Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik — Blatt 4

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2008/09**

Aufgabe 1 (1 Punkt)

Definieren Sie den Junktor $\rightarrow$ durch die Junktoren $\wedge$ und $\leftrightarrow$.

Aufgabe 2 (1 + 2 Punkte)

Zeigen Sie folgende Behauptungen durch algebraische Umformungen. Sie dürfen dabei die Äquivalenzen aus Theorem 5.1 sowie die Äquivalenz $\phi \rightarrow \psi \mathrel{=}\!\!\mid\!\models \neg\phi \vee \psi$ verwenden. Geben Sie bei jedem Schritt an, welche dieser Äquivalenzen Sie verwenden. Geben Sie ferner an, an welchen Stellen Sie den Substitutionssatz (Theorem 3.3) verwenden.

a) $\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \sigma) \mathrel{=}\!\!\mid\!\models \phi \rightarrow \sigma$

b) $\phi \vee \psi \rightarrow \sigma \mathrel{=}\!\!\mid\!\models (\phi \rightarrow \sigma) \wedge (\psi \rightarrow \sigma)$

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Konstruieren Sie für die Formel $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$ eine konjunktive und eine disjunktive Normalform. Geben Sie die Zwischenschritte der Konstruktion an.

Aufgabe 4 (3 Zusatzpunkte)

Beweisen Sie:

$$\bigwedge_{i \leq m} \varphi_i \vee \bigwedge_{j \leq n} \psi_j \mathrel{=}\!\!\mid\!\models \bigwedge_{\substack{i \leq m \\ j \leq n}} (\varphi_i \vee \psi_j)$$

Sie dürfen im Beweis die Distributivität von $\wedge$ und $\vee$ (Theorem 5.1 (4)) sowie das verallgemeinerte einfache Distributivgesetz (Lemma 5.3 (3)) benutzen.