

# Übungen zur Mathematischen Logik I

## Blatt 9

---

**Aufgabe 36:** Sei  $\mathcal{L}$  formale Sprache mit einem 1-stelligen Funktionszeichen  $\dot{f}$  und einem 2-stelligem Funktionszeichen  $\dot{g}$ . Es werden zwei  $\mathcal{L}$ -Strukturen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  über der Menge  $\mathbb{N}$  betrachtet. Das Zeichen  $\dot{g}$  wird in beiden Strukturen durch die Addition,  $\dot{f}$  in  $\mathfrak{A}$  durch  $n \mapsto 2$  und in  $\mathfrak{B}$  durch  $n \mapsto (n \bmod 4)$  interpretiert. Prüfen Sie die folgenden Aussagen in beiden Strukturen auf Gültigkeit:

- (a)  $\forall x \exists y : f(g(x, y)) = f(x)$
- (b)  $\exists y \forall x : f(g(x, y)) = f(x)$

Sei im Folgenden  $\mathcal{L}$  eine beliebige Sprache erster Stufe.

**Aufgabe 37:** Zeigen Sie, dass für beliebige  $\mathcal{L}$ -Strukturen  $\mathfrak{A}$  und Aussagen  $\phi, \psi \in \mathcal{L}$  gilt:

Genau dann gilt  $\mathfrak{A} \models \phi \vee \psi$ , wenn  $\mathfrak{A} \models \phi$  oder  $\mathfrak{A} \models \psi$ .

**Aufgabe 38:** Zeigen Sie, dass für beliebige  $\mathcal{L}$ -Strukturen  $\mathfrak{A}$  und Formeln  $\phi, \psi \in \mathcal{L}$  gilt:

Wenn  $\mathfrak{A} \models \phi$  oder  $\mathfrak{A} \models \psi$ , dann auch  $\mathfrak{A} \models \phi \vee \psi$ .

Beweisen Sie zudem, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt. Geben Sie hierzu ein (möglichst einfaches) Gegenbeispiel an und weisen Sie nach, dass es eines ist.

**Aufgabe 39:** Zeigen Sie, dass die Formel  $\exists x(\phi \rightarrow \forall x\phi)$  für beliebige Formeln  $\phi \in \mathcal{L}$  allgemeingültig ist.

Zeigen Sie zudem, dass die Formel  $x = y \rightarrow \forall x \forall y : x = y$  nicht allgemeingültig ist. Geben Sie hierzu wieder ein (möglichst einfaches) Gegenbeispiel an und weisen Sie nach, dass es eines ist.

*Hinweis:* Beachten Sie, dass Gültigkeit in einer Struktur grundsätzlich zunächst in Abhängigkeit einer Belegung definiert ist. Betrachten Sie also (auch bei Aussagen) zunächst einzelne Belegungen.