Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik I — Blatt 6

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2012/13**

Aufgabe 1 (2 + 2 + 3 + 2 Punkte)

Welche der folgenden Mengen sind konsistent? Geben Sie jeweils eine Begründung an.

(a) $\Gamma_a := \{p_0 \to p_1,\ p_0 \wedge p_2 \to p_1 \wedge p_3,\ (p_0 \wedge p_2) \wedge p_4 \to (p_1 \wedge p_3) \wedge p_5, \ldots\}$

(b) $\Gamma_b := \{\neg p_1 \wedge p_2 \to p_0,\ p_1 \to (\neg p_1 \to p_2),\ p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$

(c) $\Gamma_n := \{p_0\} \cup \{p_k \to p_{k+1} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg p_n\}$ (für beliebiges $n \in \mathbb{N}$).
(Begründung durch vollständige Induktion über n.)

(d) $\Gamma_d := \{p_0 \to p_1,\ p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_3,\ p_3 \to p_0\}$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Beweisen Sie für $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind:

(1) Γ ist konsistent.

(2) Es gibt keine Formel $\varphi \in \mathrm{PROP}$, so dass $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

(3) Es gibt $\varphi \in \mathrm{PROP}$ mit $\Gamma \nvdash \varphi$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Eine Formel φ heiße *unabhängig* von der Menge Γ, falls $\Gamma \nvdash \varphi$ und $\Gamma \nvdash \neg\varphi$.
Zeigen Sie, dass die Formel $(p_0 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee p_3)$ unabhängig von der Menge

$$\{(\neg p_4 \vee p_4) \to p_2,\ p_4 \to (p_5 \vee p_6),\ p_5 \to p_0,\ p_6 \to p_1\}$$

ist.

Aufgabe 4 (1 Punkt)

Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ maximal-konsistent.
Beweisen Sie, dass für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{PROP}$ gilt: $\varphi \wedge \psi \in \Gamma \iff (\varphi \in \Gamma \text{ und } \psi \in \Gamma)$.

Aufgabe 5 (1 + 1 + 1 Punkte)

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen eine geeignete Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ an. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung Ihrer Antwort.

(a) Γ hat keine maximal-konsistente Erweiterung.

(b) Γ hat genau eine maximal-konsistente Erweiterung.

(c) Γ hat unendlich viele maximal-konsistente Erweiterungen.

Abgabe der Aufgaben am 13.12. nach der Vorlesung oder als PDF.