Übungen zur Vorlesung Mathematischen Logik — Blatt 9

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2010/11**

Aufgabe 33 (3 + 3 + 3 Punkte)

Die Sprache $\mathcal{L}$ umfasse ein einstelliges Funktionszeichen f und ein zweistelliges Funktionszeichen g. Wir betrachten drei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ über der Menge $\mathbb{N}$ und interpretieren g überall durch die Addition und f in $\mathfrak{A}_1$ durch die Abbildung $n \mapsto 2$, in $\mathfrak{A}_2$ durch $n \mapsto \min(n^2 + 2, 19)$ und in $\mathfrak{A}_3$ durch $n \mapsto n \bmod 4$.

Prüfen Sie durch formelle Auswertung, welche der folgenden Formeln in welchen Strukturen gültig sind:

1. $\forall x \forall y (f(g(x, y)) = f(x))$
2. $\forall x \exists y (f(g(x, y)) = f(x))$
3. $\exists y \forall x (f(g(x, y)) = f(x))$

Aufgabe 34 (2 + 4 + 2 Punkte)

Seien ϕ, ψ $\mathcal{L}$-Formeln, sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur.

1. Zeigen Sie: Wenn $\mathfrak{A} \models \phi$ oder $\mathfrak{A} \models \psi$, dann $\mathfrak{A} \models \phi \vee \psi$.
2. Zeigen Sie, dass die Umkehrung von a) nicht allgemein gilt (Gegenbeispiel und Nachweis, dass es ein Gegenbeispiel ist).
3. Zeigen Sie, dass die Umkehrung von a) gilt, sofern ϕ und ψ geschlossene Formeln sind (d.h. sofern $\mathrm{FV}(\phi) = \mathrm{FV}(\psi) = \emptyset$).

Aufgabe 35 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass für eine beliebige Formel ϕ die Formel $\exists x(\phi \to \forall x \phi)$ allgemeingültig ist.

Aufgabe 36 (2+2+3 Zusatzpunkte)

Beweisen Sie den Satz 10.7 aus dem Skript. Geben zudem unter 10.7 (3) eine Formel ϕ an mit $\forall x \exists y \phi \not\models \exists y \forall x \phi$.

Geben Sie dieses Blatt bitte bis zum 6. Januar ab, damit die Übungen am 11. Januar fortgesetzt werden können! (Laden Sie am besten Ihre (gescannte) Abgabe über das Internet-Formular hoch.)