I Aussagenlogik

§ 1 Sprachaufbau und Induktion

In diesem Abschnitt wird die formale Sprache der Aussagenlogik (AL) eingeführt. Zudem werden einige zentrale Konzepte der Logik, wie etwa induktive Definitionen, behandelt.

Vorbemerkung (Sprachebenen): In der Logik werden *formale Sprachen* behandelt. Deshalb ist es in der Logik notwendig, zwischen verschiedenen Sprachebenen zu unterscheiden. Dabei wird als *Objektsprache* diejenige Sprache bezeichnet, die in der Logik formal eingeführt wird (die „Objekt" der Untersuchung ist); die *Metasprache* ist hingegen diejenige Sprache, in der über die Objektsprache gesprochen wird.

1.1 DEF (Alphabet): Das Alphabet der Sprache der Aussagenlogik besteht aus folgenden (objektsprachlichen) Zeichen:

- *Aussagesymbole* (Aussagevariable): $p_0,\ p_1,\ p_2,\ \ldots$
  AV $:= \{p_i :\ i \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge der Aussagevariablen.
- *Junktoren* (Konnektive, Verknüpfungszeichen, *engl.: connective*):
  0-stellig: $\bot$ (das Falsum, die Absurdität)
  1-stellig: $\neg$ (die Negation)
  2-stellig: $\land$ (die Konjunktion, das Und-Zeichen),
  $\lor$ (die Disjunktion oder Adjunktion, das Oder-Zeichen),
  $\to$ (das Konditional oder die Subjunktion, der Implikations-Pfeil),
  $\leftrightarrow$ (das Bikonditional oder die Bisubjunktion, der Äquivalenz-Pfeil)
- *Hilfszeichen*: (,) (Klammer-Zeichen)

Bemerkungen:

(1) Die Klammern werden benötigt, da wir eine Infix-Notation für die Objektsprache verwenden werden. In Präfix-Notation (polnische Notation) kann auf die Klammern verzichtet werden.

(2) Als Metavariable (Variable in der Metasprache) verwenden wir häufig $\circ$ für die zweistelligen Junktoren und $p,\ q,\ r$ für die Aussagevariablen.

1.2 DEF (Formel): Die Menge PROP der *AL-Aussagen* (oder AL-Formeln, *engl.: proposition*) ist die kleinste Menge X für die gilt:

(1) für jedes $k \in \mathbb{N}$: $p_k \in X$, $\perp \in X$

(2) $\phi, \psi \in X \quad \Rightarrow \quad (\phi \circ \psi) \in X$

(3) $\phi \in X \quad \Rightarrow \quad (\neg\phi) \in X$

Die Aussagevariablen und das Falsum werden auch *atomare Formeln* oder *Atome* genannt. ATM := AV $\cup \{\perp\}$ ist entspreched die *Menge der Atome*.

Bemerkungen:

(1) ϕ und ψ werden hier als Meta-Variablen für beliebige Zeichenketten über dem Alphabet verwendet; in Zukunft zumeist nur noch als Metavariablen für Formeln aus PROP.

(2) In der Aussagenlogik unterscheiden wir nicht zwischen Aussagen und Formeln. Diese Unterscheidung wird erst in der Prädikatenlogik relevant.

(3) Die Klauseln (1) – (3) in der Definition der Formel können auch als formale Regeln eines *Bildungskalküls* für AL-Formeln aufgefaßt werden.

Konvention (Klammerersparnis): Um Formeln lesbarer aufzuschreiben, wird folgende Konvention für Klammerersparnis eingeführt:

(1) Außenklammern dürfen weggelassen werden.

(2) Die Negation ($\neg$) bindet stärker als alle zweistelligen Junkoren.

(3) Konjunktion ($\wedge$) und Disjunktion ($\vee$) binden stärker als Konditional ($\rightarrow$) und Bikonditional ($\leftrightarrow$).

Die Klammern werden lediglich im Aufschrieb weggelassen, müssen aber bei den Formeln weiterhin mitgedacht werden. So ändert sich etwa die Anzahl der in einer Formel vorkommenden Zeichen durch die Klammerersparnis nicht.

Notation: Das Zeichen $\doteq$ bedeutet *ist von der Form, ist syntaktisch gleich* („Zeichengleichheit“) und wird vor allem für die syntaktische Gleichheit von Formeln verwendet. Bei der Verwendung von $\doteq$ ist insbesondere zu beachten, dass diese unabhängig von der Klammerersparnis ist.

Beispiele ($\doteq$):

(1) $(\neg p_1) \doteq \neg p_1$ (links und rechts kommen die gleichen Zeichen vor, rechts wurden die Klammern nur aufgrund der Konvention zur Klammerersparnis nicht explizit hingeschrieben)

(2) $(p_0 \wedge p_0) \wedge p_0 \not\doteq p_0 \wedge (p_0 \wedge p_0)$ (Links sind die ersten beiden Zeichen jeweils eine öffnende Klammer, rechts folgt der ersten öffnenden Klammer – nicht explizit hingeschrieben – das Zeichen p_0.)

Induktions-Prinzip: Jeder induktiven Definition (wie etwa der Definition der AL-Formeln) entspricht ein Induktions-Prinzip. Die induktive Definition beschreibt, wie ein Bereich (Gegenstands-Bereich, Zahlbereich) aufgebaut wird; das Induktions-Prinzip sagt, wie dann Beweise über diesen Bereich in entsprechenden Schritten geführt und damit Behauptungen, die für alle Objekte dieses Bereichs gelten, bewiesen werden.

Beispiel (Natürliche Zahlen): Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist die kleinste Menge X (der Schnitt über alle derartigen Mengen), die folgendes erfüllt:

(1) $0 \in X$

(2) $n \in X \quad \Rightarrow \quad n' \in X$

Hierbei ist n' der Nachfolger von n.

Aussagen A über diesen Zahlbereich (Aussagen, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelten) werden mit der gewohnten vollständigen Induktion geführt. Das bedeutet:

Theorem: Sei A eine Aussage, so dass $A(0)$ gilt und aus $A(n)$ schon $A(n')$ folgt. Dann gilt die Aussage $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Bew.:

Betrachte $X := \{n \in \mathbb{N} : \ A(n)\}$. Offenbar ist $X \subseteq \mathbb{N}$.

Ferner gilt nach Annahme über A: $0 \in X$, und mit $n \in X$ folgt schon $n' \in X$, d.h. (1) und (2) gelten. Damit ist aber $\mathbb{N} \subseteq X$, da $\mathbb{N}$ die kleinste derartige Menge ist.

Also ist $\mathbb{N} = X$, und die Aussage ist bewiesen. q.e.d.

Diese Korrespondenz zwischen einer induktiven Definitionen und einem Induktionsprinzip gilt allgemein, insbesondere auch für die induktive Definition der AL-Formeln.

1.3 Theorem (Induktionsprinzip für AL-Formeln):

Sei A eine Eigenschaft, so dass folgendes gilt:

(1) Für jedes $k \in \mathbb{N}$: $A(p_k)$ und $A(\bot)$

(2) $A(\phi),\ A(\psi) \quad \Rightarrow \quad A(\,(\phi \circ \psi)\,)$

(3) $A(\phi) \quad \Rightarrow \quad A(\,(\neg\phi)\,)$

Dann gilt $A(\phi)$ für jede Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$.

Bew.:

Betrachte die Menge $X := \{\phi \in \mathrm{PROP} : \ A(\phi)\}$. Offenbar ist $X \subseteq \mathrm{PROP}$.

Es gilt: für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $p_k \in X$ und $\bot \in X$.

Ferner: mit $\phi, \psi \in X$ ist $(\phi \circ \psi) \in X$ und $(\neg\phi) \in X$.

Damit gelten (1) – (3).

Da PROP die kleinste derartige Menge ist, gilt: $\text{PROP} \subseteq X$.

Damit gilt $\text{PROP} = X$, und die Behauptung ist gezeigt. q.e.d.

Bemerkung: Das Theorem scheint auf den ersten Blick vielleicht ein wenig technisch; dennoch hat das Theorem eine zentrale Bedeutung, da es letztlich die Begründung dafür ist, dass in der Logik Induktionen über dem Formelaufbau geführt werden können.

Beispiel (Induktion über dem Formelaufbau): Mit oben bewiesenem Induktionsprinzip soll folgende (einfache) Behauptung ausführlich gezeigt werden:

Für jede Formel $\phi \in \text{PROP}$ gilt, dass in ϕ eine gerade Anzahl von Klammern vorkommt.

Bew.:

IA: Zeige die Aussage für atomare Formeln:

$\bot$: Beim Falsum ($\bot$) kommen $0 = 2 \cdot 0$ Klammern vor. Also ist die Aussage für $\bot$ richtig.

p_k: Bei jeder Aussagevariable p_k ($k \in \mathbb{N}$) kommen $0 = 2 \cdot 0$ Klammern vor. Also ist die Aussage für alle Aussagevariablen richtig.

IV: Angenommen, die Aussage ist richtig für $\phi, \psi \in \text{PROP}$. Also:
In ϕ kommen $2n$ und in ψ kommen $2m$ Klammern vor mit $n, m \in \mathbb{N}$.

$(\phi \circ \psi)$: Die Formel $(\phi \circ \psi)$ hat dann $2n + 2m + 2 = 2 \cdot (n + m + 1)$ viele Klammern. Damit ist die Anzahl der Klammern gerade und die Aussage ist richtig für $(\phi \circ \psi)$.

$(\neg\phi)$: Die Formel $(\neg\phi)$ hat dann $2n + 2 = 2 \cdot (n + 1)$ viele Klammern. Damit ist die Anzahl der Klammern ebenso gerade und die Aussage ist richtig für $(\neg\phi)$.

Damit gilt die Aussage für alle Formeln $\phi \in \text{PROP}$. q.e.d.

1.4 DEF (Bildungsfolge): Sei $\phi \in \text{PROP}$ eine Formel. Eine *Bildungsfolge* (*engl.: formation sequence*) von ϕ (auch: für ϕ) ist eine Ableitung in dem Kalkül, der durch die Bildungsregeln für AL-Formeln vorgegeben wird.

D.h.: eine Bildungsfolge von ϕ ist eine Folge $\phi_0,\ \phi_1, \ldots, \phi_n \doteq \phi$, so dass für jedes i ($0 \leq i \leq n$) eine der folgenden Fälle gilt:

(1) ϕ_i ist atomar.

(2) $\phi_i \doteq (\phi_k \circ \phi_l)$ mit $0 \leq k, l < i$.

(3) $\phi_i \doteq (\neg\phi_k)$ mit $0 \leq k < i$.

Bemerkungen (Bildungsfolgen):

(1) In einer Bildungsfolge für ϕ können *irrelevante* Bestandteile vorkommen. (So können in einer bestehenden Bildungsfolge für ϕ vor jedem Folgenglied beliebige atomare Formeln eingefügt werden. Die Folge bleibt dabei eine Bildungsfolge für ϕ).

(2) Jedes (echte) Anfangsstück einer Bildungsfolge ist selbst eine Bildungsfolge (möglicherweise für eine andere Formel).

(3) Entsteht eine Folge aus dem Hintereinanderschreiben von zwei Bildungsfolgen, so ist diese ebenfalls eine Bildungsfolge.

Bemerkung: Im folgenden Theorem (und in seinem Beweis) wird ϕ ausnahmsweise wieder als Meta-Variable für beliebige Zeichenketten, nicht nur für Formeln, verwendedet.

1.5 Theorem (Bildungsfolgen): PROP ist die Menge aller Ausdrücke ϕ, für die es eine Bildungsfolge gibt.

Bew.: Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Ausdrücke, für die es eine Bildungsfolge gibt.

Zeige: PROP $\subseteq \mathcal{F}$ durch Induktion über den Formelaufbau.

IA: Atomare Aussagen (das Falsum und Aussagevariablen) sind (nach Definition) schon einelementige Bildungsfolgen.

IV: Sei $\phi_0, \ldots, \phi_n \doteq \phi$ und $\psi_0, \ldots, \psi_m \doteq \psi$ Bildungsfolgen für $\phi, \psi \in$ PROP mit $n, m \in \mathbb{N}$.

$(\phi \circ \psi)$: Die Folge $\phi_0, \ldots, \phi_n, \psi_0 \ldots, \psi_m, (\phi \circ \psi)$ ist eine Bildungsfolge für $(\phi \circ \psi)$.

$(\neg\phi)$: Die Folge $\phi_0, \ldots, \phi_n, (\neg\phi)$ ist eine Bildungsfolge für $(\neg\phi)$.

Damit jedes $\phi \in$ PROP schon Element von $\mathcal{F}$ und PROP $\subseteq \mathcal{F}$.

Zeige nun $\mathcal{F} \subseteq$ PROP:

Wir zeigen durch Induktion nach n die etwas stärkere Aussage, dass für alle Bildungsfolgen $\phi_0, \ldots, \phi_n$ der Länge $(n+1)$ und dort für alle Folgenglieder ϕ_k $(0 \leq k \leq n)$ gilt: $\phi_k \in$ PROP.

$n = 0$: ϕ_0 ist nach Definition von Bildungsfolgen eine atomare Formel. Es gilt also $\phi_0 \in$ PROP.

IV: Die Aussage gelte für jede Bildungsfolge $\phi_0, \ldots, \phi_n$.

$n+1$: Sei $\phi_0, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1}$ eine (längere) Bildungsfolge.

Für jedes k mit $0 \leq k < n+1$ gilt: ϕ_k ist auch in der Bildungsfolge $\phi_0, \ldots \phi_n$. Also ist nach Induktionsvorraussetzung $\phi_k \in$ PROP.

Nach Definition von Bildungsfolgen gilt für ϕ_{n+1} eine der folgenden Fälle:

(1) ϕ_{n+1} ist atomar, also $\phi_{n+1} \in \mathrm{PROP}$.

(2) $\phi_{n+1} \doteq (\phi_k \circ \phi_l)$ mit $0 \leq k, l < n$.
Damit sind ϕ_k und ϕ_l Folgenglieder der Bildungsfolge $\phi_0, \ldots, \phi_n$, und nach Induktionsannahme gilt: $\phi_k, \phi_l \in \mathrm{PROP}$.
Damit ist aber $(\phi_k \circ \phi_l) \in \mathrm{PROP}$ nach Definition von PROP.

(3) analog zu (2) gilt: $\phi_{n+1} \doteq (\neg\phi_k) \in \mathrm{PROP}$.

Damit wurde insbesondere gezeigt, dass für jede Bildungsfolge $\phi_0, \ldots \phi_n$ gilt: $\phi_n \in \mathrm{PROP}$. Damit $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{PROP}$. Q.E.D.

Bemerkung: Der folgende Rekursionssatz gewährleistet, dass durch rekursive Definitionen über der Menge PROP eingeführte Funktionen wohldefiniert sind. Damit hat der Rekursionssatz eine ähnlich zentrale Bedeutung wie das Induktionsprinzip. In dieser Weise wird später z.B. die Semantik der AL definiert.

1.6 Theorem (Rekursionssatz/ Definition durch Rekursion): Seien für eine beliebige Menge $A \neq \varnothing$ Abbildungen $H_\circ : A \times A \to A$, $H_\neg : A \to A$ und $H_{\mathrm{ATM}} : \mathrm{ATM} \to A$ gegeben.

Dann gibt es genau eine Abbildung $F : \mathrm{PROP} \to A$ mit:

(1) für jedes $\phi \in \mathrm{ATM}$: $F(\phi) = H_{\mathrm{ATM}}(\phi)$

(2) $F(\,(\phi \circ \psi)\,) = H_\circ(\,F(\phi), F(\psi)\,)$

(3) $F(\,(\neg\phi)\,) = H_\neg(\,F(\phi)\,)$

Bew.:

Zu zeigen ist die Existenz und die Eindeutigkeit der Abbildung F.

Existenz:

Sei $F^\star \subseteq \mathrm{PROP} \times A$ die kleinste Menge, die folgende Bedingungen erfüllt:

- Für jedes atomare $\phi \in \mathrm{PROP}$: $\langle \phi, H_{\mathrm{ATM}}(\phi) \rangle \in F^\star$
- Falls $\langle \phi, a \rangle, \langle \psi, b \rangle \in F^\star$, dann auch: $\langle (\phi \circ \psi), H_\circ(a, b) \rangle \in F^\star$
- Falls $\langle \phi, a \rangle \in F^\star$, dann auch: $\langle (\neg\phi), H_\neg(a) \rangle \in F^\star$

Es gilt nun:

Für jedes $\phi \in \mathrm{PROP}$ gibt es ein $a \in A$ mit: $\langle \phi, a \rangle \in F^\star$. (Leichte Induktion über dem Formelaufbau von ϕ.)

Ebenfalls gilt: Dieses a ist für jedes ϕ eindeutig bestimmt. (Erneut Induktion über dem Formelaufbau; hier geht die Minimalität von $F^\star$ wesentlich ein.)

Damit: Sei $F : \mathrm{PROP} \to A : \phi \mapsto a$ mit $\langle \phi, a \rangle \in F^\star$. F ist offensichtlich eine Abbildung, die (1) – (3) erfüllt. Damit ist die Existenz gezeigt.

Eindeutigkeit:

Seien F, G zwei Abbildungen, die beide (1) – (3) erfüllen. Zeige, dass dann für jede Formel $\phi \in \text{PROP}$ gilt: $F(\phi) = G(\phi)$

ϕ atomar: Wegen (1) gilt: $F(\phi) = H_{\text{ATM}}(\phi) = G(\phi)$

IV: Für ϕ, ψ gelte $F(\phi) = G(\phi)$.

$(\phi \circ \psi)$: Mit (2) und IV gilt:

$$F(\,(\phi \circ \psi)\,) = H_\circ(\,F(\phi), F(\psi)\,) \overset{(IV)}{=} H_\circ(\,G(\phi), G(\psi)\,) = G(\,(\phi \circ \psi)\,)$$

$(\neg\phi)$: Analog zum Fall $(\phi \circ \psi)$.

Insgesamt wurde die Existenz und Eindeutigkeit der Funktion F gezeigt. Q.E.D.

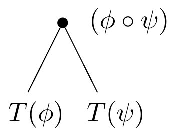
Im Folgenden werden nun einige Anwendungen des Rekursionssatzes, also rekursive Definitionen, angegeben.

1.7 DEF (Strukturbaum): Für eine Formel $\phi \in \text{PROP}$ ist sein *Strukturbaum* (Gliederungsbaum, *engl.: parsing tree*) T wie folgt rekursiv definiert:

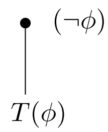
(1) für $\phi \in \text{ATM}$:

$T(\phi) :\simeq \quad \bullet\ \phi$

(2) $T(\,(\phi \circ \psi)\,) :\simeq$



(3) $T(\,(\neg\phi)\,) :\simeq$



1.8 DEF (Rang): Für eine Formel $\phi \in \text{PROP}$ ist ihr *Rang* r wie folgt rekursiv definiert:

(1) für $\phi \in \text{ATM}$: $r(\phi) := 0$

(2) $r(\,(\phi \circ \psi)\,) := \max\{r(\phi), r(\psi)\} + 1$

(3) $r(\,(\neg\phi)\,) := r(\phi) + 1$

1.9 DEF (Teilformel): Für eine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ ist $\mathrm{Sub}(\phi)$, die *Menge aller Teilformeln von* ϕ, wie folgt rekursiv definiert:

(1) für $\phi \in \mathrm{ATM}$: $\mathrm{Sub}(\phi) := \{\phi\}$

(2) $\mathrm{Sub}(\,(\phi \circ \psi)\,) := \{(\phi \circ \psi)\} \cup \mathrm{Sub}(\phi) \cup \mathrm{Sub}(\psi)$

(3) $\mathrm{Sub}(\,(\neg\phi)\,) := \{(\neg\phi)\} \cup \mathrm{Sub}(\phi)$

Eine Formel ψ heißt Teilformel von $\phi \in \mathrm{PROP}$, falls $\psi \in \mathrm{Sub}(\phi)$.

Statt $\psi \in \mathrm{Sub}(\phi)$ schreiben wir auch: $\psi \preceq \phi$; falls dabei $\psi \neq \phi$: $\psi \prec \phi$.

Offenbar gilt: $\phi \prec \psi \quad \Rightarrow \quad r(\phi) < r(\psi)$.

Ranginduktion: Man kann Aussagen über Formeln durch Induktion über ihrem Rang beweisen. Dies ist eine Induktion über den natürlichen Zahlen im üblichen Sinne. Wir formulieren hier das Prinzip der Ranginduktion als Prinzip der Wertverlaufsinduktion, bei der man nicht von n auf $n+1$ schließt, sondern von $< n$ auf n. Insbesondere ist bei dieser Induktion kein Induktionsanfang nötig. (Warum?)

Der Beweis des folgenden Satzes zeigt, dass die Ranginduktion aus der Induktion über dem Formelaufbau gewonnen werden kann, dass wir also auf ein eigenständiges arithmetisches Induktionsprinzip verzichten können. Dies gilt entsprechend auch an späteren Stellen, z.B. bei Induktionen über der Länge von Beweisen.

1.10 Theorem (Ranginduktion): Sei A eine Eigenschaft, so dass folgendes für Formeln $\psi \in \mathrm{PROP}$ gilt:

Aus dem Gelten von $A(\phi)$ für alle Formeln ϕ mit $r(\phi) < r(\psi)$ folgt schon das Gelten von $A(\psi)$. $(\dagger)$

Dann gilt $A(\phi)$ schon für jede Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$.

Etwas formaler:

$$\forall \psi \in \mathrm{PROP} : \Big((\forall \phi \in \mathrm{PROP} : r(\phi) < r(\psi) \Rightarrow A(\phi)) \Rightarrow A(\psi) \Big)$$

$$\Rightarrow \quad \forall \phi \in \mathrm{PROP} : A(\phi)$$

Bew.:

Es sei A eine Eigenschaft mit $(\dagger)$.

Zeige zunächst durch Induktion über dem Formelaufbau:

Für alle $\psi \in \mathrm{PROP}$ gilt folgendes: $\forall \phi \in \mathrm{PROP} : r(\phi) < r(\psi) \Rightarrow A(\phi)$.

ψ atomar: Trivialerweise gilt für alle Formeln ϕ mit $r(\phi) < r(\psi)$ (es gibt keine solchen!) schon $A(\phi)$.

IV: Angenommen Aussage ist von ψ und σ erfüllt.

($\psi \circ \sigma$): Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $r(\psi \circ \sigma) = r(\psi) + 1$.

Angenommen: Es gibt eine Formel τ mit $r(\tau) < r(\psi \circ \sigma)$, so dass $A(\tau)$ nicht gilt.

Dann kann τ aufgrund der IV keinen kleineren Rang haben als ψ. Also gilt: $r(\tau) = r(\psi)$.

Insbesondere gilt damit für alle Formeln ϕ mit kleinerem Rang als τ schon $A(\phi)$. Mit (†) folgt nun: $A(\tau)$. Widerspruch

Also gilt doch für alle Formeln ϕ mit $r(\phi) < r(\psi \circ \sigma)$: $A(\phi)$

($\neg\psi$): analog zum Fall ($\psi \circ \sigma$).

Zeige nun noch: $\forall \psi \in \mathrm{PROP} : A(\psi)$.

Sei $\psi \in \mathrm{PROP}$ beliebig. Für alle Formeln ϕ mit $r(\phi) < r(\psi)$ gilt mit obiger Induktion $A(\phi)$. Damit gilt mit (†): $A(\psi)$. q.e.d.

Bemerkung: Aus der Ranginduktion läßt sich umgekehrt die Induktion über dem Formelaufbau beweisen. Damit sind beide Induktionsprinzipien gleichwertig.

Es sollen noch einige Beispiele für Induktionen gegeben werden:

Beispiel (Transitivität von $\preccurlyeq$): Die Teilformel-Relation $\preccurlyeq$ ist transitiv.

Bew.:

Wir zeigen: $\phi \preccurlyeq \psi \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Sub}(\phi) \subseteq \mathrm{Sub}(\psi)$

durch Induktion über dem Rang n der Formel ψ:

Sei $\psi \in \mathrm{PROP}$ beliebig mit Rang $r(\psi) = n$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

IV: Angenommen, die Aussage gilt für jede Formel σ mit $r(\sigma) < n$.

Betrachte beliebige Teilformel $\phi \preccurlyeq \psi$:

Falls ψ atomar:

Dann $\phi \doteq \psi$. Also $\mathrm{Sub}(\phi) = \mathrm{Sub}(\psi) \subseteq \mathrm{Sub}(\psi)$.

Falls $\psi \doteq \neg\sigma$:

Damit $\mathrm{Sub}(\psi) = \mathrm{Sub}(\sigma) \cup \{\neg\sigma\}$ für ein $\sigma \in \mathrm{PROP}$ mit $r(\sigma) < n$.

Falls $\phi \in \mathrm{Sub}(\sigma)$, dann ist $\phi \preccurlyeq \sigma$ und mit IV gilt:

$$\mathrm{Sub}(\phi) \subseteq \mathrm{Sub}(\sigma) \subseteq \mathrm{Sub}(\psi)$$

Ansonsten ist $\phi \in \{\neg\sigma\}$. Damit ist $\phi \doteq \psi$.

Und wieder gilt $\mathrm{Sub}(\phi) = \mathrm{Sub}(\psi) \subseteq \mathrm{Sub}(\psi)$ trivialerweise.

Falls $\psi \doteq \sigma_1 \circ \sigma_2$:

Analog zu $\psi \doteq \neg\sigma$ mit ein wenig aufwendigeren Fallunterscheidungen.

Die Transitivität von $\preccurlyeq$ ergibt sich jetzt wie folgt: Sei $\phi \preccurlyeq \psi$ und $\psi \preccurlyeq \sigma$. Dann gilt $\phi \in \mathrm{Sub}(\psi) \subseteq \mathrm{Sub}(\sigma)$. Also $\phi \preccurlyeq \sigma$. q.e.d.

Notation: Für eine Menge M ist $\# M$ (auch $\mathfrak{Kard}\, M$ oder $|M|$) die Anzahl ihrer Elemente.

Beispiel (Anzahl von Teilformeln): Ist n die Anzahl der Junktoren in einer Formel ϕ (die einzelnen Vorkommen), dann ist $\# \mathrm{Sub}(\phi) \leq 2n + 1$.

Bew.: Übungsaufgabe q.e.d.

Beispiel (Eindeutige Lesbarkeit): Zu jeder nicht-atomaren Formel σ gibt es entweder eindeutige Formeln ϕ und ψ mit $\sigma \doteqdot (\phi \circ \psi)$ oder eine eindeutige Formel ϕ mit $\sigma \doteqdot (\neg \phi)$.

Bew.: Übungsaufgabe q.e.d.

§ 2 Semantik

In diesem Abschnitt wird die Semantik für die formale Sprache der Aussagenlogik (AL) eingeführt. Zentrale Begriffe in diesem Abschnitt sind Belegungen und Bewertungen.

Damit können dann die Begriffe der Tautologie und der logischen Folgerung eingeführt werden. Im Anschluß werden als erste Anwendung der Semantik einige algebraische Gesetze der AL diskutiert.

2.1 DEF (Wahrheitstafel / Wahrheitsfunktionen): *Wahrheitstafel* beschreiben *Wahrheitsfunktionen* für 0-, 1- und 2-stellige (später auch n-stellige) Junktoren. Das sind Abbildungen $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Mit ihrer Hilfe werden Bewertungen definiert.

Die Wahrheitstafeln für die einzelnen Junktoren sehen wie folgt aus:

- 0-stellige Junktoren:

$\bot$
0

- 1-stellige Junktoren:

ϕ	$\neg\phi$
0	1
1	0

- 2-stellige Junktoren

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \to \psi$	$\phi \leftrightarrow \psi$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Die damit definierten Funktionen sehen wie folgt aus:

- $f_\bot = 0$
- $f_\neg(x) = 1 - x$
- $f_\wedge(x,y) = \min\{x,y\} = x \cdot y$
- $f_\vee(x,y) = \max\{x,y\} = x + y - x \cdot y$
- $f_\to(x,y) = 1 - x + xy$
  $(f_\to(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1 \text{ und } y = 0)$
- $f_\leftrightarrow(x,y) = 1 - |x - y|$
  $(f_\leftrightarrow(x,y) = 1 \;\Leftrightarrow\; x = y)$

2.2 DEF (Belegung/Bewertung):

(1) Eine Abbildung $v : \mathrm{AV} \to \{0,1\}$ heißt *Belegung der Aussagevariablen.*

(2) Eine Abbildung $[\![\cdot]\!] : \mathrm{PROP} \to \{0,1\}$ heißt *Bewertung*, falls für alle Formeln $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$ folgendes erfüllt ist:

- $[\![\bot]\!] = f_\bot = 0$
- $[\![\neg\phi]\!] = f_\neg([\![\phi]\!])$
- $[\![\phi \circ \psi]\!] = f_\circ([\![\phi]\!], [\![\psi]\!])$

Bemerkung: Die beiden Klammern $[\![$ und $]\!]$ heißen Semantikklammern und gehen auf Dana Scott zurück.

2.3 Theorem (Eindeutigkeit von Bewertungen): Sei eine Belegung $v : \mathrm{AV} \to \{0,1\}$ der Aussagevariablen gegeben.

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Bewertung $[\![\cdot]\!]_v : \mathrm{PROP} \to \{0,1\}$, so dass für jede Aussagevariable $p \in \mathrm{AV}$ gilt: $[\![p]\!]_v = v(p)$.

Bew.: Einfache Anwendung des Rekursions-Satzes. Q.E.D.

Bemerkungen:

(1) Die im Satz durch die Belegung v bestimmte Bewertung nennen wir auch die *durch v induzierte Bewertung.*

(2) Wenn aus dem Kontext klar hervorgeht, um welche Belegung v der Aussagevariablen es sich handelt, werden wir auch $[\![\cdot]\!]$ statt $[\![\cdot]\!]_v$ schreiben.

2.4 Lemma: Seien v, w zwei Belegungen, $\phi \in \mathrm{PROP}$ eine beliebige Formel.

Falls für alle in ϕ vorkommenden Aussagevariablen p gilt, dass $v(p) = w(p)$, dann gilt auch: $[\![\phi]\!]_v = [\![\phi]\!]_w$.

Bew.:

Durch Induktion über dem Aufbau von ϕ.

$\phi \doteq \bot$: Nach Definition von Bewertungen gilt: $[\![\bot]\!]_v = [\![\bot]\!]_w$.

$\phi \doteq p_k (k \in \mathbb{N})$: Nach Voraussetzung gilt: $[\![p_k]\!]_v = v(p_k) = w(p_k) = [\![p_k]\!]_w$.

IV: Angenommen: die Behauptung gilt für ψ und σ.

$\phi \doteq (\psi \circ \sigma)$: Da v und w auf allen Aussagevariablen von $(\psi \circ \sigma)$ übereinstimmen, tun sie das auch jeweils auf ψ und σ. Damit:

$$[\![\psi \circ \sigma]\!]_v = f_\circ([\![\psi]\!]_v, [\![\sigma]\!]_v) \overset{(IV)}{=} f_\circ([\![\psi]\!]_w, [\![\sigma]\!]_w) = [\![\psi \circ \sigma]\!]_w$$

$\phi \doteq (\neg\psi)$: analog zu $(\psi \circ \sigma)$. Q.E.D.

2.5 DEF (Tautologie, Erfüllbarkeit, Folgerung): Sei $\phi \in$ PROP eine Formel, $\Gamma \subseteq$ PROP eine Menge von Aussagen.

(1) ϕ heißt *allgemeingültig* oder *Tautologie*, falls für jede Belegung v gilt: $[\![\phi]\!]_v = 1$.

(2) ϕ heißt *erfüllbar*, falls es eine Belegung v gibt, für die gilt: $[\![\phi]\!]_v = 1$.

(3) ϕ heißt *(aussagen-)logische Folgerung aus* Γ ($\Gamma \models \phi$), falls für jede Belegung v gilt:

$$\text{Falls } [\![\psi]\!]_v = 1 \text{ für jedes } \psi \in \Gamma, \text{ dann gilt auch } [\![\phi]\!]_v = 1.$$

Bemerkungen:

(1) Der Begriff der logischen Folgerung geht auf Bernard Bolzano und Alfred Tarski zurück. Deren Idee war, dass logische Folgerung darin besteht, dass sich die Wahrheit der Prämissen auf die Wahrheit der Konklusion überträgt, und zwar unabhängig von der Interpretation der nichtlogischen Zeichen (in der AL sind das die Aussagevariablen).

Das wird hier so verstanden, dass sich die Wahrheit unter alle Belegungen der nichtlogischen Zeichen überträgt.

(2) ϕ ist genau dann eine Tautologie, wenn ϕ aus der leeren Menge logisch folgt ($\varnothing \models \phi$). Dann schreiben wir auch: $\models \phi$.

(3) Wir schreiben: $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \phi$ anstatt von $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \models \phi$; $\Gamma \not\models \phi$, falls ϕ keine Folgerung aus Γ ist.

(4) Vorsicht (!): Aus $\Gamma \not\models \phi$ folgt im Allgemeinen *nicht* $\Gamma \models \neg\phi$.

(5) Wir lassen zu, dass Γ eine unendliche Menge ist. Später werden wir zeigen, dass man sich bei der aussagenlogischen Folgerung auf eine endliche Teilmenge $\Sigma \subseteq \Gamma$ beschränken kann.

Beispiel (AL-Tautologie): Folgende Formel-Schemata repräsentieren aussagenlogische Tautologien:

(1) $\models \neg\neg\phi \to \phi$:

Bew.:

ϕ	$\neg\phi$	$\neg\neg\phi$	$\neg\neg\phi \to \phi$
0	1	0	1
1	0	1	1

Q.E.D.

(2) $\models ((\phi \vee \psi) \wedge \neg\psi) \rightarrow \phi$

Bew.:

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$	$\neg\psi$	$(\phi \vee \psi) \wedge \neg\psi$	$((\phi \vee \psi) \wedge \neg\psi) \rightarrow \phi$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1

Q.E.D.

2.6 DEF (Logische Äquivalenz): Seien $\phi, \psi \in$ PROP. Wir nennen ϕ und ψ *(aussagen-)logisch äquivalent*, falls $\phi \models \psi$ und $\psi \models \phi$ gilt. Wir schreiben dann auch $\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi$.

Bemerkung: Zwei Formeln ϕ und ψ sind genau dann logisch-äquivalent, wenn für alle Belegungen v gilt: $[\![\phi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$.

2.7 Lemma (Logische Äquivalenz): Die logische Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf PROP. Damit gilt für alle $\phi, \psi, \sigma \in$ PROP:

(1) *Reflexivität:* $\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \phi$.

(2) *Symmetrie:* Falls $\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi$ gilt, dann auch $\psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \phi$.

(3) *Transitivität:* Falls $\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi$ und $\psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \sigma$, dann auch $\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \sigma$.

Bew.: (1) und (2) sind trivial, (3) verbleibt als leichte Übung. Q.E.D.

2.8 Lemma (Eigenschaften von $\models$): Seien $\phi, \psi \in$ PROP. Dann gilt:

(1) $\phi \models \psi \quad \Rightarrow \quad \phi \wedge \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \phi$

(2) $\phi \models \psi \quad \Rightarrow \quad \phi \vee \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi$

(3) $\models \phi \quad \Rightarrow \quad \phi \wedge \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi$

(4) $\models \phi \quad \Rightarrow \quad \neg\phi \vee \psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi$

Bew.:

Beweise hier nur (1), Rest verbleibt als Übung.

„$\models$“: Zeige also $\phi \wedge \psi \models \phi$:

Sei v eine Belegung mit $[\![\phi \wedge \psi]\!]_v = 1$. Damit:

$$1 = [\![\phi \wedge \psi]\!]_v = f_\wedge([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v) = \min\{[\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v\} \leq [\![\phi]\!]_v \in \{0, 1\}$$

Damit bleibt nur $[\![\phi]\!]_v = 1$, und es gilt: $\phi \wedge \psi \models \phi$

„$\Dashv$“: Zeige nun $\phi \models \phi \wedge \psi$:

Sei dazu v eine Belegung mit: $[\![\phi]\!]_v = 1$.

Nach Voraussetzung gilt $\phi \models \psi$. Nach Definition der Folgerung muss also für v gelten: $[\![\psi]\!]_v = 1$. Damit:

$$[\![\phi \wedge \psi]\!]_v = f_\wedge([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v) = f_\wedge(1, 1) = 1 \cdot 1 = 1$$

Damit ist auch $\phi \models \phi \wedge \psi$ gezeigt. Q.E.D.

Q.E.D.

2.9 Lemma (Import-Export): Seien $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi \in \mathrm{PROP}$ gegeben (für ein $n \in \mathbb{N}$). Dann gilt:

$$\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \models (\phi_1 \wedge (\ldots \wedge (\phi_{n-1} \wedge \phi_n))) \rightarrow \psi$$

Bew.: Es sind zwei Richtungen zu zeigen:

„$\Rightarrow$“ Es gelte: $\not\models (\phi_1 \wedge (\ldots \wedge (\phi_{n-1} \wedge \phi_n))) \rightarrow \psi$.

Dann gibt es eine Belegung v mit: $[\![(\phi_1 \wedge (\ldots \wedge (\phi_{n-1} \wedge \phi_n))) \rightarrow \psi]\!]_v = 0$

Unter dieser Belegung gilt:
$[\![(\phi_1 \wedge (\ldots \wedge (\phi_{n-1} \wedge \phi_n)))]\!]_v = 1$ und $[\![\psi]\!]_v = 0$

Damit auch: $[\![\phi_0]\!]_v = \ldots = [\![\phi_n]\!]_v = 1$ und $[\![\psi]\!]_v = 0$.

Also: $\phi_1, \ldots, \phi_n \not\models \psi$.

„$\Leftarrow$“ Es gelte: $\phi_1, \ldots, \phi_n \not\models \psi$.

Dann gibt es eine Belegung v mit:
$[\![\phi_0]\!]_v = \ldots = [\![\phi_n]\!]_v = 1$ und $[\![\psi]\!]_v = 0$

Unter dieser Belegung gilt: $[\![(\phi_1 \wedge (\ldots \wedge (\phi_{n-1} \wedge \phi_n)))]\!]_v = 1$ und $[\![\psi]\!]_v = 0$.

Damit auch: $[\![(\phi_1 \wedge (\ldots \wedge (\phi_{n-1} \wedge \phi_n))) \rightarrow \psi]\!]_v = 0$.

Also: $\not\models (\phi_1 \wedge (\ldots \wedge (\phi_{n-1} \wedge \phi_n))) \rightarrow \psi$. Q.E.D.

§ 3 Substitution

In diesem Abschnitt wird die Substitution eingeführt. Die Substitution ist ein wichtiges Werkzeug, das im weiteren Verlauf der Vorlseung, insbesondere in der Prädikatenlogik, an Bedeutung gewinnt.

3.1 DEF (Substitution): Seien $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$, $p \in \mathrm{AV}$.

Die Formel $\phi[\psi/p]$ ist das Resultat der Ersetzung *aller* Vorkommen der Aussagevaribalen p in der Formel ϕ durch die Formel ψ.

Formal läßt sich die Substitution wie folgt rekursiv definieren:

(1) $\perp[\psi/p] :\simeq \perp$

(2) $p_k[\psi/p_l] :\simeq \begin{cases} p_k & \text{falls } k \neq l \\ \psi & \text{sonst} \end{cases}$

(3) $(\neg\phi)[\psi/p_l] :\simeq (\neg\, \phi[\psi/p_l])$

(4) $(\phi_1 \circ \phi_2)[\psi/p_l] :\simeq (\phi_1[\psi/p_l] \,\circ\, \phi_2[\psi/p_l])$

Bemerkung: In der Definition der Substitution ist nicht gefordert, dass p in ϕ vorkommt, und ausdrücklich erlaubt, dass p in ψ vorkommt.

Beispiel (Substitution):

(1) $((p_1 \to p_2) \wedge p_1)[p_2 \vee p_1/p_3] \simeq (p_1 \to p_2) \wedge p_1$

(2) $((p_1 \to p_2) \wedge p_1)[p_2 \vee p_1/p_1] \simeq ((p_2 \vee p_1) \to p_1) \wedge (p_2 \vee p_1)$

3.2 DEF (Simultane Substitution): Seien $\psi, \phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathrm{PROP}$ und seien $p_{k_1}, \ldots, p_{k_n} \in \mathrm{AV}$ ($n \in \mathbb{N}$ und $k_1 \ldots, k_n \in \mathbb{N}$).

Die Formel $\psi[\phi_1/p_{k_1}, \ldots, \phi_n/p_{k_n}]$ ist das Resultat der simultanen Ersetzung aller Aussagevariablen p_{k_l} durch die entsprechende Formel ϕ_l ($0 \leq l \leq n$) in der Formel ψ.

Bemerkung (!): Das Ergebnis einer simultanen Ersetzung ist im Allgemeinen verschieden von der Hintereinanderausführung derselben Ersetzungen. Betrachte dazu folgendes Beispiel:

- $\phi :\simeq (p_1 \wedge p_2)[p_1/p_2]\,[p_2/p_1] \simeq (p_1 \wedge p_1)[p_2/p_1] \simeq (p_2 \wedge p_2)$
- $(p_1 \wedge p_2)[p_1/p_2,\ p_2/p_1] \simeq (p_2 \wedge p_1) \neq \phi$

Übung:

(1) Wie kann für die simultane Substitution eine exakte, rekursive Definition gegeben werden?

(2) Wie kann die simultane Substitution durch Hintereinander-Ausführung von einfachen Substitutionen beschrieben werden?

3.3 Theorem (Substitutionssatz): Seien $\phi_1, \phi_2, \psi \in$ PROP und $p \in$ AV. Dann gilt:

$$\phi_1 \dashv\models \phi_2 \quad \Rightarrow \quad \psi[\phi_1/p] \dashv\models \psi[\phi_2/p]$$

Oder dazu äquivalent:

$$\models \phi_1 \leftrightarrow \phi_2 \quad \Rightarrow \quad \models \psi[\phi_1/p] \leftrightarrow \psi[\phi_2/p]$$

Bew.: Durch Induktion über dem Aufbau von ψ.

Seien dazu $\phi_1, \phi_2, p \in$ PROP gegeben mit: $\phi_1 \dashv\models \phi_2$.

$\bot$: $\bot[\phi_1/p] \triangleq \bot \dashv\models \bot \triangleq \bot[\phi_2/p]$

p_n: Falls $p \triangleq p_n$ gilt mit $\phi_1 \dashv\models \phi_2$:

$$p_n[\phi_1/p] \triangleq \phi_1 \dashv\models \phi_2 \triangleq p_n[\phi_2/p]$$

Ansonsten ist $p \not\triangleq p_n$ und damit gilt:

$$p_p[\phi_1/p] \triangleq p_n \dashv\models p_n \triangleq p_n[\phi_2/p]$$

IV: Es gelte die Behauptung für σ und τ. Damit gilt für alle Belegungen v:

$$[\![\sigma[\phi_1/p]]\!]_v = [\![\sigma[\phi_2/p]]\!]_v \quad \text{und} \quad [\![\tau[\phi_1/p]]\!]_v = [\![\tau[\phi_2/p]]\!]_v$$

$\sigma \circ \tau$: Klar ist (für $i = 1, 2$): $(\sigma \circ \tau)[\phi_i/p] \triangleq \sigma[\phi_i/p] \circ \tau[\phi_i/p]$.

Sei v eine beliebige Belegung. Damit gilt:

$$\begin{aligned} [\![(\sigma \circ \tau)[\phi_1/p]]\!]_v &= f_\circ([\![\sigma[\phi_1/p]]\!]_v, [\![\tau[\phi_1/p]]\!]_v) \\ &\overset{(IV)}{=} f_\circ([\![\sigma[\phi_2/p]]\!]_v, [\![\tau[\phi_2/p]]\!]_v) = [\![(\sigma \circ \tau)[\phi_2/p]]\!]_v \end{aligned}$$

Damit sind die beiden Formeln schon logisch-äquivalent.

$\neg\sigma$: Analog zum Fall $\sigma \circ \tau$.

Q.E.D.

Bemerkung:

(1) Das Theorem besagt, dass die Ersetzung von Teilaussagen durch logisch äquivalente Aussagen den Wahrheitswert der Gesamtaussage nicht verändert.

(2) Etwas allgemeiner gilt für jede Belegung v:

$$[\![\phi_1 \leftrightarrow \phi_2]\!]_v \leq [\![\psi[\phi_1/p] \leftrightarrow \psi[\phi_2/p]]\!]_v$$

Also:

$$\models (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2) \rightarrow (\psi[\phi_1/p] \leftrightarrow \psi[\phi_2/p])$$

§ 4 Funktionale Vollständigkeit und Dualität

In diesem Paragraphen werden wir uns mit den Junktoren beschäftigen. Zunächst wird der Begriff des Junktors verallgemeinert, um damit die funktionale Vollständigkeit von Junktorenmengen zu diskutieren. Im Anschluss daran wird die Dualität von Junktoren besprochen.

4.1 Allgemeine Junktoren: Sei für ein $n \in \mathbb{N}$ ein n-stelliger Junktor \$ gegeben, für den eine Wahrheitstafel definiert ist. Damit ist schon eine n-stellige Wahrheitsfunktion $f_\$: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ definiert. Dies bedeutet für die Bewertung einer Formel $\$(\phi_1, \ldots, \phi_n)$, dass für jede Belegung v gilt:

$$[\![\$(\phi_1, \ldots, \phi_n)]\!]_v = f_\$([\![\phi_1]\!]_v, \ldots, [\![\phi_n]\!]_v).$$

Umgekehrt läßt sich jede n-stellige Wahrheitsfunktion durch eine Wahrheitstafel beschreiben.

4.2 DEF (Darstellung/Funktionale Vollständigkeit): Sei $\mathcal{K}$ eine Menge von Junktoren.

(1) Ein n-stelliger Junktor \$ läßt sich über $\mathcal{K}$ *darstellen*, falls es eine Formel τ gibt, so dass in τ höchstens die Aussagevariablen $p_1, \ldots p_n$ und höchstens Junktoren aus $\mathcal{K}$ vorkommen und es gilt:

$$\tau \mathrel{=\!\!|}\models \$(p_1, \ldots, p_n)$$

(2) Die Menge $\mathcal{K}$ heißt *(wahrheits-)funktional vollständig*, falls sich für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeder n-stellige Junktor \$ darstellen läßt.

Bemerkungen:

(1) Nach der Definition von Darstellbarkeit dürfen bei der Darstellung von $\bot$ (und $\top$) nur Formeln verwendet werden, die keine Aussagevariablen enthalten. Damit kann $\bot$ lediglich durch 0-stellige Junktoren dargestellt werden. Deshalb muss in jeder vollständigen Menge $\bot$ (oder $\top$) schon aus Prinzip vorkommen.

Um dies zu vermeiden, erlauben wir für $\bot$ (und $\top$), dass es durch Formeln τ dargestellt werden darf, die höchstens die Aussagevariable p_1 enthalten.

(2) Sei τ Formel, die einen Junktor \$ darstellt. Aus dem Substitutionssatz folgt damit für beliebige $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathrm{PROP}$ direkt:

$$\tau[\phi_1/p_1, \ldots, \phi_n/p_n] \mathrel{=\!\!|}\models \$(\phi_1, \ldots, \phi_n)$$

4.3 Theorem (Definierbarkeit von Junktoren): Die einzelnen Junktoren lassen sich wechselseitig über andere Junktoren definieren:

(1) $\phi \leftrightarrow \psi \;=\!\!|\!\!\models (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$

(2) $\phi \to \psi \;=\!\!|\!\!\models (\neg\phi \vee \psi)$

(3) $\phi \vee \psi \;=\!\!|\!\!\models \neg\phi \to \psi$

(4) $\phi \vee \psi \;=\!\!|\!\!\models \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$

(5) $\phi \wedge \psi \;=\!\!|\!\!\models \neg(\neg\psi \vee \neg\phi)$

(6) $\neg\phi \;=\!\!|\!\!\models \phi \to \bot$

(7) $\bot \;=\!\!|\!\!\models \phi \wedge \neg\phi$

Bew.: Die einzelnen Aussagen lassen sich leicht durch Wahrheitstafeln zeigen. Alternativ kann man aber auch direkt mit Belegungen und Bewertungen argumentieren, wie es etwa im Beweis von Lemma 2.8 vorgeführt wurde. Q.E.D.

Beispiel: Finde eine Formel, in der als Junktor nur $\bot$ und $\to$ vorkommen, die zu $\phi \wedge \psi$ logisch-äquivalent ist.

$\phi \wedge \psi \;=\!\!|\!\!\models \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$ (Def. $\wedge$, wie oben (5))

$=\!\!|\!\!\models ((\neg\phi) \vee (\psi \to \bot)) \to \bot$ (Def. $\neg$, wie oben (6))

$=\!\!|\!\!\models (\phi \to (\psi \to \bot)) \to \bot$ (Def. $\to$, wie oben (2)) Q.E.D.

4.4 Theorem (Funktionale Vollständigkeit): Sei $\mathcal{K} := \{\wedge, \vee, \neg, \bot\}$. Für jeden n-stelligen Junktor \$ ($n \in \mathbb{N}$) gibt es eine Formel τ, die genau die Aussagesymbole $p_1, \ldots, p_n$ und höchstens Junktoren aus $\mathcal{K}$ enthält, so dass folgendes gilt:

$$\tau \;=\!\!|\!\!\models \$(p_1, \ldots, p_n)$$

Bew.: Durch Induktion über der Anzahl n der Stellen von \$

$n = 0$: Für $\$ \doteq \bot$ ist die Aussage trivial. Sei also $\$ \not\doteq \bot$.

Damit gilt, dass in der Wahrheitstafel von \$ eine 1 steht (d.h., dass die Wahrheitstafel von \$ nur aus der 1 besteht), also dass $f_\$ = f_\top$ ist. Betrachte $\tau :\doteq \neg\bot$.

Offensichtlich enthält τ keine Aussagevariablen und nur Junktoren aus $\mathcal{K}$.

Es gilt zudem: $\tau \;=\!\!|\!\!\models \$$.

Damit ist der Induktionsanfang gezeigt.

IV: Angenommen Aussage gilt für alle n-stelligen Junktoren.

$n+1$: Sei \$ beliebiger $n+1$-stelliger Junktor, definiert durch seine $n+1$-stellige Wahrheitsfunktion $f_{\$}$.

Definiere zwei n-stellige Junktoren $\$_0, \$_1$ durch folgende, n-stellige Wahrheitsfunktionen:

$$\begin{aligned} f_{\$_0}(x_1, \ldots, x_n) &:= f_{\$}(x_1, \ldots, x_n, 0) \\ f_{\$_1}(x_1, \ldots, x_n) &:= f_{\$}(x_1, \ldots, x_n, 1) \end{aligned}$$

Sei v beliebige Belegung. Damit gilt:

Falls $v(p_{n+1}) = 0$:

$$\begin{aligned} [\![\$(p_1, \ldots, p_{n+1})]\!]_v = [\![\$(p_1, \ldots, p_n, \bot)]\!]_v &= [\![\$_0(p_1, \ldots, p_n)]\!]_v \\ &= [\![\neg p_{n+1} \wedge \$_0(p_1, \ldots, p_n)]\!]_v \end{aligned}$$

Falls $v(p_{n+1}) = 1$:

$$\begin{aligned} [\![\$(p_1, \ldots, p_{n+1}]\!]_v = [\![\$(p_1, \ldots, p_n, \top)]\!]_v &= [\![\$_1(p_1, \ldots, p_n)]\!]_v \\ &= [\![p_{n+1} \wedge \$_1(p_1, \ldots, p_n)]\!]_v \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\$(p_1, \ldots, p_{n+1}) \dashv\models (\neg p_{n+1} \wedge \$_0(p_1, \ldots, p_n)) \vee (p_{n+1} \wedge \$_1(p_1, \ldots, p_n))$$

Nach IV gibt es Formeln τ_0, τ_1, so dass diese genau die Aussagevariablen $p_1, \ldots, p_n$ und höchstens Junktoren aus $\mathcal{K}$ enthalten und dass gilt:

$$\begin{aligned} \tau_0 &\dashv\models \$_0(p_1, \ldots, p_n) \\ \tau_1 &\dashv\models \$_1(p_1, \ldots, p_n) \end{aligned}$$

Dann folgt mit Substitutionssatz für $\tau :\hat{=} (\neg p_{n+1} \wedge \tau_0) \vee (p_{n+1} \wedge \tau_1)$:

$$\tau \dashv\models \$(p_1, \ldots, p_{n+1})$$

und τ erfüllt die geforderten Bedingungen. Q.E.D.

Beispiel (Vorgehen im Theorem): Das Vorgehen im Beweis des Theorems soll illustriert werden. Sei dazu \$ ein zweistelliger Junktor, der über eine Wahrheitstafel definiert wird. Wir schreiben in den Wahrheitstafeln die Argumente in umgekehrter Reihenfolge!

ϕ_2	ϕ_1	$\$(\phi_1, \phi_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$\left.\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} \bot \\ \top \end{array}\right\} \begin{array}{rl} \sigma_1 :\hat{=} & (\neg\phi_1 \wedge \bot) \\ \vee & (\phi_1 \wedge \top) \end{array} \\ \hline \left.\begin{array}{c} \bot \\ \bot \end{array}\right\} \begin{array}{rl} \sigma_2 :\hat{=} & (\neg\phi_1 \wedge \bot) \\ \vee & (\phi_1 \wedge \bot) \end{array} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{rl} \sigma :\hat{=} & (\neg\phi_2 \wedge \sigma_1) \\ \vee & (\phi_2 \wedge \sigma_2) \end{array}$$

Es gilt nun $\sigma \dashv\models \$(\phi_1, \phi_2)$. Man beachte die Umkehrung der Reihenfolge von $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Damit wird erreicht, dass zuerst ϕ_1 in die Formel aufgenommen wird, bis zuletzt ϕ_n hinzukommt.

4.5 Korollar: Folgende Mengen von Junktoren sind funktional vollständig:

$$\{\rightarrow, \bot\}, \{\neg, \rightarrow\}, \{\neg, \vee\}, \{\neg, \wedge\}$$

Bew.: Es genügt jeweils zu zeigen, dass sich mithilfe der vorgegebenen Junktoren die Junktoren einer funktional vollständigen Menge darstellen lassen.

Zeige die funktionale Vollständigkeit von $\{\rightarrow, \bot\}$:

Wir wissen aus dem Theorem zur funktionalen Vollständigkeit, dass die Menge $\mathcal{K} = \{\wedge, \vee, \neg, \bot\}$ funktional vollständig ist. Es genügt also die Junktoren aus $\mathcal{K}$ darzustellen:

(1) $\neg p_1 \mathrel{=\!\!|}\!\models p_1 \rightarrow \bot$ (vgl. 4.3, Theorem zur Definierbarkeit von Junktoren)

(2) $p_1 \vee p_2 \mathrel{=\!\!|}\!\models \neg p_1 \rightarrow p_2$ (vgl. 4.3)
Auf der rechten Seite darf $\neg$ verwendet werden, da $\neg$ schon über $\{\rightarrow, \bot\}$ dargestellt wurde und $\neg p_1$ entsprechend ersetzt werden kann.

(3) $p_1 \wedge p_2 \mathrel{=\!\!|}\!\models \neg(\neg p_1 \vee \neg p_2)$ (vgl. 4.3)

Damit sind alle Junktoren aus $\mathcal{K}$ dargestellt über $\{\rightarrow, \bot\}$, und $\{\rightarrow, \bot\}$ ist funktional vollständig.

Die Behauptung wird für die anderen Mengen analog bewiesen, statt $\mathcal{K}$ kann nun auch $\{\rightarrow, \bot\}$ verwendet werden. Q.E.D.

Beispiel: Die beiden zweistellige Junktoren Sheffer-Strich ($|$) und Peircscher Pfeil ($\downarrow$) sind schon alleine für sich funktional vollständig. Ihre Wahrheitstafeln sind wie folgt definiert:

ϕ	ψ	$\phi \mid \psi$	$\phi \downarrow \psi$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Die funktionale Vollständigkeit von $\{\,|\,\}$ und $\{\downarrow\}$ verbleibt als Übung.

Im weiteren Verlauf dieses Paragraphen werden nur noch Formeln über der funktional vollständigen Junktorenmenge $\{\neg, \wedge, \vee\}$ betrachtet. Wir diskutieren nun die Dualität.

4.6 DEF ($\star$-Abbildung): Die Abbildung $^\star : \mathrm{PROP} \rightarrow \mathrm{PROP} : \phi \mapsto \phi^\star$ ist wie folgt rekursiv über dem Aufbau von ϕ definiert:

(1) für jedes $k \in \mathbb{N}$: $p_k^\star :\simeq \neg p_k$.

(2) $(\neg\phi)^\star :\simeq \neg\phi^\star$

(3) $(\phi \wedge \psi)^\star :\simeq \phi^\star \vee \psi^\star$

(4) $(\phi \vee \psi)^\star :\simeq \phi^\star \wedge \psi^\star$

4.7 Lemma: Für jede Formel $\phi \in$ PROP und für jede Belegung v gilt:

$$[\![\phi^\star]\!]_v = 1 - [\![\phi]\!]_v = [\![\neg\phi]\!]_v$$

Bew.: Durch Induktion über den Aufbau von ϕ:

Sei dazu v eine beliebige Belegung. Beachte, dass nur Formeln über der funktional vollständigen Menge $\{\wedge, \vee, \neg\}$ betrachtet werden.

p: Es gilt: $p^\star \doteq \neg p$. Damit: $[\![p^\star]\!]_v = [\![\neg p]\!]_v = 1 - [\![p]\!]_v$

IV: Es gelte die Behauptung für ψ und σ.

$\neg\psi$: Es gilt: $(\neg\psi)^\star \doteq \neg\psi^\star$. Damit:

$$[\![(\neg\psi)^\star]\!]_v = [\![\neg\psi^\star]\!]_v = 1 - [\![\psi^\star]\!]_v \overset{(IV)}{=} 1 - [\![\neg\psi]\!]_v = [\![\neg(\neg\psi)]\!]_v$$

$\psi \wedge \sigma$: Es gilt: $(\psi \wedge \sigma)^\star \doteq \psi^\star \vee \sigma^\star$. Damit:

$$[\![(\psi \wedge \sigma)^\star]\!]_v = [\![\psi^\star \vee \sigma^\star]\!]_v = f_\vee([\![\psi^\star]\!]_v, [\![\sigma^\star]\!]_v) \overset{(IV)}{=}$$

$$f_\vee(1 - [\![\psi]\!]_v, 1 - [\![\sigma]\!]_v) = \max(1 - [\![\psi]\!]_v, 1 - [\![\sigma]\!]_v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad [\![\psi]\!]_v = [\![\sigma]\!]_v = 1 \quad \Leftrightarrow \quad [\![\psi \wedge \sigma]\!]_v = 1$$

Also gilt: $[\![(\psi \wedge \sigma)^\star]\!]_v = 1 - [\![\psi \wedge \sigma]\!]_v = [\![\neg(\psi \wedge \sigma)]\!]_v$.

$\psi \vee \sigma$: Analog zum Fall $\psi \wedge \sigma$.

q.e.d.

4.8 Korollar: Für jede Formel $\phi \in$ PROP gilt:

$$\phi^\star \;\dashv\models\; \neg\phi$$

Bew.: Direkte Folge aus obigem Lemma. q.e.d.

4.9 DEF (Dual): Die Abbildung ^{d} : PROP $\to$ PROP : $\phi \mapsto \phi^d$ ist wie folgt rekursiv über dem Aufbau von ϕ definiert:

(1) für jedes $k \in \mathbb{N}$: $p_k^d :\doteq p_k$

(2) $(\neg\phi)^d :\doteq \neg\,\phi^d$

(3) $(\phi \wedge \psi)^d :\doteq \phi^d \vee \psi^d$

(4) $(\phi \vee \psi)^d :\doteq \phi^d \wedge \psi^d$

Wir nennen ϕ^d das Dual von ϕ. Offensichtlich gilt: $(\phi^d)^d \doteq \phi$.

4.10 Theorem (Dualitätssatz): Seien $\phi, \psi \in$ PROP. Es gilt:

$$\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi \quad \Leftrightarrow \quad \phi^d \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi^d$$

Bew.: Es sind zwei Richtungen zu zeigen:

„$\Rightarrow$“ Sei $\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi$ gegeben.
Damit gilt aber auch: $\neg\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg\psi$.
Mit obigem Lemma folgt: $\phi^\star \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg\psi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi^\star$
Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit: $\{p_0, \ldots, p_n\} \supseteq \mathrm{At}(\phi) \cup \mathrm{At}(\psi)$,
wobei $\mathrm{At}(\phi)$ die Menge der Aussagevariablen ist, die in ϕ vorkommen.
Für dieses n gilt:

$$\phi^\star[\neg p_0, \ldots, \neg p_n/p_0, \ldots, p_n] \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi^\star[\neg p_0, \ldots, \neg p_n/p_0, \ldots, p_n]$$

Dabei gilt:

$$\phi^\star[\neg p_0, \ldots, \neg p_n/p_0, \ldots, p_n] \doteq \phi^d[\neg\neg p_0, \ldots, \neg\neg p_n/p_0, \ldots, p_n]$$

und

$$\psi^\star[\neg p_0, \ldots, \neg p_n/p_0, \ldots, p_n] \doteq \psi^d[\neg\neg p_0, \ldots, \neg\neg p_n/p_0, \ldots, p_n]$$

Das bedeutet:

$$\phi^d[\neg\neg p_0, \ldots, \neg\neg p_n/p_0, \ldots, p_n] \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi^d[\neg\neg p_0, \ldots, \neg\neg p_n/p_0, \ldots, p_n]$$

Daraus folgt direkt: $\phi^d \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi^d$

„$\Leftarrow$“ Sei $\phi^d \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi^d$ gegeben.
Aus „$\Rightarrow$“ folgt: $(\phi^d)^d \mathrel{=\!\!|\!\models} (\psi^d)^d$.
Da $(\phi^d)^d \mathrel{=\!\!|\!\models} \phi$, gilt schon: $\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi$

Insgesamt wurde die Äquivalenz gezeigt. Q.E.D.

Bemerkung: Der Dualitäts-Satz läßt sich etwa für Aussagen über Normalformen (vgl. dazu den nächsten Paragraphen) gut verwenden.

§ 5 Algebraische Gesetze und Normalformen

In diesem Paragraphen werden einige algebraische Gesetze für die AL vorgestellt; anschließend werden Normalformen von Formeln diskutiert.

5.1 Theorem (Algebraische Gesetze): Seien $\phi, \psi, \sigma \in \text{PROP}$. Dann gelten folgende algebraischen Gesetze:

(1) Assoziativität von $\wedge$ und $\vee$:

$$(\phi \wedge \psi) \wedge \sigma \mathrel{=\!\!|\!\models} \phi \wedge (\psi \wedge \sigma) \quad \text{und} \quad (\phi \vee \psi) \vee \sigma \mathrel{=\!\!|\!\models} \phi \vee (\psi \vee \sigma)$$

(2) Existenz eines neutralen Elements für $\wedge$ und $\vee$:

$$\phi \wedge \top \mathrel{=\!\!|\!\models} \phi \quad \text{und} \quad \phi \vee \bot \mathrel{=\!\!|\!\models} \phi$$

Dabei ist das Verum ($\top$) wie folgt (syntaktisch) definiert: $\top :\doteq (\neg\bot)$.

Das neutrale Element ist bis auf logische Äquivalenz eindeutig bestimmt.

(3) Kommutativität für $\wedge$ und $\vee$:

$$\phi \wedge \psi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi \wedge \phi \quad \text{und} \quad \phi \vee \psi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi \vee \phi$$

(4) Distributivität zwischen $\wedge$ und $\vee$:

$$\phi \vee (\psi \wedge \sigma) \mathrel{=\!\!|\!\models} (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \sigma) \quad \text{und} \quad \phi \wedge (\psi \vee \sigma) \mathrel{=\!\!|\!\models} (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \sigma)$$

(5) De Morgansche Gesetze:

$$\neg(\phi \wedge \psi) \mathrel{=\!\!|\!\models} (\neg\phi \vee \neg\psi) \quad \text{und} \quad \neg(\phi \vee \psi) \mathrel{=\!\!|\!\models} (\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

(6) Idempotenz für $\wedge$ und $\vee$:

$$\phi \wedge \phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \phi \quad \text{und} \quad \phi \vee \phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \phi$$

(7) Das Gesetz der doppelten Negation:

$$\neg\neg\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \phi$$

Bew.:

Die einzelnen Aussagen sind leicht mit Wahrheitstafeln zu zeigen. Q.E.D.

Bemerkung: Gilt für zwei Formeln $\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi$, dann gilt auch $\models \phi \leftrightarrow \psi$.

Van Dalen[1] kürzt letzteres mit dem Zeichen $\approx$ ab und formuliert die algebraischen Gesetze für $\approx$ statt für $\mathrel{=\!\!|\!\models}$. Dieses Vorgehen wird in der Prädikatenlogik relevant; in der AL macht es aber keinen Unterschied.

[1] DIRK VAN DALEN, Logic and Structure, Springer, 2004.

5.2 DEF (Verallgemeinerung $\wedge$ und $\vee$): Die Konjunktion und Disjunktion können verallgemeinert werden. Seien dazu $\phi_k \in \mathrm{PROP}$ ($k \in \mathbb{N}$):

(1) *Verallgemeinerte Konjunktion:*

$$\bigwedge_{k\leq 0} \phi_k :\simeq \phi_0 \quad \text{und} \quad \bigwedge_{k\leq n+1} \phi_k :\simeq (\bigwedge_{k\leq n} \phi_k) \wedge \phi_{n+1}$$

(2) *Verallgemeinerte Disjunktion:*

$$\bigvee_{k\leq 0} \phi_k :\simeq \phi_0 \quad \text{und} \quad \bigvee_{k\leq n+1} \phi_k :\simeq (\bigvee_{k\leq n} \phi_k) \vee \phi_{n+1}$$

Für den Grenzfall $k < 0$ wird noch vereinbart:

$$\bigwedge_{k<0} \phi_k :\simeq \top \quad \text{und} \quad \bigvee_{k<0} \phi_k :\simeq \bot$$

Analog werden wir auch andere endliche Indexmengen verwenden. Es wurden hier aber keine (!) unendlichen Konjunktionen und Disjunktionen definiert.

5.3 Lemma: Die bekannten algebraischen Gesetze für $\wedge$ und $\vee$ gelten auch für ihre Verallgemeinerung.

D.h.: Für jedes $n \in \mathbb{N}$, für alle $\phi_0, \ldots, \phi_n, \psi \in \mathrm{PROP}$ gilt:

(1) De Morgan:

$$\neg \bigwedge_{k\leq n} \phi_k \mathrel{=\!\!|\!\models} \bigvee_{k\leq n} \neg\phi_k$$

und

$$\neg \bigvee_{k\leq n} \phi_k \mathrel{=\!\!|\!\models} \bigwedge_{k\leq n} \neg\phi_k$$

(2) Dualität von $\bigwedge$ und $\bigvee$:

$$\neg(\bigwedge_{k\leq n} \bigvee_{l\leq m} \phi_{k,l}) \mathrel{=\!\!|\!\models} \bigvee_{k\leq n} \bigwedge_{l\leq m} (\neg\phi_{k,l})$$

und

$$\neg(\bigvee_{k\leq n} \bigwedge_{l\leq m} \phi_{k,l}) \mathrel{=\!\!|\!\models} \bigwedge_{k\leq n} \bigvee_{l\leq m} (\neg\phi_{k,l})$$

(3) Einfaches Distributivgesetz:

$$(\bigwedge_{k\leq n} \phi_k) \vee \psi \mathrel{=\!\!|\!\models} \bigwedge_{k\leq n} (\phi_k \vee \psi)$$

und

$$(\bigvee_{k\leq n} \phi_k) \wedge \psi \mathrel{=\!\!|\!\models} \bigvee_{k\leq n} (\phi_k \wedge \psi)$$

(4) Allgemeines Distributiv-Gesetz:

$$(\bigwedge_{k\leq n} \phi_k) \vee (\bigwedge_{l\leq m} \psi_l) \mathrel{=\!\!|\!\models} \bigwedge_{k\leq n, l\leq m} (\phi_k \vee \psi_l)$$

und

$$(\bigvee_{k\leq n} \phi_k) \wedge (\bigvee_{l\leq m} \psi_l) \mathrel{=\!\!|\!\models} \bigvee_{k\leq n, l\leq m} (\phi_k \wedge \psi_l)$$

Bew.: Verbleibt als Übung. q.e.d.

5.4 DEF (Normalformen): Sei $\phi \in \text{PROP}$ eine Formel.

(1) ϕ heißt *Literal*, falls ϕ eine Aussagevariable ($\phi \simeq p$) oder eine negierte Aussagevariable ($\phi \simeq \neg p$) ist.

(2) ϕ heißt *konjunktive Normalform* (KNF), falls ϕ eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist. D.h.: es gibt Literale $\phi_{k,l}$ mit:

$$\phi \simeq \bigwedge\!\!\!\bigwedge \bigvee\!\!\!\bigvee \phi_{k,l}$$

(3) ϕ heißt *disjunktive Normalform* (DNF), falls ϕ eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist. D.h.: es gibt Literale $\phi_{k,l}$ mit:

$$\phi \simeq \bigvee\!\!\!\bigvee \bigwedge\!\!\!\bigwedge \phi_{k,l}$$

Bemerkungen:

(1) Die beiden Formeln $p_1 \wedge \neg p_2$ und $p_1 \vee \neg p_2$ sind beide sowohl konjunktive als auch disjunktive Normalformen.

(2) Das folgende Theorem soll die Existenz einer logisch-äquivalenten konjunktiven Normalsform zu jeder beliebigen Formel beweisen. Dazu muss aber die stärkere Aussage gezeigt werden, dass gleichzeitig konjunktive und disjunktive Normalformen zu einer gegebenen Formel existieren.

Im Beweis werden lediglich Formeln über der Junktorenmenge $\{\wedge, \vee, \neg\}$ betrachtet. Dies genügt auch, da diese Menge funktional vollständig ist (wenn wir $\bot$ durch $p_1 \wedge \neg p_1$ definieren).

(3) Eine Normalform (sowohl disjunktiv als auch konjuntiv) läßt sich aus der Wahrheitstafel der gegebenen Formel leicht konstruieren. Diese ist aber nicht die einzige, da die Normalformen nicht eindeutig bestimmt sind.

5.5 Theorem (Normalformen): Sei $\phi \in$ PROP beliebige Formel. Es gibt dann eine KNF ϕ^k und eine DNF ϕ^d, so dass:

$$\phi \mathrel{=\!\!|\!\models} \phi^k \mathrel{=\!\!|\!\models} \phi^d$$

Bew.: Durch Induktion über den Formelaufbau von ϕ .

p: p ist trivialerweise eine KNF und DNF. Setze: $p^d :\simeq p^k :\simeq p$. Damit:

$$p \mathrel{=\!\!|\!\models} p^d \mathrel{=\!\!|\!\models} p^k$$

IV: Es gelte die Behauptung für ψ, σ. Das heißt:

$$\psi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi^k \simeq \bigwedge_{0 \leq k < n} \delta_k \quad \text{und} \quad \sigma \mathrel{=\!\!|\!\models} \sigma^k \simeq \bigwedge_{0 \leq l < m} \delta_{n+l}$$

und

$$\psi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi^d \simeq \bigvee_{0 \leq k < v} \kappa_k \quad \text{und} \quad \sigma \mathrel{=\!\!|\!\models} \sigma^d \simeq \bigvee_{0 \leq l < w} \kappa_{v+l}$$

wobei die κ_k Konjunktionen und die δ_k Disjunktionen von Literalen sind. ($n, m, v, w \in \mathbb{N}$ geeignet gewählt.)

$\neg\psi$: Trivial mit Lemma 5.3 (2).

$\psi \wedge \sigma$: Klar ist: $\psi \wedge \sigma \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi^k \wedge \sigma^k \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi^d \wedge \sigma^d$.

Mit

$$\psi^k \wedge \sigma^k \simeq \bigwedge_{0 \leq k < n} \delta_k \wedge \bigwedge_{0 \leq l < m} \delta_{n+l} \simeq \bigwedge_{0 \leq k < n+m} \delta_k$$

wurde damit schon eine KNF für $\psi \wedge \sigma$ gefunden.

Betrachte nun $\psi^d \wedge \sigma^d$:

$$\psi^d \wedge \sigma^d \simeq \bigvee_{0 \leq k < v} \kappa_k \wedge \bigvee_{v \leq l < w} \kappa_{v+l} \overset{\star}{\mathrel{=\!\!|\!\models}} \bigvee_{0 \leq k < v, 0 \leq l < w} (\kappa_k \wedge \kappa_{v+l}) \simeq \bigvee_{0 \leq k < v+w} \kappa_k$$

($\star$) gilt nach Lemma 5.3 (4) und es wurde eine DNF für $\psi \wedge \sigma$ gefunden.

$\psi \vee \sigma$: Analog zum Fall $\psi \wedge \sigma$.

Q.E.D.

§ 6 Der Kalkül des Natürlichen Schließens

In diesem Abschnitt wird der Kalkül des Natürlichen Schließens (NK′) nach Gerhard Gentzen eingeführt. NK′ ist ein syntaktisches Schlussverfahren, das eine Baumstruktur verwendet. Es verzichtet auf Axiome und besteht lediglich aus Annahmen und Regeln zum Ableiten von Schlüssen. Das Ableiten im Kalkül (Beweisen) ist die syntaktische Entsprechung zur semantischen Folgerung.

Bemerkungen (Sprache):

(1) Der Kalkül NK′ wird für die aussagenlogische Sprache über der funktionalvollständigen Junktorenmenge $\{\to, \perp, \land\}$ definiert.

(2) Die Negation einer Formel $(\neg\phi)$ wird hier grundsätzlich als abkürzende Schreibweise für die Formel $(\phi \to \perp)$ verstanden.

Beschreibung (Schließen): Eine Ableitung ist eine Baumstruktur, die aus dem Hinschreiben von Prämissen und der mehrfachen Anwendung einzelner Schlüsse entsteht.

(1) Annahmen dürfen jederzeit als Prämisse eingeführt werden. Dies geschieht durch das Hinschreiben einer Formel ϕ. Die darauf folgende Ableitung ist dann von dieser Prämisse abhängig.

(2) Ein einzelner Schluss besteht aus einer oder mehreren Prämissen (etwa ϕ_1 und ϕ_2) und einer Konklusion (etwa ϕ_3), zu der vermöge einer Regel übergegangen wird. Dies wird im Kalkül nach folgendem Schema notiert:

$$\frac{\phi_1 \qquad \phi_2}{\phi_3}\;(\,\text{Regel}\,)$$

Die Konklusion eines Schlusses kann zur Prämisse eines weiteren Schlusses werden.

(3) Einige Regeln erlauben das Löschen von vorher hingeschriebenen Annahmen. Dadurch wird die Ableitung unabhängig von der Annahme. Die Annahme ist also nicht mehr Voraussetzung für die Konklusion. Solange eine Annahme nicht gelöscht ist, wird sie als *offene Annahme* bezeichnet.

(4) Wird beim Ableiten tatsächlich eine offene Annahme gelöscht, so wird die zu löschende Annahme in eckige Klammern gesetzt und die Regel, aufgrund der das Löschen geschieht, im Ableitungsbaum mit einem fortlaufenden Index nummeriert. Dieser Index wird bei der gelöschten Formel an der eckigen Klammern wiederholt.

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi_1]^1\\ \vdots\end{array}}{\phi_2}\;(\,\text{Regel:1}\,)$$

Konvention (Notation): Es werden noch einige Konventionen für die Notation benötigt.

$\vdots$ kennzeichnet, dass an dieser Stelle eine beliebige Ableitung stehen kann.

$\mathcal{D}$ wird als Standardvariable für Ableitungen verwendet.

$\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \phi\end{matrix}$ kennzeichnet, dass eine Ableitung $\mathcal{D}$ die Formel ϕ als Konklusion (Endformel) hat

$\begin{matrix}[\phi]\\ \vdots\end{matrix}$ kennzeichnet bei Regeln, dass in einer tatsächlichen Ableitung die Vorkommen der Formel ϕ als offene Annahme gelöscht werden dürfen.

Es ist nicht gefordert, dass die Formel als Annahme in der Ableitung überhaupt vorkommt.

Es ist auch nicht gefordert, dass alle Vorkommen von ϕ gelöscht werden. Im Grenzfall ist es sogar erlaubt, dass kein einziges Vorkommen gelöscht wird.

6.1 DEF (Schlussregeln): Die Schlussregeln bestimmen den Übergang von den Prämissen zur Konklusion. Sie erlauben dabei das Einführen (*introduction*) oder Beseitigen (*elimination*) von Junktoren. Einige Regeln ermöglichen zusätzlich das Löschen offener Annahmen. Die Kennzeichnung der verwendeten Regel für das Ableiten ist in Klammern neben dem Schlußstrich angegeben:

(1) Einführung der Konjunktion:

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\ (\wedge\mathrm{I})$$

(2) Beseitigung der Konjunktion:

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ (\wedge\mathrm{E}) \qquad\qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge\mathrm{E})$$

(3) Einführung der Implikation:

$$\frac{\begin{matrix}[\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\phi \to \psi}\ (\to\mathrm{I})$$

Beispiel: Nach den Bemerkungen zur Annahmenlöschung sind folgende Ableitungen durch richtige Anwendung der Implikationseinführung entstanden:

$$\frac{B}{A \to B}\ (\to\mathrm{I}) \qquad \frac{A}{A \to A}\ (\to\mathrm{I}) \qquad \frac{[A]^1}{A \to A}\ (\to\mathrm{I}:1)$$

(4) Beseitigung der Implikation (modus ponens):

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi} \; (\to \mathrm{E})$$

(5) reductio ad absurdum:

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg\phi] \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\phi} \; (\mathrm{RAA})$$

6.2 DEF (Ableitung): Mithilfe der Schlussregeln kann nun induktiv über die Baumstruktur eine *Ableitung* definiert werden:

(1) Für jede Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ ist $\mathcal{D} :\simeq \ \phi$ eine Ableitung.

(2) Falls $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ Ableitungen sind, dann sind auch folgende Bäume Ableitungen:

$$(\wedge) \quad \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ \phi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2 \\ \psi\end{array}}{\phi \wedge \psi} \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\phi} \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\psi}$$

$$(\to) \quad \frac{\begin{array}{c}[\phi] \\ \mathcal{D}_1 \\ \psi\end{array}}{\phi \to \psi} \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ \phi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2 \\ \phi \to \psi\end{array}}{\psi}$$

$$(\mathrm{RAA}) \quad \frac{\begin{array}{c}[\neg\phi] \\ \mathcal{D}_1 \\ \bot\end{array}}{\phi}$$

Es wurde wieder nicht vorausgesetzt, dass die durch eckige Klammern gekennzeichneten Prämissen in den Ableitungen tatsächlich vorkommen oder dort tatsächlich gelöscht werden.

6.3 DEF (Annahmenmenge): Die Abbildung

$$\mathrm{Hyp} : \mathcal{D} \mapsto \{\phi \in \mathrm{PROP} : \ \phi \text{ ist offene Annahme von } \mathcal{D}\}$$

ordnet jeder gültigen Ableitung $\mathcal{D}$ die Menge ihrer offenen Annahmen zu. Die Menge $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D})$ wird auch *Hypothesenmenge oder Annahmenmenge von* $\mathcal{D}$ genannt.

Eine rekursive Definition von Hyp verbleibt als Übungsaufgabe. Dabei muss beachtet werden, ob in einer Ableitung tatsächlich Löschungen erfolgen.

6.4 DEF (Ableitbarkeit): Aus einer Menge $\Delta \subseteq \mathrm{PROP}$ von Formeln ist die Formel ϕ ableitbar ($\Delta \vdash \phi$), falls es eine Ableitung $\mathcal{D}$ gibt, so dass die Konklusion von $\mathcal{D}$ die Formel ϕ ist und $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \subseteq \Delta$ gilt.

6.5 DEF (weitere Junktoren): Seien $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$ beliebige Formeln. Es dürfen folgende abkürzende Schreibweisen verwendet werden:

(1) $(\phi \vee \psi)$ für die Formel $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$

(2) $(\phi \leftrightarrow \psi)$ für die Formel $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$

6.6 Proposition (weitere Schlussregeln): Für die Junktoren $\vee$ und $\leftrightarrow$ gelten folgende Schlussregeln zur Einführung und Beseitigung:

(1) Einführung der Disjunktion:

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\,(\vee I) \qquad\qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\,(\vee I)$$

(2) Beseitigung der Disjunktion:

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \sigma\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\\ \sigma\end{array}}{\sigma}\,(\vee E)$$

(3) Einführung der Biimplikation:

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\\ \phi\end{array}}{\phi \leftrightarrow \psi}\,(\leftrightarrow I)$$

(4) Beseitigung der Biimplikation:

$$\frac{\phi \qquad \phi \leftrightarrow \psi}{\psi}\,(\leftrightarrow E) \qquad\qquad \frac{\psi \qquad \phi \leftrightarrow \psi}{\phi}\,(\leftrightarrow E)$$

Bew.: Zum Beweis vergleiche van Dalen, Lemma 1.6.2, Seite 49ff.

Bemerkung: Dass eine Schlussregel gilt, bedeutet hier, dass ihre Anwendung ersetzbar ist durch Anwendung schon bekannter Schlussregeln (für $\wedge$,$\rightarrow$ und $\perp$). Damit kann diese abkürzende Schreibweise in Zukunft verwendet werden, ohne dass die Definition der Ableitung erweitert werden muss.

Man kann alternativ die Disjunktion und die Biimplikation auch als Grundzeichen der Aussagenlogik verwenden und für diese Zeichen die in Proposition 6.6 (1) – (4) bewiesenen Eigenschaften als Ableitungs-Regeln festsetzen. Dieser Kalkül heißt NK. Dann erhält man die in Definition 6.5 (weitere Junktoren) gemachten Festsetzungen als Theoreme des Kalküls. In NK gilt also:

$$\phi \vee \psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

und

$$\phi \leftrightarrow \psi \dashv\vdash (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$$

§ 7 Vollständigkeit

Motivation: Bisher wurden 2 zentrale Konzeptionen der Logik eingeführt:

(1) Die Folgerung ($\models$): wird semantisch definiert über die Betrachtung aller (möglichen) Interpretationen der Formeln; die Gültigkeit (Wahrheit) der Prämissen erzwingt in einem Schluss die Gültigkeit der Konklusion; die Bedeutung der Junktoren wird explizit durch Wahrheits-Funktionen festgelegt.

(2) Das Ableiten ($\vdash$): wird syntaktisch definiert über die regelkonforme Anwendung von Schlussregeln eines Kalküls (bei uns NK$'$); beim Ableiten wird auf die Betrachtung der Bedeutung verzichtet, entscheidend ist das Erreichen der Endformel von den Prämissen ausgehend; die Bedeutung der Junktoren ist (höchstens) implizit durch die Schlussregeln festgelegt.

Im Folgenden wird die Vollständigkeit von NK$'$ bewiesen. Damit ist die Gleichwertigkeit beider Konzeptionen gemeint. Die Vollständigkeit (im weiten Sinn) umfaßt dabei zwei Richtungen:

(1) Die Korrektheit des Kalküls: $\Gamma \vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \phi$

Alles, was abgeleitet werden kann, kann auch gefolgert werden.

(2) Die (eigentliche) Vollständigkeit des Kalküls: $\Gamma \models \phi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \phi$

Alles, was gefolgert werden kann, kann auch abgeleitet werden.

Die Begrifflichkeit legt nahe, dass die Folgerung primär zur Ableitung verstanden wird. Dies ist nicht immer so. Es gibt auch philosophische Konzeptionen der Logik, die das Ableiten als primär ansehen. Letztlich kann festgehalten werden, dass beide Konzeptionen unabhängig voneinander motiviert werden können und prinzipiell unabhängig voneinander eingeführt werden.

Bemerkungen:

(1) Hyp($\mathcal{D}$) bezeichnet die Menge aller offenen Annahmen einer Ableitung $\mathcal{D}$ und ist offensichtlich endlich.

Bei einer formalen, rekursiven Definition muss beachtet werden, dass die Löschung von Annahmen bei einer Schlussregel nicht zwingend ist.

(2) Im Folgenden wird grundsätzlich von einer Sprache über der funktional-vollständigen Junktorenmenge $\{\wedge, \rightarrow, \perp\}$ ausgegangen.

(3) Das folgende Argument wird in diesem Paragraphen immer wieder verwendet: $\Gamma \models \phi \quad \Rightarrow \quad \Delta \cup \Gamma \models \phi$

7.1 Satz (Korrektheit von Ableitungen): Für jede Ableitung $\mathcal{D}$ mit Endformel ϕ gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \models \phi$.

Bew.: Durch Induktion über den Aufbau der Ableitung $\mathcal{D}$.

$\mathcal{D} \triangleq \phi$: Damit ist $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) = \{\phi\}$ und Endformel von $\mathcal{D}$ ist ϕ.
Es gilt auch: $\phi \models \phi$ und Induktionsanfang ist gezeigt.

IV: Angenommen Aussage gilt für Ableitungen $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$.

$$\mathcal{D} \triangleq \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & & \mathcal{D}_2 \\ \phi & & \psi\end{matrix}}{\phi \wedge \psi}\,(\wedge I)$$

Damit: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) = \mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1) \cup \mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_2)$.

Nach IV gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1) \models \phi$ und $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_2) \models \psi$.
Damit gilt, da $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_i) \subseteq \mathrm{Hyp}(\mathcal{D})$: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \models \phi$ und $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \models \psi$.
Daraus folgt direkt: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \models \phi \wedge \psi$.

$$\mathcal{D} \triangleq \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \phi \wedge \psi\end{matrix}}{\phi}\,(\wedge E)$$

Damit: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) = \mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1)$.

Nach IV gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1) \models \phi \wedge \psi$.
Mit $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1) = \mathrm{Hyp}(\mathcal{D})$ gilt schon: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \models \phi \wedge \psi$.
Also auch: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \models \phi$.

$$\mathcal{D} \triangleq \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \phi \wedge \psi\end{matrix}}{\psi}\,(\wedge E)$$

Analog wie oben!

$$\mathcal{D} \triangleq \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & & \mathcal{D}_2 \\ \phi & & \phi \to \psi\end{matrix}}{\phi}\,(\to E)$$

Damit: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) = \mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1) \cup \mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_2)$.

Nach IV gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1) \models \phi$ und $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_2) \models \phi \to \psi$.
Damit gilt, da $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_i) \subseteq \mathrm{Hyp}(\mathcal{D})$: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \models \phi$ und $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \models \phi \to \psi$.
Daraus folgt direkt: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \models \psi$.

$$\mathcal{D} \doteq \quad \dfrac{\begin{matrix}[\phi]^1 \\ \mathcal{D}_1 \\ \psi\end{matrix}}{\phi \to \psi}\,(\to I\!: 1)$$

Aufgrund der möglichen Löschung kann keine einfache Aussage über die Annahmenmengen getroffen werden. Es sind folgende drei Fälle zu unterscheiden:

(1) $\phi \notin \mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1)$ (Damit sofort auch: $\phi \notin \mathrm{Hyp}(\mathcal{D})$)
(Kein Vorkommen von ϕ in bisheriger Ableitung.)

(2) $\phi \in \mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1)$ und $\phi \in \mathrm{Hyp}(\mathcal{D})$
(Ein Vorkommen von ϕ wurde nicht gelöscht.)

(3) $\phi \in \mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1)$ und $\phi \notin \mathrm{Hyp}(\mathcal{D})$
(Alle Vorkommen von ϕ wurden gelöscht.)

Nach IV gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1) \models \psi$.

In allen drei Fällen folgt fast sofort: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \models \phi \to \psi$

$$\mathcal{D} \doteq \quad \dfrac{\begin{matrix}[\neg\phi]^1 \\ \mathcal{D}_1 \\ \bot\end{matrix}}{\phi}\,(\to RAA\!: 1)$$

Analog zu oben sind wieder 3 Fälle zu unterscheiden:

(1) $\neg\phi \notin \mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1)$ (Damit sofort auch: $\neg\phi \notin \mathrm{Hyp}(\mathcal{D})$)

(2) $\neg\phi \in \mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1)$ und $\neg\phi \in \mathrm{Hyp}(\mathcal{D})$

(3) $\neg\phi \in \mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1)$ und $\neg\phi \notin \mathrm{Hyp}(\mathcal{D})$

Nach IV gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1) \models \bot$. Also ist $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1)$ unerfüllbar.

In den ersten beiden Fällen gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) = \mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1)$.

Damit folgt aus der Unerfüllbarkeit von $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D})$ sofort: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \models \phi$.

Angenommen es würde im dritten Fall gelten: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \not\models \phi$

Dann gäbe es eine Belegung v mit:

$$\text{Für jedes } \psi \in \mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \text{ gilt } [\![\psi]\!]_v = 1, \text{ und } [\![\phi]\!]_v = 0.$$

Insbesondere gilt dann auch: $[\![\neg\phi]\!]_v = 1$.

Da $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1) = \mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \cup \{\neg\phi\}$, wäre eine Belegung gefunden, die $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1)$ erfüllt. WIDERSPRUCH zur Unerfüllbarkeit von $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Hyp}(\mathcal{D}_1)$.

Also doch: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \models \phi$.

Damit wurden alle Ableitungen betrachtet und die Aussage ist gezeigt. Q.E.D.

7.2 Theorem (Korrektheit von NK'**):** Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ Menge von Aussagen und $\phi \in \mathrm{PROP}$ eine Formel. Wenn $\Gamma \vdash \phi$, dann auch $\Gamma \models \phi$.

Bew.:

Es gelte $\Gamma \vdash \phi$.

Nach Definition der Ableitbarkeit gilt: Es gibt eine Ableitung $\mathcal{D}$ mit Endformel ϕ, und für die offenen Annahmen $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D})$ gilt $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$.

Mit dem Satz zur Korrektheit von Ableitungen gilt: $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D}) \models \phi$.

Daraus folgt direkt für $\Gamma \supseteq \mathrm{Hyp}(\mathcal{D})$: $\Gamma \models \phi$. Q.E.D.

Bemerkung: Die Korrektheit des Kalküls wurde recht schnell und einfach gezeigt. Um nun die Umkehrung der Aussage, also die Vollständigkeit des Kalküls, zeigen zu können, wird noch ein wenig Begrifflichkeit und Theorie benötigt.

7.3 DEF (Konsistenz): Eine (eventuell unendliche) Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ heißt *konsistent*, falls $\Gamma \nvdash \bot$. Andernfalls heißt Γ *inkonsistent*.

7.4 Lemma: Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ eine Menge von Aussagen. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(1) Γ ist konsistent.

(2) Es gibt keine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$, so dass: $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$.

(3) Es gibt $\phi \in \mathrm{PROP}$ mit: $\Gamma \nvdash \phi$.

Bew.: Der Beweis verbleibt als leichte Übung. Q.E.D.

7.5 Lemma: Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ eine Menge von Aussagen. Gibt es eine Belegung v, so dass für jedes $\psi \in \Gamma$ gilt: $[\![\psi]\!]_v = 1$, dann ist Γ konsistent.

Bew.:

Sei v eine Belegung, so dass für jedes $\psi \in \Gamma$ gilt: $[\![\psi]\!]_v = 1$.

Angenommen Γ ist inkonsistent.

Dann gibt es eine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$, so dass $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$.

Damit gilt mit der Korrektheit des Kalküls: $\Gamma \models \phi$ und $\Gamma \models \neg\phi$.

Damit muss nach der Definition der Folgerung für gewählte Belegung v gelten:

$$[\![\phi]\!]_v = 1 \quad \text{und} \quad [\![\neg\phi]\!]_v = 1$$

WIDERSPRUCH zur Definition von Bewertungen. Also ist Γ doch konsistent.

Q.E.D.

7.6 DEF (maximal-konsistent): Eine Menge $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ heißt *maximal-konsistent*, falls Γ konsistent ist und für jede konsistente Obermenge $\Gamma' \supseteq \Gamma$ gilt, dass $\Gamma' = \Gamma$. (Das bedeutet, dass Γ keine echte konsistente Erweiterung hat.)

Bemerkung (Abzählbarkeit von PROP**):** Der folgende Satz benötigt wesentlich eine Abzählung von PROP. Diese kann z.B. wie folgt angegeben werden:

Zunächst wird jedem Zeichen des Alphabets fortlaufend eine natürliche Zahl größer 0 zugeordnet:

α	(	)	$\wedge$	$\rightarrow$	$\perp$	p_0	p_1	...
$N(\alpha)$	1	2	3	4	5	6	7	...

Damit können beliebige Formeln wie folgt kodiert werden:

$$K : \text{PROP} \rightarrow \mathbb{N} : \phi \simeq \alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n \mapsto \prod_{k=0}^{n} p_k^{N(\alpha_k)}$$

Dabei ist p_k die k-te Primzahl.

Aufgrund der eindeutigen Lesbarkeit von Formeln ist diese Kodierung K wohldefiniert und aufgrund der eindeutigen Zerlegbarkeit einer natürlichen Zahl in ihre Primfaktoren injektiv.

Hieraus läßt sich eine Abzählung $f : \mathbb{N} \rightarrow \text{PROP} : n \mapsto \phi_n$ gewinnen.

Genauer: Es läßt sich eine primitiv-rekursive Funktion g angeben, so dass $g(n)$ der Kode für die Formel ϕ_n ist. (Übungsaufgabe!)

7.7 Satz (Konsistente Erweiterbarkeit): Jede konsistente Aussagenmenge $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ läßt sich zu einer maximal-konsistenten Menge $\Gamma' \supseteq \Gamma$ erweitern.

Bew.:

Sei Γ konsistente Menge von Aussagen und $\{\phi_k \in \text{PROP} : \ k \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von PROP.

Definiere nun rekursiv eine aufsteigende Folge von Formelmengen:

$\Gamma_0 := \Gamma$ und $\Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\phi_n\} & \text{falls } \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \text{ konsistent} \\ \Gamma_n & \text{sonst} \end{cases}$

Nach Konstruktion ist klar, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass Γ_n konsistent ist.

Setze nun: $\Gamma' := \bigcup \Gamma_n$.

Es gilt:

(1) $\Gamma' \supseteq \Gamma$ ist konsistent: Angenommen nicht. Dann $\Gamma' \vdash \perp$. Dann gib es eine Ableitung $\mathcal{D}$ mit $\text{Hyp}(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma'$ und Endformel $\perp$. Da $\text{Hyp}(\mathcal{D})$ endlich ist, gibt es maximales $n \in \mathbb{N}$ mit $\phi_n \in \text{Hyp}(\mathcal{D})$. Nach Konstruktion gilt: $\text{Hyp}(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma_{n+1}$.

Damit gilt aber: $\Gamma_{n+1} \vdash \perp$. Widerspruch zur Konsistenz von Γ_n.

Also ist auch Γ' konsistent.

(2) Γ' ist maximal: Angenommen nicht, dann gibt es ein $\phi_n \in \text{PROP} \setminus \Gamma'$, so dass $\Gamma' \cup \{\phi_n\}$ konsistent ist. Damit ist aber auch $\Gamma_n \cup \{\phi_n\}$ konsistent und $\phi_n \in \Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma'$. Dies ist ein Widerspruch.

Also ist Γ' maximal-konsistent. q.e.d.

7.8 Lemma: Sei $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ beliebige Formelmenge. Dann gilt für jede Formel $\phi \in \text{PROP}$:

(1) Ist $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ inkonsistent, dann gilt: $\Gamma \vdash \phi$.

(2) Ist $\Gamma \cup \{\phi\}$ inkonsistent, dann gilt: $\Gamma \vdash \neg\phi$.

Bew.:

(1) Sei $\mathcal{D}$ eine Ableitung für $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \vdash \bot$. Durch die weitere Anwendung der RAA samt Löschung aller Prämisse $\neg\phi$ wird $\mathcal{D}$ sofort zu einer Ableitung für $\Gamma \vdash \phi$.

(2) Sei $\mathcal{D}$ eine Ableitung für $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \bot$. Durch die weitere Anwendung der Regel $(\rightarrow I)$ samt Löschung aller Prämissen ϕ wird $\mathcal{D}$ sofort zu einer Ableitung für $\Gamma \vdash \neg\phi \simeq \phi \rightarrow \bot$. q.e.d.

7.9 Korollar: Falls $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ maximal-konsistent ist, dann ist Γ unter Ableitbarkeit abgeschlossen. D.h.: Wenn $\Gamma \vdash \phi$ gilt, dann auch $\phi \in \Gamma$.

Bew.:

Es gelte: $\Gamma \vdash \phi$.

Angenommen $\phi \notin \Gamma$. Dann ist aufgrund der Maximalität von Γ die Menge $\Gamma \cup \{\phi\}$ inkonsistent. Damit gilt mit obigem Lemma: $\Gamma \vdash \neg\phi$.

Damit ist Γ aber inkonsistent. Widerspruch.

Also doch: $\phi \in \Gamma$. q.e.d.

7.10 Lemma: Sei $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ wieder maximal-konsistent. Dann gilt für alle $\phi, \psi \in \text{PROP}$:

(1) Entweder $\phi \in \Gamma$ oder $\neg\phi \in \Gamma$.

(2) $\phi \rightarrow \psi \in \Gamma$ gilt genau dann, wenn $(\phi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Gamma)$.

Bew.:

(1) Klar ist aufgrund der Konsistenz, dass nicht $\phi \in \Gamma$ und $\neg\phi \in \Gamma$.

Es gelte, dass $\phi \notin \Gamma$. Aufgrund der Abgeschlossenheit unter Ableitbarkeit gilt dann $\Gamma \nvdash \phi$. Wäre $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ inkonsistent, dann würde nach obigem Lemma gelten: $\Gamma \vdash \phi$. Also ist $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ konsistent.

Aufgrund der Maximalitat von Γ gilt nun: $\neg\phi \in \Gamma = \Gamma \cup \{\neg\phi\}$.

Analog impliziert $\neg\phi \notin \Gamma$, dass $\phi \in \Gamma$.

(2) Es sind zwei Richtungen zu zeigen.

„⇒“ Es gelte: $\phi \to \psi \in \Gamma$.

Falls nun $\phi \notin \Gamma$, dann ist nichts zu zeigen. Sei also $\phi \in \Gamma$. Damit gilt:

$$\Gamma \vdash \phi \quad \text{und} \quad \Gamma \vdash \phi \to \psi$$

Mit modus ponens folgt: $\Gamma \vdash \psi$. Da Γ maximal-konsistent und damit unter Ableitbarkeit abgeschlossen ist, gilt damit auch: $\psi \in \Gamma$.

„⇐“ Falls $\phi \in \Gamma$, dann auch nach Voraussetzung $\psi \in \Gamma$. Damit gilt: $\Gamma \vdash \psi$.

$\Rightarrow \quad \Gamma \vdash \phi \to \psi \quad \Rightarrow \quad \phi \to \psi \in \Gamma$

Falls aber $\phi \notin \Gamma$, dann gilt mit (1): $\neg\phi \in \Gamma \quad (\star)$

Betrachte nun folgende Ableitung $\mathcal{D}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^1 \qquad \neg\phi}{\perp}}{\psi}\,(\text{RAA})}{\phi \to \psi}\,(1)$$

Wegen $(\star)$ gilt: $\text{Hyp}(\mathcal{D}) = \{\neg\phi\} \subseteq \Gamma$.

Also ist gezeigt: $\Gamma \vdash \phi \to \psi$ und damit auch $\phi \to \psi \in \Gamma$.

Q.E.D.

7.11 Lemma: Sei $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ konsistent. Dann gibt es eine Belegung v, so dass für jedes $\psi \in \Gamma$ gilt: $[\![\psi]\!]_v = 1$.

Bew.:

Sei $\Gamma' \supseteq \Gamma$ maximal-konsistente Erweiterung von Γ.

Sei die Belegung v wie folgt definiert: $p \mapsto v(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \in \Gamma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Falls für jedes $\phi \in \text{PROP}$ gilt:

$$[\![\phi]\!]_v = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \phi \in \Gamma' \qquad (\star)$$

dann wurde eine Belegung v gefunden, so dass für jedes $\psi \in \Gamma \subseteq \Gamma'$ gilt: $[\![\psi]\!]_v = 1$.

Zeige also $(\star)$ durch Induktion über dem Aufbau von ϕ:

$\perp$: $[\![\perp]\!]_v = 0$ und $\perp \notin \Gamma'$.

p: $[\![p]\!]_v = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v(p) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p \in \Gamma$.

IV: Es gelte die Behauptung für ψ und σ.

$\psi \to \sigma$: $[\![\psi \to \sigma]\!]_v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\![\psi]\!]_v = 1$ und $[\![\sigma]\!]_v = 0$

$\Leftrightarrow \quad \psi \in \Gamma'$ und $\sigma \notin \Gamma' \quad \Leftrightarrow \quad$ NICHT $(\psi \in \Gamma' \Rightarrow \sigma \in \Gamma')$

$\Leftrightarrow \quad$ NICHT $(\psi \to \sigma \in \Gamma')$ (Vgl. Lemma oben.)

$\psi \wedge \sigma$: $[\![\psi \wedge \sigma]\!]_v = 1 \quad \Leftrightarrow \quad [\![\psi]\!]_v = 1$ und $[\![\sigma]\!]_v = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \psi, \sigma \in \Gamma'$

$\Leftrightarrow \quad \Gamma' \vdash \psi \wedge \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \phi \wedge \psi \in \Gamma'$

Q.E.D.

7.12 Korollar: Für ein konsistentes $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ und $\phi \in \mathrm{PROP}$ gilt $\Gamma \nvdash \phi$ genau dann, wenn es eine Belegung v gibt, so dass ür jedes $\psi \in \Gamma$ gilt:

$$[\![\psi]\!]_v = 1 \quad \text{und} \quad [\![\phi]\!]_v = 0$$

Bew.: $\Gamma \nvdash \phi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \cup \{\neg\phi\}$ konsistent. Q.E.D.

7.13 Theorem (Vollständigkeit von NK$'$): Für jede Menge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ und Aussage $\phi \in \mathrm{PROP}$ gilt: Wenn $\Gamma \models \phi$, dann auch $\Gamma \vdash \phi$.

Bew.:

Es gelte $\Gamma \nvdash \phi$. Daraus folgt: $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \nvdash \bot$.

Damit ist $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ erfüllbar und es gilt: $\Gamma \not\models \phi$. Q.E.D.

7.14 Korollar (Endlichkeitssatz): Falls $\Gamma \models \phi$, dann gibt es endliches $\Gamma' \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma' \models \phi$.

Bew.: Direkte Folge aus der Vollständigkeit von NK$'$ und der Tatsache, dass für jede Ableitung $\mathcal{D}$ gilt, dass $\mathrm{Hyp}(\mathcal{D})$ endlich ist. Q.E.D.

7.15 Korollar (Kompaktheitssatz): $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge $\Gamma' \subseteq \Gamma$ erfüllbar ist.

Bew.:

- $\Rightarrow$ trivial.
- $\Leftarrow$ Angenommen Γ nicht erfüllbar. Damit $\Gamma \models \bot$, also $\Gamma \vdash \bot$. Damit gibt es endlichhes $\Gamma' \subseteq \Gamma$ mit $\Gamma' \vdash \bot$. Dafür gilt: $\Gamma' \models \bot$. Also ist Γ' nicht erfüllbar. Q.E.D.