Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik — Blatt 7

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2008/09**

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 7.4 aus der Vorlesung.

Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ eine Menge von Aussagen. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(1) Γ ist konsistent.

(2) Es gibt keine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$, so daß: $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$.

(3) Es gibt $\phi \in \mathrm{PROP}$ mit $\Gamma \nvdash \phi$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Zeigen Sie, daß folgende Menge konsistent ist: $\{p_0 \to p_1,\ p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_3,\ p_3 \to \neg p_0\}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Eine Formel ϕ heiße *unabhängig* von der Menge Γ, falls $\Gamma \nvdash \phi$ und $\Gamma \nvdash \neg\phi$. Zeigen Sie, daß $p_1 \to p_2$ unabhängig von $\{p_1 \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_2,\ p_2 \to p_0\}$ ist.

Aufgabe 4 (3 + 4 Punkte)

Eine Menge Γ heiße *vollständig*, falls für jede Formel ϕ entweder $\Gamma \vdash \phi$ oder $\Gamma \vdash \neg\phi$.

a) Zeigen Sie durch Induktion über dem Aufbau von Formeln, daß $\{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ vollständig ist. (Es wird angenommen, daß Formeln mit Hilfe von $\wedge$, $\to$ und $\bot$ aufgebaut sind.)

b) Zeigen Sie, daß die Menge $\{\sigma \mid \Gamma \vdash \sigma\}$ maximal konsistent ist genau dann, wenn Γ vollständig ist.

Aufgabe 5 (außer Konkurrenz)

Geben Sie eine primitiv-rekursive Funktion g an, so daß $g(n)$ der Code für die Formel ϕ_n (d.h. für die n-te Formel in der Aufzählung aller Formeln) ist.