

Klausur Mathematische Logik

22. Februar 2008

Max Mustermann

1234567

- **Klausur erst nach Aufforderung aufschlagen!**
- Mobiltelefone bitte ausschalten!
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Insgesamt sind 60 Punkte erreichbar. Die Klausur gilt mit 20 Punkten als bestanden.
- Aus der Aussagenlogik (Aufgaben 1–5) und der Prädikatenlogik (Aufgaben 6–12) sind jeweils mindestens 10 Punkte zu erreichen. Aus den Übungen werden dabei jeweils bis zu 9 Punkte angerechnet. Aufgabe 12 liefert Zusatzpunkte zum prädikatenlogischen Teil.
- Eine Abgabe ist vor Ablauf der 90 Minuten *nicht* möglich. Bleiben Sie bitte auf Ihrem Platz, bis alle Klausuren eingesammelt wurden.
- Verwenden Sie nur die Blätter des Klausurbogens für Ihre Lösungen. Auf den beiden letzten Blättern finden Sie zusätzlichen Platz.

Ich möchte das Resultat dieser Klausur mit meiner Matrikelnummer als Schlüssel auf einer Webseite einsehen können.

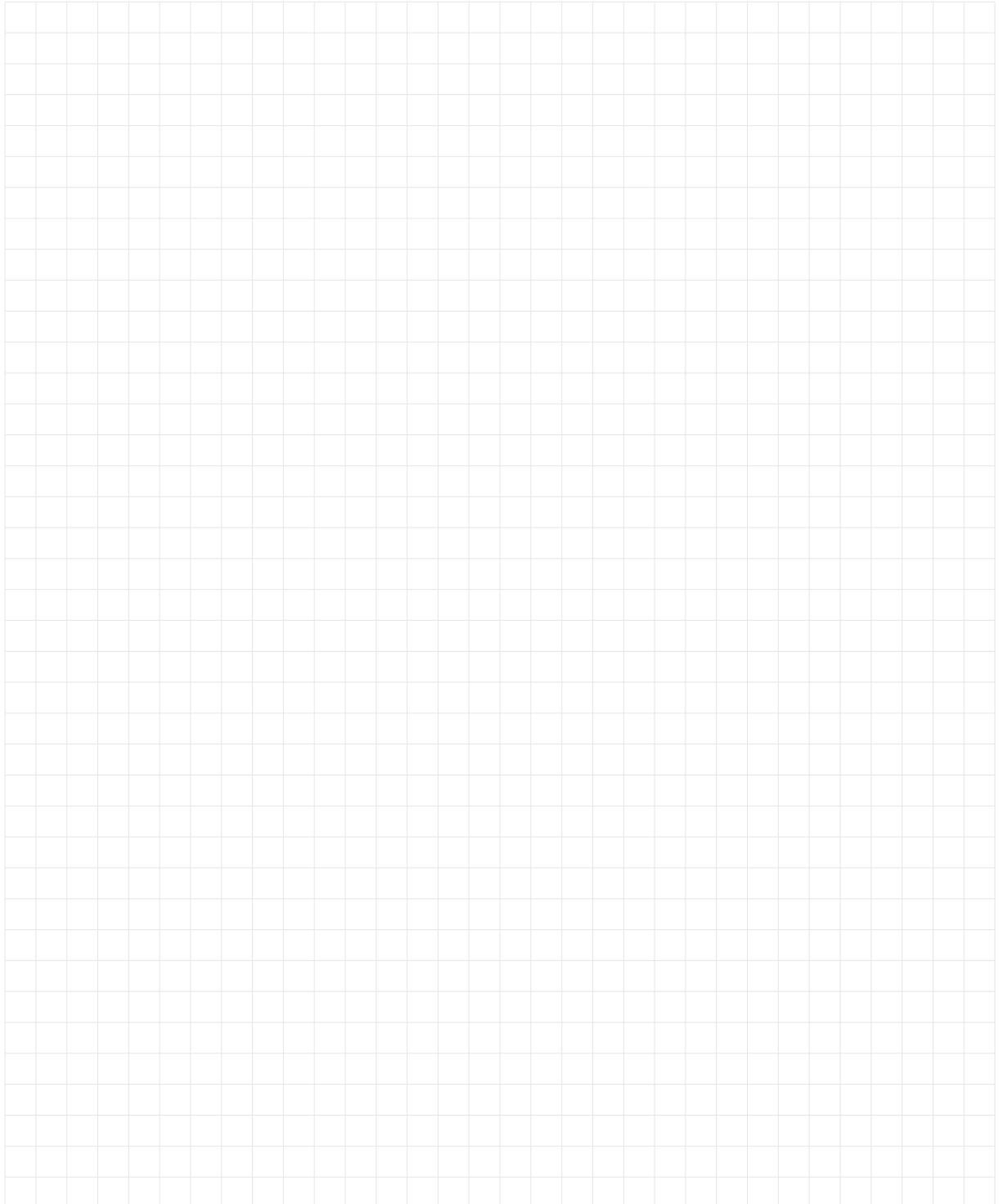
Datum, Name

	AL	PL
1		×
2		×
3		×
4		×
5		×
6	×	
7	×	
8	×	
9	×	
10	×	
11	×	
12	×	
Üb		
Σ		
Note		

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Geben Sie zu dieser Aussage sämtliche Teilaussagen und deren jeweiligen Rang an:

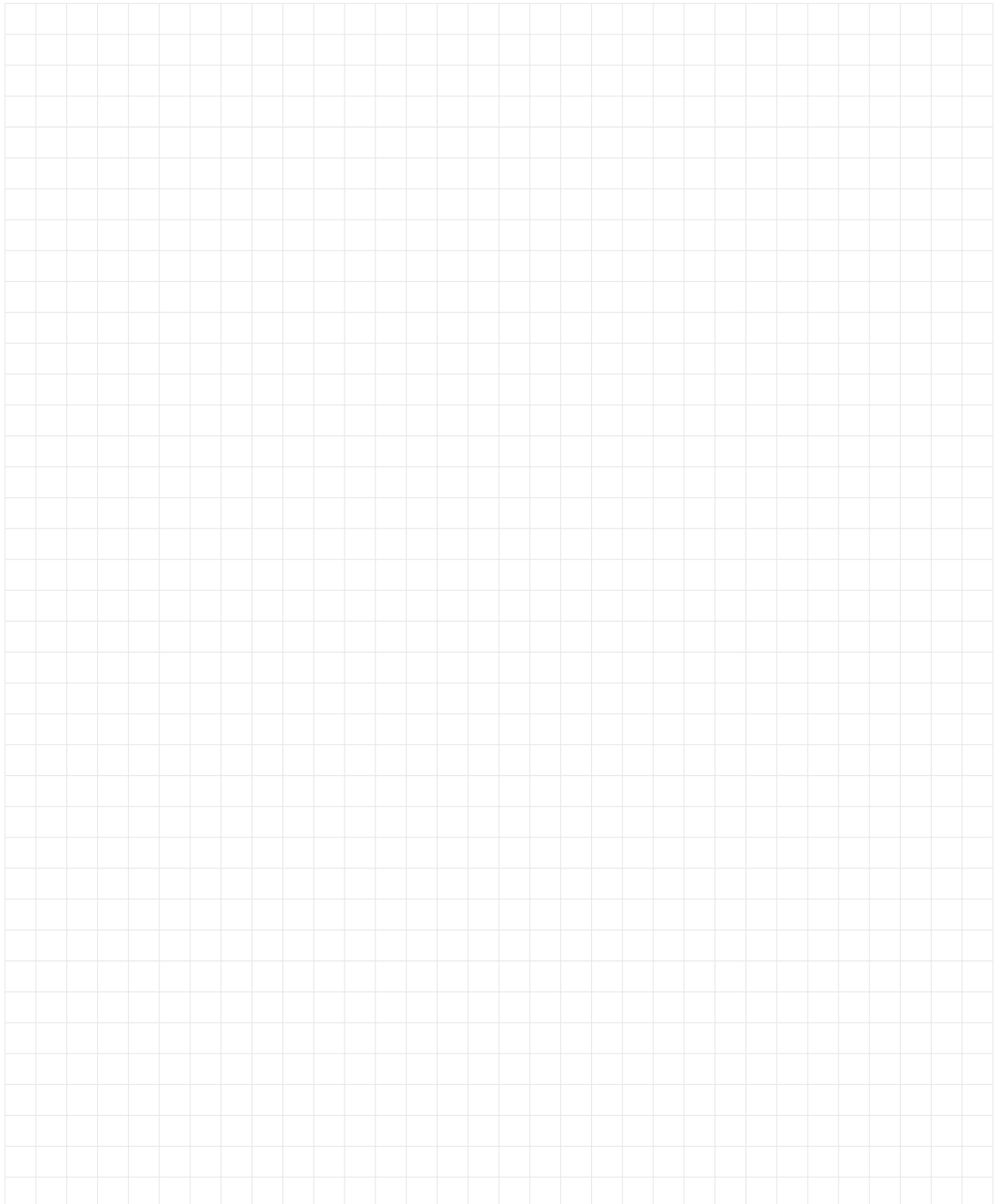
$$\neg(p \rightarrow (\neg(\neg r \vee p) \vee q)) \rightarrow (r \wedge q)$$



Aufgabe 2 (2 + 4 Punkte)

Geben Sie disjunktive und konjunktive Normalformen für diese Aussage an:

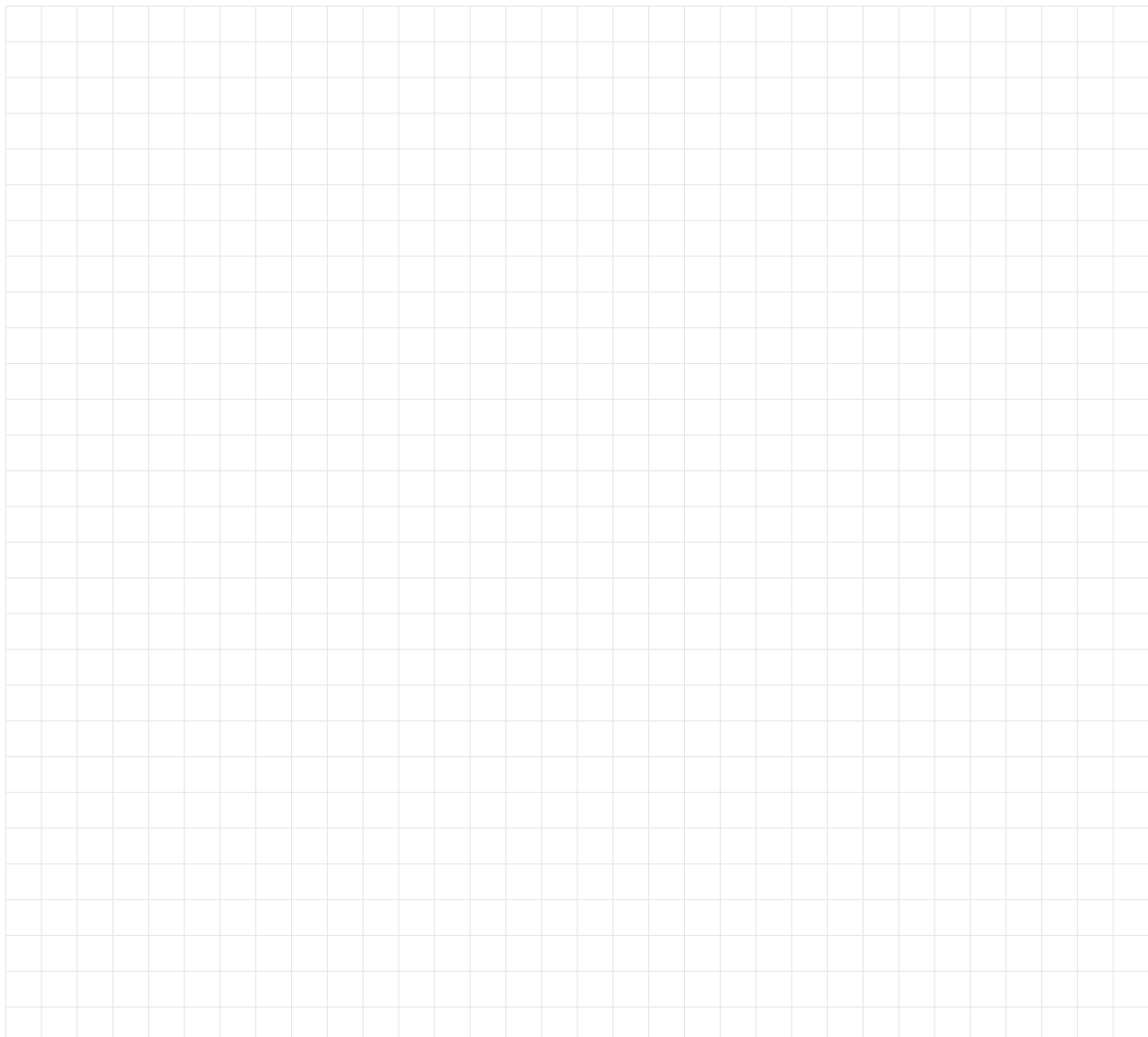
$$\neg(p \rightarrow (\neg(\neg r \vee p) \vee q)) \rightarrow (r \wedge q)$$



Aufgabe 3 (6 Punkte)

Geben Sie eine nur die logischen Zeichen $\wedge, \vee, \rightarrow$ und \perp benutzende Aussage φ an, welche die folgende Wahrheitstafel besitzt:

p	q	r	φ
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

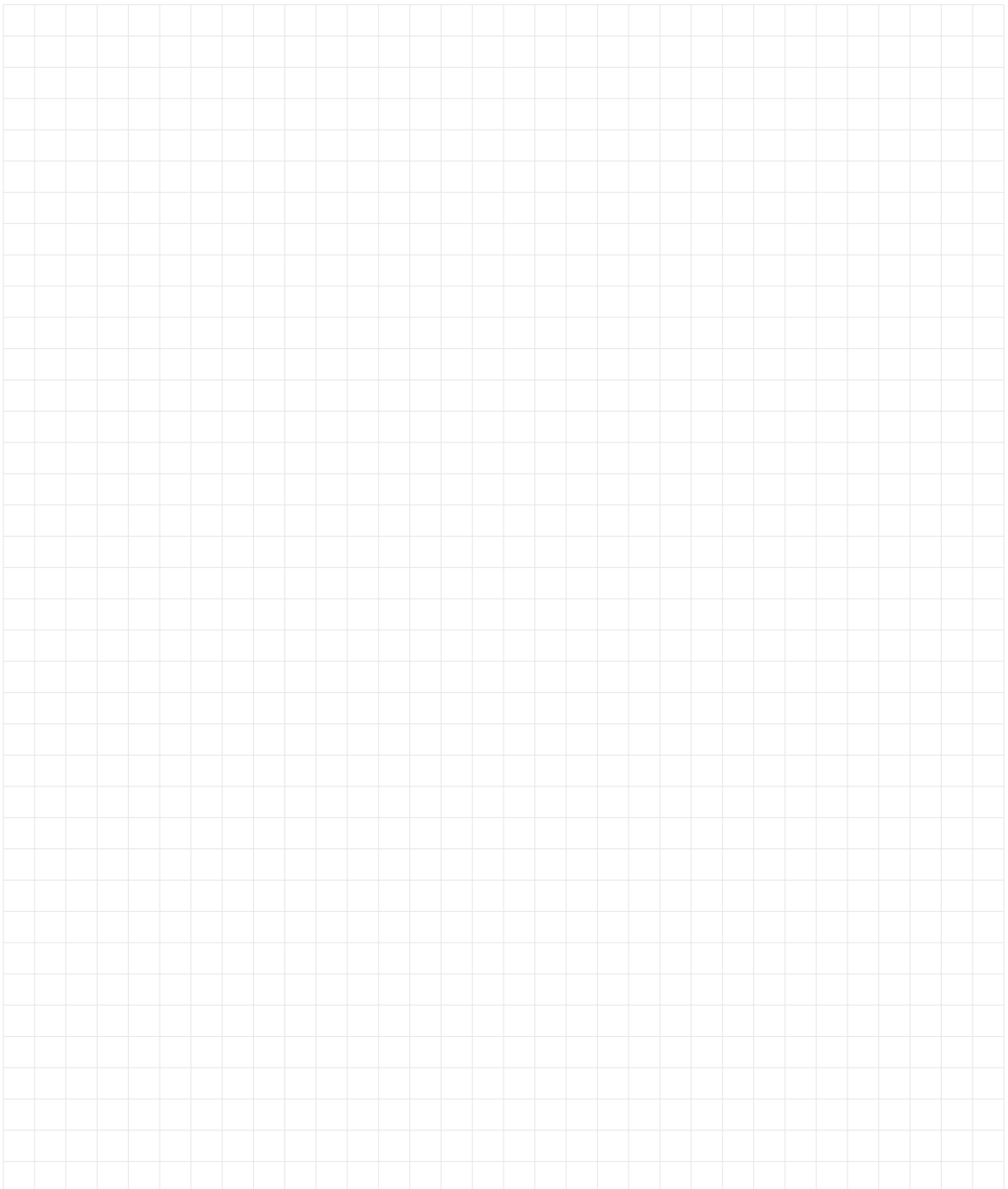


Aufgabe 4 (2 + 4 Punkte)

Leiten Sie in NK her:

a) $p \rightarrow q, r \rightarrow \neg q \vdash \neg(p \wedge r)$

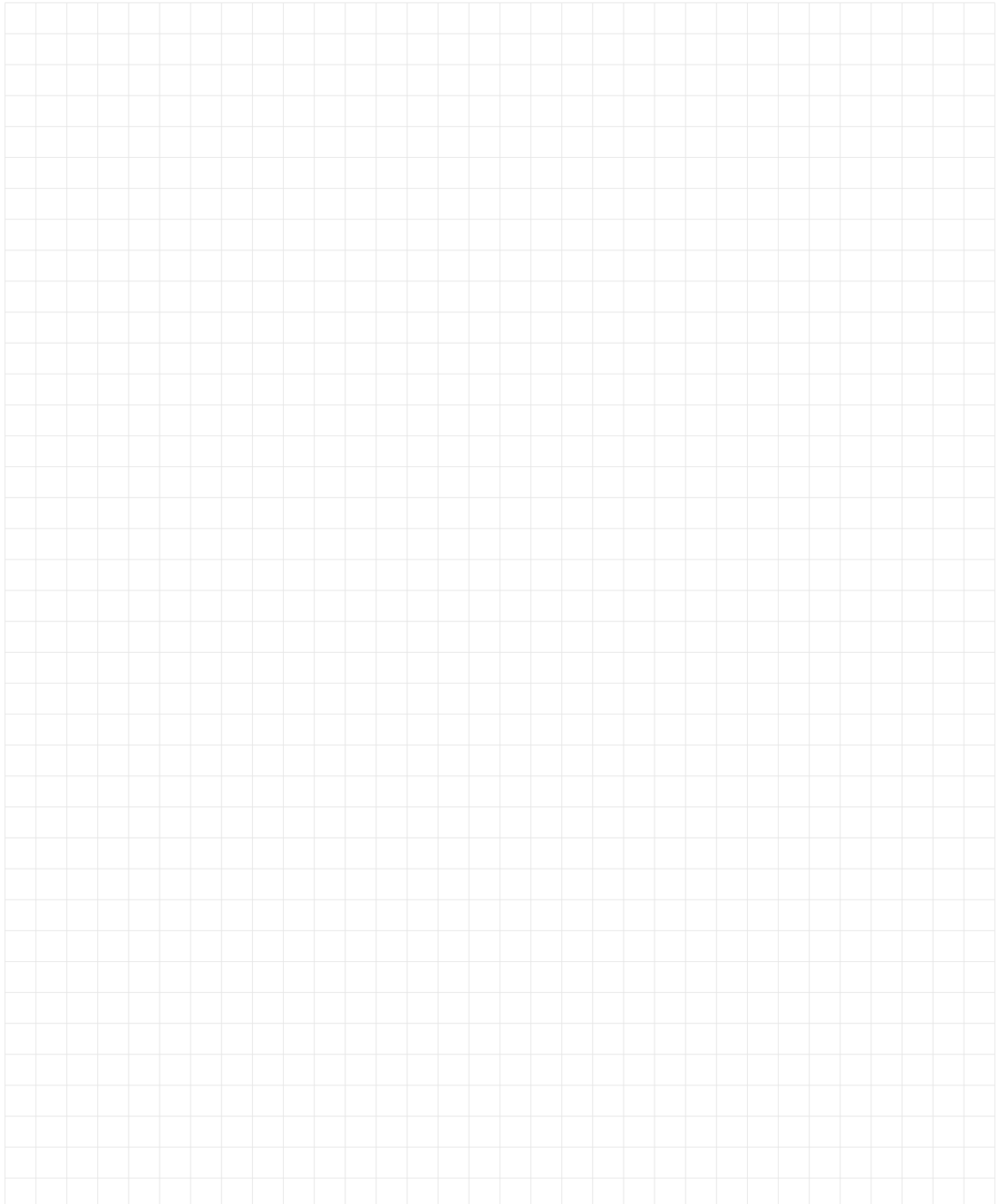
b) $p \rightarrow r, q \rightarrow s \vdash p \vee q \rightarrow r \vee s$



Aufgabe 5 (8 Punkte)

Beweisen Sie:

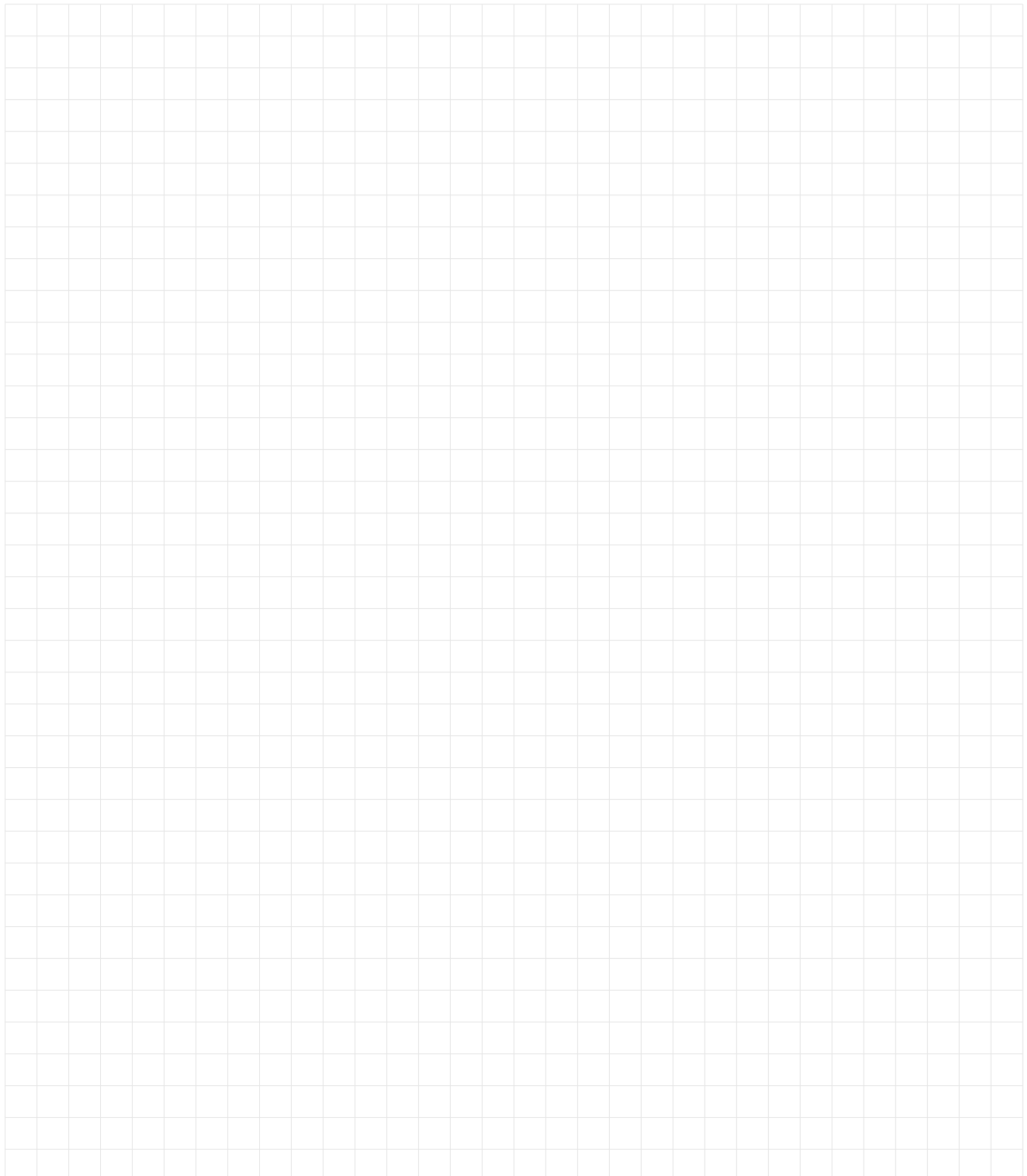
$\varphi \wedge \psi$ ist genau dann in einer maximal konsistenten Aussagenmenge
enthalten, wenn φ und ψ darin enthalten sind.



Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot^2, \times, + \rangle$, und sei eine Sprache der entsprechenden Signatur gegeben, deren Konstantenzeichen genauso lauten wie die korrespondierenden Funktionen und Prädikate der Struktur. Weiterhin sei $v(x_1) = 2$, $v(x_2) = -1$ und $v(x_3) = 1$. Werten Sie schrittweise aus:

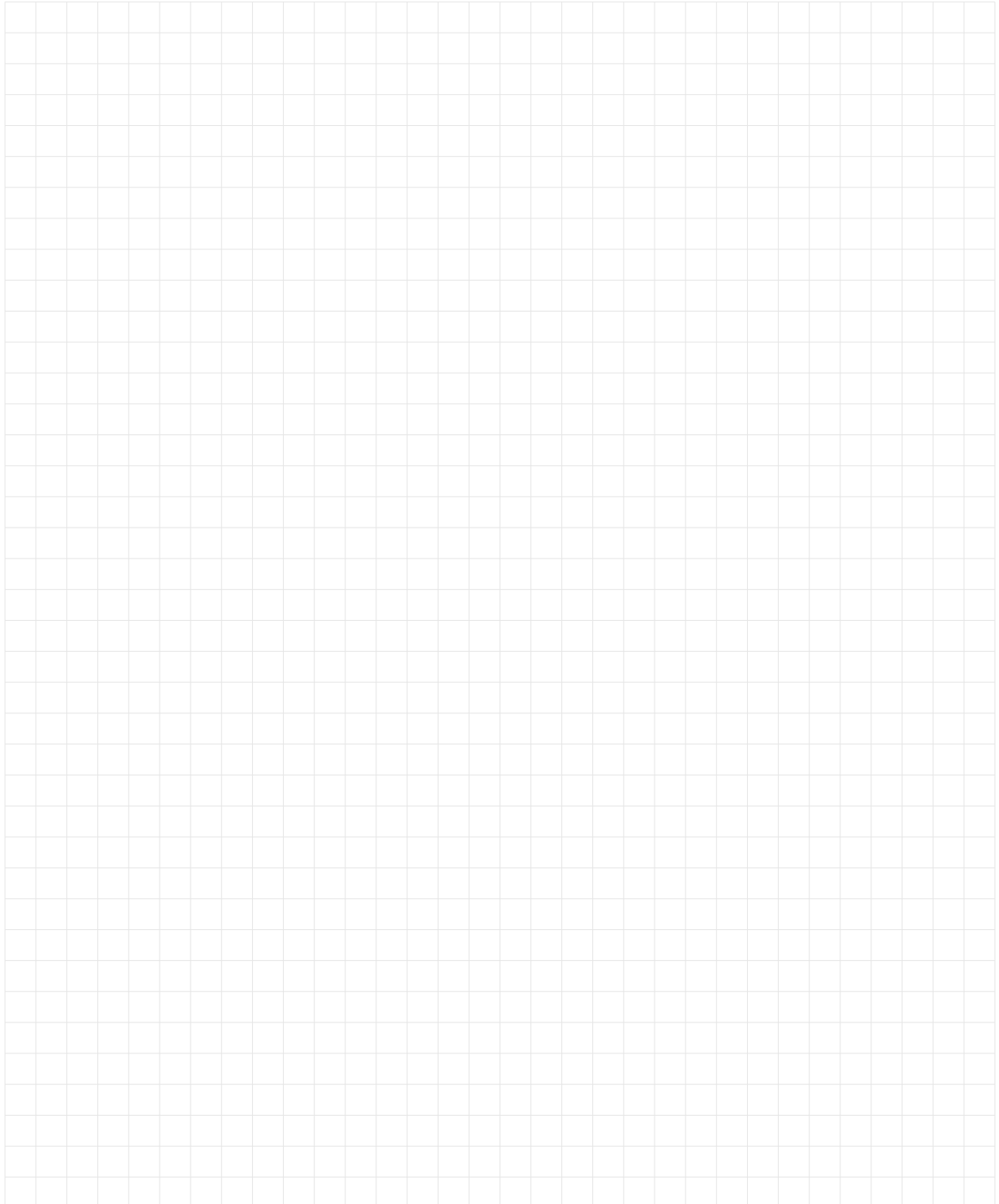
$$\llbracket (x_1 \times x_2)^2 + x_3 \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}$$



Aufgabe 7 (6 Punkte)

Es sei φ eine Formel, welche die Variablen x_1 , x_2 und x_3 frei enthalte. Zeigen Sie:

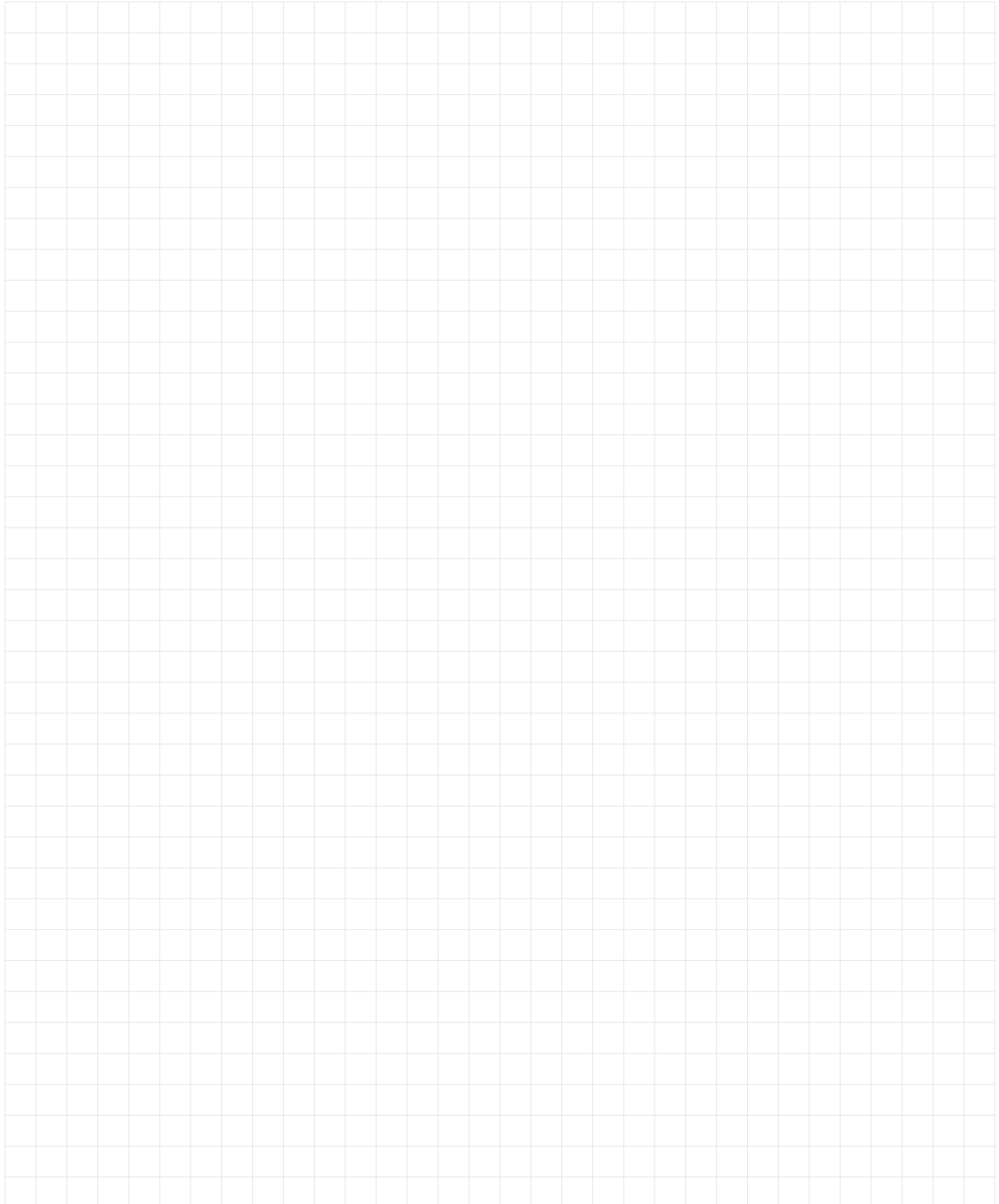
$$\models \exists x_1 \forall x_2 \varphi(x_1, x_2) \rightarrow \forall x_2 \exists x_1 \varphi(x_1, x_2)$$



Aufgabe 8 (4 Punkte)

Geben Sie eine zu der folgenden Formel äquivalente Formel in pränexer Normalform an:

$$\forall x \exists y P(x, y) \leftrightarrow \exists x P(x, x)$$

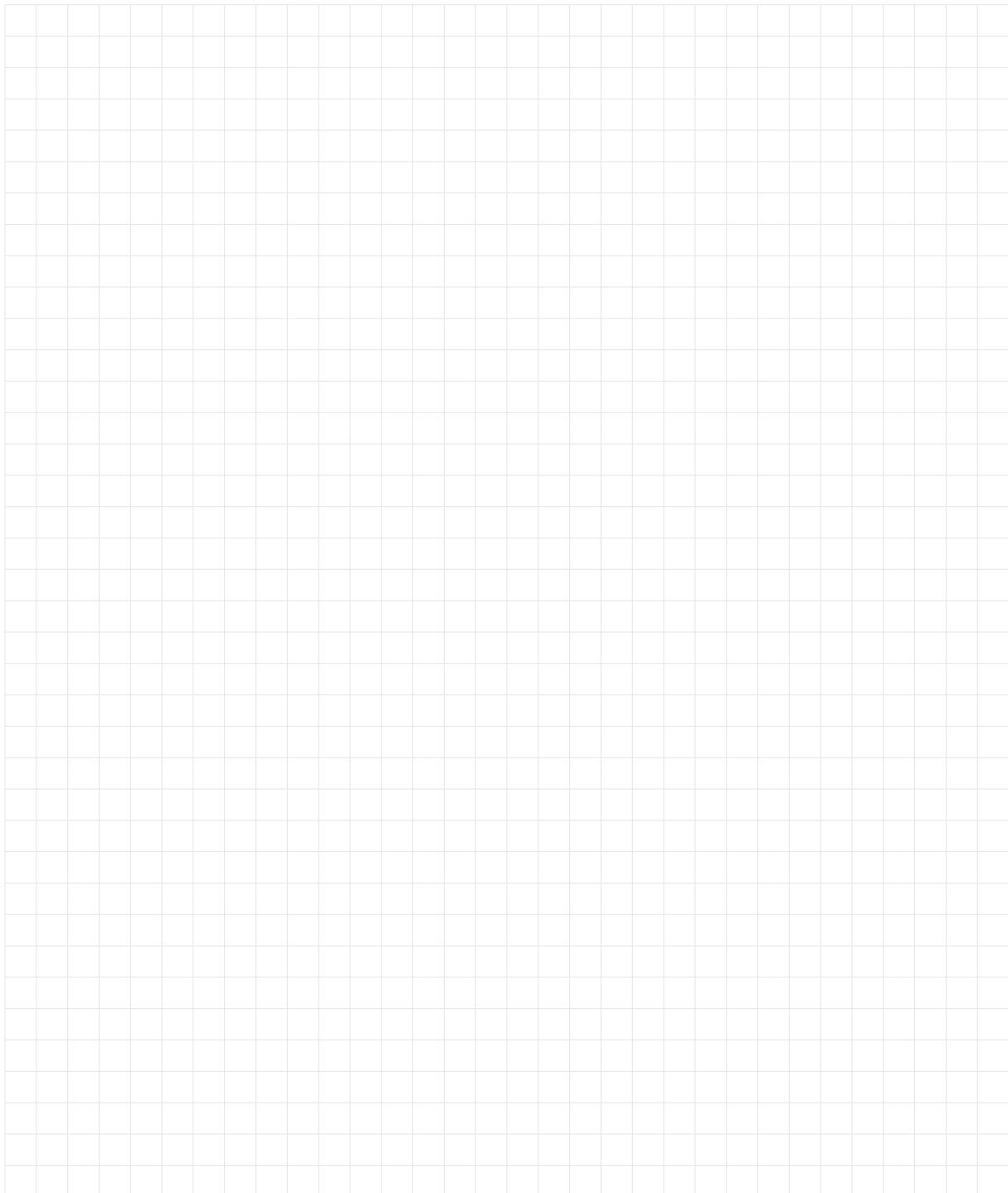


Aufgabe 9 (2 + 4 Punkte)

Leiten Sie in NK her:

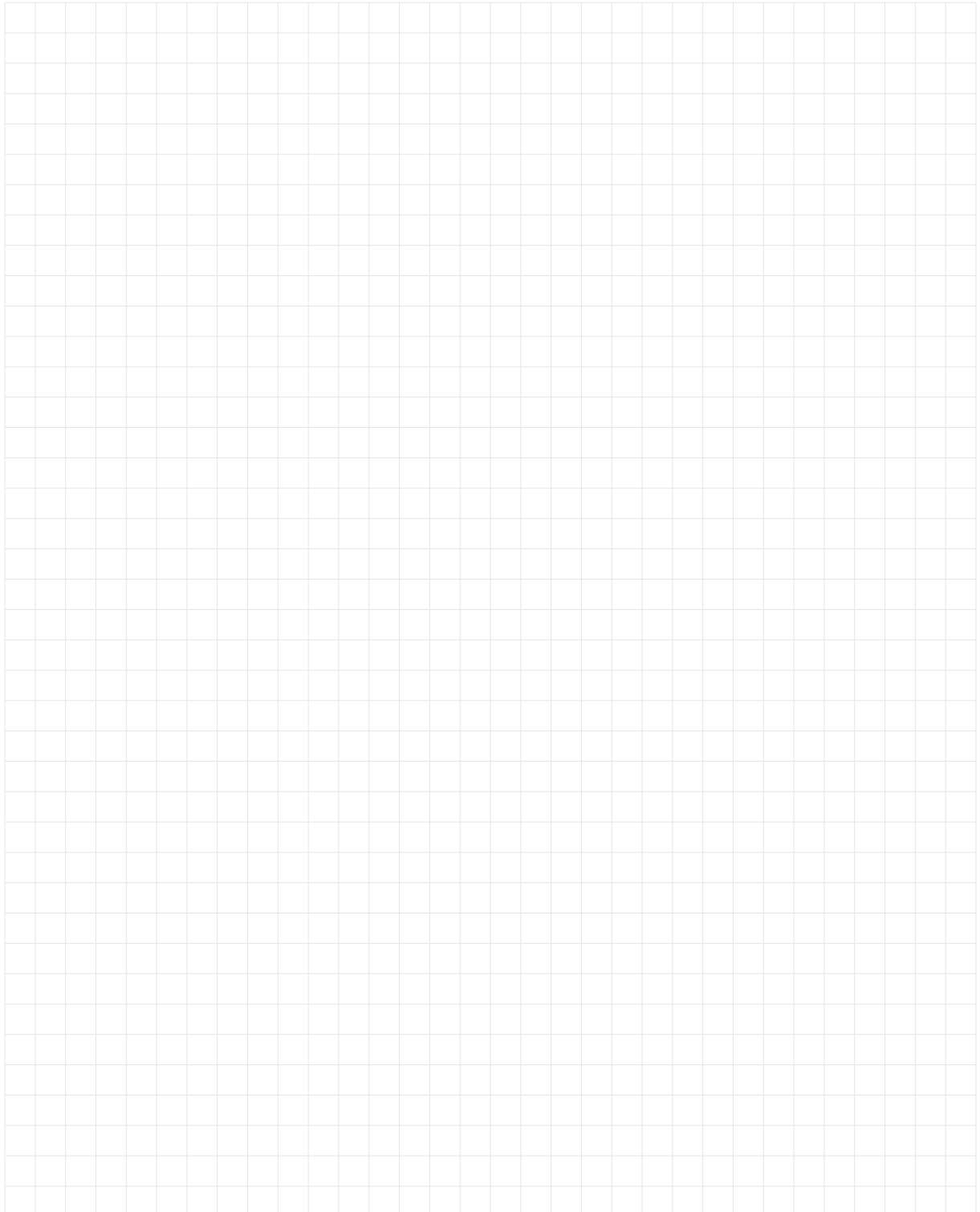
a) $\forall x \neg \varphi(x) \rightarrow \neg \forall x \varphi(x)$

b) $\neg \forall x \varphi(x) \rightarrow \exists x \neg \varphi(x)$ [Bemerkung: In NK ist \exists ein Grundzeichen.]



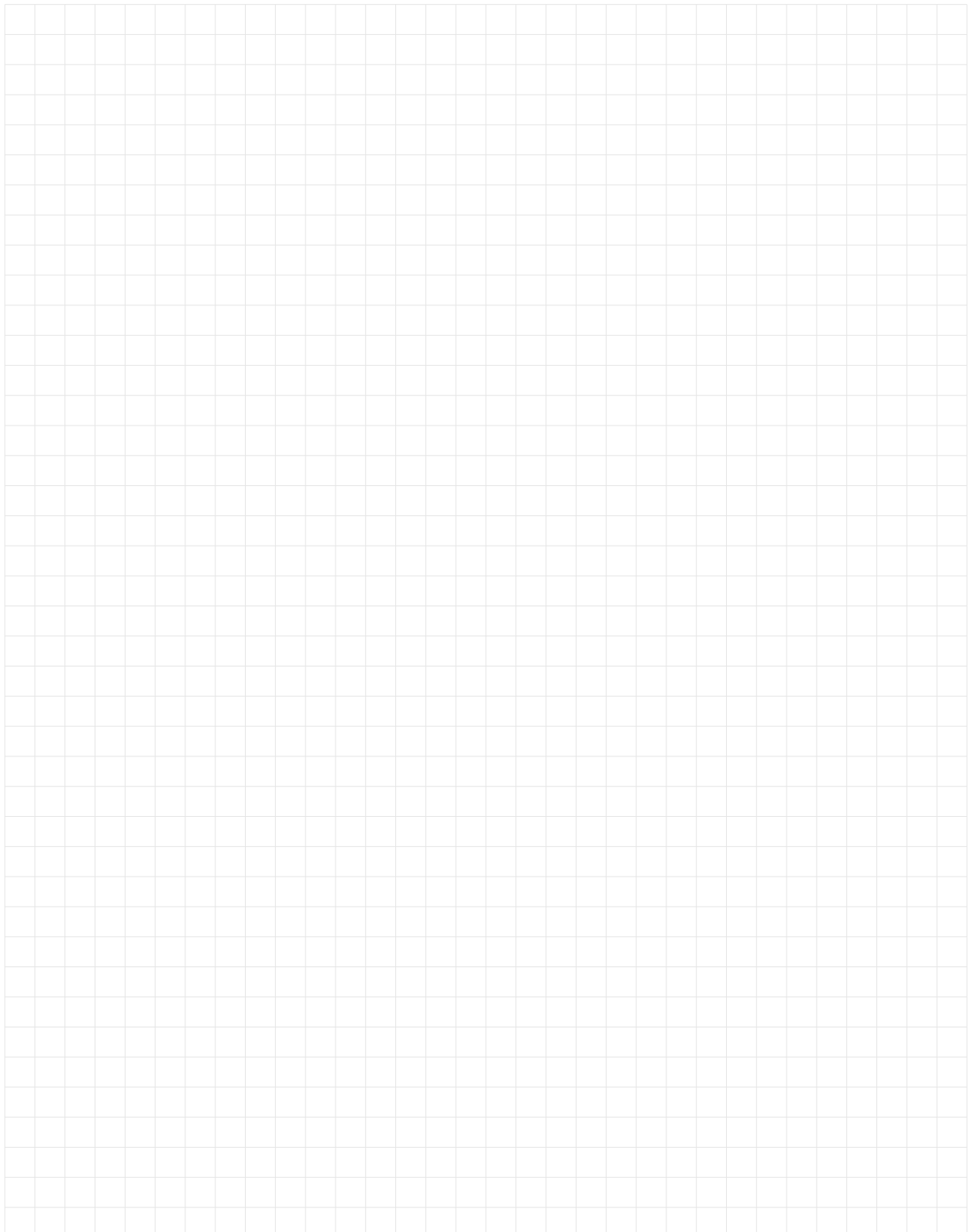
Aufgabe 10 (1 + 1 + 4 Punkte)

Wann ist eine Aussagenmenge widerspruchsfrei? Was besagt der Modellexistenzsatz? Leiten Sie den Vollständigkeitssatz aus dem Modellexistenzsatz her.



Aufgabe 11 (1 + 3 Punkte)

Was besagt der Kompaktheitssatz? Beweisen Sie ihn aus dem Vollständigkeitssatz.



Aufgabe 12 (3 + 3 Zusatzpunkte)

Gegeben sei eine Sprache mit einem einstelligen Funktionszeichen als einziger Konstante.
Gilt folgendes (Begründung)?

a) $\models \exists x(\exists y(x \dot{=} fy) \rightarrow \exists y(ffz \dot{=} fy))$

b) $\models \exists x(\exists y(x \dot{=} fy) \rightarrow \exists y(ffy \dot{=} fy))$

