Übungen zur Informatik III — Blatt 9

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2003/04**

Abgabe am Donnerstag, den 18. Dezember, in der Vorlesungspause

---

Bemerkung: Grundsätzlich sollen alle Turing-Maschinen *ausführlich* kommentiert werden!

Aufgabe 43 (3+3+3 Punkte)

Geben Sie Turing-Maschinen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ an, die folgendes leisten:

(a) $\mathcal{M}_1$ transformiert $(\underline{\#}w)$ in $(\underline{\#}v)$, wobei $v = a^{\#_a(w)}$, d.h. $\mathcal{M}_1$ entfernt alle bs aus w.

(b) $\mathcal{M}_2$ entscheidet die Sprache $L_1 = \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(c) $\mathcal{M}_3$ berechnet den Homomorphismus $\hat{h} : \Sigma^* \longrightarrow \{[,]\}^*$ mit $\hat{h}(a) = []$ und $\hat{h}(b) = [[]]$.
Hinweis: Beachten Sie, daß $\mathcal{M}_3$ im Grunde über $T = \{a, b, [,]\}$ definiert ist.

Aufgabe 44 (2+3+3 Punkte)

Geben Sie Turing-Maschinen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ an, welche die folgenden Funktionen auf Binärstrings berechnen; dabei sei $[n]_b$ der zur Zahl n gehörende Binärstring.

(a) $\mathcal{M}_1$ berechnet die konstante Funktion, die immer 2 ergibt, d.h. $(\underline{\#}[n]_b) \Rightarrow (\underline{\#}[2]_b)$.

(b) $\mathcal{M}_2$ berechnet die Nachfolgerfunktion, d.h. $(\underline{\#}[n]_b) \Rightarrow (\underline{\#}[n+1]_b)$.

(c) $\mathcal{M}_3$ berechnet die Addition, d.h. $(\underline{\#}[n]_b\#[m]_b) \Rightarrow (\underline{\#}[n+m]_b)$.
Hinweis: Realisieren Sie $\mathcal{M}_2$ als 3-Band-Maschine, die zunächst die beiden Argumente auf geeignete Weise auf das 2. und 3. Band überführt, und danach das Resultat auf dem 1. Band berechnet.

Aufgabe 45 (3 Punkte)

Geben Sie ein Maschinenschema an, das die Funktion $f : (\Sigma^*)^n \longrightarrow \Sigma^*$ mit $f(w_1, \ldots, w_n) = w_i$ $(1 \leq i \leq n)$, d.h. die i-te Projektion, berechnet.

Aufgabe 46 (2+2+2 Zusatzpunkte)

Ein Transduktor ist ein Quintupel $\langle Q, \Sigma, \Theta, \delta, q_0 \rangle$ mit $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\})^m \longrightarrow Q \times (\Theta \cup \{\epsilon\})^n$. Er kann parallel m Eingabewörter lesen und dabei n Ausgabewörter schreiben. Im Unterschied zu einer Turing-Maschine kann ein Transduktor sowohl beim Lesen als auch beim Schreiben nur in eine Richtung fortschreiten, wobei er aber nicht gleichzeitig auf jedem Band einen Schritt zu machen braucht; allerdings ist ein Lese- oder Schreibvorgang auf einem der Bänder immer mit einem Schritt auf diesem Band verbunden, und daher kann eine bereits behandelte Stelle eines Wortes kein zweites Mal besucht werden. Eingaben sind m-Tupel von Wörtern aus Σ^*. Ein Transduktor terminiert für eine Eingabe, wenn es zu einer erreichten Konfiguration keine Folgekonfiguration gibt (z.B. wenn alle Eingaben vollständig gelesen wurden). Wenn ein Transduktor für eine Eingabe nicht terminiert, ist die Ausgabe irrelevant. Alle gültigen Ausgaben sind folglich n-Tupel von Wörtern aus Θ^*.

Übertragen Sie den Begriff der Berechnung von Turing-Maschinen auf Transduktoren und geben Sie für $\Sigma = \Theta = \{0, 1\}$ Transduktoren an, die dasselbe leisten wie die Maschinen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ und $\mathcal{M}_3$ in Aufgabe 44.

Hinweis: Transduktoren sind eng mit endlichen Automaten verwandt. Wähle $m = 1$ und $n = 1$ bei $\Theta = \{0, 1\}$, wobei der Transduktor nach gelesener Eingabe entweder 1 für Akzeptanz oder 0 für Ablehnung ausgibt, oder wähle $m = 1, n = 0$ und $\Theta = \emptyset$ und terminiere nur bei Akzeptanz.