

# Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister

Blatt 9

---

## Aufgabe 1 (12 Punkte)

Zeigen Sie in NK':

- a)  $\vdash \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x\varphi(x) \rightarrow \forall x\psi(x))$
- b)  $\vdash \forall x\varphi(x) \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi(x)$
- c)  $\vdash \forall x\varphi(x) \rightarrow \forall z\varphi(z)$ , sofern  $z$  nicht in  $\varphi$  vorkommt
- d)  $\vdash \forall x\forall y\varphi(x, y) \rightarrow \forall x\varphi(x, x)$
- e)  $\vdash \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \rightarrow \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x)$
- f)  $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi(x)) \rightarrow \varphi \rightarrow \forall x\psi(x)$ , sofern  $x \notin FV(\varphi)$

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie in NK:

- a)  $\vdash \exists x(\varphi(x) \wedge \psi) \rightarrow \exists x\varphi \wedge \psi$ , sofern  $x \notin FV(\psi)$
- b)  $\vdash \forall x\varphi(x) \rightarrow \neg\exists x\neg\varphi(x)$

## Aufgabe 3 (2 Punkte)

Zeigen Sie in NKE:  $\vdash \forall z(z = x \rightarrow z = y) \rightarrow x = y$

## Aufgabe 4 (4 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie in NK:

- a)  $\forall x(x = x), \forall xyz(x = y \wedge z = y \rightarrow x = z) \vdash \forall xy(x = y \rightarrow y = x)$
- b)  $\forall x(x = x), \forall xyz(x = y \wedge z = y \rightarrow x = z) \vdash \forall xyz(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$