Übungen zur Vorlesung Mathematischen Logik II Blatt 1

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **SS 2011**

Aufgabe 1

Beweisen Sie folgende Behauptungen (Assoziativgesetz und Kommutativgesetz dürfen verwendet werden.):

1. $\mathsf{PA} \vdash x^{y+z} = x^y x^z$
2. $\mathsf{PA} \vdash x = 0 \vee \exists y(x = Sy)$
3. $\mathsf{PA} \vdash x \neq 0 \to (x^y = x^z \to y = z)$
4. $\mathsf{PA} \vdash x < Sx$
5. $\mathsf{PA} \vdash x < y \leftrightarrow Sx < Sy$
6. $\mathsf{PA} \vdash x < y \to x + z < y + z$
7. $\mathsf{PA} \vdash z \neq 0 \to (x < y \to xz < yz)$
8. $\mathsf{PA} \vdash 1 < x \to (y < z \to x^y < x^z)$

Hierbei sei $x < y$ eine Abkürzung für $\exists z(x + Sz = y)$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind, indem Sie sie durch die Ausgangsfunktionen, Komposition und primitive Rekursion ausdrücken:

1. $f_1(x) = 3 \cdot x$
2. $f_2(x) = x!$
3. $f_3(x, y) = x^y$
4. $f_4(x, y) = \max(x, y)$
5. $f_5(x, y, z) = \max(x, y, z)$

Aufgabe 3

Die Funktion $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:

$$h(x, y) = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + x$$

1. Zeigen Sie, daß h bijektiv ist.
2. Definieren Sie primitiv rekursive Funktionen $h_1, h_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, so daß gilt:
   - $h_1(h(x, y)) = x$
   - $h_2(h(x, y)) = y$
   - $h(h_1(z), h_2(z)) = z$