Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 1**

Aufgabe 1 (1+1+1 Punkte)

Welche der folgenden Zeichenreihen sind (*ohne* Berücksichtigung der Regeln zur Klammerersparnis) Aussagen, welche nicht? Geben Sie jeweils eine Begründung!

a) $((\rightarrow$

b) $((p_1 \rightarrow p_{15}) \vee (\neg p_2)))$

c) $((\neg\bot \vee p_2) \leftrightarrow p_{21})$

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)

Geben Sie Gliederungsbäume, sämtliche Teilformeln sowie den Rang folgender Aussagen an:

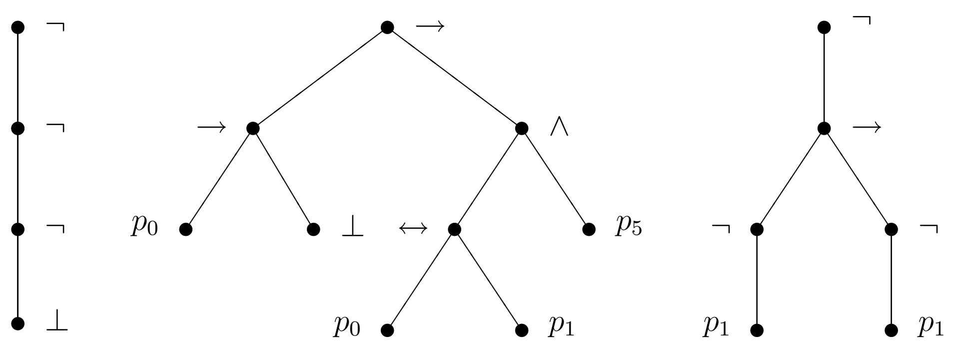
a) $\neg\neg p_1 \rightarrow p_1$

b) $(((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_1) \rightarrow p_2) \rightarrow p_1$

c) $(p_7 \rightarrow \neg\bot) \leftrightarrow ((p_4 \wedge \neg p_2) \rightarrow p_1)$

Aufgabe 3 (1+1+1 Punkte)

Geben Sie die zu folgenden Gliederungsbäumen gehörenden Aussagen an.



Aufgabe 4 (2+2 Punkte)

Es sei r die Rangfunktion, und $K(\varphi)$ sei die Anzahl der Vorkommen von Konnektiven in φ. Beweisen Sie folgende Behauptungen.

a) Für jede Aussage φ ist $r(\varphi) \leq K(\varphi)$.

b) Wenn φ eine echte Teilformel von ψ ist, dann ist $r(\varphi) < r(\psi)$.

Aufgabe 5 (2+4 Punkte)

Beweisen Sie folgende Behauptungen.

a) Wenn φ eine Teilformel von ψ ist, dann kommt φ in jeder Bildungsfolge von ψ vor.

b) Wenn φ in einer kürzesten Bildungsfolge von ψ vorkommt, dann ist φ eine Teilformel von ψ.

Aufgabe 6 (2+2 Punkte)

Es sei $\#(\mathrm{Sub}(\varphi))$ die Anzahl der Teilformeln von φ und $\#(T(\varphi))$ die Anzahl der Knoten des Gliederungsbaumes $T(\varphi)$. Weiterhin stehe $A(\varphi)$ für die Anzahl der Atome von φ und $K(\varphi)$ für die Anzahl der Vorkommen von Konnektiven in φ. Beweisen Sie folgende Behauptungen.

a) Wenn $\perp$ nicht in φ vorkommt, dann ist $A(\varphi) + K(\varphi) \leq \#(T(\varphi))$.

b) $\#(\mathrm{Sub}(\varphi)) \leq \#(T(\varphi))$.

Aufgabe 7 (3+3 Zusatzpunkte)

Es sei r die Rangfunktion, und $A(\varphi)$ stehe für die Anzahl der Atome von φ und $K(\varphi)$ für die Anzahl der Vorkommen von Konnektiven in φ. Ein Ast eines Baumes ist eine maximale linear geordnete Teilmenge des Baumes, die Länge eines Astes ist die um Eins verminderte Anzahl seiner Knoten. Beweisen Sie folgende Behauptungen.

a) Wenn $\perp$ nicht in φ vorkommt, dann ist $A(\varphi) + K(\varphi) < 2^{r(\varphi)+1}$.

b) Die Länge des längsten Astes in $T(\varphi)$ beträgt $r(\varphi)$.