

# Übungen zur Mathematischen Logik I

## Blatt 5

**Aufgabe 19:** Prüfen Sie, welche der folgenden Bäume Ableitungen sind und begründen Sie Ihre Antwort. Ergänzen Sie gegebenenfalls bei den Bäumen die Beschriftung, um eine Ableitung zu erhalten, und geben Sie an, was bewiesen wurde. Setzen Sie voraus, dass  $\phi, \psi, \sigma \in \text{PROP}$  Formeln sind.

$(a) \frac{\phi \quad \psi \quad \sigma}{(\phi \wedge \psi) \wedge \sigma}$	$(b) \frac{\frac{[\phi \wedge \psi]}{\phi \quad \psi}}{\phi \wedge \psi \rightarrow \phi \quad \phi \wedge \psi \rightarrow \psi}$
$(c) \frac{\frac{\phi}{\phi \rightarrow \phi}}{(\phi \rightarrow \phi) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi)}}{\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \phi) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi))}$	$(d) \frac{[\phi] \quad \neg\phi}{\frac{\perp}{\neg\phi} \text{ (RAA)}}$
$(e) \frac{[\phi] \quad \neg\phi}{\frac{\perp}{\neg\phi}}$	$(f) \frac{\frac{[\phi]^1 \quad [\neg\phi]^2}{\frac{\perp}{\neg\phi} (1)}}{\perp \rightarrow \neg\phi} \quad \frac{[\neg\phi]^2}{\frac{\perp}{\phi} (2)}}$

**Aufgabe 20:** Beweisen Sie im Kalkül  $\text{NK}'$ , die folgenden Ableitbarkeitsbehauptungen. Beachten Sie hierbei die Definition der Ableitbarkeit (DEF 6.4) und setzen Sie voraus, dass  $\phi, \psi, \sigma$  beliebige Formeln aus  $\text{PROP}$  sind.

- (a)  $(\phi \wedge \psi) \rightarrow \sigma \vdash \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)$
- (b)  $\vdash (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\phi$
- (c)  $\vdash (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow (\phi \rightarrow \sigma))$
- (d)  $\neg(\phi \wedge \psi) \vdash (\phi \rightarrow \neg\psi)$

Warum genügt in dieser Aufgabe die einfache Angabe eines Ableitungsbaumes nicht?

**Aufgabe 21:** Beweisen Sie ausführlich, dass für alle Formeln  $\phi, \psi \in \text{PROP}$  und alle Formelmengen  $\Gamma, \Delta \subseteq \text{PROP}$  die folgenden Strukturregeln im Kalkül  $\text{NK}'$  gelten. (Vgl. hierzu Proposition 6.6.)

- (a)  $\phi \vdash \phi$  (Identität)
- (b)  $\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \Gamma, \Delta \vdash \phi$  (Verdünnung)
- (c)  $(\Gamma \vdash \phi \text{ und } \Delta, \phi \vdash \psi) \Rightarrow \Gamma, \Delta \vdash \psi$  (Schnitt)

**Aufgabe 22:** Erweitern Sie den Kalkül  $\text{NK}'$ , indem Sie Einführungs- und Beseitigungsregeln für den Shefferstrich ( $|$ ) und den Peirce'schen Pfeil ( $\Downarrow$ ) formulieren.

Geben Sie dann an, unter welchen Bedingungen Ihre Regeln in Bezug auf die Semantik korrekt sind. Zeigen Sie daran anschließend die Korrektheit Ihrer Regeln. (Hinweis: Beachten Sie hierfür den Satz über die Korrektheit von Ableitungen (7.1) in der Vorlesung.)