array} \quad \xrightarrow{p} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ J \\ \vdots \\ \hline J' \end{array}$$

c (*reductio*; *per impossibile*-Argumentation):
$\overline{J}$ bezeichne das zu J kontradiktorische Gegenteil. Dann darf eine Prämisse mit der Konklusion vertauscht werden, wenn beide dabei zugleich durch ihr kontradiktorisches Gegenteil ersetzt werden.

$$\begin{array}{c} J_1 \\ J_2 \\ \hline J_3 \end{array} \quad \xrightarrow{c} \quad \begin{array}{c} \overline{J_3} \\ J_2 \\ \hline \overline{J_1} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} J_1 \\ J_2 \\ \hline J_3 \end{array} \quad \xrightarrow{c} \quad \begin{array}{c} J_1 \\ \overline{J_3} \\ \hline \overline{J_2} \end{array}$$

Theorem 10.1
Alle gültigen eigentlichen Syllogismen lassen sich mit Hilfe dieser Regeln aus den vollkommenen Syllogismen herleiten.

Beweis.
Die Merkwörter der Syllogismen geben durch ihre Konsonanten an, welche Regeln bei der Ableitung benutzt werden. Hier bedeutet ein m, daß eine Anwendung der Prämissenvertauschung verwendet werden muß. Es bedeutet ein s, daß *conversio simplex* verwendet wird. Es bedeutet ein p, daß *conversio per accidens* verwendet wird. Und es bedeutet c, daß *reductio* verwendet wird (c steht dabei für *contrapositio*). Der Anfangsbuchstabe des Merkworts gibt immer an, auf welchen Syllogismus der ersten Figur man diese Regeln anwenden muß, nämlich auf den Syllogismus der ersten Figur mit diesem Anfangsbuchstaben.

Beispiele.

(i) Herleitung von $\boldsymbol{b}\mathit{o}\boldsymbol{c}\mathit{ardo}_{\mathrm{III}}$:

$$\begin{array}{c} \mathit{barbara}_{\mathrm{I}} \\ \\ M\ a\ P \\ S\ a\ M \\ \hline S\ a\ P \end{array} \quad \xrightarrow{c} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \overline{S\ a\ P} \\ S\ a\ M \\ \hline \overline{M\ a\ P} \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} \mathit{bocardo}_{\mathrm{III}} \\ \\ S\ o\ P \\ S\ a\ M \\ \hline M\ o\ P \end{array} \quad (S \text{ ist jetzt Mittelbegriff})$$

(ii) Herleitung von $\boldsymbol{f}\mathit{e}\boldsymbol{s}\mathit{tino}_{\mathrm{II}}$:

$$\begin{array}{c} \mathit{ferio}_{\mathrm{I}} \\ \\ M\ e\ P \\ S\ i\ M \\ \hline S\ o\ P \end{array} \quad \xrightarrow{s} \quad \begin{array}{c} \mathit{festino}_{\mathrm{II}} \\ \\ M\ e\ P \\ M\ i\ S \\ \hline S\ o\ P \end{array}$$

(iii) Herleitung von $\boldsymbol{c}\mathit{a}\boldsymbol{m}\mathit{e}\boldsymbol{s}\mathit{tre}\boldsymbol{s}_{\mathrm{II}}$:

$$\begin{array}{c} \mathit{celarent}_{\mathrm{I}} \\ \\ M\ e\ P \\ S\ a\ M \\ \hline S\ e\ P \end{array} \quad \xrightarrow{m} \quad \begin{array}{c} \\ \\ S\ a\ M \\ M\ e\ P \\ \hline S\ e\ P \end{array} \quad \xrightarrow{s} \quad \begin{array}{c} \\ \\ S\ a\ M \\ P\ e\ M \\ \hline S\ e\ P \end{array} \quad \xrightarrow{s} \quad \begin{array}{c} \mathit{camestres}_{\mathrm{II}} \\ \\ S\ a\ M \\ P\ e\ M \\ \hline P\ e\ S \end{array}$$

(S und P vertauscht)

(iv) Herleitung von $\boldsymbol{d}\mathit{ara}\boldsymbol{p}\mathit{ti}_{\mathrm{III}}$:

$$\begin{array}{c} \mathit{darii}_{\mathrm{I}} \\ \\ M\ a\ P \\ S\ i\ M \\ \hline S\ i\ P \end{array} \quad \xrightarrow{p} \quad \begin{array}{c} \mathit{darapti}_{\mathrm{III}} \\ \\ M\ a\ P \\ M\ a\ S \\ \hline S\ i\ P \end{array}$$

(v) Herleitung von $\boldsymbol{f}\mathit{e}\boldsymbol{s}\mathit{a}\boldsymbol{p}\mathit{o}_{\mathrm{IV}}$:

$$\begin{array}{c} \mathit{ferio}_{\mathrm{I}} \\ \\ M\ e\ P \\ S\ i\ M \\ \hline S\ o\ P \end{array} \quad \xrightarrow{s} \quad \begin{array}{c} \\ \\ P\ e\ M \\ S\ i\ M \\ \hline S\ o\ P \end{array} \quad \xrightarrow{p} \quad \begin{array}{c} \mathit{fesapo}_{\mathrm{IV}} \\ \\ P\ e\ M \\ M\ a\ S \\ \hline S\ o\ P \end{array}$$

(vi) Herleitung von $\boldsymbol{b}\mathit{a}\boldsymbol{m}\mathit{ali}\boldsymbol{p}_{\mathrm{IV}}$:

$$\begin{array}{c} \mathit{barbara}_{\mathrm{I}} \\ \\ M\ a\ P \\ S\ a\ M \\ \hline S\ a\ P \end{array} \quad \xrightarrow{m} \quad \begin{array}{c} \\ \\ S\ a\ M \\ M\ a\ P \\ \hline S\ a\ P \end{array} \quad \xrightarrow{p} \quad \begin{array}{c} \mathit{bamalip}_{\mathrm{IV}} \\ \\ S\ a\ M \\ M\ a\ P \\ \hline P\ i\ S \end{array} \quad (S \text{ und } P \text{ vertauscht})$$

Entsprechend verfährt man bei allen anderen Syllogismen. □

Bemerkung.
Die ‘unterwegs’, d. h. bei Zwischenschritten erhaltenen Schlußformen müssen keine gültigen Syllogismen sein.
Die Beispiele (v) und (vi) sind natürlich nicht-aristotelisch, da bei Aristoteles die vierte Figur nicht vorkommt.

Subalternationsregel

Die subalternen Modi erlangt man durch Hinzunahme der Subalternationsregel:

$$\frac{\vdots}{S\ a\ P} \quad \longrightarrow \quad \frac{\vdots}{S\ i\ P}$$

$$\frac{\vdots}{S\ e\ P} \quad \longrightarrow \quad \frac{\vdots}{S\ o\ P}$$

Alternativ kann man die Subalternationsregel, die von a-Urteilen zu i-Urteilen führt mit Hilfe der *conversio per accidens* herleiten, indem man zunächst von $S\ a\ P$ zu $P\ i\ S$ übergeht, und dann mit (einfacher) Konversion wieder zu $S\ i\ P$:

$$\frac{\vdots}{S\ a\ P} \quad \xrightarrow{p} \quad \frac{\vdots}{P\ i\ S} \quad \xrightarrow{s} \quad \frac{\vdots}{S\ i\ P}$$

Man würde auch die auf o endenden subalternen Modi erhalten, wenn man bei der *conversio per accidens* auch eine Konversion aus e-Aussagen zuläßt, d. h., indem man ^{p} durch die Klausel

$$(S\ e\ P)^p := P\ o\ S$$

erweitert. Daraus könnte man dann durch (einfache) Konversion von $S\ e\ P$ zu $P\ e\ S$ und dann durch *conversio per accidens* zu $S\ o\ P$ die Subalternation herleiten:

$$\frac{\vdots}{S\ e\ P} \quad \xrightarrow{s} \quad \frac{\vdots}{P\ e\ S} \quad \xrightarrow{p} \quad \frac{\vdots}{S\ o\ P}$$

Dieses Vorgehen ist aber nicht aristotelisch. Aristoteles würde immer voraussetzen, daß die Subalternation zur Verfügung steht.
Systematisch wäre es besser auf die *conversio per accidens* zu verzichten, und diese einfach als Zusammensetzung von Subalternationsregel und Konversionsregel zu beschreiben. D. h., man würde definieren

$$(S\ a\ P)^{\text{sub}} := S\ i\ P$$
$$(S\ e\ P)^{\text{sub}} := S\ o\ P$$

und statt p die Subalternation als Grundregel benutzen:

$$\frac{\vdots}{J} \quad \xrightarrow{\text{sub}} \quad \frac{\vdots}{J^{\text{sub}}}$$

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ J^{\text{sub}} \\ \vdots\end{matrix}}{J'} \quad \xrightarrow{\text{sub}} \quad \frac{\begin{matrix}\vdots \\ J \\ \vdots\end{matrix}}{J'}$$

10.2 Axiomatik im Anschluß an Aristoteles (II)

Literatur
Vgl. zusätzlich zur am Beginn des Kapitels genannten Literatur: H. Weidemann, *Aristotle on the reducibility of all valid syllogistic moods to the two universal moods of the first figure (APr A7, 29b1-25)*, History and Philosophy of Logic **25** (2004), 73–78.

Aristoteles hat eine weitere Reduktion vorgenommen und gezeigt, daß man bei den vollkommenen Syllogismen als axiomatischer Basis mit den ersten beiden Modi, d. h. mit $barbara_{\mathrm{I}}$ und $celarent_{\mathrm{I}}$ auskommen kann.

Theorem 10.2
Alle gültigen eigentlichen Modi sind auf $barbara_{\mathrm{I}}$ *und* $celarent_{\mathrm{I}}$ *zurückführbar unter Verwendung von einfacher Konversion,* reductio *und Prämissenvertauschung. Nimmt man die subalternen Modi hinzu, dann müssen auch noch* $barbari_{\mathrm{I}}$ *und* $celaront_{\mathrm{I}}$ *als Axiome gewählt werden.*

Beweis.
Im folgenden soll – weil wir die *conversio per accidens* nicht mehr betrachten – die einfache Konversion mit "conv" bezeichnet werden, die *reductio* mit "red", und Prämissenvertauschung soll immer implizit durchgeführt werden, also keine explizite Regel sein (die beiden Prämissen stellen also eine Prämissen*menge* dar).

Beispiele.

(i) $barbara_{\mathrm{I}}$ $\qquad$ $baroco_{\mathrm{II}}$

$$\begin{array}{c} M\ a\ P \\ S\ a\ M \\ \hline S\ a\ P \end{array} \quad \xrightarrow{\text{red}} \quad \begin{array}{c} M\ a\ P \\ S\ o\ P \\ \hline S\ o\ M \end{array}$$

(ii) $barbara_{\mathrm{I}}$ $\qquad$ $bocardo_{\mathrm{III}}$

$$\begin{array}{c} M\ a\ P \\ S\ a\ M \\ \hline S\ a\ P \end{array} \quad \xrightarrow{\text{red}} \quad \begin{array}{c} S\ o\ P \\ S\ a\ M \\ \hline M\ o\ P \end{array}$$

(iii) $barbari_{\mathrm{I}}$ $\qquad$ $felapton_{\mathrm{III}}$

$$\begin{array}{c} M\ a\ P \\ S\ a\ M \\ \hline S\ i\ P \end{array} \quad \xrightarrow{\text{red}} \quad \begin{array}{c} S\ e\ P \\ S\ a\ M \\ \hline M\ o\ P \end{array}$$

(iv) $celaront_{\mathrm{I}} \xrightarrow{\text{red}} darapti_{\mathrm{III}}$

(v) $celarent_{\mathrm{I}} \xrightarrow{\text{red}} disamis_{\mathrm{III}}$

(vi) $celarent_{\mathrm{I}} \xrightarrow{\text{conv}} cesare_{\mathrm{II}}$

(vii) $celarent_{\mathrm{I}} \xrightarrow{\text{conv}} camestres_{\mathrm{II}}$

(viii) $\textit{celarent}_{\mathrm{I}} \xrightarrow{\text{red}} \textit{festino}_{\mathrm{II}}$

(ix) $\textit{camestres}_{\mathrm{II}} \xrightarrow{\text{red}} \textit{darii}_{\mathrm{I}}$

(x) $\textit{cesare}_{\mathrm{II}} \xrightarrow{\text{red}} \textit{ferio}_{\mathrm{I}}$

(xi) $\textit{darii}_{\mathrm{I}} \xrightarrow{\text{conv}} \textit{datisi}_{\mathrm{III}}$

(xii) $\textit{ferio}_{\mathrm{I}} \xrightarrow{\text{conv}} \textit{ferison}_{\mathrm{III}}$

Beispiele für subalterne Modi.

(i) $\textit{celaront}_{\mathrm{I}} \xrightarrow{\text{conv}} \textit{cesaro}_{\mathrm{II}}$ (da nur Konversion der Prämissen)

(ii) $\textit{felapton}_{\mathrm{III}}$ $\qquad$ $\textit{camestros}_{\mathrm{II}}$

$$\begin{array}{c} M\ e\ P \\ M\ a\ S \\ \hline S\ o\ P \end{array} \quad \xrightarrow{\text{red}} \quad \begin{array}{c} S\ a\ P \\ M\ e\ P \\ \hline M\ o\ S \end{array}$$

(damit letztlich auf $\textit{barbari}_{\mathrm{I}}$ zurückgeführt)

Beispiele für die vierte Figur.

(i) $\textit{celarent}_{\mathrm{I}} \xrightarrow{\text{conv}} \textit{calemes}_{\mathrm{IV}}$
(Prämissenvertauschung und Konversion der Konklusion)

(ii) $\textit{darii}_{\mathrm{I}} \xrightarrow{\text{conv}} \textit{dimatis}_{\mathrm{IV}}$

(iii) $\textit{ferio}_{\mathrm{I}} \xrightarrow{\text{conv}} \textit{fresison}_{\mathrm{IV}}$ (beide Prämissen konvertiert)

(iv) $\textit{celaront}_{\mathrm{I}} \xrightarrow{\text{conv}} \textit{fesapo}_{\mathrm{IV}}$ □

Bemerkungen.

Aristoteles meint, nur *reductio* und Konversion zu benutzen. Tatsächlich muß er aber die Subalternationsregel verwenden oder alternativ die subalternen Modi. Um z. B. $S\ e\ P$ als Widerspruch zu $S\ a\ P$ aufzufassen, muß man benutzen, daß S nichtleer ist. *De facto* benutzt man z. B. bei der Ableitung von $\textit{felapton}_{\mathrm{III}}$ den Modus $\textit{barbari}_{\mathrm{I}}$ als Ausgangspunkt.

D. h. es ist nicht völlig korrekt, daß man nur die vier vollkommenen Syllogismen benötigt, um alle anderen zu bekommen. Jedenfalls funktioniert das nicht, wenn man keine Subalternationsregel hat; bzw., wenn man keine Subalternationsregel hat, dann muß man die subalternen vollkommenen Syllogismen $\textit{barbari}_{\mathrm{I}}$ und $\textit{celaront}_{\mathrm{I}}$ verwenden. Wenn man eine Konklusion erhalten will, z. B. in der dritten Figur, bei der eingeht, daß ein Begriff nichtleer sein muß, dann muß man eine entsprechende Prämisse benutzen, bei der der entsprechende Begriff nichtleer ist.

Die Rückführung der Syllogismen der vierten Figur auf die der ersten Figur ist nicht aristotelisch, sondern wurde später durchgeführt.

10.3 Ekthesis

Ein weiteres aristotelisches Prinzip, das der Rückführung von Syllogismen auf die vollkommenen Modi der ersten Figur dient, kann hier nicht behandelt werden: die sog. “Ekthesis”. Bei diesem seit Aristoteles intensiv diskutierten und nicht unumstrittenen Prinzip handelt es sich um die Äquivalenz von $S\ i\ P$ mit “es gibt N, so daß $N\ a\ S$ und $N\ a\ P$ gilt”, und die Äquivalenz von $S\ o\ P$ mit “es gibt N, so daß $N\ a\ S$ und $N\ e\ P$ gilt”. Im ersten Fall ist der Umfang von N die Schnittmenge der Umfänge von S und P, im zweiten Fall die Differenzmenge der Umfänge von S und P.

10.4 Leibniz’ Axiomatik der Syllogistik

Literatur
W. Lenzen, *Das System der Leibnizschen Logik*, Berlin 1990.

Wenn man nur die ersten drei syllogistischen Figuren als genuine Figuren ansieht, dann ergibt sich ein elegantes Axiomatisierungsresultat, in bezug auf das jede der ersten drei syllogistischen Figuren gleichwertig ist.

Theorem 10.3 (Leibniz)
Die gültigen syllogistischen Modi der ersten, zweiten oder dritten Figur reichen aus, um alle gültigen Modi der Figuren I–III zu generieren, wobei als Schlußregel ausschließlich die reductio verwendet wird (neben Prämissenvertauschungen, die immer implizit zugelassen werden).

Beweis.

$$\begin{array}{rcccl}
\mathit{barbara}_{\mathrm{I}} & \stackrel{\mathrm{red}}{\longleftrightarrow} & \mathit{baroco}_{\mathrm{II}} & \stackrel{\mathrm{red}}{\longleftrightarrow} & \mathit{bocardo}_{\mathrm{II}} \\
\mathit{celarent}_{\mathrm{I}} & \stackrel{\mathrm{red}}{\longleftrightarrow} & \mathit{festino}_{\mathrm{II}} & \stackrel{\mathrm{red}}{\longleftrightarrow} & \mathit{disamis}_{\mathrm{III}} \\
\mathit{darii}_{\mathrm{I}} & \stackrel{\mathrm{red}}{\longleftrightarrow} & \mathit{camestres}_{\mathrm{II}} & \stackrel{\mathrm{red}}{\longleftrightarrow} & \mathit{ferison}_{\mathrm{III}} \\
\mathit{ferio}_{\mathrm{I}} & \stackrel{\mathrm{red}}{\longleftrightarrow} & \mathit{cesare}_{\mathrm{II}} & \stackrel{\mathrm{red}}{\longleftrightarrow} & \mathit{datisi}_{\mathrm{III}} \\
[\mathit{barbari}_{\mathrm{I}} & \stackrel{\mathrm{red}}{\longleftrightarrow} & \mathit{camestros}_{\mathrm{II}} & \stackrel{\mathrm{red}}{\longleftrightarrow} & \mathit{felapton}_{\mathrm{III}}] \\
[\mathit{celaront}_{\mathrm{I}} & \stackrel{\mathrm{red}}{\longleftrightarrow} & \mathit{cesaro}_{\mathrm{II}} & \stackrel{\mathrm{red}}{\longleftrightarrow} & \mathit{darapti}_{\mathrm{III}}]
\end{array}$$

□

Bemerkung.
Die Anwendung der Reduktionsregel führt aus der vierten Figur nicht heraus (warum?). Das war für Leibniz ein Grund dafür, die vierte Figur als minderwertig anzusehen. Die vierte Figur erhält man aus der ersten, zweiten oder dritten Figur nur durch Hinzunahme der Konversionsregel (vgl. die Beispiele zur vierten Figur im Beweis des vorigen Theorems).

Es gilt damit:

Theorem 10.4
Alle gültigen syllogistischen Modi der Figuren I–IV lassen sich aus den gültigen Modi von I, II oder III durch Verwendung von Konversion und reductio *gewinnen.*

Bemerkung.
Die Figuren I, II oder III reichen also jeweils zur Axiomatisierung aller syllogistischen Figuren aus. Die vierte Figur ist dazu nicht ausreichend. Dieses Resultat gilt natürlich nur relativ zu den gewählten Ableitungsregeln, d. h. *reductio* und Konversion, welche die wesentlichen Ableitungsregeln waren, die in der Tradition seit Aristoteles bis ins 19. Jhd. betrachtet wurden. Nimmt man andere Ableitungsregeln hinzu, dann ändert sich das Bild.

10.5 Leibniz' arithmetische Interpretation der Syllogistik

Literatur

W. Lenzen, *Das System der Leibnizschen Logik*, Berlin 1990.

J. Mittelstraß/P. Schroeder-Heister, *Zeichen, Kalkül, Wahrscheinlichkeit. Elemente einer Mathesis universalis bei Leibniz*, in: H. Stachowiak (ed.), *Pragmatik. Handbuch pragmatischen Denkens. Bd. I. Pragmatisches Denken von den Ursprüngen bis zum 18. Jahrhundert.* Hamburg 1986, S. 392–414 (vgl. http://www-ls.informatik.uni-tuebingen.de/psh/forschung/publikationen/Pragmatik1986.pdf).

Definition 10.5
Eine *Leibniz-Interpretation* $\mathscr{L}$ ist eine Zuordnung von Paaren teilerfremder natürlicher Zahlen $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ zu Begriffsbuchstaben.

Zum Beispiel ist

$$\mathscr{L}\begin{cases} P \mapsto (2,3) \\ Q \mapsto (5,8) \\ \quad\vdots \end{cases} \qquad \text{Schreibweise:} \begin{cases} \mathscr{L}(P) = (2,3) & \mathscr{L}_l(P) = 2 & \mathscr{L}_r(P) = 3 \\ \mathscr{L}(Q) = (5,8) & \mathscr{L}_l(Q) = 5 & \mathscr{L}_r(Q) = 8 \\ \quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots \end{cases}$$

eine Leibniz-Interpretation; nicht jedoch $P \mapsto (2,4)$ oder $Q \mapsto (6,9)$.

Motivation bei Leibniz.
Die linke Komponente $\mathscr{L}_l$ soll die *positiven* Merkmale eines Begriffs und die rechte Komponente $\mathscr{L}_r$ die *negativen* Merkmale eines Begriffs darstellen. Teilerfremdheit soll der Widerspruchsfreiheit entsprechen.
Der allgemeinere Hintergrund ist das Leibnizsche Programm, Denken auf Rechnen zurückzuführen. In diesem Zusammenhang sollen die Merkmale eines Begriffs durch Faktoren eines Produkts von Zahlen dargestellt werden.

Definition 10.6

(i) $S\ a\ P$ ist *wahr unter* $\mathscr{L}$, falls gilt: $\mathscr{L}_l(P)$ teilt $\mathscr{L}_l(S)$ und $\mathscr{L}_r(P)$ teilt $\mathscr{L}_r(S)$.

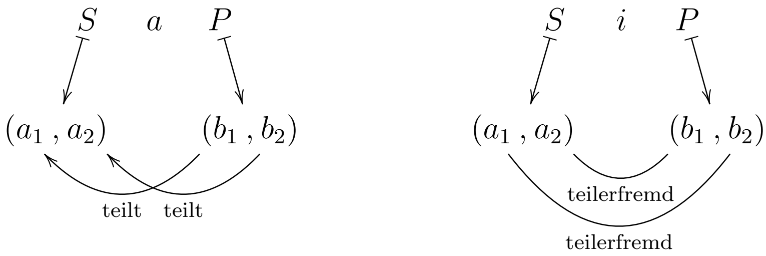
(ii) $S\ i\ P$ ist *wahr unter* $\mathscr{L}$, falls gilt: $\mathscr{L}_l(P)$ und $\mathscr{L}_r(S)$, sowie $\mathscr{L}_r(P)$ und $\mathscr{L}_l(S)$ sind jeweils teilerfremd.

(iii) $S\ e\ P$ ist *wahr unter* $\mathscr{L}$, falls $S\ i\ P$ falsch unter $\mathscr{L}$ ist.

(iv) $S\ o\ P$ ist *wahr unter* $\mathscr{L}$, falls $S\ a\ P$ falsch unter $\mathscr{L}$ ist.

(Vgl. logisches Quadrat.)

Anschaulich:



Definition 10.7
Eine Leibniz-Interpretation $\mathscr{L}$, unter der ein syllogistisches Aussagenschema wahr ist, heißt auch *Leibniz-Modell* dieses Aussageschemas.

Beispiel.

$$\mathscr{L}\begin{cases} P \mapsto (3,5) \\ S \mapsto (9,10) \\ \quad\vdots \end{cases}$$

ist Leibniz-Modell von $S\ a\ P$ und auch Leibniz-Modell von $S\ i\ P$.
Denn: 3 teilt 9, 5 teilt 10. 3 und 10, sowie 5 und 9 sind jeweils teilerfremd.

Definition 10.8
Ein syllogistisches Schlußschema ist *Leibniz-gültig*, wenn jedes Leibniz-Modell $\mathscr{L}$ der Prämissen auch Leibniz-Modell der Konklusion ist.
Ein syllogistisches Schlußschema ist *Leibniz-ungültig*, wenn es eine Leibniz-Interpretation $\mathscr{L}$ gibt, die Leibniz-Modell der Prämissen ist, nicht jedoch der Konklusion. (Eine solche Interpretation heißt auch *Leibniz-Gegenbeispiel*.)

Beispiele.

(i) Ein Leibniz-Gegenbeispiel zu $\dfrac{\begin{matrix} M\ i\ P \\ S\ i\ M \end{matrix}}{S\ i\ P}$ ist $\mathscr{L}\begin{cases} M \mapsto (3,7) \\ P \mapsto (9,5) \\ S \mapsto (10,7) \\ \quad\vdots \end{cases}$

$M\ i\ P$ ist unter $\mathscr{L}$ wahr, da 3 und 5, sowie 7 und 9 teilerfremd sind.
$S\ i\ M$ ist unter $\mathscr{L}$ wahr, da 3 und 7, sowie 7 und 10 teilerfremd sind.
$S\ i\ P$ ist unter $\mathscr{L}$ jedoch falsch, da 5 und 10 nicht teilerfremd sind.

(ii) Ein Leibniz-Gegenbeispiel zu $\dfrac{\begin{matrix} M\ i\ P \\ S\ a\ M \end{matrix}}{S\ i\ P}$ ist $\mathscr{L}\begin{cases} M \mapsto (3,7) \\ P \mapsto (9,5) \\ S \mapsto (15,7) \\ \quad\vdots \end{cases}$

Es läßt sich beweisen:

Theorem 10.9
Ein syllogistisches Schlußschema ist gültig *genau dann, wenn es* Leibniz-gültig *ist.*

Beweis.
Wir drücken im folgenden mit dem Zeichen $\models$ die Leibniz-gültige Folgerung aus.

Verifikation des logischen Quadrats
Kontradiktorisches Verhältnis:

$$(*)\begin{cases} S\ a\ P \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg S\ o\ P \\ S\ o\ P \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg S\ a\ P \\ S\ i\ P \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg S\ e\ P \\ S\ e\ P \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \neg S\ i\ P \end{cases}$$

Dies folgt aus der Definition.

Konträres Verhältnis:

$$S\ a\ P \models \neg S\ e\ P$$
$$S\ e\ P \models \neg S\ a\ P$$

Zu zeigen:

$$\text{(i)}\quad S\ a\ P \models S\ i\ P$$
$$\text{(ii)}\quad S\ e\ P \models S\ o\ P$$

Die Gültigkeit der konträren Beziehung ist damit auf diejenige der Subalternation zurückgeführt.

Subkonträres Verhältnis:

$$\text{(i)}\quad \neg S\ i\ P \models S\ o\ P$$
$$\text{(ii)}\quad \neg S\ o\ P \models S\ i\ P$$

Wieder sind (i) und (ii) zu zeigen.

Subalternation:

Ad (i): Sei $S \mapsto (s_1, s_2)$ und $P \mapsto (p_1, p_2)$. Falls p_1 und s_2 gemeinsamen Teiler a hätten, dann würde a p_1 und damit s_1 teilen; a wäre also gemeinsamer Teiler von s_1 und s_2.

Falls p_2 und s_1 gemeinsamen Teiler b hätten, dann würde b p_2 und damit s_2 teilen; b wäre also gemeinsamer Teiler von p_1 und p_2.

Also gilt $S\ i\ P$.

Ad (ii): Zu zeigen ist $\dfrac{\neg S\ i\ P}{\neg S\ a\ P}$. Sei $S \mapsto (s_1, s_2)$ und $P \mapsto (p_1, p_2)$.

Annahme: s_1, p_2 haben gemeinsamen Teiler a (1. Fall) oder p_1, s_2 haben gemeinsamen Teiler b (2. Fall).

1. Fall: p_2 kann nicht s_2 teilen, da sonst a auch s_2 teilen würde.

2. Fall: analog.

Also gilt nicht: $S\ a\ P$.

Verifikation der ersten Figur
barbara$_{\mathrm{I}}$ trivial.

celarent$_{\mathrm{I}}$

$$\frac{\begin{array}{c} M\ e\ P \\ S\ a\ M \end{array}}{S\ e\ P} \quad \text{d.h.} \quad \frac{\begin{array}{c} \neg M\ i\ P \\ S\ a\ M \end{array}}{\neg S\ i\ P}$$

Sei m_1 und p_2 *nicht* teilerfremd, mit gemeinsamem Teiler a. Dann ist a Teiler von s_1, d. h. s_1 und p_2 sind teilerfremd.
Entsprechend, falls m_2 und p_1 nicht teilerfremd.

darii$_{\mathrm{I}}$

$$\frac{\begin{array}{c} M\ a\ P \\ S\ i\ M \end{array}}{S\ i\ P}$$

Sei s_1 und p_2 *nicht* teilerfremd, mit gemeinsamem Teiler a. Dann ist a Teiler von m_2, d. h. Widerspruch zur zweiten Prämisse.
Entsprechend, falls s_2 und p_1 nicht teilerfremd.

ferio$_{\mathrm{I}}$

$$\frac{\begin{array}{c} M\ e\ P \\ S\ i\ M \end{array}}{S\ o\ P} \quad \text{d.h.} \quad \frac{\begin{array}{c} \neg M\ i\ P \\ S\ i\ M \end{array}}{\neg S\ a\ P}$$

Sei m_1 und p_2 *nicht* teilerfremd, mit gemeinsamem Teiler a. Falls $S\ a\ P$, dann ist a Teiler von s_2, d. h. s_2 und m_1 sind nicht teilerfremd, im Widerspruch zu $S\ i\ M$.

Die Gültigkeit der Konversionsregel ergibt sich daraus, daß die Wahrheitsbedingungen für $S\ i\ P$ symmetrisch sind und $S\ e\ P$ als Negation von $S\ i\ P$ definiert ist.

Die Gültigkeit der *reductio* ergibt sich unmittelbar aus $(*)$. Da man alle Syllogismen nach der oben beschriebenen Leibnizschen Methode durch *reductio* und Konversion auf solche der ersten Figur zurückführen kann, wobei die Subalternation für die subalternen Modi benötigt wird, erhält man alle gültigen Syllogismen. □