Übungen zur Mathematischen Logik I — Blatt 3

Prof. Schroeder-Heister
René Gazzari

Wintersemester 2017/18
Universität Tübingen

Aufgabe 9: Zeigen Sie mithilfe von Wahrheitstafeln, dass die folgenden Formelschemata jeweils logisch äquivalent sind.

1. $\phi \to \bot$, $\neg\phi$
2. $\phi \to \psi$, $\neg\psi \to \neg\phi$, $\neg\phi \vee \psi$
3. $\phi \wedge \psi$, $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$

Aufgabe 10: Betrachten Sie die binaräe Relation $\models'$ definiert durch: $\phi \models' \psi \;\; \Leftrightarrow \;\; \{\phi\} \models \psi$. Zeigen Sie, dass $\models'$ reflexiv, transitiv, nicht aber symmetrisch ist. Zeigen Sie anschließend, dass die folgende Aussage für beliebige Belegungen v wahr ist:

$$[\![\phi]\!]_v \leq [\![\psi]\!]_v \quad \Leftrightarrow \quad [\![\phi \to \psi]\!]_v = 1$$

Argumentieren Sie in dieser Aufgabe mit Belegungen und Bewertungen, nicht aber mit Wahrheitstafeln.

Aufgabe 11: Beweisen Sie die folgenden (metasprachlichen) Aussagen:

1. Genau dann gilt $\models \phi$ und $\models \psi$, wenn $\models \phi \wedge \psi$.
2. Wenn $\models \phi$ oder $\models \psi$ gilt, dann auch $\models \phi \vee \psi$.
   Zudem: die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.
3. Sei ϕ erfüllbar. Wenn $\phi \models \phi \wedge p$, dann kommt p in ϕ vor.

Aufgabe 12: Es sei $\circ$ ein zweistelliger Junktor, so dass die folgenden beiden Formeln Tautologien sind:

$$p \circ (q \circ p) \quad ; \quad \neg((p \circ p) \circ \neg(p \circ p))$$

Zeigen Sie, dass $\circ$ die Implikation ist.

Abgabe der Aufgaben montags bis 17:30 Uhr (Internet) bzw. in der Vorlesung.