Übungen zur Mathematischen Logik I — Blatt 8

Prof. Schroeder-Heister — **Wintersemester 2017/18**
René Gazzari — **Universität Tübingen**

Aufgabe 29: Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine aussagenlogische Formelmenge $\Gamma_n \subseteq \mathrm{PROP}$ an, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

1. $|\Gamma_n| = n + 1$. (Die Menge Γ_n enthält also $n + 1$ Elemente.)
2. Γ_n ist inkonsistent. (Es gilt also $\Gamma_n \vdash \perp$.)
3. Jede echte Teilmenge $\Delta \subsetneq \Gamma_n$ ist konsistent.

Beweisen Sie, dass die von Ihnen angegebenen Mengen die geforderten Eigenschaften haben; Sie dürfen voraussetzen, dass die leere Menge $\varnothing$ konsistent ist.

Aufgabe 30: Es soll in einer formalen Sprache $\mathcal{L}$ über Strukturen gesprochen werden, in denen zwei 2-stellige Funktionen $+$ und $\times$, eine 3-stellige Funktion min und zwei 2-stellige Relationen $\leq$ und $|$ (teilt) sowie 3 Konstanten ausgezeichnet sind.

Definieren Sie geeignete Indexmengen I, K und L und geben Sie eine geeignete Signatur an; geben sie dann alle nichtlogischen Zeichen der Sprache $\mathcal{L}$ (wie definiert) an.

Definieren Sie zudem zwei Strukturen zu dieser Sprache $\mathcal{L}$ über dem Grundraum $\mathbb{N}$. Dabei soll in der ersten Struktur die Interpretation der nichtlogischen Zeichen kanonisch sein; in der zweiten alle Interpretationen verschieden von der Interpretation in der ersten.

Aufgabe 31: Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{G'}$ die erweiterte Sprache der Gruppentheorie und $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, +, -, \leq, 1 \rangle$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Dabei sei die einstellige Funktion $-$ wie folgt definiert:

$$- : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \begin{cases} n+1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n-1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die übrigen ausgezeichneten Objekte der Struktur seien wie üblich gegeben. Sei zudem eine Belegung $v : \mathrm{VAR} \to \mathbb{N} : x_k \mapsto k^2$ der Variablen gegeben. Werten Sie die folgenden Terme und Formeln schrittweise in $\mathfrak{A}$ unter der Belegung v aus:

(a)	$(0 + \overline{0}) + (x_2 + \overline{x}_3)$	(b)	$\overline{(x_3 + 0)} + \overline{x_2}$
(c)	$(x_3 \leq x_4 \to x_2 \leq x_3)$	(d)	$\forall x \exists y (0 + \overline{y} \leq x)$

Aufgabe 32: Sei $\mathfrak{L}$ beliebige formale Sprache, $\mathfrak{A}$ beliebige $\mathfrak{L}$-Struktur und $\phi, \psi \in \mathfrak{L}$ beliebige Formeln. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

1. Wenn $\mathfrak{A} \models \phi$ oder $\mathfrak{A} \models \psi$, dann auch $\mathfrak{A} \models \phi \vee \psi$.
2. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. (Beweisen Sie dies durch Angabe und Überprüfung eines möglichst einfachen Gegenbeispiels.)
3. Falls ϕ und ψ Aussagen sind, dann gilt die Umkehrung.

Abgabe der Aufgaben montags bis 17:30 Uhr (Internet) bzw. in der Vorlesung.