

Klassische Feldtheorie
Skript zur Vorlesung
Sommersemester 2012

Prof. Dr. Nils Schopohl
Institut für Theoretische Physik
Universität Tübingen

24. November 2014

Satz: Marco Herbst
Lektorat: Simon Mayer

„Wir müssen unbedingt Raum für Zweifel lassen, sonst gibt es keinen Fortschritt, kein Dazulernen. Man kann nichts Neues herausfinden, wenn man nicht vorher eine Frage stellt. Und um zu fragen, bedarf es des Zweifelns.“

(Richard P. Feynman)

Literaturempfehlungen

[Sch98]: Das Buch von Schwinger eignet sich hervorragend als Ergänzung und Begleitliteratur. Zum Teil werden auch Themen angeschnitten, die über den Vorlesungsstoff hinausgehen.

[Jac98]: Bei diesem Buch handelt es sich um ein Standardwerk der Klassischen Elektrodynamik. Es enthält zudem nützliche Aufgaben.

[Bec82]: Dieses Werk ist ein Klassiker. Man kann von R. Becker die Grundzüge der Elektrodynamik von polarisierbarer oder magnetisierbarer Materie von Grund auf lernen und verstehen.

[LL09]: Ein einführendes Standardwerk in die Klassische Feldtheorie für fortgeschrittene Studenten. L. D. Landau und E. M. Lifschitz legen in diesem meisterhaft geschriebenen Band die Maxwellsche Theorie der Elektrodynamik im Vakuum sowie die Grundzüge der Allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein dar.

[LLP84]: Dieses herausragende Werk, hervorgegangen aus Vorlesungen von L. D. Landau und E. M. Lifschitz, und vervollständigt von L. P. Pitaevskii, erörtert umfassend viele Fragestellungen der Wechselwirkung von elektromagnetischen Feldern mit der polarisierbaren oder magnetisierbaren makroskopischen Materie. Auch die nichtlineare Optik wird behandelt.

[MTW73]: Das von Charles W. Misner, Kip S. Thorne und John Archibald Wheeler verfasste Lehrbuch ist sehr originell und beinhaltet eine umfassende Darstellung der Grundlagen zur Gravitationstheorie von Einstein, nebst Anwendungen in der Astrophysik und Kosmologie. Hervorzuheben ist die präzise und sehr pädagogische Einführung in effiziente Rechenmethoden der Differentialgeometrie.

Inhaltsverzeichnis

Literaturempfehlungen	iii
1 Einleitung	1
1.1 Lorentz-Kraft	3
1.2 Kontinuitätsgleichung	5
1.3 Parität und Zeitumkehr	6
1.4 Die Maxwell-Gleichungen	7
1.5 Der statische Grenzfall der Maxwell-Gleichungen	16
2 Elektrostatik	17
2.1 Potential und elektrostatisches Feld einer Ladungsverteilung	18
2.2 Multipolentwicklung	24
2.3 Satz von Dirichlet	28
2.4 Elektrostatische Feldenergie	35
2.5 Multipole im äußeren Feld	38
2.6 Randwertprobleme der Potentialtheorie für ideale Leiter	43
2.7 Begriff der Kapazität	47
2.8 Satz vom Mittelwert für harmonische Funktionen	54
2.9 Theorem über Maxima und Minima der elektrostatischen Feldstärke	56
3 Materie im elektrischen Feld	63
3.1 Punktladung im dielektrischen Halbraum	69
3.2 Das homogen polarisierte Ellipsoid in dielektrischer Materie	74
3.3 Clausius-Mosotti-Relation	89
3.4 Kraft auf einen idealen Leiter im äußeren elektrischen Feld	94
3.5 Kräfte im isotropen Dielektrikum	97
3.6 Elektrostatischer Spannungstensor im isotropen Dielektrikum	108

Inhaltsverzeichnis

4	Ströme in Ohmschen Leitern	113
4.1	Relaxationszeit für freie Ladungen im Ohmschen Leiter	115
4.2	Quasi-stationäre Ströme und Felder	117
4.3	Ohmscher Widerstand und Kapazität	119
4.4	Der Skin-Effekt	127
4.5	Joulesche Wärme und Dissipationsfunktional	132
4.6	Ohmsche Leiter in Bewegung	137
5	Magnetostatik	147
5.1	Biot-Savart-Gesetz	153
5.2	Ampèresches Kraftgesetz	156
5.3	Ringströme	157
5.4	Magnetostatische Feldenergie und Induktivität	171
5.5	Materie im magnetischen Induktionsfeld	183
5.6	Magnetisches skalares Potential als Alternative zum Vektorpotential	186
6	Energie- und Impuls-Bilanz für elektromagnetische Felder	191
6.1	Energie-Bilanz für zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder .	193
6.2	Impuls-Bilanz für zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder .	198
6.3	Arbeitsaufwand zum Verschieben einer stromtragenden Leiterschleufe	202
6.4	Energiebilanz für Systeme stromtragender Leiterschleifen	203
6.5	Wechselwirkungsenergie für zwei stromtragende Leiterschleifen . . .	213
7	Elektromagnetische Strahlung	217
7.1	Lösung der inhomogenen Wellengleichung in drei Dimensionen	219
7.2	Hertzsche Superpotentiale	231
7.3	Der Hertzsche Dipol	235
7.4	Kurze Stabantenne als elektrischer Hertzscher Dipol	242
7.5	Liénard-Wiechert-Potentiale	245
7.6	Strahlung beschleunigter Punktladungen	249
8	Elektromagnetische Wellen	279
8.1	Elliptische, zirkulare und lineare Polarisierung	280
8.2	Energiedichte und Poynting-Vektor für ebene Wellen	281
8.3	Materialgleichungen für Ohmsche Leiter und transparente Dielektrika	284
8.4	Absorption von Strahlungsenergie und Joulesche Verluste	290

8.5	Ebene Wellen in transparenten und in leitenden Materialien	292
8.6	Kramers-Kronig-Relationen	295
8.7	Reflektion und Transmission	298
8.8	Metallische Grenzflächen	315
8.9	Plasmaschwingungen	323
9	Hohlleitermoden	331
9.1	Verschiedene Lösungstypen: TEM-Moden, TM-Moden und TE-Moden	333
9.2	Dispersionsrelation und Gruppengeschwindigkeit	344
9.3	Dämpfung von TM- und TE-Hohlleitermoden	346
10	Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie	357
10.1	Kovarianter Formalismus	366
10.2	Relativität der Gleichzeitigkeit	372
10.3	Vierdimensionale Formulierung der Maxwell'schen Theorie	382
10.4	Lorentz-Transformation der elektromagnetischen Felder und ihrer Quellen	396
10.5	Relativistisches Ohmsches Gesetz	398
10.6	Lagrange- und Hamilton-Formalismus für geladene Teilchen	401
10.7	Relativistische Verallgemeinerung der Newton'schen Bewegungsglei- chungen	414
10.8	Lagrange- und Hamilton-Formalismus für elektromagnetische Felder	426
10.9	Verschiedene Eichungen	435
10.10	Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes	437
11	Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein	443
11.1	Einsteinsche Bewegungsgleichung	444
11.2	Die Einsteinschen Feldgleichungen	449
11.3	Schwarzschild-Metrik	452
11.4	Perihel-Rotation	467
11.5	Ablenkung eines Lichtstrahls im Schwerfeld einer Massenkugel	474
11.6	Gravitative Rotverschiebung	479
Anhang		483
A	Maßsysteme der Elektrodynamik	483

Inhaltsverzeichnis

B	Zur Eindeutigkeit eines Vektorfeldes aus gegebener Rotation und Divergenz	486
C	Nachweis, dass ein Verschiebungsfeld notwendig solenoidal ist	489
D	Berechnung zweier Integrale für die Bestimmung der Gegeninduktivität	491
	D.1 Erstes Integral	491
	D.2 Zweites Integral	494
E	Berechnung der \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder mithilfe der Liénard-Wiechert-Potentiale	496
F	Fourier-Transformation einer Faltung	500
G	Nebenrechnung zur Reflektion und Transmission elektromagnetischer Wellen	503
H	Levi-Civita-Symbol	507
I	Berechnung der Komponenten des Energie-Impuls-Tensors	509

Literatur		515
------------------	--	------------

1 Einleitung

Um das Jahr 1852 fasste Michael Faraday seine in Jahrzehnten empirisch gewonnenen Erkenntnisse über *Kraftlinien* und *Felder* in einem Artikel über elektrische und magnetische Kräfte zusammen. Im selben Artikel vertrat Faraday auch die Ansicht, dass das Newtonsche Gravitationsgesetz auf der Wirkung eines *Gravitationsfeldes* beruht. Das Coulombsche Gesetz

$$\mathbf{F}^{(1,2)} = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (1.1)$$

für die Kraft $\mathbf{F}^{(1,2)}$, die eine elektrische Punktladung q_1 am Ort \mathbf{r}_1 auf eine Punktladung q_2 am Ort \mathbf{r}_2 ausübt, entspricht hinsichtlich der Abhängigkeit von der Distanz $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ der beiden Punktladungen völlig dem Newtonschen Gravitationsgesetz für zwei Massenpunkte. Ebenfalls gilt in Übereinstimmung mit dem Prinzip von *actio gleich reactio*

$$\mathbf{F}^{(1,2)} = -\mathbf{F}^{(2,1)}. \quad (1.2)$$

Allerdings ist die Coulomb-Kraft für gleichnamige Ladungen $q_2 q_1 > 0$ *abstoßend*, während sie für ungleichnamige Ladungen $q_2 q_1 < 0$ *anziehend* ist. Diese Entdeckung wurde 1785 von Charles Augustin de Coulomb (einem Oberst der Französischen Armee) gemacht. Hervorzuheben ist, dass elektrische Ladungen beiderlei Vorzeichens additiv sind, zudem gibt es für elektrische Ladungen einen Erhaltungssatz.

Dass sich Coulomb-Kräfte im Alltag trotz ihrer großen Reichweite und ihrer im Vergleich zur Gravitation extrem großen Stärke nur wenig bemerkbar machen, beruht darauf, dass Ladungen beiderlei Vorzeichens im Grundzustand von Atomen und Molekülen *gleich häufig* vorkommen, was dazu führt, dass sich in der makroskopischen molekularen Materie die elektrischen Kraftwirkungen praktisch vollständig aufheben. Im Gegensatz dazu sind Massen stets positiv und Gravitationskräfte sind stets anziehend, können also nicht kompensiert werden. Nur so



Michael Faraday
(1791–1867)

1 Einleitung

ist es zu erklären, weshalb die in unserer Umwelt um so viele Größenordnungen schwächeren, aber ebenfalls langreichweitigen Gravitationskräfte unter normalen Umständen gegenüber den elektrischen Kräften überwiegen.

In der Tabelle finden sich Angaben zur Reichweite und zur relativen Stärke der Wechselwirkung (WW) zwischen zwei Teilchen für die vier fundamentalen Wechselwirkungen in der Materie.

Typ der WW	relative Stärke	Reichweite [m]
Starke	1	10^{-15}
Coulomb	10^{-2}	∞
Schwache	10^{-5}	10^{-18}
Gravitation	10^{-40}	∞

Die starke Wechselwirkung hält die Protonen und Neutronen im Atomkerne zusammen, während die schwache Wechselwirkung Anlass zum Beta-Zerfall gibt und damit unter anderem erst ermöglicht, dass die Sonne als Fusionsreaktor Energie freisetzen kann.

Die Vorstellung der Newtonschen Mechanik, dass zwischen (massiven, geladenen) Punktteilchen, die an entfernten Orten positioniert sind, Wechselwirkungskräfte existieren sollen, die instantan den Raum überbrücken, nennt man *Fernwirkung*. Mit der Einführung des Feldbegriffs wird die (im Grunde unphysikalische) Vorstellung einer solchen (spukhaften) Fernwirkung nicht länger benötigt.

Eine am Ort \mathbf{r}_1 fixierte Ladung Punktladung q_1 erzeugt nach Faraday ein den ganzen Raum ausfüllendes (statisches) *elektrisches Feld* (siehe Abbildung 1.1)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}, \quad (1.3)$$

welches dann wiederum auf eine Testladung q_2 am Ort $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$ eine Kraft ausübt:

$$\mathbf{F}^{(1,2)} = q_2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (1.4)$$

Der Faradaysche Feldbegriff war für die Physiker des 19. Jahrhunderts eine völlig neue und der Newtonschen Punktmechanik wesensfremde Idee. Während bei Newton der leere Raum (Vakuum) lediglich dazu dient, Positionen von Punktteilchen mathematisch zu beschreiben, wird bei Faraday jetzt auch dem Vakuum selbst

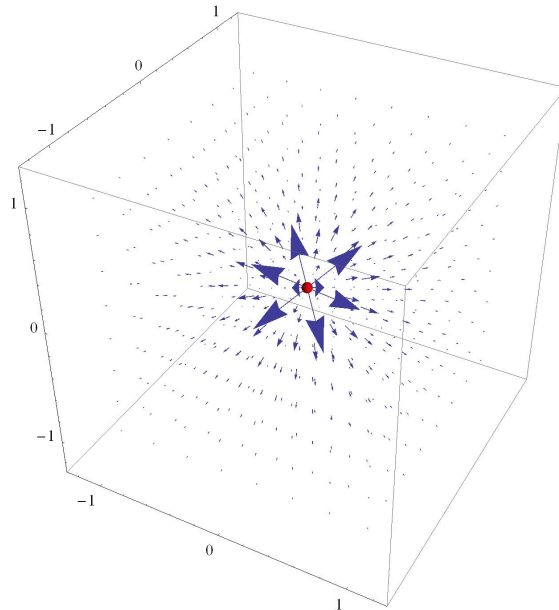


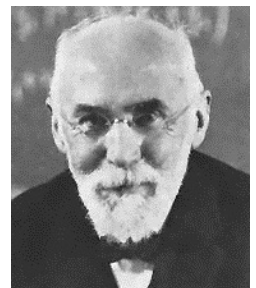
Abbildung 1.1: Elektrisches Feld einer Punktladung

als Träger von Kraftlinien eine aktive physikalische Rolle zugeordnet. Dieser von Faraday herbeigeführte Paradigmenwechsel, nämlich in Feldern zu denken, ist der physikalische Kern der Elektrodynamik von James Clerk Maxwell (1865) und der Gravitationstheorie von Albert Einstein (1915).

In der modernen Physik ist der Feldbegriff ganz in den Vordergrund getreten, während das Konzept eines punktförmigen Teilchens eher als zweckmäßige Näherung betrachtet wird. Heutzutage ist der Begriff des Elementarteilchens eng mit dem des Quantenfeldes verknüpft. Zu jedem Elementarteilchen (wie z.B. einem Elektron, einem Neutrino oder einem Higgs-Teilchen) gehört ein Quantenfeld, zu dem sich das Teilchen so verhält wie das Lichtquant (Photon) zum elektromagnetischen Feld.

1.1 Lorentz-Kraft

Alle elektrodynamischen Erscheinungen werden durch zwei Vektorfelder beschrieben, das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und das magnetische Induktionsfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Je-



Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928)

1 Einleitung

dem Punkt \mathbf{r} des (affinen euklidischen) Raumes sind dabei $3 + 3 = 6$ (im allgemeinen zeitabhängige) kartesische Feldkomponenten E_a und B_a mit $a \in \{x, y, z\}$ zugeordnet. Es ist eine experimentelle Tatsache, dass geladene Teilchen immer auch eine Masse besitzen. Eine Testladung q mit Masse m , die sich relativ zu einem (euklidischen) Inertialsystem zum Zeitpunkt t am Ort $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ befindet und sich dort mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ bewegen möge, erfährt in Gegenwart der Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F}^{(L)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = q [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \kappa \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]. \quad (1.5)$$

Die Konstante κ hängt dabei, wie im Anhang A gezeigt wird, von den verwendeten physikalischen Einheiten zur Messung von Ladungen und den Einheiten zur Messung von elektrischen bzw. magnetischen Feldstärken ab. Die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ können somit (im Prinzip) als Kraft auf eine ruhende bzw. mit Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegte Testladung Q gemessen werden, wobei darauf zu achten ist, dass die Rückwirkung der Testladung auf die Quellen der Felder (und damit auf $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ selbst) vernachlässigbar bleibt, was der Fall ist, wenn die Testladung q nur klein genug ist. Die (nicht relativistische) Bewegungsgleichung einer solchen Testladung lautet dann

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \left[\mathbf{F}^{(L)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t), \mathbf{v}=\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)}. \quad (1.6)$$

Das Kraftgesetz von Lorentz erlaubt die Trajektorien von massiven und geladenen Teilchen zu berechnen, wenn die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ gegeben sind. Über die Felder selbst, d.h. über die Gesetze, nach denen sich ihre Ausbreitung im Raum vollzieht, wird jedoch nichts ausgesagt.

Man zeigt leicht durch skalare Multiplikation mit $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ auf beiden Seiten von (1.6), dass gilt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (1.7)$$

Demnach leistet ein geladenes Teilchen keine Arbeit gegen das magnetische Induktionsfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$! Der Grund hierfür ist, dass \mathbf{v} beständig orthogonal zum Anteil $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ der Lorentz-Kraft orientiert ist. Hat man es mit einer räumlichen Verteilung $\rho(\mathbf{r}, t)$ von Ladungen und einer entsprechenden (konvektiven) Stromdichteverteilung

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v} \quad (1.8)$$

zu tun, so ist die von einem gegebenen elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und einem gegebenen magnetischen Induktionsfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ entsprechend ausgeübte Lorentz-Kraftdichte gegeben zu

$$\mathbf{f}^{(L)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \kappa \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]. \quad (1.9)$$

1.2 Kontinuitätsgleichung

Die Erfahrung lehrt, dass elektrische Ladung eine *extensive* Größe ist, die einem *Erhaltungssatz* genügt. Mit der Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ ergibt sich die Ladung $q(t)$ im Inneren eines fixen Volumens V zu

$$q(t) = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}, t). \quad (1.10)$$

Dann gilt für die Rate, mit der sich die Ladung im Volumen V zeitlich ändert

$$\frac{d}{dt} q(t) = \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t). \quad (1.11)$$

Da die Ladung insgesamt aber erhalten ist, kann sie sich in V nur ändern, in dem ein Strom $I(t)$ durch die Oberfläche ∂V des Volumens V nach *außen* fließt:

$$I(t) = -\frac{d}{dt} q(t) = \int_{\partial V} d^2r' \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t). \quad (1.12)$$

Hier bezeichnet $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)$ die Stromdichte auf der Oberfläche ∂V und es bezeichnet \mathbf{n} den nach außen orientierten Normalenvektor am Ort $\mathbf{r}' \in \partial V$. Mit dem Satz von Gauß folgt dann nach dem Gesagten

$$I(t) = \int_V d^3r \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{d}{dt} q(t) = -\int_V d^3r \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t). \quad (1.13)$$

Da diese Beziehung für jedes (noch so kleine) Volumen V richtig ist, gilt jetzt die Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0.} \quad (1.14)$$

Sie drückt den Satz von der Erhaltung der Ladung in differentieller Form aus.

1.3 Parität und Zeitumkehr

Wir betrachten ein geladenes, massives Teilchen, das sich unter dem Einfluss der Lorentzkraft bewegt. Das Verhalten der Newtonschen Bewegungsgleichung unter einer *Paritätstransformation* (Inversion am Ursprung)

$$(\mathbf{r}, t) \rightarrow (-\mathbf{r}, t) \quad (1.15)$$

impliziert

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\rightarrow -\mathbf{v} \\ \mathbf{f}^{(L)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &\rightarrow -\mathbf{f}^{(L)}(-\mathbf{r}, -\mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Dann ergibt sich aus dem Lorentz-Kraftgesetz für die elektromagnetischen Felder unter einer Paritätstransformation das Transformationsverhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &\rightarrow -\mathbf{E}(-\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &\rightarrow +\mathbf{B}(-\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Das Verhalten der Newtonschen Bewegungsgleichung unter *Zeitumkehr*

$$(\mathbf{r}, t) \rightarrow (\mathbf{r}, -t) \quad (1.18)$$

(man stelle sich vor, das Vorzeichen aller Geschwindigkeiten wird umgekehrt) impliziert

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\rightarrow -\mathbf{v} \\ \mathbf{f}^{(L)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &\rightarrow \mathbf{f}^{(L)}(\mathbf{r}, -\mathbf{v}, -t). \end{aligned} \quad (1.19)$$

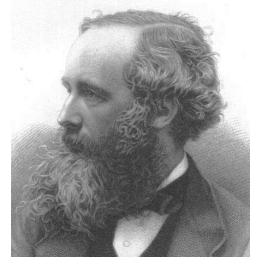
Dann ergibt sich aus dem Lorentz-Kraftgesetz für die elektromagnetischen Felder unter Zeitumkehr das Transformationsverhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, -t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &\rightarrow -\mathbf{B}(\mathbf{r}, -t). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Demnach ist $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ein *polarer* Vektor (1-Form), während $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ein *axialer* Vektor ist (2-Form).

1.4 Die Maxwell-Gleichungen

Gemäß der Newtonschen Mechanik können wir mit dem Lorentz-Kraftgesetz die Bahnen von geladenen, massiven Teilchen berechnen, wenn das elektromagnetische Feld gegeben ist. Allerdings kann die Newtonsche Mechanik keine Aussage zur Dynamik des elektromagnetischen Feldes selbst und seiner Abhängigkeit von vorgegebenen Quellen treffen. Zur Lösung dieses Problems postulierte James Clerk Maxwell um 1865 die nach ihm benannten Feldgleichungen.



James Clerk Maxwell
(1831–1879)

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1.21)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \kappa \mu_0 \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right]$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (1.22)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Die Maxwellschen Gleichungen (1.21) und (1.22) bilden ein System von gekoppelten partiellen (linearen!) Differentialgleichungen zur Bestimmung der Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Die *vorgegebenen* elektrischen Ladungen und Ströme der Quellen, repräsentiert durch eine Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ und eine Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, erzeugen das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}', t)$ und das magnetische Induktionsfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}', t)$, auch in großer Entfernung zur Position von lokalisierten Quellen. Als Randbedingung wird verlangt, dass elektrische und magnetische Felder im Unendlichen verschwinden.

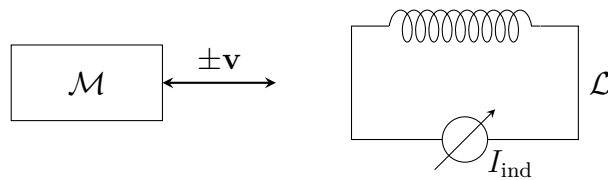
Die Gleichungen (1.21) stellen Verallgemeinerungen des Coulomb-Gesetzes und des Gesetzes von Ampère für den Fall zeitabhängiger Quellen dar. Aus Konsistenzgründen betreffend den Erhaltungssatz für Ladungen wurde von Maxwell die Existenz des sog. *Verschiebungsstroms* $\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ postuliert, damit für die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ und die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ der Quellen die Kontinuitätsgleichung gültig bleibt:

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) = \kappa \mu_0 \left[\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right] \\ &= \kappa \mu_0 \left[\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) \right]. \end{aligned} \quad (1.23)$$

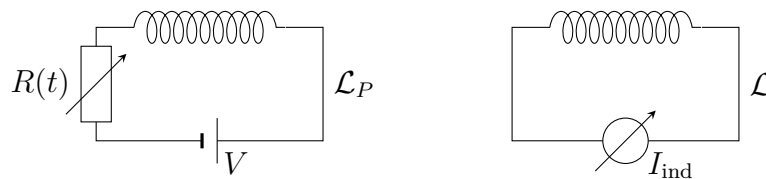
1 Einleitung

Die Wahl der Konstanten ε_0 im Coulomb-Gesetz bedeutet ein Festlegen der Maßeinheiten von elektrischer Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ und damit wegen der Kontinuitätsgleichung (1.14) zugleich das Festlegen der Maßeinheiten der Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Die Wahl von μ_0 oder κ impliziert die Festlegung einer Maßeinheit für das magnetische Induktionsfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Zur Diskussion der Vor- und Nachteile der in der Elektrodynamik üblichen Maßeinheiten betreffend die Wahl der drei Konstanten κ , ε_0 und μ_0 verweisen wir auf den Anhang A.

Die Gleichungen (1.22) entsprechen (beide zusammen!) der differentiellen Form des Induktionsgesetzes von Faraday. Michael Faraday hatte bereits um 1832 in einer Serie aufsehenerregender Experimente mit bewegten Magneten mehrere fundamentale Beobachtungen gemacht.



(a) Induktion durch bewegten Stabmagneten



(b) Induktion durch stromtragende Spule

Abbildung 1.2: Die Experimente von Faraday

1. Wird ein Magnet \mathcal{M} auf eine *ruhende* geschlossene Leiterschleife \mathcal{L} mit einer Geschwindigkeit \mathbf{v} zu- oder wegbewegt (siehe Abbildung 1.2a), so wird in der Leiterschleife \mathcal{L} ein Strom I_{ind} induziert. Das Ergebnis ist gleich, wenn statt dessen eine geschlossene Leiterschleife \mathcal{L} auf einen *ruhenden* Magneten \mathcal{M} mit einer Geschwindigkeit \mathbf{v} zu- oder wegbewegt wird, d.h. es wird in der Leiterschleife \mathcal{L} ebenfalls ein Strom I_{ind} induziert.

2. Wird eine primäre stromtragende Leiterschleife \mathcal{L}_P von einem *zeitlich veränderlichen* Strom $I(t)$ durchflossen und befindet sich eine zweite geschlossene Leiterschleife \mathcal{L} in der Nähe (siehe Abbildung 1.2b), so wird auch in diesem Fall in der zweiten Leiterschleife \mathcal{L} ein Strom I_{ind} induziert.
3. Die beschriebenen Induktionsphänomene konnte Faraday auch beobachten, wenn nur die effektive Querschnittsfläche der primären Leiterschleife sich zeitlich änderte (Generatorprinzip).

Faraday vermutete, dass es der in der Primärspule \mathcal{L}_P fließende zeitlich veränderliche Strom $I(t)$ ist, der im Raum ein zeitlich veränderliches Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ erzeugt, das wiederum am Ort $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ der (ringförmigen) Sekundärschleife \mathcal{L} wirkt und erkannte in der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die von \mathcal{L} eingeschlossene Fläche die eigentliche Ursache für den beobachteten induzierten Strom I_{ind} . Hiermit traf er ins Schwarze. Damit in einer *geschlossenen* Sekundärschleife \mathcal{L} ein Induktionsstrom fließen kann, braucht es eine *Induktionsspannung* V_{ind} . Diese geht auf die in der Leiterschleife \mathcal{L} generierte zeitlich veränderliche *Ringspannung* $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(t)$ zurück. Faraday fasste das Resultat seiner Experimente zu einem *universell gültigen* Gesetz zusammen:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(t) = -\kappa \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}(t)} d^2r' \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t), \quad (1.24)$$

wobei die Konstante κ von den verwendeten Maßeinheiten für den magnetischen Fluss abhängt. Hier bezeichnet \mathcal{A} die von der geschlossenen Schleife \mathcal{L} eingeschlossene Fläche (siehe Abbildung 1.3), d.h. es gilt $\partial\mathcal{A} = \mathcal{L}$. Man identifiziert den Rand von \mathcal{A} mit \mathcal{L} . Im allgemeinen sind $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ und $\partial\mathcal{A}(t) = \mathcal{L}(t)$ ebenfalls zeitabhängig!

Das Flächenintegral ist demnach der *magnetische Fluss*

$$\Phi^{(M)}(t) = \kappa \int_{\mathcal{A}} d^2r' \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \quad (1.25)$$

durch die Fläche \mathcal{A} mit Normalenvektor \mathbf{n} . Die in einer *geschlossenen* Leiterschleife \mathcal{L} induzierte Ringspannung $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(t)$ ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses $\Phi^{(M)}(t)$ durch die Fläche \mathcal{A} mit Berandung $\mathcal{L} = \partial\mathcal{A}$:

$$\boxed{\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(t) = -\frac{d}{dt} \Phi^{(M)}(t).} \quad (1.26)$$

1 Einleitung

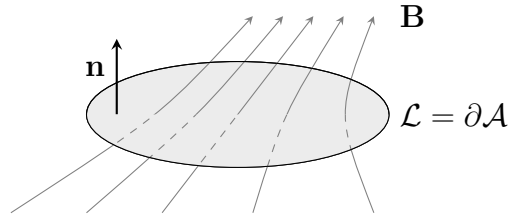


Abbildung 1.3: Der Fluss des Vektorfelds \mathbf{B} durch eine zeitlich veränderliche Fläche $\mathcal{A}(t)$ projiziert durch das Skalarprodukt mit dem Normalenvektor \mathbf{n} gerade die Anteile heraus, die senkrecht auf der Fläche stehen.

Das negative Vorzeichen in (1.26) kann so gedeutet werden, dass der durch die induzierte Ringspannung angeworfene Induktionsstrom in der Leiterschleife ein eigenes Magnetfeld erzeugt, das der ursprünglichen Änderung des magnetischen Flusses *entgegen* wirkt (Lenzsche Regel).

Die freien Ladungsträger in einem metallischen Leiter bewegen sich unter dem Einfluss der Lorentz-Kraft (1.9). Die Ringspannung $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(t)$ ist dann definiert als die gegen die Lorentz-Kraft zu leistende Überführungsarbeit pro Ladung q , um diese einmal um die geschlossene Schlaufe $\mathcal{L} = \partial\mathcal{A}$ herumzuführen. Sie ist demnach für eine lange geschlossene $d\tilde{A}^{\frac{1}{4}}$ nne Drahtschleife (mit sehr kleiner Querschnittsfläche) gegeben als Linienintegral

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(t) = \oint_{\mathcal{L}} ds \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{s}, t) + \kappa \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{s}, t)]_{\mathbf{s} \in \mathcal{L}}. \quad (1.27)$$

Hier ist hervorzuheben, dass ein zeitabhängiges elektrisches Feld nicht notwendig wirbelfrei ist, d.h.

$$\oint_{\mathcal{L}} ds \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{s}, t)]_{\mathbf{s} \in \mathcal{L}} \neq 0. \quad (1.28)$$

Wir stellen jetzt zwischen diesen beiden sehr unterschiedlich aussehenden Ausdrücken (1.26) und (1.27) für die Ringspannung $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(t)$ einen Zusammenhang her. Zum einen gilt für die Änderung des magnetischen Flusses infolge einer zeitlichen Änderung der Ringfläche $\Delta\mathcal{A} = \mathcal{A}(t + \Delta t) - \mathcal{A}(t)$ oder einer zeitlichen Änderung

des magnetischen Induktionsfeldes

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\kappa} \left[\Phi^{(M)}(t + \Delta t) - \Phi^{(M)}(t) \right] & (1.29) \\
 &= \int_{\mathcal{A}(t+\Delta t)} d^2 r' \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t + \Delta t) - \int_{\mathcal{A}(t)} d^2 r' \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \\
 &= \int_{\mathcal{A}(t+\Delta t)} d^2 r' \mathbf{n} \cdot \left[\mathbf{B}(\mathbf{r}', t) + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) + \mathcal{O}(\Delta t)^2 \right] - \int_{\mathcal{A}(t)} d^2 r' \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \\
 &= \int_{\mathcal{A}(t+\Delta t)} d^2 r' \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) - \int_{\mathcal{A}(t)} d^2 r' \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \\
 &\quad + \Delta t \int_{\mathcal{A}(t)} d^2 r' \mathbf{n} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) + \mathcal{O}(\Delta t)^2.
 \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde verwendet, dass wir vor einem Faktor Δt die Fläche $\mathcal{A}(t + \Delta t)$ durch die Fläche $\mathcal{A}(t)$ zur Zeit t ersetzen dürfen, und dabei insgesamt nur ein quadratisch kleiner Fehler $\mathcal{O}(\Delta t)^2$ entsteht. Die beiden ersten Integrale können den beiden Deckelflächen $\mathcal{A}(t)$ und $\mathcal{A}(t + \Delta t)$ eines Zylinders Ω mit Höhe $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \Delta t$ zugeordnet werden (siehe Abbildung 1.4). Es gilt für das Integral über die Oberfläche $\partial\Omega$ des Zylinders Ω mit dem (wie üblich) nach *außen* orientiertem Normalenvektor \mathbf{n}_Ω :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial\Omega} d^2 r' \mathbf{n}_\Omega \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) & (1.30) \\
 &= \int_{\mathcal{A}(t+\Delta t)} d^2 r' \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) - \int_{\mathcal{A}(t)} d^2 r' \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) + \int_{\partial\mathcal{A}(t)} (\mathbf{ds} \wedge \mathbf{v} \Delta t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{s}, t),
 \end{aligned}$$

wobei der dritte Term dem Beitrag der Mantelfläche des Zylinders Ω mit Höhe $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \Delta t$ geschuldet ist. Das Minuszeichen erklärt sich aus der Eigenschaft

$$\mathbf{n}_\Omega = \begin{cases} \mathbf{n} & \text{für } \mathbf{r}' \in \mathcal{A}(t + \Delta t), \\ -\mathbf{n} & \text{für } \mathbf{r}' \in \mathcal{A}(t). \end{cases} \quad (1.31)$$

Unter Beachtung der Identität

$$(\mathbf{ds} \wedge \mathbf{v} \Delta t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{s}, t) = \Delta t \mathbf{ds} \cdot [\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{s}, t)] \quad (1.32)$$

1 Einleitung

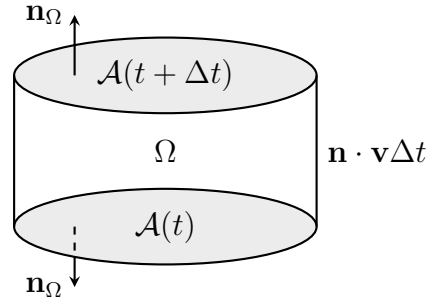


Abbildung 1.4: Zylinder Ω der Höhe $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \Delta t$ mit Normalenvektor \mathbf{n}_Ω .

folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} [\Phi^{(M)}(t + \Delta t) - \Phi^{(M)}(t)] &= \int_{\partial\Omega} d^2 r' \mathbf{n}_\Omega \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) - \Delta t \int_{\partial\mathcal{A}(t)} d\mathbf{s} \cdot [\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{s}, t)] \\ &\quad + \Delta t \int_{\mathcal{A}(t)} d^2 r' \mathbf{n} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) + \mathcal{O}(\Delta t)^2. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Andererseits gilt nach dem Satz von Gauß

$$\int_{\partial\Omega} d^2 r' \mathbf{n}_\Omega \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) = \int_{\Omega} d^3 r \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (1.34)$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} [\Phi^{(M)}(t + \Delta t) - \Phi^{(M)}(t)] &= \int_{\Omega} d^3 r \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \Delta t \int_{\partial\mathcal{A}(t)} d\mathbf{s} \cdot [\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{s}, t)] \\ &\quad + \Delta t \int_{\mathcal{A}(t)} d^2 r' \mathbf{n} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) + \mathcal{O}(\Delta t)^2. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Für den Inhalt $|\Omega|$ des Volumens Ω schreiben wir jetzt für ein kleines Zeitintervall Δt (Grundfläche \times Höhe):

$$|\Omega| = |\mathcal{A}(t)| |\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \Delta t|. \quad (1.36)$$

Also folgt für den ersten Term in (1.35)

$$\int_{\Omega} d^3 r \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathcal{A}(t)} d^2 r' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \Delta t) \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) + \mathcal{O}(\Delta t)^2. \quad (1.37)$$

1.4 Die Maxwell-Gleichungen

Mit dem Satz von Stokes schreiben wir für den zweiten Term in (1.35)

$$\int_{\partial\mathcal{A}(t)} \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot [\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{s}, t)] = \int_{\mathcal{A}(t)} \mathrm{d}^2 r' \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} [\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}', t)]. \quad (1.38)$$

Insgesamt erhalten wir

$$\frac{1}{\kappa} [\Phi^{(M)}(t + \Delta t) - \Phi^{(M)}(t)] \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} &= \Delta t \left\{ \int_{\mathcal{A}(t)} \mathrm{d}^2 r' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) - \int_{\mathcal{A}(t)} \mathrm{d}^2 r' \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} [\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}', t)] \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathcal{A}(t)} \mathrm{d}^2 r' \mathbf{n} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \right\} + \mathcal{O}(\Delta t)^2 \\ &= \Delta t \int_{\mathcal{A}(t)} \mathrm{d}^2 r' \mathbf{n} \cdot \left\{ \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) - \operatorname{rot} [\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}', t)] + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \right\} + \mathcal{O}(\Delta t)^2. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Andererseits gilt ebenfalls nach dem Satz von Stokes

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(t) &= \oint_{\partial\mathcal{A}(t)} \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{s}, t) + \kappa \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{s}, t)]_{\mathbf{s} \in \mathcal{L}} \\ &= \int_{\mathcal{A}(t)} \mathrm{d}^2 r' \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} [\mathbf{E}(\mathbf{r}', t) + \kappa \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}', t)]. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Das Induktionsgesetz von Faraday setzt die beiden Ausdrücke (1.26) und (1.41) aber gleich:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi^{(M)}(t) \\ &= \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi^{(M)}(t + \Delta t) - \Phi^{(M)}(t)}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

1 Einleitung

Nach dem Gesagten folgt nun durch Einsetzen

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{A}(t)} d^2 r' \mathbf{n} \cdot [\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) + \kappa \text{rot} [\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}', t)]] \\ &\quad + \kappa \int_{\mathcal{A}(t)} d^2 r' \mathbf{n} \cdot \left[\mathbf{v} \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) - \text{rot} [\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}', t)] + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \right] \\ &= \int_{\mathcal{A}(t)} d^2 r' \mathbf{n} \cdot \left\{ \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) + \kappa \text{rot} [\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}', t)] \right. \\ &\quad \left. + \kappa \left[\mathbf{v} \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) - \text{rot} [\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}', t)] + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \right] \right\} \\ &= \int_{\mathcal{A}(t)} d^2 r' \mathbf{n} \cdot \left\{ \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) + \kappa \mathbf{v} \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \right\}. \end{aligned}$$

Die hergeleitete Beziehung gilt für jede Schlaufe $\mathcal{L} = \partial\mathcal{A}(t)$ und für jede (nicht relativistische) Geschwindigkeit \mathbf{v} . Also gilt sie auch in differentieller Form:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) &= \mathbf{0} \\ \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) &= 0. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Dies sind gerade die *beiden* homogenen Maxwell-Gleichungen (1.22). Die Aussage, dass es keine magnetischen Monopole gibt, benötigt kein zusätzliches Postulat! Sie folgt nach dem Gesagten zwingend aus dem Induktionsgesetz von Faraday und der Lorentz-Kraft. Der magnetische Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V ist beständig identisch Null:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} d^2 r' \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) &= \int_V d^3 r \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Zur Lösbarkeit des Anfangswertproblems

Die Maxwellschen Gleichungen sind ein System von *acht* gekoppelten partiellen Differentialgleichungen für nur *sechs* kartesische Komponenten der elektromagnetischen Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Offensichtlich können die Gleichungen nicht unabhängig voneinander sein. Das Anfangswertproblem wäre sonst überbestimmt.

1.4 Die Maxwell-Gleichungen

Wir bilden die Divergenz der zweiten Gleichung in (1.21) und erhalten unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung (1.23):

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) & (1.45) \\ &= \kappa \mu_0 \operatorname{div} \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right] \\ &= \kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0} + \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right]. \end{aligned}$$

Gilt demnach zu einem Zeitpunkt $t = t_0$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_0) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t_0)}{\varepsilon_0}, \quad (1.46)$$

so bleibt das richtig für alle späteren Zeiten $t > t_0$. Dies ist der Erhaltungssatz der elektrischen Ladungen. Entsprechend folgt aus (1.22)

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\kappa \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.47)$$

Ist demnach zu einem Zeitpunkt $t = t_0$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0) = 0, \quad (1.48)$$

so bleibt das richtig für alle späteren Zeiten $t > t_0$. Demnach wird es keine magnetischen Monopole geben, wenn es bereits zur Zeit $t = t_0$ keine gab.

Aufgrund der beiden Erhaltungssätze (1.45) und (1.47) sind somit (implizit) die Zahl der unabhängigen Maxwellschen Gleichungen von *acht* auf *sechs* reduziert, d.h. es können $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ für vorgegebene Quellen $\rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, die ja stets der Kontinuitätsgleichung (1.23) genügen müssen, für alle Zeiten $t > t_0$ eindeutig bestimmt werden.

Bemerkung

Die *homogenen* Maxwell-Gleichungen im Vakuum besitzen eine zusätzliche Symmetrie. Aus einer Lösung (\mathbf{E}, \mathbf{B}) erhält man eine neue Lösung durch die Substitution

$$(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \rightarrow \kappa (\mathbf{B}, -\mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}). \quad (1.49)$$

1.5 Der statische Grenzfall der Maxwell-Gleichungen

Im statischen Grenzfall sind alle Felder und Quellen zeitunabhängig, also nur Funktionen des Orts. Die Maxwell-Gleichungen bestehen dann aus zwei unabhängigen Blöcken, den Gleichungen der *Elektrostatik* zur Bestimmung des elektrischen Felds $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in Abhängigkeit von einer Quelle mit vorgegebener Raumladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$

Elektrostatik

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.50}$$

und den Gleichungen der *Magnetostatik* zur Bestimmung des magnetischen Induktionsfeldes $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ in Abhängigkeit von einer *stationären* Stromquelle mit solenoidaler Ladungsstromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$

Magnetostatik

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \kappa \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \\ \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \tag{1.51}$$

2 Elektrostatik

Wir betrachten im freien Raum die Überführungsarbeit pro Ladung im gegebenem elektrostatischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ von einer gewählten Anfangsposition $\mathbf{r}^{(1)}$ entlang des Weges $\mathcal{C}^{(I)}$ hin zu einer Endposition $\mathbf{r}^{(2)}$

$$\phi[\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}; \mathcal{C}^{(I)}] = \int_{\mathcal{C}^{(I)}} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{s}). \quad (2.1)$$

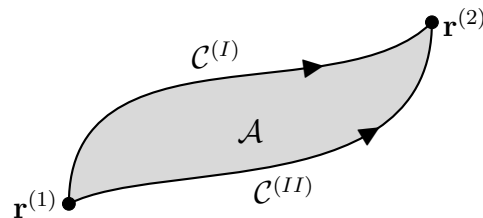


Abbildung 2.1: Die von den Wegen $\mathcal{C}^{(I)}$ und $\mathcal{C}^{(II)}$ eingeschlossene Fläche wird als \mathcal{A} bezeichnet.

Entlang irgendeines anderen Weges $\mathcal{C}^{(II)}$ von $\mathbf{r}^{(1)}$ nach $\mathbf{r}^{(2)}$ gilt entsprechend

$$\begin{aligned} \phi[\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}; \mathcal{C}^{(II)}] &= \int_{\mathcal{C}^{(II)}} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{s}) & (2.2) \\ &= \int_{\mathcal{C}^{(I)}} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{s}) + \int_{\mathcal{C}^{(II)}} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{s}) - \int_{\mathcal{C}^{(I)}} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{s}) \\ &= \int_{\mathcal{C}^{(I)}} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{s}) + \oint_{\mathcal{C}^{(II)} \cup (-\mathcal{C}^{(I)})} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{s}) \\ &= \int_{\mathcal{C}^{(I)}} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{s}) + \oint_{\partial \mathcal{A}} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{s}) \\ &= \phi[\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}; \mathcal{C}^{(I)}] + \int_{\mathcal{A}} d^2 r' \mathbf{n} \cdot \underbrace{\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}')}_{=0} \\ &= \phi[\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}; \mathcal{C}^{(I)}]. \end{aligned}$$

2 Elektrostatik

Hier ist $\mathcal{C}^{(II)} \cup (-\mathcal{C}^{(I)})$ diejenige geschlossene Kurve ∂A , die aus der Kurve $\mathcal{C}^{(II)}$ von $\mathbf{r}^{(1)}$ nach $\mathbf{r}^{(2)}$ und der zu $\mathcal{C}^{(I)}$ entgegengesetzt orientierten Kurve $-\mathcal{C}^{(I)}$ von $\mathbf{r}^{(2)}$ zurück nach $\mathbf{r}^{(1)}$ zusammengesetzt ist, und \mathcal{A} ist die eingeschlossene Fläche, deren Rand gerade $\partial \mathcal{A} = \mathcal{C}^{(II)} \cup (-\mathcal{C}^{(I)})$ ist (siehe Abbildung 2.1). Unter Beachtung von (1.50) folgt jetzt

$$\phi[\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}; \mathcal{C}^{(II)}] = \phi[\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}; \mathcal{C}^{(I)}], \quad (2.3)$$

d.h. das Integral (2.1) ist aufgrund der Wirbelfreiheit des statischen elektrischen Feldes vom gewählten Weg \mathcal{C} von $\mathbf{r}^{(1)}$ nach $\mathbf{r}^{(2)}$ unabhängig. Man definiert üblicherweise als *elektrisches Potential* das Integral

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}^{(0)}}^{\mathbf{r}} \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{s}). \quad (2.4)$$

Hier sind \mathbf{r}_0 und $\phi(\mathbf{r}_0)$ fest gewählte Konstanten. Es gilt für einen kleinen Abstand

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{s} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)} \\ \mathrm{d}\phi(\mathbf{r}) &= -\mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Folglich ist das elektrostatische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ als (negativer) Gradient einer skalaren Potentialfunktion $\phi(\mathbf{r})$ darstellbar:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})}. \quad (2.6)$$

Die physikalische Dimension des elektrostatischen Potentials $\phi(\mathbf{r})$ ist $\left[\frac{\text{Energie}}{\text{Ladung}}\right]$. Potentiale

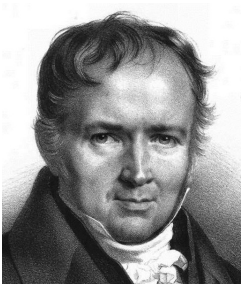
$$\phi'(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) + \phi_0, \quad (2.7)$$

die sich von $\phi(\mathbf{r})$ durch eine Konstante ϕ_0 unterscheiden sind physikalisch äquivalent. Die Wahl der Konstanten ϕ_0 entspricht der Festlegung einer Eichung.

2.1 Potential und elektrostatisches Feld einer Ladungsverteilung

Es folgt durch Einsetzen in (1.50) zur Bestimmung von $\phi(\mathbf{r})$ die *Poisson-Gleichung*

$$\boxed{-\nabla_{\mathbf{r}}^2\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r})}. \quad (2.8)$$



Similichon Denis
Poisson (1781–1840)

2.1 Potential und elektrostatisches Feld einer Ladungsverteilung

Diese wurde nach dem französischen Mathematiker und Physiker Siméon Denis Poisson benannt. Es handelt sich hierbei um eine elliptische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Der Poisson-Gleichung genügen das elektrostatische Potential, z.B. aber auch das Gravitationspotential. Die eindeutige Lösung der Poisson-Gleichung mit Randbedingung $\lim_{|\mathbf{r}|\rightarrow\infty} \phi(\mathbf{r}) = 0$ für eine Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$, die im Unendlichen verschwindet, lautet

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}} \quad (2.9)$$

Um dies zu bestätigen, bilden wir

$$\begin{aligned} a &\in \{x, y, z\} \\ \frac{\partial}{\partial r_a} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_a} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{r'_a - r_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &\stackrel{\mathbf{u}=\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3u \rho(\mathbf{u} + \mathbf{r}) \frac{u_a}{|\mathbf{u}|^3}. \end{aligned}$$

Also folgt jetzt für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r_a^2} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3u \frac{\partial}{\partial r_a} \rho(\mathbf{u} + \mathbf{r}) \frac{u_a}{|\mathbf{u}|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3u \frac{\partial}{\partial u_a} \rho(\mathbf{u} + \mathbf{r}) \frac{u_a}{|\mathbf{u}|^3}. \end{aligned}$$

Summation über $a \in \{x, y, z\}$ liefert mit

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}}^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_z^2} && \text{(Laplace-Operator)} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} &= u_x \frac{\partial}{\partial u_x} + u_y \frac{\partial}{\partial u_y} + u_z \frac{\partial}{\partial u_z} && \text{(Richtungsableitung)} \end{aligned}$$

die Beziehung

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3u \frac{1}{|\mathbf{u}|^3} (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}}) \rho(\mathbf{u} + \mathbf{r}). \quad (2.10)$$

2 Elektrostatik

In sphärischen Koordinaten

$$\begin{aligned}0 &\leq \alpha < 2\pi \\0 &\leq \vartheta \leq \pi \\u_x &= u \cos \alpha \sin \vartheta \\u_y &= u \sin \alpha \sin \vartheta \\u_z &= u \cos \vartheta\end{aligned}$$

folgt dann mit der für Kugelkoordinaten gültigen Identität

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} = u \frac{\partial}{\partial u} \quad (2.11)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^\infty du u^2 \frac{1}{u^2} \frac{\partial}{\partial u} \rho(\mathbf{u} + \mathbf{r}) \\&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^\infty du \frac{\partial}{\partial u} \rho(\mathbf{u} + \mathbf{r}).\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}&\int_0^{R_c} du \frac{\partial}{\partial u} \rho(\mathbf{u} + \mathbf{r}) \\&= \int_0^{R_c} du \frac{\partial}{\partial u} \rho(u_x + r_x, u_y + r_y, u_z + r_z) \\&= \int_0^{R_c} du \frac{\partial}{\partial u} \rho(u \cos \alpha \sin \vartheta + r_x, u \sin \alpha \sin \vartheta + r_y, u \cos \vartheta + r_z) \\&= \rho(R_c \cos \alpha \sin \vartheta + r_x, R_c \sin \alpha \sin \vartheta + r_y, R_c \cos \vartheta + r_z) - \rho(r_x, r_y, r_z).\end{aligned}$$

Im Unendlichen war aber vorausgesetzt, dass ρ gleich Null sein soll, also

$$\lim_{R_c \rightarrow \infty} \rho(R_c \cos \alpha \sin \vartheta + r_x, R_c \sin \alpha \sin \vartheta + r_y, R_c \cos \vartheta + r_z) = 0. \quad (2.12)$$

Damit ist gezeigt

$$\int_0^\infty du \frac{\partial}{\partial u} \rho(\mathbf{u} + \mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}).$$

2.1 Potential und elektrostatisches Feld einer Ladungsverteilung

Weil aber $\rho(\mathbf{r})$ nicht von α und ϑ abhängt, folgt sofort

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \right] \rho(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}),\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Wir schreiben jetzt

$$\begin{aligned}-\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}) &= -\nabla_{\mathbf{r}}^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} & (2.13) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \left[-\nabla_{\mathbf{r}}^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') 4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}').\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt im Sinne einer Identität für Distributionen

$$\boxed{-\nabla_{\mathbf{r}}^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}').} \quad (2.14)$$

Dem entspricht, dass an einem Ort \mathbf{r} das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, das von einer *Punktladung* q am Ort \mathbf{r}' erzeugt wird, gemäß dem Coulomb-Gesetz gegeben ist zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (2.15)$$

In der Tat bestätigen wir umgekehrt mit Hilfe von (2.14)

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \operatorname{div} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] & (2.16) \\ &= \operatorname{div} \left[-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\nabla_{\mathbf{r}}^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}').\end{aligned}$$

2 Elektrostatik

Einer fixen Punktladung q am Ort \mathbf{r}' entspricht somit eine Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.17)$$

Die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ für eine Wolke bestehend aus einer Anzahl N von Punktladungen $q^{(n)}$, die sich an N gegebenen Positionen $\mathbf{R}^{(n)}$ befinden mögen, ist

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N q^{(n)}\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{R}^{(n)}). \quad (2.18)$$

Das Potential folgt dann aus Gleichung (2.9) zu

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{q^{(n)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}^{(n)}|}. \quad (2.19)$$

Am Ort \mathbf{r} ist die elektrische Feldstärke dann gegeben zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N q^{(n)} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}^{(n)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}^{(n)}|^3}. \quad (2.20)$$

Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit dem Superpositionsprinzip, d.h. das gesamte elektrische Feld ist die Vektorsumme aller individuellen Felder von Punktladungen.

Bemerkung

Im Inneren des Volumens Ω eines sehr gut leitenden Materials (metallischer Leiter) ist $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, d.h. $\phi(\mathbf{r}) = \text{const}$, somit gilt

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{r} \in \Omega, \\ \phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r} \in \partial\Omega}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Der Wert des elektrischen Potentials im Innengebiet eines Leiters ist gleich seinem Wert an der Oberfläche $\partial\Omega$ von Ω , insbesondere ist $\partial\Omega$ eine Äquipotentialfläche.

Elektrisches Feld einer Ebene mit konstanter Flächenladungsdichte

Wir betrachten einen Metallblock Ω , der den Halbraum $r_z < 0$ ausfüllen möge, mit der Ebene $r_z = 0$ als Grenzfläche $\partial\Omega$ zum freien Raum. Es seien Ladungen $|e|$ mit konstanter Belegungsdichte $\omega^{(\partial\Omega)} = \frac{N|e|}{|\partial\Omega|}$ auf dieser Grenzfläche positioniert. Dann ist $\omega^{(\partial\Omega)}$ eine Flächenladungsdichte auf der Fläche $r_z = 0$ mit dem von Innen nach Außen orientierten Normalenvektor \mathbf{e}_z . Es ist vorteilhaft, bei der Rechnung Zylinderkoordinaten zu verwenden. Ein Flächenelement

$$dF^{(\partial\Omega)} = dr_\perp r_\perp d\alpha$$

auf der Grenzfläche trägt demnach die Ladung

$$dq = \omega^{(\partial\Omega)} dF^{(\partial\Omega)}.$$

Das von der Ladung dq am Ort $\mathbf{R} = r_\perp \cos(\alpha) \mathbf{e}_x + r_\perp \sin(\alpha) \mathbf{e}_y$ auf der Fläche $\partial\Omega$ generierte elektrische Feld $d\mathbf{E}(\mathbf{r})$ an einem Ort $\mathbf{r} = r_z \mathbf{e}_z$ im Außengebiet $r_z > 0$ von Ω ist nach dem Gesagten

$$\begin{aligned} d\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} \\ &= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_z \mathbf{e}_z - r_\perp \cos(\alpha) \mathbf{e}_x - r_\perp \sin(\alpha) \mathbf{e}_y}{|r_z \mathbf{e}_z - r_\perp \cos(\alpha) \mathbf{e}_x - r_\perp \sin(\alpha) \mathbf{e}_y|^3} \\ &= \frac{\omega^{(\partial\Omega)}}{4\pi\epsilon_0} dr_\perp r_\perp d\alpha \frac{r_z \mathbf{e}_z - r_\perp \cos(\alpha) \mathbf{e}_x - r_\perp \sin(\alpha) \mathbf{e}_y}{\left(\sqrt{r_z^2 + r_\perp^2}\right)^3}. \end{aligned}$$

Das von allen geladenen Flächenelementen $dF^{(\partial\Omega)}$ der Oberfläche zusammen genommen herrührende elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ am Ort \mathbf{r} im Außengebiet von Ω ist

2 Elektrostatik

das Integral

$$\begin{aligned} r_z > 0 & \tag{2.22} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\omega^{(\partial\Omega)}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr_\perp r_\perp \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{r_z \mathbf{e}_z - r_\perp \cos(\alpha) \mathbf{e}_x - r_\perp \sin(\alpha) \mathbf{e}_y}{(\sqrt{r_z^2 + r_\perp^2})^3} \\ &= \frac{\omega^{(\partial\Omega)}}{2\epsilon_0} r_z \int_0^\infty dr_\perp \frac{r_\perp}{(\sqrt{r_z^2 + r_\perp^2})^3} \mathbf{e}_z \\ &= \frac{\omega^{(\partial\Omega)}}{2\epsilon_0} r_z \int_0^\infty dr_\perp \left[-\frac{\partial}{\partial r_\perp} \frac{1}{\sqrt{r_z^2 + r_\perp^2}} \right] \mathbf{e}_z \\ &= \frac{\omega^{(\partial\Omega)}}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Interessanterweise ist das elektrische Feld überall *parallel* zum Normalenvektor \mathbf{e}_z der Fläche orientiert und *unabhängig* von der Distanz des Ortes \mathbf{r} von der Oberfläche.

2.2 Multipolentwicklung

Wir definieren als Integrationsgebiet Ω für unsere Ladungsverteilung die Menge aller Punkte des Euklidischen affinen Raumes \mathbb{E}_3 , für die die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ von Null verschiedene Werte annimmt

$$\Omega = \{ \mathbf{r} \in \mathbb{E}_3 \mid \rho(\mathbf{r}) \neq 0 \}. \tag{2.23}$$

Sei die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ um einen zentralen Punkt \mathbf{r}_0 lokalisiert (der Einfachheit halber nehmen wir an $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$) und sei $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$ für alle $\mathbf{r}' \in \Omega^{(s)}$. Dann

2.2 Multipolentwicklung

gilt die Taylor-Entwicklung (Summenkonvention beachten!)

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{r}'| &\ll |\mathbf{r}| & (2.24) \\
 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \exp(-\mathbf{r}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \frac{1}{|\mathbf{r}|} \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left(r'_a \frac{\partial}{\partial r_a} \right)^l \frac{1}{|\mathbf{r}|} \\
 &= \frac{1}{|\mathbf{r}|} - \left(r'_a \frac{\partial}{\partial r_a} \right) \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{1}{2} \left(r'_b \frac{\partial}{\partial r_b} \right) \left(r'_a \frac{\partial}{\partial r_a} \right) \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \dots \\
 &= \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{r'_a r_a}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{3r'_a r_a r'_b r_b - r'_a r'_a r_b r_b}{2|\mathbf{r}|^5} + \dots \\
 &a, b \in \{x, y, z\}.
 \end{aligned}$$

Wir beobachten

$$\begin{aligned}
 \delta_{a,b} \delta_{a,b} &= 3 & (2.25) \\
 \delta_{a,b} (3r'_a r'_b - \delta_{a,b} |\mathbf{r}'|^2) &= 3r'_a r'_a - 3|\mathbf{r}'|^2 = 0
 \end{aligned}$$

und schreiben

$$3r'_a r_a r'_b r_b - r'_a r'_a r_b r_b = \frac{1}{3} (3r'_a r'_b - \delta_{a,b} |\mathbf{r}'|^2) (3r_a r_b - \delta_{a,b} |\mathbf{r}|^2). \quad (2.26)$$

Also folgt jetzt

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{r'_a r_a}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{(3r'_a r'_b - \delta_{a,b} |\mathbf{r}'|^2) (3r_a r_b - \delta_{a,b} |\mathbf{r}|^2)}{6|\mathbf{r}|^5} + \dots \quad (2.27)$$

Einsetzen ergibt die gesuchte Multipolentwicklung für eine um den Ursprung bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ zentrierte Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ zu

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} & (2.28) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d^3r' \rho(\mathbf{r}') \left[\frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{r'_a r_a}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{(3r'_a r'_b - \delta_{a,b} |\mathbf{r}'|^2) (3r_a r_b - \delta_{a,b} |\mathbf{r}|^2)}{6|\mathbf{r}|^5} + \dots \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{r}|} + \frac{p_a r_a}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{Q_{ab} (3r_a r_b - \delta_{a,b} |\mathbf{r}|^2)}{6|\mathbf{r}|^5} + \dots \right].
 \end{aligned}$$

2 Elektrostatik

Die Größen q , p_a und Q_{ab} sind dabei *Formfaktoren* der gegebenen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$:

Gesamtladung	$q = \int_{\Omega} d^3r' \rho(\mathbf{r}')$	(2.29)
Dipolmoment	$p_a = \int_{\Omega} d^3r' \rho(\mathbf{r}') r'_a$	
Quadrupolmoment	$Q_{ab} = \int_{\Omega} d^3r' \rho(\mathbf{r}') (3r'_a r'_b - \delta_{a,b} \mathbf{r}' ^2)$ $a, b \in \{x, y, z\}.$	

Unter einer (aktiven) *Translation* des Bezugspunktes \mathbf{r}_0 der Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$ um einen konstanten Vektor \mathbf{R} gemäß

$$\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_0 + \mathbf{R} \quad (2.30)$$

geht die Verteilungsfunktion ρ über in die neue Verteilungsfunktion ρ_T :

$$\rho(\mathbf{r}') \rightarrow \rho_T(\mathbf{r}'') = \rho(\mathbf{r}'' - \mathbf{R}).$$

Das Monopolmoment (Gesamtladung) für beide Verteilungsfunktionen ist offensichtlich gleich

$$q_T = \int d^3r'' \rho_T(\mathbf{r}'') = \int d^3r'' \rho(\mathbf{r}'' - \mathbf{R}) = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') = q, \quad (2.31)$$

aber die höheren Multipolmomente $l \geq 1$ der zwei Verteilungsfunktionen sind im allgemeinen schon verschieden:

$$\begin{aligned}
 a &\in \{x, y, z\} \\
 p_{T,a} &= \int d^3 r'' \rho_T(\mathbf{r}'') r''_a = \int d^3 r'' \rho(\mathbf{r}'' - \mathbf{R}) r''_a \\
 &= \int d^3 r'' \rho(\mathbf{r}'' - \mathbf{R}) (r''_a - R_a) + \int d^3 r'' \rho(\mathbf{r}'' - \mathbf{R}) R_a \\
 &= \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') r'_a + \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') R_a \\
 &= p_a + R_a q
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
 a, b &\in \{x, y, z\} \\
 Q_{T,ab} &= \int_{\Omega_T} d^3 r'' \rho_T(\mathbf{r}'') (3r''_a r''_b - \delta_{a,b} |\mathbf{r}''|^2) \\
 &= \int d^3 r'' \rho(\mathbf{r}'' - \mathbf{R}) (3r''_a r''_b - \delta_{a,b} |\mathbf{r}''|^2) \\
 &= \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') [3(r'_a + R_a)(r'_b + R_b) - \delta_{a,b} |\mathbf{r}' + \mathbf{R}|^2] \\
 &= Q_{ab} + 3R_a p_b + 3R_b p_a - 2\delta_{a,b} R_c p_c + (3R_a R_b - \delta_{a,b} |\mathbf{R}|^2) q.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Nur für verschwindende Gesamtladung $q = 0$ ist das Dipolmoment unabhängig vom Bezugspunkt \mathbf{R} . Und nur für $q = 0$ und zugleich verschwindendes Dipolmoment $p_a = 0$ ist auch das Quadrupolmoment unabhängig vom gewählten Bezugspunkt!

Offensichtlich bilden die Komponenten Q_{ab} des Quadrupolmoments einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe mit Spur Null:

$$\begin{aligned}
 a, b &\in \{x, y, z\} \\
 Q_{ab} &= Q_{ba} \\
 Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Es gibt demnach insgesamt 5 unabhängige Quadrupolkomponenten Q_{ab} .

Aus der hergeleiteten Multipolentwicklung für das Potential einer um den Bezugspunkt $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ zentrierten Ladungswolke folgt unschwer die entsprechende Ent-

2 Elektrostatik

wicklung für die kartesischen Komponenten der elektrostatischen Feldstärke

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'| &\ll |\mathbf{r}| \\ a &\in \{x, y, z\} \\ E_a(\mathbf{r}) &= -\frac{\partial}{\partial r_a} \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{qr_a}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{3(p_b r_b) r_a - p_a |\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^5} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Zum Gültigkeitsbereich der hergeleiteten Formeln sei betont, dass eine Multipolentwicklung immer dann sinnvoll ist, wenn der Abstand zur Ladungswolke deutlich größer ist als deren Ausdehnung.

2.3 Satz von Dirichlet

Wir betrachten ein dreiaxsiges Ellipsoid \mathcal{E} mit Hauptachsen der Länge λ_x , λ_y und λ_z , die parallel zu den kartesischen Einheitsvektoren \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y und \mathbf{e}_z unseres Labor-Koordinatensystems orientiert sein mögen. Das Innere des Ellipsoids ist dann die Punktmenge

$$\Omega_{\mathcal{E}} = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{E}_3 \mid \frac{s_x^2}{\lambda_x^2} + \frac{s_y^2}{\lambda_y^2} + \frac{s_z^2}{\lambda_z^2} \leq 1 \right\}, \quad (2.36)$$

die Oberfläche des Ellipsoids ist gegeben zu

$$\partial\Omega_{\mathcal{E}} = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{E}_3 \mid \frac{s_x^2}{\lambda_x^2} + \frac{s_y^2}{\lambda_y^2} + \frac{s_z^2}{\lambda_z^2} = 1 \right\}. \quad (2.37)$$

Das elektrische Potential $\phi(\mathbf{r})$ für eine beliebige Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}')$, die außerhalb von $\Omega_{\mathcal{E}}$ gleich Null ist, ist eine Lösung der Poisson-Gleichung mit Randbedingung $\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow 0} \phi(\mathbf{r}) = 0$, somit

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega_{\mathcal{E}}} d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.38)$$

Im allgemeinen ist das ein (nicht trivial zu berechnendes) *dreidimensionales* Integral. Für den Spezialfall einer konstanten Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}') = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } \mathbf{r}' \in \Omega_{\mathcal{E}}, \\ 0 & \text{für } \mathbf{r}' \notin \Omega_{\mathcal{E}} \end{cases} \quad (2.39)$$

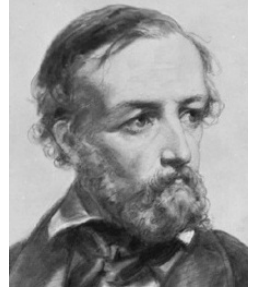
2.3 Satz von Dirichlet

kann das dreidimensionale Integral (2.38) durch einen Satz von Dirichlet auf *ein-dimensionale* Integrale zurückgeführt werden:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \int_{\mu(\mathbf{r})}^{\infty} du \frac{1 - \frac{r_x^2}{u + \lambda_x^2} - \frac{r_y^2}{u + \lambda_y^2} - \frac{r_z^2}{u + \lambda_z^2}}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} \quad (2.40)$$

$$\text{für } \mathbf{r} \in \Omega_{\mathcal{E}} \text{ gilt } \mu(\mathbf{r}) \equiv 0 \quad (2.41)$$

$$\text{für } \mathbf{r} \notin \Omega_{\mathcal{E}} \text{ ist } \mu(\mathbf{r}) \text{ Lösung der Gleichung } \frac{r_x^2}{\mu + \lambda_x^2} + \frac{r_y^2}{\mu + \lambda_y^2} + \frac{r_z^2}{\mu + \lambda_z^2} = 1.$$



Peter Gustav
Dirichlet
(1805–1859)

Die Richtigkeit dieser Aussage können wir elementar bestätigen. Befindet sich der Punkt \mathbf{r} innerhalb des Volumens $\Omega_{\mathcal{E}}$, so gilt dort $\mu(\mathbf{r}) \equiv 0$, also

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \in \Omega_{\mathcal{E}}, \quad a \in \{x, y, z\} & \quad (2.42) \\ \frac{\partial}{\partial r_a} \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} \frac{r_a}{u + \lambda_a^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial r_a^2} \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} \frac{1}{u + \lambda_a^2}. \end{aligned}$$

Ist der Punkt \mathbf{r} außerhalb des Volumens $\Omega_{\mathcal{E}}$, so ist noch zu berücksichtigen, dass die untere Integrationsgrenze über die Funktion $\mu(\mathbf{r})$ von Ort \mathbf{r} abhängig ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \notin \Omega_{\mathcal{E}}, \quad a \in \{x, y, z\} & \quad (2.43) \\ \frac{\partial}{\partial r_a} \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \int_{\mu(\mathbf{r})}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} \frac{r_a}{u + \lambda_a^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial r_a^2} \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \left[\int_{\mu(\mathbf{r})}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} \frac{1}{u + \lambda_a^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_x^2)(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_y^2)(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_z^2)}} \frac{r_a}{\mu(\mathbf{r}) + \lambda_a^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_a} \right]. \end{aligned}$$

Für $\mathbf{r} \in \partial\Omega_{\mathcal{E}}$ gilt aber immer noch $\mu(\mathbf{r}) \equiv 0$, d.h. die von innen nach außen fortgesetzte Funktion $\phi(\mathbf{r})$ und auch ihre erste Ableitung $\frac{\partial}{\partial r_a} \phi(\mathbf{r})$ sind stetige Funktionen. Die zweite Ableitung dagegen zeigt beim Durchgang von innen nach außen

2 Elektrostatik

an der Oberfläche $\partial V_{\mathcal{E}}$ des Ellipsoids einen Sprung. Es folgt nach dem Gesagten im Inneren von $\Omega_{\mathcal{E}}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \in \Omega_{\mathcal{E}}, \quad a \in \{x, y, z\} & \tag{2.44} \\
 \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_z^2} \right) \phi(\mathbf{r}) \\
 &= -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} \left(\frac{1}{u + \lambda_x^2} + \frac{1}{u + \lambda_y^2} + \frac{1}{u + \lambda_z^2} \right) \\
 &= -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \int_0^\infty du \frac{d}{du} \left[-\frac{2}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} \right] \\
 &= -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \left[-\frac{2}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} \right]_{u=0}^{u \rightarrow \infty} \\
 &= -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}.
 \end{aligned}$$

Im Außengebiet von $\Omega_{\mathcal{E}}$ folgt dagegen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \notin \Omega_{\mathcal{E}}, \quad a \in \{x, y, z\} & \tag{2.45} \\
 \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_z^2} \right) \phi(\mathbf{r}) \\
 &= -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \left\{ \int_{\mu(\mathbf{r})}^\infty \frac{du}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} \left(\frac{1}{u + \lambda_x^2} + \frac{1}{u + \lambda_y^2} + \frac{1}{u + \lambda_z^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. \frac{\frac{r_x}{\mu(\mathbf{r}) + \lambda_x^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_x} + \frac{r_y}{\mu(\mathbf{r}) + \lambda_y^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_y} + \frac{r_z}{\mu(\mathbf{r}) + \lambda_z^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_z}}{\sqrt{(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_x^2)(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_y^2)(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_z^2)}} \right\} \\
 &= -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \left\{ \int_{\mu(\mathbf{r})}^\infty du \frac{d}{du} \left[-\frac{2}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} \right] \right. \\
 &\quad \left. \frac{\frac{r_x}{\mu(\mathbf{r}) + \lambda_x^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_x} + \frac{r_y}{\mu(\mathbf{r}) + \lambda_y^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_y} + \frac{r_z}{\mu(\mathbf{r}) + \lambda_z^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_z}}{\sqrt{(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_x^2)(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_y^2)(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_z^2)}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \left\{ \frac{2}{\sqrt{(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_x^2)(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_y^2)(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_z^2)}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\frac{r_x}{\mu(\mathbf{r}) + \lambda_x^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_x} + \frac{r_y}{\mu(\mathbf{r}) + \lambda_y^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_y} + \frac{r_z}{\mu(\mathbf{r}) + \lambda_z^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_z}}{\sqrt{(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_x^2)(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_y^2)(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_z^2)}} \right\} \\
 &= -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \frac{\lambda_x \lambda_y \lambda_z}{\sqrt{(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_x^2)(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_y^2)(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_z^2)}} \\
 &\quad \times \underbrace{\left(2 - \frac{r_x}{\mu(\mathbf{r}) + \lambda_x^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_x} - \frac{r_y}{\mu(\mathbf{r}) + \lambda_y^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_y} - \frac{r_z}{\mu(\mathbf{r}) + \lambda_z^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_z} \right)}_{\equiv 0 ?}.
 \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt, dass der Term in der letzten Zeile tatsächlich identisch verschwindet, indem wir die Bestimmungsgleichung (2.41) für $\mu(\mathbf{r})$ nach der Koordinate r_a ableiten:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial r_a} \left(\frac{r_x^2}{\mu + \lambda_x^2} + \frac{r_y^2}{\mu + \lambda_y^2} + \frac{r_z^2}{\mu + \lambda_z^2} \right) \\
 &= \frac{2r_a}{\mu + \lambda_a^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{r_x^2}{\mu + \lambda_x^2} + \frac{r_y^2}{\mu + \lambda_y^2} + \frac{r_z^2}{\mu + \lambda_z^2} \right) \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_a} \\
 &= \frac{2r_a}{\mu + \lambda_a^2} - \left[\frac{r_x^2}{(\mu + \lambda_x^2)^2} + \frac{r_y^2}{(\mu + \lambda_y^2)^2} + \frac{r_z^2}{(\mu + \lambda_z^2)^2} \right] \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_a}.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Multiplikation mit $\frac{r_a}{\mu + \lambda_a^2}$ ergibt

$$\begin{aligned}
 a \in \{x, y, z\} \\
 \frac{2r_a^2}{(\mu + \lambda_a^2)^2} &= \frac{r_a}{\mu + \lambda_a^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_a} \left[\frac{r_x^2}{(\mu + \lambda_x^2)^2} + \frac{r_y^2}{(\mu + \lambda_y^2)^2} + \frac{r_z^2}{(\mu + \lambda_z^2)^2} \right].
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

2 Elektrostatik

Also folgt durch Summation über $a \in \{x, y, z\}$ die Relation

$$\begin{aligned}
 & 2 \left[\frac{r_x^2}{(\mu + \lambda_x^2)^2} + \frac{r_y^2}{(\mu + \lambda_y^2)^2} + \frac{r_z^2}{(\mu + \lambda_z^2)^2} \right] \\
 &= \left(\frac{r_x}{\mu + \lambda_x^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_x} + \frac{r_y}{\mu + \lambda_y^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_y} + \frac{r_z}{\mu + \lambda_z^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_z} \right) \\
 & \quad \times \left[\frac{r_x^2}{(\mu + \lambda_x^2)^2} + \frac{r_y^2}{(\mu + \lambda_y^2)^2} + \frac{r_z^2}{(\mu + \lambda_z^2)^2} \right].
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Identität

$$2 = \frac{r_x}{\mu + \lambda_x^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_x} + \frac{r_y}{\mu + \lambda_y^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_y} + \frac{r_z}{\mu + \lambda_z^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_z}. \tag{2.49}$$

Demnach gilt im Außengebiet des Ellipsoids, wenn wir (2.49) in die letzte Zeile von (2.45) einsetzen, die homogene Poisson-Gleichung (auch Laplace-Gleichung genannt)

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{r} \notin \Omega_\varepsilon, \quad a \in \{x, y, z\} \\
 & \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Schließlich betrachten wir das Abklingverhalten des Potentials für großen Abstand zum Ursprung, d.h. für $|\mathbf{r}| \gg \max(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$. In dem Fall schreiben wir für (2.41)

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{r_x^2}{\mu + \lambda_x^2} + \frac{r_y^2}{\mu + \lambda_y^2} + \frac{r_z^2}{\mu + \lambda_z^2} \\
 &= \frac{1}{\frac{\mu}{r_x^2} + \frac{\lambda_x^2}{r_x^2}} + \frac{1}{\frac{\mu}{r_y^2} + \frac{\lambda_y^2}{r_y^2}} + \frac{1}{\frac{\mu}{r_z^2} + \frac{\lambda_z^2}{r_z^2}} \\
 &\simeq \frac{1}{\frac{\mu}{r_x^2}} + \frac{1}{\frac{\mu}{r_y^2}} + \frac{1}{\frac{\mu}{r_z^2}} = \frac{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}{\mu}.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Für großen Abstand $|\mathbf{r}| \gg \max(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$ zum Zentrum des Ellipsoids folgt demnach $\mu(\mathbf{r}) \propto |\mathbf{r}|^2$. Für das Potential im Außenraum des Ellipsoids schreiben wir

für $u > \mu(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^2$ dann $u + \lambda_a^2 \simeq u$, d.h. es folgt

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{r}) &= \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \int_{\mu(\mathbf{r})}^{\infty} du \frac{1 - \frac{r_x^2}{u + \lambda_x^2} - \frac{r_y^2}{u + \lambda_y^2} - \frac{r_z^2}{u + \lambda_z^2}}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} \quad (2.52) \\
 &\simeq \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \int_{|\mathbf{r}|^2}^{\infty} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}{u} \right) \\
 &= \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \int_{|\mathbf{r}|^2}^{\infty} du \frac{d}{du} \left(-\frac{2}{u^{\frac{1}{2}}} + \frac{2|\mathbf{r}|^2}{3u^{\frac{3}{2}}} \right) \\
 &= \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \left[\frac{2}{|\mathbf{r}|} - \frac{2|\mathbf{r}|^2}{3|\mathbf{r}|^3} \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{4\pi}{3} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \rho_0}{|\mathbf{r}|} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}|},
 \end{aligned}$$

womit der Satz von Dirichlet bewiesen ist. Zugleich sehen wir, dass das Potential $\phi(\mathbf{r})$ eines homogen geladenen dreiachsigen Ellipsoids in großer Entfernung zum Ursprung so aussieht wie das Coulomb-Potential einer am Ort $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ befindlichen Punktladung der Stärke

$$q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega_{\mathcal{E}}} d^3r' \rho(\mathbf{r}') = \frac{4\pi}{3} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \rho_0, \quad (2.53)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv \int_{\Omega_{\mathcal{E}}} d^3r'}$

in völliger Übereinstimmung mit unseren Überlegungen zur Multipolentwicklung.

Nach dem Gesagten ist das Potential im *Inneren* eines homogen geladenen Ellipsoids eine *quadratische Form* der Ortskoordinaten

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &\in \Omega_{\mathcal{E}} \quad (2.54) \\
 \phi(\mathbf{r}) &= \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} (I_0 - I_x r_x^2 - I_y r_y^2 - I_z r_z^2).
 \end{aligned}$$

Die kartesischen Komponenten $E_a(\mathbf{r})$ des elektrischen Feldes sind dort demnach

2 Elektrostatik

lineare Funktionen des Ortes:

$$\mathbf{r} \in \Omega_{\mathcal{E}}$$
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} (I_x r_x \mathbf{e}_x + I_y r_y \mathbf{e}_y + I_z r_z \mathbf{e}_z).$$

Die Koeffizienten I_0 bzw. I_a sind die sog. Indexintegrale

$$I_0 = \lambda_x \lambda_y \lambda_z \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} \quad (2.55)$$
$$a \in \{x, y, z\}$$
$$I_a = \lambda_x \lambda_y \lambda_z \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} \frac{1}{u + \lambda_a^2}.$$

Man kann diese eindimensionalen Integrale ohne weiteres direkt, oder noch besser mit der Methode von Carlson berechnen, einer Variante des arithmetisch-geometrischen Mittels von Gauß zur Berechnung der elliptischen Integrale, siehe [Pre88]. Es gilt, wie man leicht zeigt

$$I_x + I_y + I_z = -2\lambda_x \lambda_y \lambda_z \int_0^\infty du \frac{d}{du} \frac{1}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} = 2. \quad (2.56)$$

Man braucht selbst bei einem dreiachsigen Ellipsoid nur zwei der drei Indexintegrale auszurechnen.

Für eine Kugel mit Radius R gilt

$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = R, \quad (2.57)$$
$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3},$$
$$I_0 = 2R^2.$$

Es gilt demnach im Inneren einer homogen geladenen Kugel mit Radius R

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\in \Omega_{\mathcal{E}}, \\ \lambda_x &= \lambda_y = \lambda_z = R, \\ \phi(\mathbf{r}) &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left(R^2 - \frac{|\mathbf{r}|^2}{3} \right) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

2.4 Elektrostatische Feldenergie

Die Kraft auf einen die Testladung q tragenden (ruhenden) Massenpunkt m in Gegenwart eines elektrostatischen Felds $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ist gegeben zu

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Die Bewegungsgleichung lautet (für nicht relativistische Geschwindigkeiten)

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -q\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}). \tag{2.59}$$

Durch skalare Multiplikation mit $\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ und anschließende Integration folgt der Energiesatz für die betrachtete Testladung

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \left[\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \right]_{t=t_1}^2 + q\phi(\mathbf{r}^{(1)}) &= \frac{m}{2} \left[\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \right]_{t=t_2}^2 + q\phi(\mathbf{r}^{(2)}) \\ \mathbf{r}^{(1)} &= \mathbf{r}(t_1), \quad \mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{r}(t_2). \end{aligned} \tag{2.60}$$

Demnach ist

$$V(\mathbf{r}) = q\phi(\mathbf{r}) \tag{2.61}$$

gleich der potentiellen Energie der Testladung q am Ort \mathbf{r} im dort herrschenden Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Die Arbeit, die das Feld bei der Verschiebung von $\mathbf{r}^{(1)}$ nach $\mathbf{r}^{(2)}$ leistet, ist gleich der *Differenz* der potentiellen Energie an diesen beiden Orten.

Wir betrachten unsere Anordnung aus N vorgegebenen Ladungen $q^{(n)}$, die sich alle innerhalb eines Gebiets an fixierten Positionen $\mathbf{R}^{(n)}$ in endlich großem Abstand $|\mathbf{R}^{(n)} - \mathbf{R}^{(n')}|$ zueinander befinden sollen, wobei $n, n' \in \{1, 2, \dots, N\}$ und

2 Elektrostatik

$n \neq n'$. Wir entfernen jetzt die Ladung $q^{(1)}$ von $\mathbf{R}^{(1)}$ hin ins Unendliche, wo das Potential gleich Null ist. Dann ist die potentielle Energie $V^{(1)}$ der Ladung $q^{(1)}$, wenn alle übrigen Ladungen $q^{(2)}, q^{(3)}, \dots, q^{(N)}$ an ihren zugewiesenen Positionen $\mathbf{R}^{(2)}, \mathbf{R}^{(3)}, \dots, \mathbf{R}^{(N)}$ verbleiben, gegeben zu

$$V^{(1)} = q^{(1)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=2}^N \frac{q^{(n)}}{|\mathbf{R}^{(1)} - \mathbf{R}^{(n)}|}.$$

Anschließend verfahren wir genauso mit der Ladung $q^{(2)}$, d.h. wir entfernen sie von $\mathbf{R}^{(2)}$ hin ins Unendliche. Dann ist die potentielle Energie $V^{(2)}$ der Ladung $q^{(2)}$, wenn alle übrigen Ladungen $q^{(3)}, q^{(4)}, \dots, q^{(N)}$ an ihren zugewiesenen Positionen $\mathbf{R}^{(3)}, \mathbf{R}^{(4)}, \dots, \mathbf{R}^{(N)}$ verbleiben, gegeben zu

$$V^{(2)} = q^{(2)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=3}^N \frac{q^{(n)}}{|\mathbf{R}^{(2)} - \mathbf{R}^{(n)}|}. \quad (2.62)$$

Auf diese Weise fahren wir fort, bis alle Ladungen getrennt sind und nur noch die Ladung $q^{(N)}$ an ihrer Position $\mathbf{R}^{(N)}$ übrig geblieben ist. Insgesamt ist die potentielle Energie der ursprünglichen Anordnung nach dem Gesagten gleich der Summe

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{pot}} &= \sum_{m=1}^{N-1} V^{(m)} & (2.63) \\ &= \sum_{m=1}^{N-1} q^{(m)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=m+1}^N \frac{q^{(n)}}{|\mathbf{R}^{(m)} - \mathbf{R}^{(n)}|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{m=1}^N \sum_{\substack{n=1 \\ m < n}}^N \frac{q^{(m)} q^{(n)}}{|\mathbf{R}^{(m)} - \mathbf{R}^{(n)}|} \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{m, n \\ m \neq n}} \frac{q^{(m)} q^{(n)}}{|\mathbf{R}^{(m)} - \mathbf{R}^{(n)}|}. \end{aligned}$$

\mathcal{E}_{pot} ist die Wechselwirkungsenergie des betrachteten Systems von diskreten Punktladungen. Für eine *kontinuierliche* Ladungswolke mit Verteilungsfunktion $\rho(\mathbf{r})$ folgt entsprechend

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.} \quad (2.64)$$

2.4 Elektrostatische Feldenergie

Dabei ist es (für eine kontinuierliche Ladungsverteilung!) unerheblich, dass wir den Punkt $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ nun anscheinend nicht ausschließen, weil das Integrationsmaß in $D > 1$ räumlichen Dimensionen die Singularität beseitigt. Das Integral erstreckt sich dabei über alle Gebiete mit nicht verschwindender Ladungsdichte!

Wir schreiben nun unter Verwendung von (2.9) und weiter mit (2.8) für die elektrostatische Wechselwirkungsenergie, die in der Ladungswolke $\rho(\mathbf{r})$ steckt:

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \int d^3r \phi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \phi(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}). \quad (2.65)$$

Wir beachten jetzt die Identität

$$\text{div} [\phi(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r})] = \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) + \phi(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}). \quad (2.66)$$

Dann folgt zunächst für ein endliches, sehr großes Kugelvolumen mit Radius R_c

$$\mathcal{E}_{\text{pot}}(R_c) = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{|\mathbf{r}| < R_c} d^3r \text{div} [\phi(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r})] + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{|\mathbf{r}| < R_c} d^3r \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) \quad (2.67)$$

$$\stackrel{\text{Satz von Gau\ss}}{=} -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{|\mathbf{r}|=R_c} d^2r \mathbf{n} \cdot [\phi(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r})] + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{|\mathbf{r}| < R_c} d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Das Oberflächenintegral verschwindet für $R_c \rightarrow \infty$, wenn alle Ladungen ganz im Endlichen positioniert sind und das Potential $\phi(\mathbf{r})$ für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Somit folgt das Resultat

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{pot}} = \lim_{R_c \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\text{pot}}(R_c) = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}).} \quad (2.68)$$

Das Integral erstreckt sich hier jetzt über alle Gebiete mit nicht verschwindender elektrischer Feldstärke (z.B. der ganze unendliche Raum), insbesondere sind nun auch Regionen mit verschwindender Ladungsdichte Träger von Feldenergie! Die Funktion

$$\boxed{u^{(E)}(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}).} \quad (2.69)$$

wird als Energiedichte des elektrostatischen Feldes gedeutet. Hervorzuheben ist, dass die Quellen des elektrostatischen Feldes nicht mehr explizit vorkommen!

Betrachtet man jetzt nicht kontinuierliche Ladungsverteilungen, sondern einzelne Punktladungen, so ist Vorsicht angezeigt. Denn das Integral (2.65) kann für zwei

2 Elektrostatik

Punktladungen unterschiedlichen Vorzeichens natürlich negative Werte annehmen, während das Integral (2.68) manifest nicht negativ ist. Der Grund für diesen Widerspruch ist der Umstand, dass die Formel (2.65) nur die Wechselwirkungsenergie enthält, aber die Formel (2.68) neben der Wechselwirkungsenergie auch noch die *Selbstenergie* der einzelnen Ladungen enthält. Diese ist aber für Punktladungen unendlich groß. Setzen wir z.B. in die Formel (2.68) das Coulomb-Feld einer am Ursprung positionierten *Punktladung* q ein,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},$$

so ist deren Selbstenergie

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} = \infty.$$

Subtrahiert man die Divergenzen, die von der Selbstenergie der Punktladungen herrühren, so liefern beide Formeln übereinstimmende Ergebnisse. Dies entspricht der Verabredung, dass in der Formel (2.63) alle Beiträge mit $m = n$ ausgeschlossen wurden.

2.5 Multipole im äußeren Feld

Wir fragen jetzt nach der Wechselwirkungsenergie, die eine Ladungsverteilung $\rho^{(I)}(\mathbf{r})$, die um den Ursprung bei $\mathbf{r} = \mathbf{R}^{(I)}$ zentriert sein möge, im Feld einer externen Ladungsverteilung $\rho^{(II)}(\mathbf{r})$ besitzt, die um einen entfernt liegenden Punkt $\mathbf{r} = \mathbf{R}^{(II)}$ zentriert sein möge. Zunächst kann man beide Ladungsverteilungen zu einer gesamten Ladungsverteilung zusammenfassen

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho^{(I)}(\mathbf{r}) + \rho^{(II)}(\mathbf{r}). \quad (2.70)$$

Diese hat dann insgesamt eine potentielle Energie

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{\text{pot}} &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{[\rho^{(I)}(\mathbf{r}) + \rho^{(II)}(\mathbf{r})][\rho^{(I)}(\mathbf{r}') + \rho^{(II)}(\mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} & (2.71) \\
 &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho^{(I)}(\mathbf{r})\rho^{(I)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho^{(II)}(\mathbf{r})\rho^{(II)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho^{(I)}(\mathbf{r})\rho^{(II)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho^{(II)}(\mathbf{r})\rho^{(I)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{=U_{\text{int}}^{(I,II)}}.
 \end{aligned}$$

Die Beiträge in der oberen Zeile sind der Selbstenergie der Ladungswolken geschuldet, die gesuchte Wechselwirkungsenergie der einen Wolke $\rho^{(I)}(\mathbf{r})$ mit der anderen Wolke $\rho^{(II)}(\mathbf{r})$ (und umgekehrt) beschreibt die zweite Zeile:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{int}}^{(I,II)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \rho^{(I)}(\mathbf{r}) \int d^3r' \frac{\rho^{(II)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} & (2.72) \\
 &= \int d^3r \rho^{(I)}(\mathbf{r}) \phi^{(II)}(\mathbf{r})
 \end{aligned}$$

(man beachte den Faktor 2). Hier ist $\phi^{(II)}(\mathbf{r})$ das von der (am entfernt liegenden Ort $\mathbf{R}^{(II)}$ positionierten) Ladungsdichte $\rho^{(II)}(\mathbf{r}')$ erzeugte Potential am Ort \mathbf{r} :

$$\phi^{(II)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho^{(II)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.73)$$

Da die Ladungsdichte $\rho^{(I)}$ nach Voraussetzung um den Bezugspunkt $\mathbf{r} = \mathbf{R}^{(I)}$ zentriert ist, sind alle Orte \mathbf{r} mit $\rho^{(I)}(\mathbf{r}) \neq 0$ weit entfernt von allen Orten \mathbf{r}' mit $\rho^{(II)}(\mathbf{r}') \neq 0$, d.h. es ist eine Taylor-Entwicklung des äußeren Potentials um die

2 Elektrostatik

Stelle $\mathbf{r} = \mathbf{R}^{(I)}$ möglich:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{int}}^{(I,II)} &= \int d^3r \rho^{(I)}(\mathbf{r}) \phi^{(II)}(\mathbf{r}) & (2.74) \\
 &= \int d^3r \rho^{(I)}(\mathbf{r}) \phi^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)} + \mathbf{r} - \mathbf{R}^{(I)}) \\
 &= \int d^3r \rho^{(I)}(\mathbf{r}) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left[(r_a - R_a^{(1)}) \frac{\partial}{\partial R_a^{(I)}} \right]^l \phi^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)}) \\
 &= \underbrace{\int d^3r \rho^{(I)}(\mathbf{r}) \phi^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)})}_{\equiv q^{(I)}} + \underbrace{\int d^3r \rho^{(I)}(\mathbf{r}) (r_a - R_a^{(1)}) \frac{\partial}{\partial R_a^{(I)}} \phi^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)})}_{\equiv p_a^{(I)}} \\
 &\quad + \int d^3r \rho^{(I)}(\mathbf{r}) (r_a - R_a^{(1)}) (r_b - R_b^{(1)}) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial R_a^{(I)}} \frac{\partial}{\partial R_b^{(I)}} \phi^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)}) + \dots
 \end{aligned}$$

Also folgt mit der gegebenen Definition für das Monopolmoment, Dipolmoment, Quadrupolmoment usw. für eine um den Ort $\mathbf{R}^{(I)}$ zentrierte Ladungsverteilung $\rho^{(I)}(\mathbf{r})$ die Wechselwirkungsenergie

$$\begin{aligned}
 U_{\text{int}}^{(I,II)} &= q^{(I)} \phi^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)}) + p_a^{(I)} \frac{\partial}{\partial R_a^{(I)}} \phi^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)}) & (2.75) \\
 &\quad + \frac{1}{3} \left\{ \underbrace{\int d^3r \rho^{(I)}(\mathbf{r}) \left[3 (r_a - R_a^{(1)}) (r_b - R_b^{(1)}) - \delta_{a,b} |\mathbf{r} - \mathbf{R}^{(I)}|^2 \right]}_{\equiv Q_{ab}^{(I)}} \right\} \\
 &\quad + \delta_{a,b} \int d^3r \rho^{(I)}(\mathbf{r}) |\mathbf{r} - \mathbf{R}^{(I)}|^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial R_a^{(I)}} \frac{\partial}{\partial R_b^{(I)}} \phi^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)}) + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

Das externe Potential genügt der Poisson-Gleichung

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi^{(II)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho^{(II)}(\mathbf{r}). \quad (2.76)$$

Es gilt für alle Orte \mathbf{r} , die entfernt von den Orten \mathbf{r}' mit $\rho^{(II)}(\mathbf{r}') \neq 0$ sind natürlich $\rho^{(II)}(\mathbf{r}) = 0$, also

$$\left[\delta_{a,b} \frac{\partial}{\partial r_a} \frac{\partial}{\partial r_b} \phi^{(II)}(\mathbf{r}) \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{R}^{(I)}} = \left[\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi^{(II)}(\mathbf{r}) \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{R}^{(I)}} = 0. \quad (2.77)$$

2.5 Multipole im äußeren Feld

Somit folgt das gesuchte Wechselwirkungspotential der beiden um $\mathbf{R}^{(I)}$ bzw. um $\mathbf{R}^{(II)}$ zentrierten Ladungswolken $\rho^{(I)}(\mathbf{r})$ bzw. $\rho^{(II)}(\mathbf{r})$ das Ergebnis

$$\begin{aligned}
 U_{\text{int}}^{(I,II)} & \quad (2.78) \\
 &= q^{(I)}\phi^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)}) + p_a^{(I)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial R_a^{(I)}}\phi^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)})}_{\equiv -E_a^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)})} + \frac{1}{6}Q_{ab}^{(I)} \frac{\partial}{\partial R_a^{(I)}} \frac{\partial}{\partial R_b^{(I)}} \phi^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)}) + \dots \\
 &= q^{(I)}\phi^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)}) - p_a^{(I)}E_a^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)}) - \frac{1}{6}Q_{ab}^{(I)} \frac{\partial}{\partial R_a^{(I)}} E_a^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)}) + \dots
 \end{aligned}$$

Elektrischer Dipol im äußeren Feld

Ein elektrischer Dipol \mathbf{p} im äußeren elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ hat demnach eine Wechselwirkungsenergie

$$\boxed{U(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})} \quad (2.79)$$

Der negative Gradient von U liefert dann die auf den Dipol wirkende Kraft im äußeren elektrischen Feld am Ort \mathbf{r} zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= -\nabla_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} [\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})] \quad (2.80) \\
 &= \mathbf{p} \wedge \underbrace{\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r})}_{\equiv 0} + (\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\
 &= (\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{E}(\mathbf{r}).
 \end{aligned}$$

Aus der Änderung der Energie bzgl. einer Rotation des Dipolmoments \mathbf{p} um eine am Ort \mathbf{r} positionierte Achse parallel zum Einheitsvektor \mathbf{n} gemäß $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = \mathcal{R}(\alpha, \mathbf{n})\mathbf{p}$ folgt das entsprechende Drehmoment (torque) bzgl. dieser Achse zu

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \wedge [(\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{E}(\mathbf{r})]. \quad (2.81)$$

Im *homogenen* äußeren Feld wirkt somit zwar keine Kraft auf den Dipol, aber es wirkt ein Drehmoment auf den Vektor \mathbf{p} . Dieses ist dann unabhängig von der Position \mathbf{r} der Drehachse!

2 Elektrostatik

Sei jetzt $\phi^{(II)}(\mathbf{r})$ das elektrische Potential am Ort \mathbf{r} , das von einem am Ort $\mathbf{R}^{(II)}$ befindlichen Dipol $\mathbf{p}^{(II)}$ erzeugt wird:

$$\phi^{(II)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}^{(II)} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}^{(II)})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}^{(II)}|^3}. \quad (2.82)$$

Am Ort \mathbf{r} ist das entsprechende elektrische Feld $\mathbf{E}^{(II)}(\mathbf{r})$ eines am Ort $\mathbf{R}^{(II)} = \mathbf{0}$ positionierten Dipols $\mathbf{p}^{(II)}$ dann

$$\mathbf{E}^{(II)}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}}\phi^{(II)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p}^{(II)} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}^{(II)}|\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^5}. \quad (2.83)$$

Dipol-Dipol-Wechselwirkung

Die Wechselwirkungsenergie von zwei elektrischen Dipolen $\mathbf{p}^{(I)}$ und $\mathbf{p}^{(II)}$ an zwei Orten $\mathbf{R}^{(I)}$ und $\mathbf{R}^{(II)}$ ergibt sich nach dem Gesagten zu

$$U = -\mathbf{p}^{(I)} \cdot \mathbf{E}^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)}) = \left[\mathbf{p}^{(I)} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\phi^{(II)}(\mathbf{r}) \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{R}^{(I)}}. \quad (2.84)$$

Einsetzen von (2.83) in (2.84) ergibt für die (elektrische) Dipol-Dipol-Wechselwirkungsenergie den Ausdruck

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{R}^{(I)} - \mathbf{R}^{(II)} \neq \mathbf{0} \\ U(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{p}^{(I)} \cdot \mathbf{p}^{(II)})|\mathbf{r}|^2 - 3[\mathbf{p}^{(I)} \cdot \mathbf{r}][\mathbf{p}^{(II)} \cdot \mathbf{r}]}{|\mathbf{r}|^5}. \end{aligned}} \quad (2.85)$$

2.6 Randwertprobleme der Potentialtheorie für ideale Leiter

Die Kraft, die ein Dipol $\mathbf{p}^{(II)}$ am Ort $\mathbf{R}^{(II)} = \mathbf{0}$ auf einen Dipol $\mathbf{p}^{(I)}$ am Ort $\mathbf{R}^{(I)} = \mathbf{r}$ ausübt ist dann

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^{(I,II)} &= (\mathbf{p}^{(I)} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{E}^{(II)}(\mathbf{r}) \\
 &= (\mathbf{p}^{(I)} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p}^{(II)} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}^{(II)}|\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^5} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{(\mathbf{p}^{(II)} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p}^{(I)} + (\mathbf{p}^{(I)} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p}^{(II)} + (\mathbf{p}^{(I)} \cdot \mathbf{p}^{(II)})\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^5} \right. \\
 &\quad \left. - 15 \frac{(\mathbf{p}^{(II)} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}^{(I)} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^7} \right].
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

Es hängt vom Abstandsvektor $\mathbf{r} = \mathbf{R}^{(I)} - \mathbf{R}^{(II)}$ und der Orientierung der beiden Dipole $\mathbf{p}^{(I)}$ und $\mathbf{p}^{(II)}$ ab, ob die Kraft zwischen zwei Dipolen anziehend oder abstoßend wirkt!

2.6 Randwertprobleme der Potentialtheorie für ideale Leiter

In den obigen Abschnitten haben wir die Poisson-Gleichung (2.8) für das elektrische Potential $\phi(\mathbf{r})$ mit der Randbedingung $\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{r}) = 0$ für eine um den Ort $\mathbf{R}^{(s)}$ zentrierte vorgegebenen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ in geschlossener Form als Faltungsintegral von $\rho(\mathbf{r})$ mit dem Coulomb-Potential $\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|}$ gelöst, siehe (2.9).

Ein neuer Typ von Fragestellungen betrifft das Problem, die Poisson-Gleichung in Gegenwart eines oder mehrerer idealer (metallischer) Leiter zu lösen. Dabei nehmen die Leiter jeweils ein Gebiet $\Omega^{(j)}$ mit Volumen $|\Omega^{(j)}|$ ein, wobei o.B.d.A. die Gebiete $\Omega^{(j)} \subset \mathbb{D}$ disjunkt sind, $\Omega^{(j)} \cap \Omega^{(j')} = \emptyset$ für $j \neq j'$ und $j = 1, 2, \dots, N$. Zusätzlich betrachten wir optional eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ im Außengebiet

$$\mathbb{D}_A = \mathbb{D} \setminus \bigcup_{j=1}^N \Omega^{(j)} \tag{2.87}$$

der betrachteten Leiter. Wir diskutieren zuerst den Fall, dass das Gebiet \mathbb{D}_A sich *nicht* ins Unendliche erstreckt, siehe Abbildung 2.2. Bekanntlich ist im *Inneren*

2 Elektrostatik

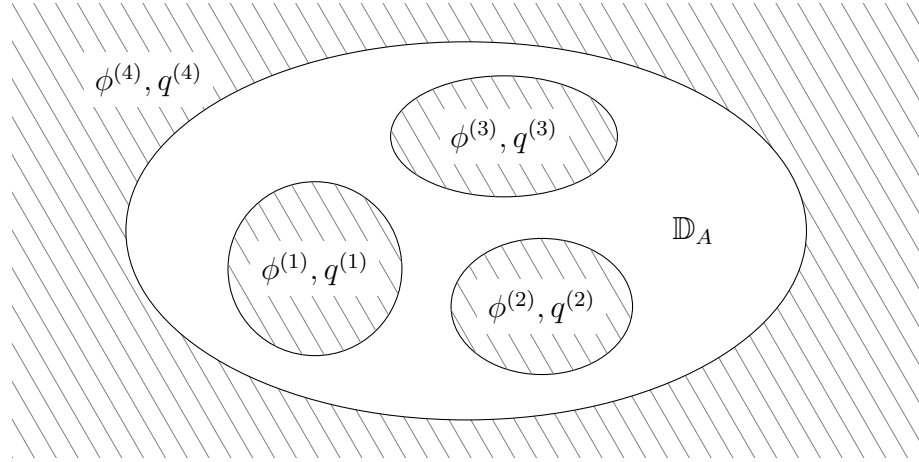


Abbildung 2.2: Eine spezielle Randwertaufgabe, bei der die Potentiale $\phi^{(n)}$ und die Ladungen $q^{(n)}$ auf den (hier schraffierten) Leitern $n = 1, 2, 3, 4$, vorgegeben sind und das Außengebiet \mathbb{D}_A sich nicht bis ins Unendliche erstreckt. Zu beachten ist dabei, dass sich die Ladungen auf den Randflächen der Leiter befinden.

eines *idealen* Leiters die elektrische Feldstärke im *elektrostatistischen Gleichgewicht* gleich Null

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \big|_{\mathbf{r} \in \Omega^{(j)}} = \mathbf{0}. \quad (2.88)$$

Also gilt dort auch

$$\phi(\mathbf{r}) \big|_{\mathbf{r} \in \Omega^{(j)}} = \phi^{(j)} = \text{const} \quad (2.89)$$

und ebenfalls

$$[\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r})]_{\mathbf{r} \in \Omega^{(j)}} = 0 = \left[\frac{1}{\varepsilon_0} \rho^{(j)}(\mathbf{r}) \right]_{\mathbf{r} \in \Omega^{(j)}}, \quad (2.90)$$

d.h. die Ladungsdichte $\rho^{(j)}(\mathbf{r})$ im *Innengebiet* eines idealen Leiters ist ebenfalls gleich Null. Die Oberfläche $\partial\Omega^{(j)}$ eines idealen Leiters ist somit eine *Äquipotentialfläche*:

$$\phi(\mathbf{r}') \big|_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(j)}} = \phi^{(j)}. \quad (2.91)$$

Wenn außen, d.h. für $\mathbf{r} \in \mathbb{D}_A$, ein von Null verschiedenes elektrostatisches Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ existiert, so steht es an jedem Ort $\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(j)}$ senkrecht zur Oberfläche $\partial\Omega^{(j)}$ des Leiters:

$$[\mathbf{E}(\mathbf{r}') \wedge \mathbf{n}'_{\partial\Omega^{(j)}}]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(j)}} = \mathbf{0}. \quad (2.92)$$

2.6 Randwertprobleme der Potentialtheorie für ideale Leiter

Hier bezeichnet $\mathbf{n}'_{\partial\Omega^{(j)}}$ den nach außen orientierte Normalenvektor der Oberfläche $\partial\Omega^{(j)}$ des Gebietes $\Omega^{(j)}$ am Ort $\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(j)}$.

Wenn überhaupt, so sind frei bewegliche Ladungen nur auf der Oberfläche $\partial\Omega^{(j)}$ des betreffenden Leiters anzutreffen. Die *Flächenladungsdichte* auf der Oberfläche $\partial\Omega^{(j)}$ bezeichnen wir mit $\omega^{(j)}(\mathbf{r})$. Ist $\mathbf{n}'_{\partial\Omega^{(j)}}$ die vom Gebiet $\Omega^{(j)}$ nach *außen* orientierte Flächennormale der Oberfläche $\partial\Omega_{M^{(j)}}$ am Ort \mathbf{r}' der Oberfläche, so gilt, wenn man sich dem Gebiet des Leiters von außen nähert:

$$[\mathbf{n}'_{\partial\Omega^{(j)}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(j)}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \omega^{(j)}(\mathbf{r}'). \quad (2.93)$$

Diese Relation ist eine Konsequenz des bekannten Pillendosenarguments (Satz von Gauß). Die Gesamtladung $q^{(j)}$ auf der Oberfläche $\partial\Omega^{(j)}$ ist dann

$$q^{(j)} = \int_{\partial\Omega^{(j)}} d^2r' \omega^{(j)}(\mathbf{r}'). \quad (2.94)$$

Wir bestimmen jetzt das elektrische Potential $\phi(\mathbf{r})$ im Außengebiet \mathbb{D}_A einer vorgegebenen Anordnung von N idealen Leitern $M^{(j)}$ für den Fall, dass die Potentialwerte $\phi^{(j)}$ auf den Oberflächen der jeweiligen Leiter auf $\partial\Omega^{(j)}$ vorgegebene Konstanten sind

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \\ [\phi(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(j)}} &= \phi^{(j)}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Ist $\rho(\mathbf{r}) \neq 0$, so existiert ein elektrisches Feld. Ist $\rho(\mathbf{r}) \equiv 0$ und ist $\phi^{(j)} = \phi^{(l)} = \phi_0$ für alle $j, l \in \{1, 2, \dots, N\}$ gewählt, so existiert kein elektrisches Feld, da $\phi(\mathbf{r}) = \phi_0$ die gestellte Aufgabe löst. Ist $\rho(\mathbf{r}) \equiv 0$, jedoch $\phi^{(j)} \neq \phi^{(l)}$ für mindestens ein Paar (j, l) , so gibt es einen Gradienten des Potentials, d.h. es existiert ein elektrisches Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

Da im Inneren jedes Leiters das elektrische Feld gleich Null ist, $\mathbf{E}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \Omega^{(j)}} = \mathbf{0}$ für $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, ist die betreffende elektrostatische Feldenergie \mathcal{E}_{pot} der betrachteten Anordnung von Leitern gegeben als Integral der Energiedichte $u_E(\mathbf{r})$

2 Elektrostatik

über den Außenraum \mathbb{D}_A aller Leiter:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{\text{pot}} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{D}_A} d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) & (2.96) \\
 &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{D}_A} d^3r \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\
 &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{D}_A} d^3r \operatorname{div} [\phi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})] + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{D}_A} d^3r \phi(\mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\
 &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\partial \mathbb{D}_A} d^2r' \mathbf{n}'_{\partial \mathbb{D}_A} \cdot [\phi(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}')] + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}_A} d^3r \phi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}).
 \end{aligned}$$

Es gilt für die nach *außen* orientierte Flächennormale $\mathbf{n}_{\partial \mathbb{D}_A}$ auf dem Rand $\partial \mathbb{D}_A$ des Gebietes $\mathbb{D}_A = \mathbb{D} \setminus \cup_{j=1}^N \Omega^{(j)}$ die Relation

$$[\mathbf{n}'_{\partial \mathbb{D}_A}]_{\mathbf{r}' \in \partial \Omega^{(j)}} = [-\mathbf{n}'_{\partial \Omega^{(j)}}]_{\mathbf{r}' \in \partial \Omega^{(j)}}. \quad (2.97)$$

Dann schreiben wir

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = -\frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{j=1}^N \int_{\partial \Omega^{(j)}} d^2r' (-\mathbf{n}'_{\partial \Omega^{(j)}}) \cdot [\phi(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}')] + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}_A} d^3r \phi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}). \quad (2.98)$$

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{n}'_{\partial \Omega^{(j)}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial \Omega^{(j)}} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \omega^{(j)}(\mathbf{r}') & (2.99) \\
 [\phi(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial \Omega^{(j)}} &= \phi^{(j)}.
 \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{\text{pot}} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \phi^{(j)} \int_{\partial \Omega^{(j)}} d^2r' \omega^{(j)}(\mathbf{r}') + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}_A} d^3r \phi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) & (2.100) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \phi^{(j)} q^{(j)} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}_A} d^3r \phi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}).
 \end{aligned}$$

Befinden sich zwischen den Leitern gar keine Ladungen, so ist $\rho(\mathbf{r}) \equiv 0$. In dem Fall ist die Energie der betrachteten Anordnung von N Leitern allein durch die Potentialwerte $\phi^{(j)}$ und die Ladungen $q^{(j)}$ auf den betreffenden Leitern gegeben

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \phi^{(j)} q^{(j)}}. \quad (2.101)$$

2.7 Begriff der Kapazität

Zwischen der Ladung $q^{(j)}$ auf der Oberfläche $\partial\Omega^{(j)}$ und den Potentialwerten $\phi^{(l)}$ auf allen Leiteroberflächen $\partial\Omega^{(l)}$ besteht ein linearer Zusammenhang. Dies ist folgendermaßen einzusehen. Sei $\chi^{(l)}(\mathbf{r})$ jeweils für $l = 1, 2, \dots, N$ Lösung der speziellen Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}}^2 \chi^{(l)}(\mathbf{r}) &= 0 \\ [\chi^{(l)}(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(j)}} &= \phi^{(0)} \delta_{l,j}\end{aligned}\quad (2.102)$$

zum Referenzpotential $\phi^{(0)}$, das für alle $\chi^{(l)}(\mathbf{r})$ gleich gewählt sei. Dann gilt, weil die gestellte Randwertaufgabe (2.95) ein lineares Problem darstellt, das Superpositionsprinzip. Folglich ist die Linearkombination

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^N \frac{\phi^{(l)}}{\phi^{(0)}} \chi^{(l)}(\mathbf{r}) \quad (2.103)$$

Lösung des Randwertproblems (2.95).

Die (influenzierte) Ladung $q^{(j)}$ auf der Oberfläche $\partial\Omega^{(j)}$ des Leiters $M^{(j)}$ folgt dann zu

$$\begin{aligned}j &= 1, 2, \dots, N \\ q^{(j)} &= \int_{\partial\Omega^{(j)}} d^2 r' \omega^{(j)}(\mathbf{r}') \\ &= \varepsilon_0 \int_{\partial\Omega^{(j)}} d^2 r' \mathbf{n}'_{\partial\Omega^{(j)}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \\ &= \varepsilon_0 \int_{\partial\Omega^{(j)}} d^2 r' \mathbf{n}'_{\partial\Omega^{(j)}} \cdot [-\nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}')] \\ &= \varepsilon_0 \int_{\partial\Omega^{(j)}} d^2 r' \mathbf{n}'_{\partial\Omega^{(j)}} \cdot \sum_{l=1}^N \frac{\phi^{(l)}}{\phi^{(0)}} [-\nabla_{\mathbf{r}'} \chi^{(l)}(\mathbf{r}')] \\ &= \sum_{l=1}^N \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{\phi^{(0)}} \int_{\partial\Omega^{(j)}} d^2 r' \mathbf{n}'_{\partial\Omega^{(j)}} \cdot [-\nabla_{\mathbf{r}'} \chi^{(l)}(\mathbf{r}')] \phi^{(l)}}_{\equiv C_{j,l}}.\end{aligned}\quad (2.104)$$

Also

$$\boxed{q^{(j)} = \sum_{l=1}^N C_{j,l} \phi^{(l)}} \quad (2.105)$$

2 Elektrostatik

Die Koeffizienten $C_{j,l}$ bilden die sog. *Kapazitätsmatrix* der betrachteten Anordnung von metallischen Leitern im Gebiet \mathbb{D} :

$$C_{j,l} = \frac{\varepsilon_0}{\phi^{(0)}} \int_{\partial\Omega^{(j)}} d^2r' \mathbf{n}'_{\partial\Omega^{(j)}} \cdot [-\nabla_{\mathbf{r}'} \chi^{(l)}(\mathbf{r}')] \quad (2.106)$$

$$j, l \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Diese ist (abgesehen von der Wahl des Referenzpotentials $\phi^{(0)}$) allein von der Geometrie der betrachteten Anordnung von Leitern abhängig.

Es folgt dann durch Einsetzen von (2.104) in die Relation (2.101) für die zugeordnete Feldenergie der nützliche Ausdruck

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \phi^{(j)} C_{j,l} \phi^{(l)}. \quad (2.107)$$

Da wir gefordert hatten, dass $\rho(\mathbf{r}) \equiv 0$ gelten soll, ist die Summe der auf den Leitern $M^{(j)}$ influenzierten Ladungen $q^{(j)}$ gleich Null:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N q^{(j)} &= \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega^{(j)}} d^2r' \mathbf{n}'_{\partial\Omega^{(j)}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \quad (2.108) \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega^{(j)}} d^2r' \mathbf{n}'_{\partial\Omega^{(j)}} \cdot [-\nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}')] \\ &= - \int_{\partial\mathbb{D}_A} d^2r' \mathbf{n}'_{\partial\mathbb{D}_A} \cdot [-\nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}')] \\ &= - \int_{\mathbb{D}_A} d^3r \underbrace{\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r})}_{\equiv 0, \text{ da } \rho(\mathbf{r}) \equiv 0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Als Ausdruck der Ladungserhaltung verschwindet demnach die Zeilensumme für jede Spalte $l = 1, 2, \dots, N$ der Kapazitätsmatrix

$$0 = \sum_{j=1}^N q^{(j)} = \sum_{j,l=1}^N C_{j,l} \phi^{(l)} = \sum_{l=1}^N \left(\sum_{j=1}^N C_{j,l} \right) \phi^{(l)}. \quad (2.109)$$

Folglich ist

$$\sum_{j=1}^N C_{j,l} = 0. \quad (2.110)$$

Physikalische Messwerte wie Ladung oder Feldstärke dürfen sich nicht ändern, wenn *alle* Potentialwerte $\phi^{(l)}$ um den *gleichen* konstanten Wert ϕ_C geändert werden

$$\begin{aligned} l &= 1, 2, \dots, N \\ \phi^{(l)} &\rightarrow \phi^{(l)} + \phi_C. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Also gilt notwendig

$$q^{(j)} = \sum_{l=1}^N C_{j,l} \phi^{(l)} = \sum_{l=1}^N C_{j,l} [\phi^{(l)} + \phi_C] = \sum_{l=1}^N C_{j,l} \phi^{(l)} + \left(\sum_{l=1}^N C_{j,l} \right) \phi_C. \quad (2.112)$$

Als Ausdruck der Eichinvarianz verschwindet demnach auch die Spaltensumme für jede Zeile $j = 1, 2, \dots, N$ der Kapazitätsmatrix

$$\sum_{l=1}^N C_{j,l} = 0. \quad (2.113)$$

Aus (2.110) bzw. (2.113) folgt, dass die Kapazitätsmatrix $C_{j,l}$ der betrachteten Anordnung von N Leitern *nicht invertierbar* ist!

Erdung

Da die inverse Matrix der Kapazitätsmatrix, siehe (2.113) und (2.110), nicht existiert, ist die Berechnung der Potentiale $\phi^{(l)}$ aus vorgegebenen Ladungen $q^{(j)}$ nicht eindeutig möglich. Die vorgestellten Überlegungen bleiben gültig, wenn man einen zusätzlichen Leiter $\Omega^{(N+1)}$ mit Oberfläche $\partial\Omega^{(N+1)}$ und Ladung $q^{(N+1)}$ positioniert. Nach dem Gesagten gilt $\sum_{j=1}^{N+1} q^{(j)} = 0$, oder

$$q^{(N+1)} = - \sum_{j=1}^N q^{(j)}. \quad (2.114)$$

Auch kann man o.B.d.A. verlangen, dass gilt

$$[\phi(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(N+1)}} = \phi^{(N+1)} = 0. \quad (2.115)$$

In dem Fall wird die Kapazitätsmatrix $[C_{j,l}]_{1 \leq j,l \leq N+1}$ der Dimension $(N+1) \times (N+1)$ der betrachteten Anordnung von Leitern durch Streichen der entsprechenden $(N+1)$ -ten Zeile und $(N+1)$ -ten Spalte auf eine $N \times N$ -Untermatrix

2 Elektrostatik

$[C_{j,l}]_{1 \leq j,l \leq N}$ der ursprünglichen Kapazitätsmatrix reduziert. Diese Untermatrix ist dann invertierbar. Die Herstellung einer leitenden Verbindung zwischen so einem Leiter $\Omega^{(N+1)}$ mit dem elektrischen Potential des Erdbodens bezeichnet man auch als „Erdung“.

Symmetrie der Kapazitätsmatrix

Die Relation (2.104) lieferte die Influenzladungen auf der Leiteroberfläche $\partial\Omega^{(j)}$ zu

$$q^{(j)} = \sum_{l=1}^N C_{j,l} \phi^{(l)}. \quad (2.116)$$

Wir betrachten nun die mit der *transponierten* Kapazitätsmatrix gebildete Summe

$$\sum_{l=1}^N C_{l,j} \phi^{(l)} = \sum_{l=1}^N \frac{\varepsilon_0}{\phi^{(0)}} \int_{\partial\Omega^{(l)}} d^2 r' \mathbf{n}'_{\partial\Omega^{(l)}} \cdot \left[-\nabla_{\mathbf{r}'} \chi^{(j)}(\mathbf{r}') \right] \phi^{(l)} \quad (2.117)$$

und verwenden $\phi^{(l)} = [\phi(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(l)}}$, also

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N C_{l,j} \phi^{(l)} &= \sum_{l=1}^N \frac{\varepsilon_0}{\phi^{(0)}} \int_{\partial\Omega^{(l)}} d^2 r' (-\mathbf{n}'_{\partial\Omega^{(l)}}) \cdot \left[\phi(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \chi^{(j)}(\mathbf{r}') \right] \quad (2.118) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{\phi^{(0)}} \int_{\partial\mathbb{D}_A} d^2 r' \mathbf{n}'_{\partial\mathbb{D}_A} \cdot \phi(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \chi^{(j)}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{\varepsilon_0}{\phi^{(0)}} \int_{\mathbb{D}_A} d^3 r' \operatorname{div} \left[\phi(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \chi^{(j)}(\mathbf{r}') \right] \\ &= \frac{\varepsilon_0}{\phi^{(0)}} \left[\int_{\mathbb{D}_A} d^3 r' \nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \chi^{(j)}(\mathbf{r}') + \int_{\mathbb{D}_A} d^3 r' \phi(\mathbf{r}') \underbrace{\nabla_{\mathbf{r}'}^2 \chi^{(j)}(\mathbf{r}')}_{\equiv 0} \right] \\ &= \frac{\varepsilon_0}{\phi^{(0)}} \int_{\mathbb{D}_A} d^3 r' [\nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}')] \cdot [\nabla_{\mathbf{r}'} \chi^{(j)}(\mathbf{r}')] \\ &= \frac{\varepsilon_0}{\phi^{(0)}} \left[\int_{\mathbb{D}_A} d^3 r' \operatorname{div} \left[\chi^{(j)}(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}') \right] - \int_{\mathbb{D}_A} d^3 r' \chi^{(j)}(\mathbf{r}') \underbrace{\nabla_{\mathbf{r}'}^2 \phi(\mathbf{r}')}_{=0} \right] \\ &= \frac{\varepsilon_0}{\phi^{(0)}} \int_{\partial\mathbb{D}_A} d^2 r' \mathbf{n}'_{\partial\mathbb{D}_A} \cdot \left[\chi^{(j)}(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}') \right] \\ &= \sum_{l=1}^N \frac{\varepsilon_0}{\phi^{(0)}} \int_{\partial\Omega^{(l)}} d^2 r' (-\mathbf{n}'_{\partial\Omega^{(l)}}) \cdot \left[\chi^{(j)}(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}') \right]. \end{aligned}$$

Die einzelnen Teilschritte sind uns vertraut aus zuvor angestellten ähnlichen Überlegungen. Wir beachten nun gemäß (2.102) die Eigenschaft

$$\left[\chi^{(j)}(\mathbf{r}') \right]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(l)}} = \phi^{(0)} \delta_{l,j}. \quad (2.119)$$

Dann folgt tatsächlich

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N C_{l,j} \phi^{(l)} &= \sum_{l=1}^N \frac{\varepsilon_0}{\phi^{(0)}} \int_{\partial\Omega^{(l)}} d^2 r' (-\mathbf{n}'_{\partial\Omega^{(l)}}) \cdot \left[\phi^{(0)} \delta_{l,j} \nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}') \right] \\ &= \varepsilon_0 \int_{\partial\Omega^{(j)}} d^2 r' \mathbf{n}'_{\partial\Omega^{(j)}} \cdot [-\nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}')] \\ &= \varepsilon_0 \int_{\partial\Omega^{(j)}} d^2 r' \mathbf{n}'_{\partial\Omega^{(j)}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \\ &= \varepsilon_0 \int_{\partial\Omega^{(j)}} d^2 r' \omega^{(j)}(\mathbf{r}') \\ &= q^{(j)}. \end{aligned}$$

Nach dem Gesagten ist

$$0 = q^{(j)} - q^{(j)} = \sum_{l=1}^N \phi^{(l)} C_{l,j} - \sum_{l=1}^N C_{j,l} \phi^{(l)} = \sum_{l=1}^N (C_{l,j} - C_{j,l}) \phi^{(l)}.$$

Da die Potentialwerte $\phi^{(l)}$ für $l = 1, 2, \dots, N$ auf den Oberflächen $\partial\Omega^{(l)}$ beliebig wählbar waren, gilt notwendig

$$\begin{aligned} C_{l,j} &= C_{j,l} \\ j, l &\in \{1, 2, \dots, N\}, \end{aligned} \quad (2.120)$$

d.h. die Kapazitätsmatrix ist *symmetrisch*¹.

Kugelkondensator

Wir betrachten eine leitende Hohlkugel mit Radius R_2 mit vorgegebenem Potential $[\phi(\mathbf{r})]_{|\mathbf{r}|=R_2} = \phi^{(2)}$, um deren Mittelpunkt eine leitende Vollkugel mit Radius $R_1 <$

¹Ein Blick auf (2.96) zeigt, dass $\mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \phi^{(j)} C_{j,l} \phi^{(l)} \geq 0$ für beliebig vorgegebene Potentialwerte $\phi^{(j)}$ gilt. Somit ist $C_{j,l}$ eine positiv semidefinite Matrix.

2 Elektrostatik

R_2 und vorgegebenem Potential $[\phi(\mathbf{r})]_{|\mathbf{r}|=R_1} = \phi^{(1)}$ positioniert ist. Zur Lösung der Randwertaufgabe (2.95) im Gebiet zwischen den Kugeloberflächen machen wir den Ansatz

$$R_1 < r < R_2 \quad (2.121)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q^{(1)}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{1}{R_1} \right) + \phi^{(1)}.$$

Offensichtlich gilt

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}) = 0$$

$$[\phi(\mathbf{r})]_{|\mathbf{r}|=R_1} = \phi^{(1)}.$$

Der Wert der Influenzladung $q^{(1)}$ folgt dann aus der Forderung

$$[\phi(\mathbf{r})]_{|\mathbf{r}|=R_2} \stackrel{!}{=} \phi^{(2)}, \quad (2.122)$$

d.h.

$$\frac{q^{(1)}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + \phi^{(1)} = \phi^{(2)}. \quad (2.123)$$

Aufgelöst nach der Unbekannten $q^{(1)}$ gibt das

$$q^{(1)} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\phi^{(1)} - \phi^{(2)}}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}. \quad (2.124)$$

Die Flächenladungsdichte $\omega^{(j)}$ ist auf beiden Kugeloberflächen $|\mathbf{r}| = R_j$ durch die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla_r \phi(\mathbf{r}) = \frac{q^{(1)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (2.125)$$

gegeben, wobei darauf zu achten ist, dass die Flächennormale immer aus dem Metall nach außen gerichtet ist, so dass im vorliegenden Fall die Flächennormalen der inneren Kugel nach außen und diejenige der äußeren Hohlkugel nach innen orientiert ist:

$$\omega^{(1)} = \epsilon_0 [\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})]_{|\mathbf{r}|=R_1} = \frac{1}{4\pi} \frac{q^{(1)}}{R_1^2} = \frac{\epsilon_0}{R_1^2} \frac{\phi^{(1)} - \phi^{(2)}}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \quad (2.126)$$

$$\omega^{(2)} = \epsilon_0 [-\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})]_{|\mathbf{r}|=R_2} = -\frac{1}{4\pi} \frac{q^{(1)}}{R_2^2} = \frac{\epsilon_0}{R_2^2} \frac{-\phi^{(1)} + \phi^{(2)}}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}.$$

Nach dem Gesagten folgt für die auf den betreffenden Kugeloberflächen befindliche Gesamtladung

$$\begin{aligned}q^{(1)} &= \omega^{(1)} \times 4\pi R_1^2 = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} (\phi^{(1)} - \phi^{(2)}) \\q^{(2)} &= \omega^{(2)} \times 4\pi R_2^2 = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} (-\phi^{(1)} + \phi^{(2)}).\end{aligned}\quad (2.127)$$

Erwartungsgemäß ist die Summe der influenzierten Ladungen $q^{(j)}$ gleich Null:

$$q^{(1)} + q^{(2)} = 0. \quad (2.128)$$

Schreiben wir die Koeffizienten in (2.127) als (2×2) -Matrix,

$$\begin{bmatrix} q^{(1)} \\ q^{(2)} \end{bmatrix} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{(1)} \\ \phi^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (2.129)$$

so identifizieren wir die gesuchte Kapazitätsmatrix für den Kugelkondensator zu

$$\begin{aligned}C_{j,l} &= 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{j,l} \\j, l &\in \{1, 2\}.\end{aligned}\quad (2.130)$$

Grenzfälle

Für $R_2 \rightarrow \infty$ folgt die Kapazität einer Metallkugel mit Radius $R_1 = R$ zu

$$\boxed{C = 4\pi\epsilon_0 R.} \quad (2.131)$$

Für $R_2 - R_1 = d > 0$ und $R_1 \gg d$ folgt mit der Fläche $|\mathcal{A}| = 4\pi R_1^2$ die Kapazität eines Plattenkondensators zu

$$\boxed{C = \epsilon_0 \frac{|\mathcal{A}|}{d}.} \quad (2.132)$$

2.8 Satz vom Mittelwert für harmonische Funktionen

Sei $\phi(\mathbf{r})$ Lösung der Laplace-Gleichung in einem Gebiet \mathbb{D}_h , d.h.

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}) &= 0. \\ \mathbf{r} &\in \mathbb{D}_h \end{aligned} \quad (2.133)$$

In dem Fall ist $\phi(\mathbf{r})$ eine sog. *harmonische* Funktion. Für harmonische Funktionen gilt der Satz vom Randmaximum bzw. Randminimum, d.h. das Extremum von $\phi(\mathbf{r})$ wird auf dem Rand $\partial\mathbb{D}_h$ des Gebiets \mathbb{D}_h angenommen. Diese Eigenschaft beruht auf dem Satz vom Mittelwert, den wir jetzt beweisen wollen.

Wir betrachten einen Punkt $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{D}_h$ und denken uns eine um \mathbf{r}_0 zentrierte Kugel $K(\mathbf{r}_0, R)$ mit Radius R und Oberfläche $\partial K(\mathbf{r}_0, R)$

$$\begin{aligned} K(\mathbf{r}_0, R) &= \{ \mathbf{r} \in \mathbb{D}_h \mid |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < R \} \\ \partial K(\mathbf{r}_0, R) &= \{ \mathbf{r} \in \mathbb{D}_h \mid |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = R \}. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Dabei sei der Radius R so gewählt ist, dass gilt $K(\mathbf{r}_0, R) \subset \mathbb{D}_h$ und $\partial K(\mathbf{r}_0, R) \cap \partial\mathbb{D}_h = \emptyset$, d.h. die Kugelschar $K(\mathbf{r}_0, R')$ mit $0 < R' \leq R$ liegt ganz im Inneren des Gebietes \mathbb{D}_h . Dann gilt, da $\phi(\mathbf{r})$ Lösung der Laplace-Gleichung ist:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{K(\mathbf{r}_0, R)} d^3r \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}) \\ &= \int_{K(\mathbf{r}_0, R)} d^3r \operatorname{div} [\nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r})] \\ &= \int_{\partial K(\mathbf{r}_0, R)} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (2.135)$$

In der letzten Zeile wurde wieder der Satz von Gauß verwendet. Gehen wir zu Kugelkoordinaten über:

$$\begin{aligned} r'_x &= r_{0,x} + s \cos \alpha \sin \vartheta & 0 < s \leq R \\ r'_y &= r_{0,y} + s \sin \alpha \sin \vartheta & 0 \leq \alpha < 2\pi \\ r'_z &= r_{0,z} + s \cos \vartheta & 0 \leq \vartheta \leq \pi \end{aligned} \quad (2.136)$$

2.8 Satz vom Mittelwert für harmonische Funktionen

so schreiben wir für $\mathbf{r}' \in \partial K(\mathbf{r}_0, R)$:

$$\begin{aligned} d^2 r' &= d\Omega \times R^2 & (2.137) \\ d\Omega(\alpha, \vartheta) &= d\alpha \times d\vartheta \sin \vartheta \\ [\phi(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial K(\mathbf{r}_0, R)} &= \phi(r_{0,x} + R \cos \alpha \sin \vartheta, r_{0,y} + R \sin \alpha \sin \vartheta, r_{0,z} + R \cos \vartheta) \\ &\equiv \Phi(R, \alpha, \vartheta) \\ [\mathbf{n}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial K(\mathbf{r}_0, R)} &= \frac{\partial}{\partial R} \Phi(R, \alpha, \vartheta). \end{aligned}$$

Also folgt

$$0 = R^2 \int d\Omega(\alpha, \vartheta) \frac{\partial}{\partial R} \Phi(R, \alpha, \vartheta). \quad (2.138)$$

Da aber $R > 0$ ist, gilt notwendig

$$0 = \int d\Omega(\alpha, \vartheta) \frac{\partial}{\partial R} \Phi(R, \alpha, \vartheta). \quad (2.139)$$

Diese Beziehung ist gültig für alle Kugelradien $R' < R$, d.h. es gilt auch

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^R dR' \int d\Omega(\alpha, \vartheta) \frac{\partial}{\partial R'} \Phi(R', \alpha, \vartheta) & (2.140) \\ &= \int d\Omega(\alpha, \vartheta) \int_0^R dR' \frac{\partial}{\partial R'} \Phi(R', \alpha, \vartheta) \\ &= \int d\Omega(\alpha, \vartheta) [\Phi(R, \alpha, \vartheta) - \Phi(R=0, \alpha, \vartheta)] \\ &= \int d\Omega(\alpha, \vartheta) [\phi(\mathbf{r}_0 + \mathbf{s})]_{s=R} - 4\pi \phi(\mathbf{r}_0). \end{aligned}$$

Die angestellte Überlegung führt auf den *Satz vom Mittelwert* für harmonische Funktionen:

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega(\alpha, \vartheta) [\phi(\mathbf{r}_0 + \mathbf{s})]_{|\mathbf{s}|=R} = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial K(\mathbf{r}_0, R)} d^2 r' \phi(\mathbf{r}').} \quad (2.141)$$

Der Wert einer harmonischen Funktion $\phi(\mathbf{r}_0)$ am Ort $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{D}_h$ ist gleich dem Mittelwert dieser Funktion über die Oberfläche $\partial K(\mathbf{r}_0, R)$ einer am Ort \mathbf{r}_0 zentrierten

2 Elektrostatik

Kugel mit Radius R , u.z. für alle Radien $R > 0$ mit der Eigenschaft $K(\mathbf{r}_0, R) \subset \mathbb{D}_h$ und $\partial K(\mathbf{r}_M, R) \cap \partial \mathbb{D}_h = \emptyset$.

Angenommen im *Inneren* des Gebietes \mathbb{D}_h hätte das Potential $\phi(\mathbf{r})$ an einem Ort $\mathbf{r}_M \in \mathbb{D}_h$ mit $\mathbf{r}_M \notin \partial \mathbb{D}_h$ ein Minimum. Dann existiert eine Kugel $K(\mathbf{r}_M, R)$ mit Radius R und Mittelpunkt \mathbf{r}_M , so dass auf der Kugelschale $\partial K(\mathbf{r}_M, R)$ gilt $\phi(\mathbf{r}_M) < \phi(\mathbf{r})$. Das aber würde bedeuten

$$\phi(\mathbf{r}_M) < \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial K(\mathbf{r}_M, R)} d^2 r' \phi(\mathbf{r}'), \quad (2.142)$$

was ein Widerspruch zur Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen ist. Genau so führt die Annahme, im *Inneren* des Gebietes \mathbb{D}_h hätte das Potential $\phi(\mathbf{r})$ an einem Ort $\mathbf{r}_M \in \mathbb{D}_h$ mit $\mathbf{r}_M \notin \partial \mathbb{D}_h$ ein Maximum zum Widerspruch. Folglich kann sich die Position der Orte \mathbf{r}_M , an denen eine harmonische Funktion $\phi(\mathbf{r})$ ein Maximum oder ein Minimum besitzt, nie im Inneren des Gebietes \mathbb{D}_h befinden.

Gegeben sei eine beliebig geformte Ladungswolke $\rho(\mathbf{r})$ mit $\rho(\mathbf{r}) \neq 0$ für $\mathbf{r} \in \Omega$ und eine Anordnung von N idealen Leitern in einem Gebiet \mathbb{D} . Schließen wir die Gebiete $\Omega^{(j)}$ der Leiter aus, in deren Innerem ja die elektrische Feldstärke identisch Null ist, so entsteht das Gebiet $\mathbb{D}_A = \mathbb{D} \setminus \bigcup_{j=1}^N \Omega^{(j)}$. Schließen wir zusätzlich das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{D}_A$ aus, so entsteht ein Gebiet $\mathbb{D}_h = \mathbb{D}_A \setminus \Omega$, in dem das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$ eine harmonische Funktion ist, d.h. $\phi(\mathbf{r})$ ist Lösung der Laplace-Gleichung für $\mathbf{r} \in \mathbb{D}_h$.

2.9 Theorem über Maxima und Minima der elektrostatischen Feldstärke

Das Theorem von Earnshaw besagt, dass eine Testladung $\pm |q|$ im Inneren des Gebietes \mathbb{D}_h nirgends eine *stabile* Gleichgewichtsposition einnehmen kann, da die potentielle Energie des Teilchens zu $V(\mathbf{r}) = \pm |q| \phi(\mathbf{r})$ gegeben ist. Da das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$ für $\mathbf{r} \in \mathbb{D}_h$ eine harmonische Funktion ist, gilt die Mittelwerteigenschaft. Folglich liegt die Position des Minimums der potentiellen Energie $V(\mathbf{r})$ nie im Inneren des Gebietes \mathbb{D}_h . Es ist also gar nicht so einfach, ein geladenes Teilchen einzufangen!

Gemäß dem Theorem von Earnshaw kann man ein *geladenes* Teilchen mittels elektrostatischer Felder in einem Gebiet \mathbb{D}_h nicht einfangen. Vielleicht kann man

2.9 Theorem über Maxima und Minima der elektrostatischen Feldstärke

ein ladungsneutrales Teilchen, das ein elektrisches Dipolmoment \mathbf{p} besitzt, einfangen?

Sei $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r})$ das elektrostatische Feld im Gebiet \mathbb{D}_h . Wir definieren die *Feldstärke* an einem Ort \mathbf{r} als den Betrag

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r})| = \sqrt{[E_x(\mathbf{r})]^2 + [E_y(\mathbf{r})]^2 + [E_z(\mathbf{r})]^2} \quad (2.143)$$

des Feldvektors $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Angenommen, an einer Stelle $\mathbf{r}^{(M)} \in \mathbb{D}_h$ befindet sich ein Maximum der Feldstärke. Dies bedeutet, innerhalb einer Kugel $K(\mathbf{r}^{(M)}, R) \subset \mathbb{D}_h$ mit (genügend kleinem) Radius R und Mittelpunkt $\mathbf{r}^{(M)}$ gilt

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(\mathbf{r}^{(M)})| &> |\mathbf{E}(\mathbf{r})|, \\ \mathbf{r} &\in K(\mathbf{r}^{(M)}, R), \\ \mathbf{r} &\neq \mathbf{r}^{(M)}. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Wir schreiben jetzt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}^{(M)}) + \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)}), \\ \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}^{(M)}; \mathbf{r}^{(M)}) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Es steht uns frei, ein kartesisches Koordinatensystem so zu wählen, dass die Richtung des Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r}^{(M)})$ am Ort $\mathbf{r}^{(M)}$ *parallel* (nicht *anti-parallel*) zum Einheitsvektor \mathbf{e}_z des Koordinatensystems orientiert ist

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}^{(M)}) &= E_z(\mathbf{r}^{(M)})\mathbf{e}_z, \\ E_z(\mathbf{r}^{(M)}) &> 0. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Über die Richtung des Feldvektors $\delta\mathbf{E}(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)})$ ist natürlich nichts ausgesagt. Somit gilt

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 &= |\mathbf{E}(\mathbf{r}^{(M)})|^2 + 2\mathbf{E}(\mathbf{r}^{(M)}) \cdot \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)}) + |\delta\mathbf{E}(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)})|^2 \\ &= |\mathbf{E}(\mathbf{r}^{(M)})|^2 + 2E_z(\mathbf{r}^{(M)})\delta E_z(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)}) + |\delta\mathbf{E}(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)})|^2. \end{aligned}$$

Da $|\mathbf{E}(\mathbf{r}^{(M)})|^2 > 0$, $|\delta\mathbf{E}(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)})|^2 > 0$ und auch $E_z(\mathbf{r}^{(M)}) > 0$ in unserem gewählten Koordinatensystem gilt, kann die Funktion $\delta E_z(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)})$ auf der Oberfläche

2 Elektrostatik

$\partial K(\mathbf{r}^{(M)}, R)$ einer Kugel mit (genügend kleinem) Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $\mathbf{r}^{(M)}$ nur negative Werte annehmen:

$$\begin{aligned} \delta E_z(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)}) &< 0 \\ \mathbf{r} &\in \partial K(\mathbf{r}^{(M)}, R). \end{aligned} \quad (2.147)$$

Anderenfalls wäre ja $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 > |\mathbf{E}(\mathbf{r}^{(M)})|^2$, im Widerspruch zur Annahme, dass $\mathbf{r}^{(M)}$ die Position des Maximums der Feldstärke $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|$ ist.

Jedes statische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ genügt der Relation

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (2.148)$$

also folgt insbesondere

$$\mathbf{0} = \text{rot rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} [\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r})] - \nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (2.149)$$

Das Gebiet \mathbb{D}_h ist aber frei von Ladungen, d.h. $\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv 0$ für $\mathbf{r} \in \mathbb{D}_h$. Somit genügen die *kartesischen* Komponenten $E_a(\mathbf{r})$ der elektrostatischen Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ im Gebiet \mathbb{D}_h der Laplace-Gleichung

$$\begin{aligned} a &\in \{x, y, z\}, \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2 E_a(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.150)$$

Es folgt insbesondere für die z -Komponente

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 E_z(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}}^2 [E_z(\mathbf{r}^{(M)}) + \delta E_z(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)})] = \nabla_{\mathbf{r}}^2 [\delta E_z(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)})] = 0, \quad (2.151)$$

d.h. $\delta E_z(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)})$ ist im Inneren des Gebietes \mathbb{D}_h eine harmonische Funktion! Es folgt dann nach dem Satz vom Mittelwert für harmonische Funktionen

$$\delta E_z(\mathbf{r}^{(M)}; \mathbf{r}^{(M)}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial K(\mathbf{r}^{(M)}, R)} d^2 r' \delta E_z(\mathbf{r}'; \mathbf{r}^{(M)}). \quad (2.152)$$

Für $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}^{(M)}$ ist aber

$$\delta E_z(\mathbf{r}^{(M)}; \mathbf{r}^{(M)}) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}^{(M)}} \delta E_z(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)}) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}^{(M)}} [E_z(\mathbf{r}) - E_z(\mathbf{r}^{(M)})] = 0, \quad (2.153)$$

2.9 Theorem über Maxima und Minima der elektrostatischen Feldstärke

d.h. nach dem Satz vom Mittelwert gilt

$$0 = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial K(\mathbf{r}^{(M)}, R)} d^2 r' \delta E_z(\mathbf{r}'; \mathbf{r}^{(M)}). \quad (2.154)$$

Damit das Integral auf der rechten Seite von (2.154) den Wert Null annehmen kann, muss die harmonische Funktion $\delta E_z(\mathbf{r}'; \mathbf{r}^{(M)})$ notwendig auf Teilen der Kugeloberfläche $\partial K(\mathbf{r}^{(M)}, R)$ das Vorzeichen wechseln. Dies steht aber im Widerspruch zur gezeigten Eigenschaft

$$\begin{aligned} \delta E_z(\mathbf{r}'; \mathbf{r}^{(M)}) &< 0, \\ \forall \mathbf{r}' \in \partial K(\mathbf{r}^{(M)}, R) \end{aligned} \quad (2.155)$$

für die Position $\mathbf{r}^{(M)}$ eines Maximums der Feldstärke $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|$. Als einzig mögliche Schlussfolgerung bleibt, dass an keinem inneren Punkt $\mathbf{r}^{(M)} \in \mathbb{D}_h$ ein Maximum $|\mathbf{E}(\mathbf{r}^{(M)})|$ der Feldstärke $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|$ existieren kann.

Bleibt die Frage, ob an einer Stelle $\mathbf{r}^{(M)} \in \mathbb{D}_h$ ein *Minimum* der Feldstärke $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|$ existieren kann. Nach den obigen Ausführungen gilt an der Position eines Minimums notwendig

$$2E_z(\mathbf{r}^{(M)}) \delta E_z(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)}) + |\delta \mathbf{E}(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)})|^2 > 0. \quad (2.156)$$

Diese Bedingung für ein Minimum der Feldstärke $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|$ kann jedenfalls dann immer erfüllt werden, wenn gilt

1. $E_z(\mathbf{r}^{(M)}) = 0$,
2. $\delta E_z(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)}) = 0$, aber $\delta E_y(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)}) \neq 0$ oder $\delta E_x(\mathbf{r}; \mathbf{r}^{(M)}) \neq 0$.

Ein Beispiel für die erste Möglichkeit ist

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(M)} &\in \mathbb{D}_h \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla_{\mathbf{r}} \left[\frac{c_x}{2} (r_x - r_x^{(M)})^2 + \frac{c_y}{2} (r_y - r_y^{(M)})^2 + \frac{c_z}{2} (r_z - r_z^{(M)})^2 \right] \\ c_x + c_y + c_z &= 0 \\ |\mathbf{E}(\mathbf{r})| &= \sqrt{c_x^2 (r_x - r_x^{(M)})^2 + c_y^2 (r_y - r_y^{(M)})^2 + (c_x + c_y)^2 (r_z - r_z^{(M)})^2} \end{aligned} \quad (2.157)$$

2 Elektrostatik

Offensichtlich ist $|\mathbf{E}(\mathbf{r}^{(M)})| = 0$, die Feldstärke verschwindet am gewählten Punkt $\mathbf{r}^{(M)}$.

Ein Beispiel für die zweite Möglichkeit ist

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(M)} &\in \mathbb{D}_h & (2.158) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla_{\mathbf{r}} \left[\frac{c_x}{2} (r_x - r_x^{(M)})^2 + \frac{c_y}{2} (r_y - r_y^{(M)})^2 \right] + E_0 \mathbf{e}_z \\ c_x + c_y &= 0 \\ |\mathbf{E}(\mathbf{r})| &= \sqrt{c_x^2 \left[(r_x - r_x^{(M)})^2 + (r_y - r_y^{(M)})^2 \right] + E_0^2}. \end{aligned}$$

Es gilt $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \mathbf{R}(\lambda)} = E_0$, d.h. die Feldstärke ist minimal entlang einer Geraden $\mathbf{R}(\lambda) = r_x^{(M)} \mathbf{e}_x + r_y^{(M)} \mathbf{e}_y + \lambda \mathbf{e}_z$ für $-\infty < \lambda < \infty$.

Bemerkung

Der geführte Beweis ist für alle statischen Felder $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\in \mathbb{D}_h, \\ \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

gültig, insbesondere auch für das magnetostatische Induktionsfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ oder das statische Newtonsche Gravitationsfeld! Es existiert in einem Gebiet \mathbb{D}_h , in dessen Innerem die kartesischen Komponenten $F_a(\mathbf{r})$ eines Feldes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ harmonische Funktionen sind, kein Maximum der Feldstärke $|\mathbf{F}(\mathbf{r})|$.

Elektrostatische Atomfallen

Wir haben gezeigt, dass ein *Maximum* der elektrostatischen Feldstärke $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|$ in Innerem eines Gebietes \mathbb{D}_h nirgends existieren kann, aber sehr wohl ein *Minimum*! Bleibt die eingangs gestellte Frage zu beantworten, ob man ein *ladungsneutrales* Atom, das ein elektrisches Dipolmoment besitzt, einfangen könnte.

In Gegenwart eines äußeren elektrostatischen Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ beobachtet man typischerweise im Spektrum der gebundenen Elektronen eines Atoms am Ort \mathbf{r} eine

2.9 Theorem über Maxima und Minima der elektrostatischen Feldstärke

Verschiebung und auch eine Aufspaltung von entarteten Energieniveaus. Dies ist der quadratische bzw. lineare Starkeffekt, demzufolge im *Grundzustand* $|\Psi_0\rangle$ die Energie der gebundenen Elektronen immer abgesenkt wird.

Betrachten wir z.B. den quadratischen Starkeffekt. Das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ induziert dann am Ort \mathbf{r} eines Atoms, dessen Elektronen sich im Zustand $|\Psi_n\rangle$ befinden mögen, ein lokales elektrisches Dipolmoment

$$\mathbf{p}^{(n)}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha^{(n)}}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (2.159)$$

Die Energie des (ruhend gedachten) Atoms im elektrischen Feld am Ort \mathbf{r} ist somit

$$U^{(D)}(\mathbf{r}) = -\mathbf{p}^{(n)}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha^{(n)}}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (2.160)$$

Die Zahl $\alpha^{(n)}$ ist die Polarisierbarkeit des Atoms. Diese ist in zweiter Ordnung der Störungstheorie (S ist die Indexmenge für *alle* Zustände des Spektrums) gegeben zu²

$$\alpha^{(n)} = 2 \sum_{\substack{f \in S \\ f \neq n}} \frac{|\langle \Psi_f | \hat{p}_{\parallel} | \Psi_n \rangle|^2}{E_f - E_n}. \quad (2.161)$$

Wir sehen, im Grundzustand $|\Psi_0\rangle$ ist die betreffende atomare Polarisierbarkeit $\alpha^{(0)} > 0$, da immer gilt $E_f - E_0 > 0$. Also spürt ein Atom im Grundzustand $|\Psi_0\rangle$ in Gegenwart eines inhomogenen elektrostatischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ eine Kraft, die es unvermeidbar zum Ort des Minimums des Potentials $U^{(D)}(\mathbf{r})$, d.h. zum Ort des Maximums der Feldstärke $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|$ hinzieht. Nach dem bewiesenen Theorem kann ein ladungsneutrales Atom, das sich im *Grundzustand* befindet, per Dipolwechselwirkung mit einem äußeren elektrostatischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ nie eingefangen werden, so dass es an einem Punkt $\mathbf{r}^{(M)}$ im Inneren des Gebietes \mathbb{D}_h eine stabile Ruhelage hätte.

Anders sieht es aus, wenn das betreffende ladungsneutrale Atom oder Molekül z.B. mit Hilfe von Lasern geeignet *angeregt* wurde, so dass es sich in einem *langlebigen metastabilen* Zustand $|\Psi_n\rangle$ mit $n > 0$ befindet, z.B. der $2s$ -Zustand des

² Die Matrixelemente $\langle \Psi_f | \hat{p}_{\parallel} | \Psi_n \rangle$ des atomaren Dipolmoment-Operators \hat{p}_{\parallel} müssen mit allen Zuständen des Spektrum berechnet werden, d.h. auch die Beiträge der ungebundenen Zuständen im kontinuierlichen Spektrum sind zu berücksichtigen, keine ganz leichte Aufgabe. Für unsere Zwecke ist nur bedeutsam, dass gilt $|\langle \Psi_f | \hat{p}_{\parallel} | \Psi_n \rangle|^2 > 0$.

2 Elektrostatik

H-Atoms, oder das obere Inversionsniveau des NH_3 -Moleküls im elektrostatischen Feld. In dem Fall kann die atomare Polarisierbarkeit α_n auch negativ sein! Das Teilchen spürt dann für $\alpha_n < 0$ eine Kraft, die es zum Ort $\mathbf{r}^{(M)}$ des Minimums der Feldstärke zieht.

Mit Hilfe von Lasern geeignet angeregte Atome oder Moleküle mit negativer Polarisierbarkeit α_n können demnach aufgrund der atomaren Dipol-Wechselwirkung mit einem äußeren elektrischen Feld in einer elektrostatischen Falle im Inneren des Gebietes \mathbb{D}_h im ruhenden Zustand gefangen werden.

3 Materie im elektrischen Feld

Faraday entdeckte im Jahr 1837, dass sich bei festgehaltener Potentialdifferenz $\phi^{(1)} - \phi^{(2)}$ die Kapazität eines Kugelkondensators *vergrößert*, wenn sich im Gebiet zwischen den leitenden Oberflächen ein *Isolator* (z.B. Quartz, Glas oder Öl) befindet. Der Faktor $\varepsilon > 1$, um den sich die Kapazität dabei ändert, ist eine spezifische Materialkonstante. Bemerkenswert ist, dass Faraday zu einer Zeit, als der atomare Aufbau der Materie aus positiv geladenen Atomkernen und negativ geladenen Elektronen noch nicht als gesichertes Wissen gelten konnte, sich sein experimentelles Ergebnis mit einer *Polarisation* der molekularen Bausteine erklärte.

Wir betrachten einen Isolator Ω , der sich zwischen den (ideal) leitenden Platten $\Omega^{(1)}$ bzw. $\Omega^{(2)}$ eines Kondensators befindet. Es sei die elektrostatische Potentialdifferenz $\phi^{(1)} - \phi^{(2)} \neq 0$ zwischen den Oberflächen $\partial\Omega^{(1)}$ und $\partial\Omega^{(2)}$ der beiden Kondensatorplatten konstant vorgegeben. Für $\phi^{(1)} \neq \phi^{(2)}$ existiert dann ein elektrisches Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$ nicht nur im materiefreien Gebiet $\mathbb{D} \setminus (\Omega \cup \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)})$ des Plattenkondensators, sondern es gilt auch $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$ im Inneren des Isolators Ω . Während ein äußeres elektrostatische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in das Innere eines idealen Leiters (Metall) nicht eindringen kann, weil es abgeschirmt wird, kann es ohne weiteres in das Innere eines Isolators eindringen!

Dabei wird die Materie des Isolators, die sich in Abwesenheit des elektrischen Feldes in einem thermodynamischen Gleichgewichtszustand befinden möge, elektrisch polarisiert (z.B. durch den quadratischen Stark-Effekt). Polarisieren bedeutet, es kommt an jedem Ort \mathbf{r} in der Materie zu einer (kleinen) Verschiebung $\boldsymbol{\eta}$ des Schwerpunkts der negativen Ladungen (der gebundenen Elektronen) gegenüber demjenigen der positiven Ladungen (Atomkerne). Als resultierende Ladungsverteilung ergibt sich dann

$$\rho^{(P)}(\mathbf{r}) = \sum_{1 \leq j \leq N} q^{(j)} \left\{ \delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)} - \boldsymbol{\eta}^{(j)}] - \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}) \right\}. \quad (3.1)$$

3 Materie im elektrischen Feld

Für infinitesimales $|\boldsymbol{\eta}|$ ergibt eine (formale) Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned}\rho^{(P)}(\mathbf{r}) &= - \sum_{1 \leq j \leq N} q^{(j)} \boldsymbol{\eta}^{(j)} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}) = - \operatorname{div} \left[\sum_{1 \leq j \leq N} q^{(j)} \boldsymbol{\eta}^{(j)} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}) \right] \\ &= - \operatorname{div} \left[\sum_{1 \leq j \leq N} \mathbf{p}^{(j)} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}) \right].\end{aligned}\quad (3.2)$$

Hier bezeichnet

$$\mathbf{p}^{(j)} = q^{(j)} \langle \boldsymbol{\eta}^{(j)} \rangle_K \quad (3.3)$$

den Erwartungswert des mikroskopischen Dipolmomentoperators eines Atoms bzw. Moleküls, z.B. im kanonischen Ensemble der statistischen Physik. Eigentlich verlässt man an dieser Stelle den Rahmen der Elektrodynamik als klassische Feldtheorie, da zu den Maxwell'schen Gleichungen für die elektromagnetischen Felder dann noch die Dynamik des statistischen Operators für die nuklearen und elektronischen Freiheitsgrade der Materie hinzukommt. Es handelt sich bezüglich des mikroskopischen Entstehungsmechanismus der Polarisierung eines Materials im Grunde genommen um ein Problem aus der Festkörperphysik.

Die Dichteverteilungsfunktion der elektrischen Dipole im Inneren Ω eines Materials ist die sog. Polarisierung

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &\in \Omega \\ \mathbf{P}(\mathbf{r}) &= \sum_{1 \leq j \leq N} \mathbf{p}^{(j)} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}).\end{aligned}\quad (3.4)$$

Entsprechend ist die Dichteverteilung der Polarisationsladungen dann gegeben zu

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &\in \Omega \\ \rho^{(P)}(\mathbf{r}) &= - \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}).\end{aligned}\quad (3.5)$$

Die im betrachteten Beispiel eines Kondensators insgesamt vorhandene Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ besteht demnach zum einen aus der Ladungsdichte $\rho^{(f)}(\mathbf{r})$ der *frei* beweglichen Ladungen auf den ideal leitenden Oberflächen $\partial\Omega^{(1)}$ beziehungsweise $\partial\Omega^{(2)}$ der Kondensatorplatten, zum anderen aus der Dichteverteilung $\rho^{(P)}(\mathbf{r})$ der *lokalisierten* Polarisationsladungen des zwischen den Platten befindlichen Isolators Ω

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho^{(f)}(\mathbf{r}) + \rho^{(P)}(\mathbf{r}). \quad (3.6)$$

Der Fall, dass sich zusätzlich noch freie Ladungen auf der Oberfläche $\partial\Omega$ einer nicht leitenden Substanz befinden, kann auch vorliegen, wenn diese vorher zum Beispiel durch Reibung geeignet aufgeladen wurde (Kontaktelektrizität). Solche frei beweglichen Ladungen werden ebenfalls der Ladungsdichte $\rho^{(f)}(\mathbf{r})$ zugeschlagen.

Wir schreiben jetzt

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\rho^{(f)}(\mathbf{r}) + \rho^{(P)}(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \\ &= \frac{\rho^{(f)}(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}).\end{aligned}\quad (3.7)$$

Es folgt nach einer elementaren Umstellung

$$\operatorname{div} [\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})] = \rho^{(f)}(\mathbf{r}). \quad (3.8)$$

Das Vektorfeld

$$\boxed{\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})} \quad (3.9)$$

ist das sog. *dielektrische Verschiebungsfeld*. Es bestimmt ganz allgemein die Dichte der *freien* Ladungen im Volumen Ω einer Substanz gemäß

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho^{(f)}(\mathbf{r})}. \quad (3.10)$$

Insgesamt befindet sich in Ω somit eine Quantität $Q^{(f)}$ von *freien* Ladungen

$$Q^{(f)} = \int_{\Omega} d^3r \rho^{(f)}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} d^3r \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \int_{\partial\Omega} d^2r' \mathbf{n}'_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}'). \quad (3.11)$$

Aus der elektrostatischen Grundgleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

folgt, dass beide *Tangentialkomponenten* des elektrischen Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ beim Gang durch die Grenzfläche $\partial\Omega$ eines Gebietes Ω immer stetig sind

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &\in \partial\Omega \\ \mathbf{n}'_{\partial\Omega} \wedge [\mathbf{E}_+(\mathbf{r}') - \mathbf{E}_-(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{r}') &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathbf{E}(\mathbf{r}' + \eta \mathbf{n}'_{\Omega}).\end{aligned}\quad (3.13)$$

3 Materie im elektrischen Feld

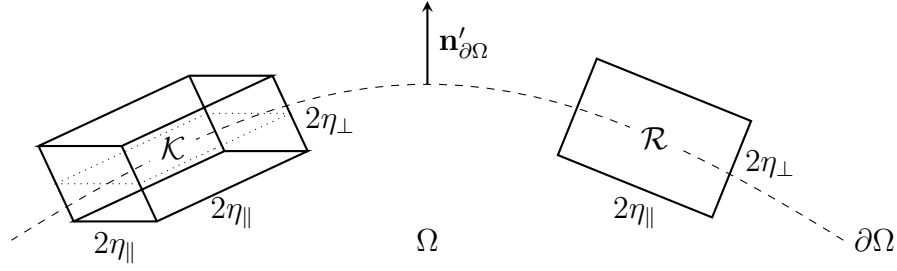


Abbildung 3.1: Das Rechteck \mathcal{R} und der Kasten \mathcal{K} sind so angeordnet, dass sie von der Grenzfläche zweigeteilt werden.

Um dies einzusehen betrachtet man am Ort $\mathbf{r}_0 \in \partial\Omega$ zum Beispiel ein um \mathbf{r}_0 zentriertes Rechteck $\mathcal{R}(\mathbf{r}_0; \eta_{\parallel}, \eta_{\perp})$ mit Seitenlängen $2\eta_{\parallel} \gg 2\eta_{\perp}$, welches so positioniert sein möge, dass seine Flächennormale senkrecht zu $\mathbf{n}'_{\partial\Omega}$ orientiert ist, und die kürzere Seite η_{\perp} parallel zu $\mathbf{n}'_{\partial\Omega}$ ausgerichtet ist, vergleiche Abbildung 3.1. Dann gilt nach dem Satz von Stokes

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{R}(\mathbf{r}_0; \eta_{\parallel}, \eta_{\perp})} d^2 r' \mathbf{n}'_{\partial\mathcal{R}} \cdot \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}') \\ &= \int_{\partial\mathcal{R}(\mathbf{r}_0; \eta_{\parallel}, \eta_{\perp})} ds \cdot \mathbf{E}(\mathbf{s}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Das Linienintegral führt entlang des Weges $\partial\mathcal{R}(\mathbf{r}; \eta_{\parallel}, \eta_{\perp})$ auf der einen Seite der Grenzfläche hin, auf der anderen Seite zurück. Im Limes $\eta_{\perp} \rightarrow 0$, dann $\eta_{\parallel} \rightarrow 0$ ergibt sich die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung aus den Integralen über die einzelnen geraden Wegstücke, aus denen sich $\partial\mathcal{R}(\mathbf{r}_0; \eta_{\parallel}, \eta_{\perp})$ zusammensetzt.

Wir untersuchen nun die Normalkomponente des Verschiebungsfeldes $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ an einer Grenzfläche $\partial\Omega$. Die dort (gegebenenfalls) befindliche Flächenladungsdichte der *freien* Ladungen $\omega^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r}')$ ist durch den Sprung der Normalkomponente des Verschiebungsfeldes bestimmt:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &\in \partial\Omega \\ \omega^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r}') &= \mathbf{n}'_{\partial\Omega} \cdot [\mathbf{D}_+(\mathbf{r}') - \mathbf{D}_-(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega} \\ \mathbf{D}_{\pm}(\mathbf{r}') &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathbf{D}(\mathbf{r}' + \eta \mathbf{n}'_{\Omega}). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Die Richtigkeit der Behauptung ist leicht zu zeigen. Dazu betrachten wir am Ort $\mathbf{r}_0 \in \partial\Omega$ z.B. einen um \mathbf{r}_0 zentrierten Kasten $\mathcal{K}(\mathbf{r}_0; \eta_{\parallel}, \eta_{\perp})$ mit infinitesimaler

Kantenlänge $2\eta_{\perp}$ und Grundfläche $(2\eta_{\parallel})^2$, der so positioniert ist, dass sein Volumen von der Grenzfläche $\partial\Omega$ in zwei gleiche Teile geschnitten wird. Die Schnittfläche sei $\mathcal{S}(\mathbf{r}_0; \eta_{\parallel})$. Die kürzere Kante η_{\perp} des Kastens sei parallel zu $\mathbf{n}'_{\partial\Omega}$ ausgerichtet, wie auch die Flächennormale der Deckelfläche des Kastens, siehe Abbildung 3.1. Aus dem Satz von Gauß folgt für die insgesamt im Kasten $\mathcal{K}(\mathbf{r}_0; \eta_{\parallel}, \eta_{\perp})$ deponierte freie Ladung

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{K}}^{(f)} &= \int_{\mathcal{K}(\mathbf{r}_0; \eta_{\parallel}, \eta_{\perp})} d^3r \rho^{(f)}(\mathbf{r}) \\ &= \int_{\mathcal{K}(\mathbf{r}_0; \eta_{\parallel}, \eta_{\perp})} d^3r \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \\ &= \int_{\partial\mathcal{K}(\mathbf{r}_0; \eta_{\parallel}, \eta_{\perp})} d^2r' \mathbf{n}'_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Im Limes $\eta_{\perp} \rightarrow 0$ ergibt sich durch Betrachtung der Flächenintegrale über die Deckel- und Bodenflächen des Kastens

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{K}}^{(f)} &= \lim_{\eta_{\perp} \rightarrow 0} \int_{\partial\mathcal{K}(\mathbf{r}_0; \eta_{\parallel}, \eta_{\perp})} d^2r' \mathbf{n}'_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}') \\ &= \int_{\mathcal{S}(\mathbf{r}_0; \eta_{\parallel})} d^2s' \mathbf{n}'_{\Omega} \cdot [\mathbf{D}_+(\mathbf{r}_0 + \mathbf{s}') - \mathbf{D}_-(\mathbf{r}_0 + \mathbf{s}')]_{\mathbf{r}_0 \in \partial\Omega} \\ &= \int_{\mathcal{S}(\mathbf{r}_0; \eta_{\parallel})} d^2s' \omega^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{s}'), \end{aligned} \quad (3.17)$$

was zu zeigen war. Sind auf der Grenzfläche keine freien Ladungen vorhanden, dann ist die Normalkomponente des Verschiebungsfeldes dort stetig.

Für viele nichtleitende Materialien im thermischen Gleichgewicht gilt für hinreichend schwache Felder ein linearer Zusammenhang zwischen elektrischem Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und Polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \chi^{(\text{el})} \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (3.18)$$

Hier ist $\chi^{(\text{el})}$ die statische dielektrische Suszeptibilität. Dann folgt durch Einsetzen

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 (1 + \chi^{(\text{el})}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (3.19)$$

Für Isolatoren, die isotrop oder kubisch kristallin strukturiert sind, ist in guter Näherung

$$\varepsilon = 1 + \chi^{(\text{el})} \quad (3.20)$$

3 Materie im elektrischen Feld

eine reeller dimensionsloser Skalar, wobei dessen Zahlenwert vom Material abhängt¹.

In der Metalloptik ist ε nicht konstant, sondern ein nichtlokaler und zeitlich retardierter Integralkern $\varepsilon_{ab}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t')$, der mit der Dichte-Dichte- und der Strom-Strom-Korrelationsfunktion der Elektronen im betrachteten Material eng zusammenhängt.

In sog. Ferroelektrika existiert eine spontane Polarisierung $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ bereits ohne äußeres elektrisches Feld. Die Polarisationsladung $-\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r})$ wird dann meist durch zusätzliche Oberflächenladungen kompensiert, so dass sie im statischen Gleichgewicht nicht ersichtlich in Erscheinung tritt. Wird durch äußeren mechanischen Druck oder Temperaturänderung dieses Gleichgewicht verschoben, so entsteht ein Überschuss von Polarisationsladungen auf den Oberflächen des Kristalls. So erklärt sich zum Beispiel die Piezoelektrizität bei α -Quartz, oder dem Blei-Zirkonat-Titanat (engl. PCT). Piezoelektrische Kristalle kommen in der Technik als Ultraschallwandler oder als Frequenzstabilisatoren zum Einsatz.

Randwertprobleme der Potentialtheorie für lineare Dielektrika

Ein isotropes Dielektrikum $\Omega^{(I)}$ mit Dielektrizitätskonstante $\varepsilon^{(I)}$ ist im Kontakt mit der (ruhenden) Oberfläche eines isotropen Dielektrikums $\Omega^{(II)}$ mit Dielektrizitätskonstante $\varepsilon^{(II)}$. Sei jetzt eine Punktladung q ruhend an einer Stelle $\mathbf{R} \in \Omega^{(I)}$ positioniert. Das zugeordnete Verschiebungsfeld ist dann

$$\boxed{\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})}, \quad (3.21)$$

wobei

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} \varepsilon^{(I)} & \text{für } \mathbf{r} \in \Omega^{(I)}, \\ \varepsilon^{(II)} & \text{für } \mathbf{r} \in \Omega^{(II)}. \end{cases} \quad (3.22)$$

Beide Gebiete haben somit eine gemeinsame Grenzfläche $\partial\Omega^{(I)} \cap \partial\Omega^{(II)} = \partial\Omega^{(I,II)}$, die wir als frei von *beweglichen* Ladungen annehmen wollen. Da $\Omega^{(I)}$ und $\Omega^{(II)}$

¹Isolatoren mit hexagonaler, trigonaler und tetragonaler Kristallstruktur werden mit einer reellen konstanten uniaxialen Dielektrizitätsmatrix ε_{ab} mit $a, b \in \{x, y, z\}$ beschrieben, wobei ε_{ab} zwei *verschiedenen* Eigenwerte besitzt. Handelt es sich um orthorhombische, monokline und trikline Kristallsysteme, so hat ε_{ab} drei verschiedene Eigenwerte. In der Kristalloptik wird die Eigenschaft der Doppelbrechung und der Drehung der Polarisationssebene des Lichts (optische Aktivität) auf die Anisotropie der dielektrischen Matrix ε_{ab} zurückgeführt.

3.1 Punktladung im dielektrischen Halbraum

Isolatoren sind, existiert – wie wir zeigen werden – auf der Grenzfläche $\partial\Omega^{(I,II)}$ eine Flächendichte $\omega^{(P)}(\mathbf{r}')$ der Polarisationsladungen. Wir wollen verabreden, dass auf der Grenzfläche $\partial\Omega^{(I,II)}$ die Flächennormale $\mathbf{n}_{\partial\Omega^{(I,II)}} \equiv \mathbf{n}$ am Ort $\mathbf{r} \in \partial\Omega^{(I,II)}$ von $\Omega^{(I)}$ aus betrachtet so orientiert sein soll, dass sie in das Gebiet $\Omega^{(II)}$ hineinzeigt.

Es folgt mit der Darstellung $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r})$, die ja für jedes elektrostatische Feld gültig ist, dass die Randbedingung (3.13) für die tangentielle Komponente des elektrischen Feldes automatisch erfüllt ist. An der Grenzfläche $\partial\Omega^{(I,II)}$ gilt aufgrund von (3.15) jetzt die folgende Randbedingung für das skalare elektrische Potential $\phi(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \in \partial\Omega^{(I,II)} & \tag{3.23} \\ \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \phi(\mathbf{r} - \eta\mathbf{n}) &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \phi(\mathbf{r} + \eta\mathbf{n}) \\ \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[\varepsilon^{(I)} \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r} - \eta\mathbf{n}) \right] &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[\varepsilon^{(II)} \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r} + \eta\mathbf{n}) \right]. \end{aligned}$$

Es ist in der Elektrostatik oft einfacher, eine Randwertaufgabe für das skalare Potential $\phi(\mathbf{r})$ zu lösen, und das gesuchte elektrostatische Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ anschließend durch Berechnung des Gradienten $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r})$ zu bestimmen.

3.1 Punktladung im dielektrischen Halbraum

Wir betrachten ein Dielektrikum $\Omega^{(I)}$ mit Dielektrizitätskonstante $\varepsilon^{(I)}$, das den Halbraum $r_z > 0$ ausfüllen möge. Ein zweites Dielektrikum $\Omega^{(II)}$ mit Dielektrizitätskonstante $\varepsilon^{(II)}$ füllt den Halbraum $r_z < 0$ aus. Beide Dielektrika berühren sich in der Ebene $r_z = 0$. Eine Punktladung q befindet sich am Ort $\mathbf{R} = R_x \mathbf{e}_x + R_y \mathbf{e}_y + R_z \mathbf{e}_z$, wobei der Abstand $R_z > 0$ fest gewählt sei, siehe Abbildung 3.2.

Zur Bestimmung des skalaren Potentials $\phi(\mathbf{r})$ machen wir den Ansatz

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon^{(I)}} \left[\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} + \frac{q^{(I)}}{|\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{R}}|} \right] & \text{für } r_z > 0, \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon^{(II)}} \frac{q^{(II)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} & \text{für } r_z < 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

3 Materie im elektrischen Feld

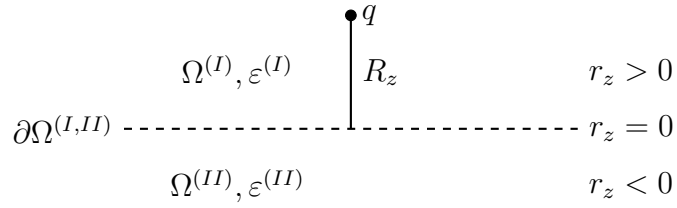


Abbildung 3.2: Punktladung q im dielektrischen Halbraum $r_z > 0$ im Abstand R_z zur Grenzfläche.

Hier ist

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= R_x \mathbf{e}_x + R_y \mathbf{e}_y + R_z \mathbf{e}_z \\ \widetilde{\mathbf{R}} &= (\mathbf{1} - 2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}^T) \mathbf{R} \\ &= R_x \mathbf{e}_x + R_y \mathbf{e}_y - R_z \mathbf{e}_z.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Der Punkt $\widetilde{\mathbf{R}} \in \Omega^{(II)}$ ist das Spiegelbild des Punktes $\mathbf{R} \in \Omega^{(I)}$ bezogen auf die Ebene $r_z = 0$ mit Flächennormale $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$. Somit

$$\begin{aligned}|\mathbf{r} - \mathbf{R}| &= \sqrt{(r_x - R_x)^2 + (r_y - R_y)^2 + (r_z - R_z)^2} \\ |\mathbf{r} - \widetilde{\mathbf{R}}| &= \sqrt{(r_x - R_x)^2 + (r_y - R_y)^2 + (r_z + R_z)^2}.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Der Ansatz (3.24) stellt offensichtlich eine Lösung der elektrostatischen Feldgleichungen (1.50) beziehungsweise der Laplace-Gleichung in beiden Halbräumen $r_z > 0$ und $r_z < 0$ dar. Die unbekannt Parameter $q^{(I)}$ und $q^{(II)}$ bestimmen wir jetzt aus den Randbedingungen (3.23) am Ort der Berührungsfläche $r_z = 0$ zu

$$\begin{aligned}\frac{q + q^{(I)}}{\varepsilon^{(I)}} &= \frac{q^{(II)}}{\varepsilon^{(II)}} \\ q - q^{(I)} &= q^{(II)}.\end{aligned}\tag{3.27}$$

Hier entstammt die zweite Gleichung der Randbedingung für die erste Ableitung des Potentials bei $r_z = 0$. Gemäß unserer Verabredung für die Orientierung der

3.1 Punktladung im dielektrischen Halbraum

Flächennormalen ist jetzt $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$. Somit

$$\begin{aligned}
 & \lim_{r_z \rightarrow 0^+} \left[\varepsilon^{(I)} \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) \right] & (3.28) \\
 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{r_z \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\partial}{\partial r_z} \right) \left[\frac{q}{\sqrt{(r_x - R_x)^2 + (r_y - R_y)^2 + (r_z - R_z)^2}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{q^{(I)}}{\sqrt{(r_x - R_x)^2 + (r_y - R_y)^2 + (r_z + R_z)^2}} \right] \\
 &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_z}{\left(\sqrt{(r_x - R_x)^2 + (r_y - R_y)^2 + R_z^2} \right)^3} (q - q^{(I)}) \\
 &\stackrel{!}{=} \lim_{r_z \rightarrow 0^-} \left[\varepsilon^{(II)} \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{r_z \rightarrow 0^-} \left(-\frac{\partial}{\partial r_z} \right) \frac{q^{(II)}}{\sqrt{(r_x - R_x)^2 + (r_y - R_y)^2 + (r_z - R_z)^2}} \\
 &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_z}{\left(\sqrt{(r_x - R_x)^2 + (r_y - R_y)^2 + R_z^2} \right)^3} q^{(II)}.
 \end{aligned}$$

Auflösen des Gleichungssystems (3.27) ergibt für die gesuchten Parameter $q^{(I)}$ und $q^{(II)}$ das Ergebnis

$$\begin{aligned}
 q^{(I)} &= \frac{\varepsilon^{(I)} - \varepsilon^{(II)}}{\varepsilon^{(I)} + \varepsilon^{(II)}} q & (3.29) \\
 q^{(II)} &= \frac{2\varepsilon^{(II)}}{\varepsilon^{(I)} + \varepsilon^{(II)}} q.
 \end{aligned}$$

Auf der Kontaktfläche $\partial\Omega^{(I,II)}$ der beiden Dielektrika existiert eine Flächendichte der *Polarisationsladungen* $\omega^{(P)}(\mathbf{r}')$, die durch den Sprung der Normalkomponente des Polarisationsvektorfeldes $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$ bestimmt ist:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(I,II)} & (3.30) \\
 & -\omega^{(P)}(\mathbf{r}') = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{P}_+(\mathbf{r}') - \mathbf{P}_-(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega} \\
 & \mathbf{P}_{\pm}(\mathbf{r}') = \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathbf{P}(\mathbf{r}' + \eta \mathbf{n}).
 \end{aligned}$$

3 Materie im elektrischen Feld

Das Minuszeichen bei $\omega^{(P)}(\mathbf{r}')$ rührt von der Definition $\rho^{(P)}(\mathbf{r}) = -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r})$ her.

Die Polarisierung ist für lineare Dielektrika gegeben zu

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}) &= \varepsilon_0 \chi^{(\text{el})}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= \varepsilon_0 [\varepsilon(\mathbf{r}) - 1] \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= \varepsilon_0 [\varepsilon(\mathbf{r}) - 1] [-\nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Beim Gang durch die Grenzfläche $\partial\Omega^{(I,II)}$ springt die Normalkomponente der Polarisierung $\mathbf{P}(\mathbf{r})$, weil sich der Wert von $\varepsilon(\mathbf{r})$ ändert

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} \varepsilon^{(I)} & \text{für } \mathbf{r} \in \Omega^{(I)}, \\ \varepsilon^{(II)} & \text{für } \mathbf{r} \in \Omega^{(II)}. \end{cases} \quad (3.32)$$

Indem wir die obigen Ausdrücke (3.28) für $\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r})$ in (3.31) einsetzen, erhalten wir durch Berechnen der rechten Seite der Randbedingung (3.30) die gesuchte Flächendichte $\omega^{(P)}(\mathbf{r}')$ der Polarisationsladungen am Ort \mathbf{r}' auf der Grenzfläche $\partial\Omega^{(I,II)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &\in \partial\Omega^{(I,II)} \\ -\omega^{(P)}(\mathbf{r}') &= \mathbf{n} \cdot [\mathbf{P}_+(\mathbf{r}') - \mathbf{P}_-(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega} \\ &= -\frac{R_z}{4\pi} \frac{(\varepsilon^{(I)} - 1) \frac{1}{\varepsilon^{(I)}} (q - q^{(I)}) - (\varepsilon^{(II)} - 1) \frac{1}{\varepsilon^{(II)}} q^{(II)}}{\left(\sqrt{(r'_x - R_x)^2 + (r'_y - R_y)^2 + R_z^2} \right)^3} \\ &= -\frac{R_z}{4\pi} \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon^{(II)}} - \frac{1}{\varepsilon^{(I)}} \right) \frac{2\varepsilon^{(II)}}{\varepsilon^{(I)} + \varepsilon^{(II)}} q}{\left(\sqrt{(r'_x - R_x)^2 + (r'_y - R_y)^2 + R_z^2} \right)^3}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Elementare Umstellungen führen auf das Ergebnis

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &\in \partial\Omega^{(I,II)} \\ \omega^{(P)}(\mathbf{r}') &= \frac{-q}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon^{(I)}} \frac{\varepsilon^{(II)} - \varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(I)} + \varepsilon^{(II)}} \frac{R_z}{\left(\sqrt{(r'_x - R_x)^2 + (r'_y - R_y)^2 + R_z^2} \right)^3}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.1 Punktladung im dielektrischen Halbraum

Spiegelladung

Für $\varepsilon^{(II)} \gg \varepsilon^{(I)}$ erscheint das Material $\Omega^{(II)}$ (von $\Omega^{(I)}$ aus betrachtet) wie ein idealer Leiter, denn die Feldstärke verschwindet dann im Inneren von $\Omega^{(II)}$:

$$\lim_{\varepsilon^{(II)} \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \Omega^{(II)}} = - \lim_{\varepsilon^{(II)} \rightarrow \infty} \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \Omega^{(II)}} = \mathbf{0}. \quad (3.35)$$

In dem Fall ist

$$\lim_{\varepsilon^{(II)} \rightarrow \infty} q^{(I)} = -q. \quad (3.36)$$

Für $\varepsilon^{(I)} = 1$ ist $\Omega^{(I)}$ ein Teil des freien Raums (Vakuum). Das Potential im Halbraum $r_z > 0$ ist dann eine Superposition bestehend aus dem Coulomb-Potential einer im Vakuum am Ort $\mathbf{R} = R_x \mathbf{e}_x + R_y \mathbf{e}_y + R_z \mathbf{e}_z \in \Omega^{(I)}$ positionierten Punktladung q mit dem Coulomb-Potential einer am Ort $\tilde{\mathbf{R}} = R_x \mathbf{e}_x + R_y \mathbf{e}_y - R_z \mathbf{e}_z \in \Omega^{(II)}$ befindlichen sog. *Spiegelladung* $-q$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= R_x \mathbf{e}_x + R_y \mathbf{e}_y + R_z \mathbf{e}_z \in \Omega^{(I)} \\ \tilde{\mathbf{R}} &= R_x \mathbf{e}_x + R_y \mathbf{e}_y - R_z \mathbf{e}_z \in \Omega^{(II)} \\ \phi(\mathbf{r}) &= \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} + \frac{-q}{|\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{R}}|} \right] & \text{für } r_z > 0, \\ 0 & \text{für } r_z < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Eine Punktladung im Vakuum, die sich am Ort \mathbf{R} vor einem leitenden (geerdeten) Halbraum befindet, induziert auf einer ideal leitenden Grenzfläche $r_z = 0$ eine Flächenladungsdichte

$$\omega^{(P)}(\mathbf{r}') = \frac{-q}{2\pi} \frac{R_z}{\left(\sqrt{(r'_x - R_x)^2 + (r'_y - R_y)^2} + R_z \right)^3}. \quad (3.38)$$

3 Materie im elektrischen Feld

Das Integral dieser Flächenladungsdichte über die gesamte Grenzfläche ergibt die Ladung

$$\begin{aligned}
 q^{(I)} &= \int_{r_z=0} d^2 r' \omega^{(P)}(\mathbf{r}') & (3.39) \\
 &= \left(\frac{-q}{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dr'_x \int_{-\infty}^{\infty} dr'_y \frac{R_z}{\left(\sqrt{(r'_x - R_x)^2 + (r'_y - R_y)^2 + R_z^2}\right)^3} \\
 &\stackrel{\text{Polarkoord.}}{=} \left(\frac{-q}{2\pi}\right) 2\pi \int_0^{\infty} dr' r' \frac{R_z}{\left(\sqrt{r'^2 + R_z^2}\right)^3} \\
 &= q R_z \int_0^{\infty} dr' \frac{d}{dr'} \frac{1}{\sqrt{r'^2 + R_z^2}} \\
 &= -q \frac{R_z}{|R_z|} = -q \underbrace{\text{sgn } R_z}_{\equiv 1 \text{ für } R_z > 0} .
 \end{aligned}$$

Dies ist exakt das Negative der ursprünglichen Ladung q . Die Bezeichnung *Spiegelladung* für $q^{(I)}$ ist also gerechtfertigt. Eine Punktladung q , die am Ort \mathbf{R} vor einer ideal leitenden geerdeten Ebene $r_z = 0$ positioniert ist, influenziert eine Flächenladungsdichte $\omega(\mathbf{r}')$ auf dieser Ebene, deren elektrisches Feld im Halbraum $r_z > 0$ mit dem einer entgegengesetzt geladenen Punktladung $q^{(I)} = -q$ am gespiegelten Ort $\widetilde{\mathbf{R}}$ im Halbraum $r_z < 0$ übereinstimmt.

3.2 Das homogen polarisierte Ellipsoid in dielektrischer Materie

Wir betrachten eine *homogene* dielektrische Probe $\Omega^{(I)}$ mit Dielektrizitätskonstante $\varepsilon^{(I)} \geq 1$, die in ein anderes *homogenes* dielektrisches Medium $\Omega^{(II)}$ mit Dielektrizitätskonstante $\varepsilon^{(II)} \geq 1$ eingebettet ist. Die geometrische Gestalt der Probe sei die eines *Ellipsoids* $\Omega_{\mathcal{E}}$ mit Halbachsen λ_x , λ_y und λ_z . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass der Mittelpunkt des Ellipsoids mit dem Ursprung $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ eines kartesischen Koordinatensystems zusammenfällt, dessen Basisvektoren

3.2 Das homogen polarisierte Ellipsoid in dielektrischer Materie

\mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y und \mathbf{e}_z entlang der Achsen des Ellipsoids orientiert sind:

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathcal{E}} &= \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \left| \frac{r_x^2}{\lambda_x^2} + \frac{r_y^2}{\lambda_y^2} + \frac{r_z^2}{\lambda_z^2} \leq 1 \right. \right\} \\ \partial\Omega_{\mathcal{E}} &= \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \left| \frac{r_x^2}{\lambda_x^2} + \frac{r_y^2}{\lambda_y^2} + \frac{r_z^2}{\lambda_z^2} = 1 \right. \right\}.\end{aligned}\quad (3.40)$$

Wir wollen jetzt für den Fall, dass von außen an die Probe ein homogenes elektrisches Feld $\mathbf{E}^{(0)}$ angelegt ist, die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in der Umgebung und auch im Inneren des Ellipsoids bestimmen. Zusätzlich wollen wir die auf der Grenzfläche $\partial\Omega_{\mathcal{E}}$ induzierte Flächendichte $\omega^{(P)}(\mathbf{r})$ der Polarisationsladungen ermitteln.

Sei $\mathbf{n}_{\partial\Omega_{\mathcal{E}}} = \mathbf{n}$ die nach *außen* orientierte Flächennormale am Ort \mathbf{r} auf der Oberfläche $\partial\Omega_{\mathcal{E}}$ des Ellipsoids. Die Tangentialebene, die das Ellipsoid am Ort $\mathbf{r} \in \partial\Omega_{\mathcal{E}}$ berührt, ist die Gesamtheit aller Vektoren $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Komponenten $R_a = R_a(\mathbf{r})$, die der folgenden Gleichung genügen:

$$\begin{aligned}\sum_{a \in \{x, y, z\}} (R_a - r_a) \frac{r_a}{\lambda_a^2} &= 0 \\ \mathbf{r} &\in \partial\Omega_{\mathcal{E}}.\end{aligned}\quad (3.41)$$

Somit ist die auf Eins normierte Flächennormale $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{r}) = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z$ am Ort \mathbf{r} auf der Oberfläche $\partial\Omega_{\mathcal{E}}$ des Ellipsoids gegeben zu

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &\in \partial\Omega_{\mathcal{E}} \\ a &\in \{x, y, z\} \\ n_a &= \frac{r_a}{\lambda_a^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{r_x^2}{\lambda_x^4} + \frac{r_y^2}{\lambda_y^4} + \frac{r_z^2}{\lambda_z^4}}} \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= 1.\end{aligned}\quad (3.42)$$

In Übereinstimmung mit (3.23) suchen wir jetzt eine Lösung der Laplace-Gleichung

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.43)$$

3 Materie im elektrischen Feld

die beim Gang durch die Oberfläche des Ellipsoids die folgenden Randbedingungen erfüllt

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\in \partial\Omega_{\mathcal{E}} & (3.44) \\ \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \phi(\mathbf{r} - \eta \mathbf{n}) &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \phi(\mathbf{r} + \eta \mathbf{n}) \\ \varepsilon^{(I)} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r} - \eta \mathbf{n}) &= \varepsilon^{(II)} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r} + \eta \mathbf{n}). \end{aligned}$$

Dazu kommt noch die Randbedingung im Unendlichen

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} [\phi(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{r}] = 0, \quad (3.45)$$

da ja außerhalb des Ellipsoids $\Omega^{(I)}$ für $|\mathbf{r}| \gg \max(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$ ein konstantes homogenes elektrisches Feld

$$\mathbf{E}^{(0)} = \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon^{(II)}} \mathbf{D}^{(0)}$$

im Dielektrikum $\Omega^{(II)}$ existieren soll.

Wir machen nun für das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$ den folgenden Ansatz mit einem unbekanntem *konstanten* Vektor \mathbf{C} :

$$\phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}). \quad (3.46)$$

Dabei ist die Hilfsfunktion

$$\phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_{\mathcal{E}}} d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.47)$$

das Potential eines homogen geladenen Ellipsoids $\Omega_{\mathcal{E}}$ (mit konstanter Ladungsdichte $\rho_0 = \varepsilon_0$). Nach dem im Kapitel 2.3 bewiesenen Satz von Dirichlet (2.40) ist der Gradient $\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r})$ der Hilfsfunktion beim Gang durch die Oberfläche $\partial\Omega_{\mathcal{E}}$ des Ellipsoids stetig, woraus folgt, dass unser Ansatz (3.46) für das gesuchte Potential $\phi(\mathbf{r})$ ebenfalls stetig ist. Im Inneren des Ellipsoids $\Omega_{\mathcal{E}}$ ist die Hilfsfunktion $\phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r})$ gemäß (2.40) eine quadratische Form der kartesischen Ortskoordinaten r_a

3.2 Das homogen polarisierte Ellipsoid in dielektrischer Materie

des Vektors \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \in \Omega_{\mathcal{E}} & \tag{3.48} \\ \phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} \left(1 - \sum_{a \in \{x, y, z\}} \frac{r_a^2}{u + \lambda_a^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (I_0 - I_x r_x^2 - I_y r_y^2 - I_z r_z^2). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten I_0 und I_a mit $a \in \{x, y, z\}$ sind gerade die Indexintegrale (2.55). Im Außengebiet des Ellipsoids $\Omega_{\mathcal{E}}$ gilt dagegen

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \notin \Omega_{\mathcal{E}} & \tag{3.49} \\ \phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \int_{\mu(\mathbf{r})}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} \left(1 - \sum_{a \in \{x, y, z\}} \frac{r_a^2}{u + \lambda_a^2} \right). \end{aligned}$$

Im Außengebiet von $\Omega_{\mathcal{E}}$ ist die untere Integrationsgrenze $\mu(\mathbf{r})$ gegeben als die (positive) Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \notin \Omega_{\mathcal{E}} & \\ 1 &\stackrel{!}{=} \frac{r_x^2}{\mu + \lambda_x^2} + \frac{r_y^2}{\mu + \lambda_y^2} + \frac{r_z^2}{\mu + \lambda_z^2} & \tag{3.50} \\ \mu &= \mu(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

In großer Entfernung zur Oberfläche des Ellipsoids, für $|\mathbf{r}| \gg \max(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$, ist $\mu(\mathbf{r}) \simeq |\mathbf{r}|^2$, somit $\phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{3} \lambda_x \lambda_y \lambda_z / |\mathbf{r}|$, vergleiche die Rechnung zum Satz von Dirichlet in (2.52). Der Term $\mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r})$ in unserem Ansatz (3.46) beschreibt somit in großer Entfernung zum Ellipsoid das Potential eines elektrischen Dipols proportional zum Vektor \mathbf{C} . Dagegen ist im Inneren und auf der Oberfläche des Ellipsoids die untere Grenze der Integrale gleich Null, demnach $\mu(\mathbf{r}) \equiv 0$ für alle $\mathbf{r} \in \Omega_{\mathcal{E}}$.

Offensichtlich ist der Ansatz (3.46) für das skalare elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$ sowohl im Innen- als auch im Außengebiet von $\Omega_{\mathcal{E}}$ eine Lösung der Laplace-

3 Materie im elektrischen Feld

Gleichung:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{r} \notin \partial\Omega_{\mathcal{E}} \\
 \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}) &= \nabla_{\mathbf{r}}^2 \left[-\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}) \right] = \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \left[\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}) \right] \quad (3.51) \\
 &= \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \left[\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_{\mathcal{E}}} d^3 r' \nabla_{\mathbf{r}}^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\
 &= \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \left[- \int_{\Omega_{\mathcal{E}}} d^3 r' \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \\
 &= \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \begin{cases} -1 & \text{für } \mathbf{r} \in \Omega_{\mathcal{E}}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Die 3 unbekannt Parameter C_a mit $a \in \{x, y, z\}$ in unserem Ansatz (3.46) gilt es nun mittels der angegebenen Randbedingungen (3.44) zu finden.

Eine Bestimmungsgleichung für die Unbekannten C_a folgt jetzt aus der Forderung der Stetigkeit der Normalkomponente des Verschiebungsfelds

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.52) \\
 &= \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) [-\nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r})]
 \end{aligned}$$

beim Gang durch die Oberfläche $\partial\Omega_{\mathcal{E}}$ des Ellipsoids, siehe (3.44):

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{r} \in \partial\Omega_{\mathcal{E}} \quad (3.53) \\
 & \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \varepsilon^{(II)} \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r} + \eta \mathbf{n}) \\
 &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \varepsilon^{(I)} \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r} - \eta \mathbf{n}) \\
 \Leftrightarrow & \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \varepsilon^{(II)} (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \left[-\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r} + \eta \mathbf{n}) \right] \\
 &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \varepsilon^{(I)} (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \left[-\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r} - \eta \mathbf{n}) \right].
 \end{aligned}$$

3.2 Das homogen polarisierte Ellipsoid in dielektrischer Materie

Wir berechnen zuerst

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) (\mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r} + \eta \mathbf{n}) \quad (3.54) \\
 &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \sum_{a \in \{x,y,z\}} n_a \frac{\partial}{\partial r_a} \sum_{b \in \{x,y,z\}} C_b \frac{\partial}{\partial r_b} \phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r} + \eta \mathbf{n}) \\
 &= \sum_{a,b \in \{x,y,z\}} n_a C_b \frac{\partial}{\partial r_a} \left[-\frac{1}{2} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \int_{\mu(\mathbf{r})}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} \frac{r_b}{u + \lambda_b^2} \right]_{\mathbf{r} \in \partial \Omega_{\mathcal{E}}} \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{a,b \in \{x,y,z\}} n_a C_b \left[\lambda_x \lambda_y \lambda_z \int_{\mu(\mathbf{r})}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u + \lambda_x^2)(u + \lambda_y^2)(u + \lambda_z^2)}} \frac{1}{u + \lambda_b^2} \delta_{a,b} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\lambda_x \lambda_y \lambda_z}{\sqrt{(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_x^2)(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_y^2)(\mu(\mathbf{r}) + \lambda_z^2)}} \frac{r_b}{\mu(\mathbf{r}) + \lambda_b^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_a} \right]_{\mathbf{r} \in \partial \Omega_{\mathcal{E}}} \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

Der Term proportional zu $\frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_a}$ in der letzten Zeile ist der Ortsabhängigkeit der unteren Integrationsgrenze $\mu(\mathbf{r})$ geschuldet. Zu beachten ist jetzt, dass $\mu(\mathbf{r})$ auf allen Punkten der Oberfläche $\partial \Omega_{\mathcal{E}}$ identisch verschwindet:

$$\mu(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \partial \Omega_{\mathcal{E}}} = 0. \quad (3.56)$$

Somit erhalten wir jetzt an der Oberfläche des Ellipsoids

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) (\mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r} + \eta \mathbf{n}) \quad (3.57) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{a,b \in \{x,y,z\}} n_a C_b \left[I_a \delta_{a,b} - \frac{r_b}{\lambda_b^2} \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_a} \right]_{\mathbf{r} \in \partial \Omega_{\mathcal{E}}} \\
 &= \frac{1}{2} \left[- \sum_{b \in \{x,y,z\}} I_b C_b n_b + \left(\sum_{b \in \{x,y,z\}} C_b \frac{r_b}{\lambda_b^2} \right) \left(\sum_{a \in \{x,y,z\}} n_a \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_a} \right) \right]_{\mathbf{r} \in \partial \Omega_{\mathcal{E}}}.
 \end{aligned}$$

Für die Ableitung $\frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_b}$ berechnen wir mit (2.46), wieder unter Beachtung von $\mu(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \partial \Omega_{\mathcal{E}}} = 0$ an der Oberfläche $\partial \Omega_{\mathcal{E}}$ des Ellipsoids, nun den Ausdruck:

$$\left[\frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_a} \right]_{\mathbf{r} \in \partial \Omega_{\mathcal{E}}} = \left[\frac{\frac{2r_a}{\mu + \lambda_a^2}}{\frac{r_x^2}{(\mu + \lambda_x^2)^2} + \frac{r_y^2}{(\mu + \lambda_y^2)^2} + \frac{r_z^2}{(\mu + \lambda_z^2)^2}} \right]_{\mathbf{r} \in \partial \Omega_{\mathcal{E}}} = 2 \frac{\frac{r_a}{\lambda_a^2}}{\frac{r_x^2}{\lambda_x^4} + \frac{r_y^2}{\lambda_y^4} + \frac{r_z^2}{\lambda_z^4}}.$$

3 Materie im elektrischen Feld

Damit

$$\begin{aligned}
 \left[\sum_{a \in \{x,y,z\}} n_a \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_a} \right]_{\mathbf{r} \in \partial \Omega_\varepsilon} &= 2 \sum_{a \in \{x,y,z\}} \frac{\frac{r_a}{\lambda_a^2}}{\sqrt{\frac{r_x^2}{\lambda_x^4} + \frac{r_y^2}{\lambda_y^4} + \frac{r_z^2}{\lambda_z^4}}} \frac{\frac{r_a}{\lambda_a^2}}{\left(\frac{r_x^2}{\lambda_x^4} + \frac{r_y^2}{\lambda_y^4} + \frac{r_z^2}{\lambda_z^4} \right)} \quad (3.58) \\
 &= 2 \frac{\sum_{a \in \{x,y,z\}} \frac{r_a^2}{\lambda_a^4}}{\left(\frac{r_x^2}{\lambda_x^4} + \frac{r_y^2}{\lambda_y^4} + \frac{r_z^2}{\lambda_z^4} \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{r_x^2}{\lambda_x^4} + \frac{r_y^2}{\lambda_y^4} + \frac{r_z^2}{\lambda_z^4}}}.
 \end{aligned}$$

Einsetzen liefert unter Beachtung der Definition (3.42) für die kartesischen Komponenten n_b der Flächennormalen \mathbf{n} die Identität

$$\begin{aligned}
 &\left[\left(\sum_{b \in \{x,y,z\}} C_b \frac{r_b}{\lambda_b^2} \right) \left(\sum_{a \in \{x,y,z\}} n_a \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_a} \right) \right]_{\mathbf{r} \in \partial \Omega_\varepsilon} \\
 &= \left[2 \sum_{b \in \{x,y,z\}} C_b \frac{\frac{r_b}{\lambda_b^2}}{\sqrt{\frac{r_x^2}{\lambda_x^4} + \frac{r_y^2}{\lambda_y^4} + \frac{r_z^2}{\lambda_z^4}}} \right]_{\mathbf{r} \in \partial \Omega_\varepsilon} = 2 \sum_{b \in \{x,y,z\}} C_b n_b.
 \end{aligned}$$

Schließlich

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{r} \in \partial \Omega_\varepsilon \quad (3.59) \\
 &\lim_{\eta \rightarrow 0^+} (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) (\mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \phi_\varepsilon(\mathbf{r} + \eta \mathbf{n}) \\
 &= \frac{1}{2} \left(- \sum_{b \in \{x,y,z\}} n_b I_b C_b + 2 \sum_{b \in \{x,y,z\}} C_b n_b \right) \\
 &= \sum_{b \in \{x,y,z\}} \left(1 - \frac{I_b}{2} \right) C_b n_b.
 \end{aligned}$$

Die Normalableitung des Potentials $\phi(\mathbf{r})$ an der Oberfläche von *außen* genommen

3.2 Das homogen polarisierte Ellipsoid in dielektrischer Materie

lautet nach dem Gesagten

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \in \partial\Omega_{\mathcal{E}} & \tag{3.60} \\
 \varepsilon^{(II)} \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} [\phi(\mathbf{r} + \eta \mathbf{n})] \\
 &= \varepsilon^{(II)} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \left[-\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r} + \eta \mathbf{n}) \right] \\
 &= \varepsilon^{(II)} \sum_{b \in \{x,y,z\}} \left[-E_b^{(0)} + \left(1 - \frac{I_b}{2}\right) C_b \right] n_b.
 \end{aligned}$$

Die Normalableitung des Potentials an der Oberfläche $\partial\Omega_{\mathcal{E}}$ von *innen* her genommen ist:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \in \partial\Omega_{\mathcal{E}} & \tag{3.61} \\
 \varepsilon^{(I)} \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} [\phi(\mathbf{r} - \eta \mathbf{n})] \\
 &= \varepsilon^{(I)} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \left[-\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r} - \eta \mathbf{n}) \right].
 \end{aligned}$$

Mit der im Inneren und auch auf der Oberfläche des Ellipsoids gültigen Relation

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \in \Omega_{\mathcal{E}} \\
 \frac{\partial}{\partial r_a} \phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}) = -\frac{I_a}{2} r_a \quad (\text{hier keine Summenkonvention!}) & \tag{3.62}
 \end{aligned}$$

für die erste Ableitung der Hilfsfunktion $\phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r})$ folgt jetzt

$$\mathbf{r} \in \partial\Omega_{\mathcal{E}} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^{(I)} \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} [\phi(\mathbf{r} - \eta \mathbf{n})] \\
 = \varepsilon^{(I)} \sum_{b \in \{x,y,z\}} \left(-E_b^{(0)} - \frac{I_b}{2} C_b \right) n_b. & \tag{3.64}
 \end{aligned}$$

Die Forderung der Stetigkeit der Tangentialkomponenten des dielektrischen Verschiebungsfeldes $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ beim Gang durch die Grenzfläche $\partial\Omega_{\mathcal{E}}$ liefert nach dem Gesagten für die drei unbekannt Parameter p_a unseres Ansatzes die Bestimmungsgleichung

$$\sum_{b \in \{x,y,z\}} \left\{ \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}\right) \frac{I_b}{2} \right] C_b - \left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}\right) E_b^{(0)} \right\} n_b = 0. \tag{3.65}$$

3 Materie im elektrischen Feld

Die hergeleitete Gleichung gilt für jede Flächennormale \mathbf{n} an jedem Punkt $\mathbf{r} \in \partial\Omega_{\mathcal{E}}$.

Man könnte jetzt den Eindruck gewinnen, dass hier die Koeffizienten

$$F_b = \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}} \right) \frac{I_b}{2} \right] C_b - \left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}} \right) E_b^{(0)} \quad (\text{keine Summenkonvention!})$$

der kartesischen Komponenten n_b der Flächennormalen \mathbf{n} nicht notwendig gleich Null sind, da die n_b über die Nebenbedingung $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ verknüpft sind. Wir zeigen jetzt für einen *konstanten* Vektor \mathbf{F} mit kartesischen Komponenten F_a :

$$\sum_{b \in \{x,y,z\}} F_b n_b = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \partial\Omega_{\mathcal{E}} \quad \Rightarrow F_a = 0. \quad (3.66)$$

Das ist richtig aufgrund der folgenden Überlegung:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{r} \in \partial\Omega_{\mathcal{E}} & \quad (3.67) \\ 0 &= \sum_{b \in \{x,y,z\}} F_b n_b \\ \Rightarrow 0 &= \int_{\partial\Omega_{\mathcal{E}}} d^2 r \left(\sum_{b \in \{x,y,z\}} F_b n_b \right)^2 \\ &= \sum_{a,b \in \{x,y,z\}} F_a F_b \int_{\partial\Omega_{\mathcal{E}}} d^2 r n_a n_b. \end{aligned}$$

Die Oberfläche $\partial\Omega_{\mathcal{E}}$ ist invariant unter Spiegelung an den Symmetrie-Ebenen des Ellipsoids $\Omega_{\mathcal{E}}$, das heißt

$$\int_{\partial\Omega_{\mathcal{E}}} d^2 r n_a n_b = 0 \quad \text{für } a \neq b. \quad (3.68)$$

Damit ist jetzt

$$0 = \sum_{b \in \{x,y,z\}} F_b^2 \underbrace{\int_{\partial\Omega_{\mathcal{E}}} d^2 r n_b^2}_{>0}. \quad (3.69)$$

Eine Summe positiver Zahlen ist aber nur dann gleich Null, wenn jeder Summand gleich Null ist, somit ist $F_b^2 = 0 = F_b$, was zu zeigen war.

3.2 Das homogen polarisierte Ellipsoid in dielektrischer Materie

Gemäß (3.66) verschwinden dann notwendig die Koeffizienten F_b vor einem Faktor n_b einzeln für $b \in \{x, y, z\}$. Hieraus folgt das Ergebnis

$$b \in \{x, y, z\}, \quad (3.70)$$

$$F_b \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C_b = \frac{1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}}{1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}\right) \frac{I_b}{2}} E_b^{(0)}.$$

Einsetzen von C_b in (3.46) ergibt schließlich das Resultat

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{a \in \{x, y, z\}} \left[-E_a^{(0)} r_a + \frac{1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}}{1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}\right) \frac{I_a}{2}} E_a^{(0)} \frac{\partial}{\partial r_a} \phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}) \right]. \quad (3.71)$$

Die gesuchte elektrostatische Feldstärke in der Umgebung des Ellipsoids ergibt sich dann wieder durch Berechnung des Gradienten gemäß $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r})$.

Nun zur physikalischen Interpretation des Potentials $\phi(\mathbf{r})$. In großer Entfernung zum Ellipsoid gilt für die Hilfsfunktion $\phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r})$ die Asymptotik

$$|\mathbf{r}| \gg \max(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$$

$$\phi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\frac{4\pi}{3} \lambda_x \lambda_y \lambda_z}{|\mathbf{r}|} = \frac{|\Omega_{\mathcal{E}}|}{4\pi |\mathbf{r}|}$$

$$|\Omega_{\mathcal{E}}| = \frac{4\pi}{3} \lambda_x \lambda_y \lambda_z \text{ (Volumen des Ellipsoids).}$$

Dann ist in führender Ordnung das Potential bzw. das elektrische Feld gegeben zu

$$|\mathbf{r}| \gg \max(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z) \quad (3.72)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{a \in \{x, y, z\}} \left[-E_a^{(0)} r_a + \frac{1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}}{1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}\right) \frac{I_a}{2}} \cdot |\Omega_{\mathcal{E}}| \left(-\frac{r_a}{4\pi |\mathbf{r}|^3} E_a^{(0)} \right) \right]$$

$$E_b(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial r_b} \phi(\mathbf{r}) = E_b^{(0)} - \frac{1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}}{1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}\right) \frac{I_a}{2}} \cdot |\Omega_{\mathcal{E}}| \cdot \frac{3r_b r_a E_a^{(0)} - |\mathbf{r}|^2 E_b^{(0)}}{4\pi |\mathbf{r}|^5}.$$

Vergleichen wir nun unser Ergebnis $E_b(\mathbf{r}) - E_b^{(0)}$ mit dem Feld

$$\mathbf{E}^{(D)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - |\mathbf{r}|^2 \mathbf{p}}{|\mathbf{r}|^5}$$

3 Materie im elektrischen Feld

eines elektrischen Punkt-Dipols mit Dipolmoment \mathbf{p} , der sich am Ort $\mathbf{r} = 0$ befindet, so ergibt sich Übereinstimmung, wenn wir das betreffende Dipolmoment unseres Ellipsoids identifizieren als

$$p_a = -\varepsilon_0 \frac{1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}}{1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}\right) \frac{I_a}{2}} \cdot |\Omega_{\mathcal{E}}| E_a^{(0)}. \quad (3.73)$$

Im *Inneren* des Ellipsoids erhalten wir das interessante Resultat, dass die Komponenten E_b der elektrostatische Feldstärke dort konstant sind, also \mathbf{E} *ortsunabhängig* ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\in \Omega_{\mathcal{E}}, \quad b \in \{x, y, z\} & (3.74) \\ E_b &= -\frac{\partial}{\partial r_b} \phi(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial r_b} \sum_{a \in \{x, y, z\}} \left[-E_a^{(0)} r_a + \frac{1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}}{1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}\right) \frac{I_a}{2}} E_a^{(0)} \left(-\frac{I_a}{2} r_a\right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial r_b} \sum_{a \in \{x, y, z\}} \left[1 + \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}\right) \frac{I_a}{2}}{1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}\right) \frac{I_a}{2}} \right] E_a^{(0)} r_a \\ &= E_b^{(0)} + \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}\right) \frac{I_b}{2}}{1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}\right) \frac{I_b}{2}} E_b^{(0)} \quad (\text{keine Summenkonvention!}) \end{aligned}$$

Das Feld \mathbf{E} im Inneren von $\Omega_{\mathcal{E}}$ ist offensichtlich nur dann parallel zum äußeren Feld $\mathbf{E}^{(0)}$, wenn $\mathbf{E}^{(0)}$ parallel zu einer der Halbachsen des Ellipsoids orientiert ist. Hervorzuheben ist noch, dass das Indexintegral I_a im Nenner der jeweiligen kartesischen Komponenten E_a nur von den *Verhältnissen* der Halbachsen λ_x , λ_y und λ_z des Ellipsoids $\Omega_{\mathcal{E}}$ abhängt:

$$\begin{aligned} \text{Substitution } s &= \frac{u}{\lambda_z^2} & (3.75) \\ I_a &= \frac{\lambda_x \lambda_y}{\lambda_z^2} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left(s + \frac{\lambda_x^2}{\lambda_z^2}\right) \left(u + \frac{\lambda_y^2}{\lambda_z^2}\right) (u+1)}} \frac{1}{s + \frac{\lambda_a^2}{\lambda_z^2}}. \end{aligned}$$

Ein ähnliches kleineres bzw. größeres Ellipsoid mit skalierten Halbachsen $\Lambda_a = \nu \lambda_a$ für $a \in \{x, y, z\}$ hat für $0 < \nu < \infty$ in seinem Inneren das gleiche elektrische Feld wie das ursprüngliche Ellipsoid $\Omega_{\mathcal{E}}$.

3.2 Das homogen polarisierte Ellipsoid in dielektrischer Materie

Der Zusatzterm, um den sich das Feld E_b im Inneren vom äußeren homogenen Feld $E_b^{(0)}$ unterscheidet, ist das sog. *Depolarisationsfeld*

$$E_b - E_b^{(0)} = \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}\right) \frac{I_b}{2}}{1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}\right) \frac{I_b}{2}} E_b^{(0)} \quad (\text{keine Summenkonvention!}). \quad (3.76)$$

Dieses Depolarisationsfeld können wir offensichtlich durch das zuvor identifizierte Dipolmoment (3.73) des Ellipsoids ausdrücken:

$$E_b - E_b^{(0)} = -\frac{I_b}{2\varepsilon_0} \frac{p_b}{|\Omega_{\mathcal{E}}|} = -\frac{I_b}{2\varepsilon_0} P_b. \quad (3.77)$$

Hier ist

$$P_b = \frac{p_b}{|\Omega_{\mathcal{E}}|} = -\varepsilon_0 \frac{1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}}{1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}\right) \frac{I_a}{2}} \cdot E_a^{(0)} \quad (3.78)$$

gerade die Polarisierung P_b im Inneren des Ellipsoids $\Omega_{\mathcal{E}}$.

Spezialfall: dielektrische Kugel im konstanten Feld

Für eine Kugel mit Radius R gilt wegen $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = R$, wie in (2.57) gezeigt wurde, $I_a = \frac{2}{3}$. In dem Fall folgt sofort das Depolarisationsfeld zu

$$\begin{aligned} E_a - E_a^{(0)} &= -\frac{I_a}{2\varepsilon_0} P_a \quad (\text{keine Summenkonvention!}) \\ &= \frac{1}{3} \frac{1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}}{1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^{(I)}}{\varepsilon^{(II)}}\right) \frac{1}{3}} \cdot E_a^{(0)} = \frac{\varepsilon^{(II)} - \varepsilon^{(I)}}{2\varepsilon^{(II)} + \varepsilon^{(I)}} \cdot E_a^{(0)}. \end{aligned}$$

Siehe die Abbildungen 3.3–3.7 für eine grafische Veranschaulichung der Effekte der Polarisation.

3 Materie im elektrischen Feld

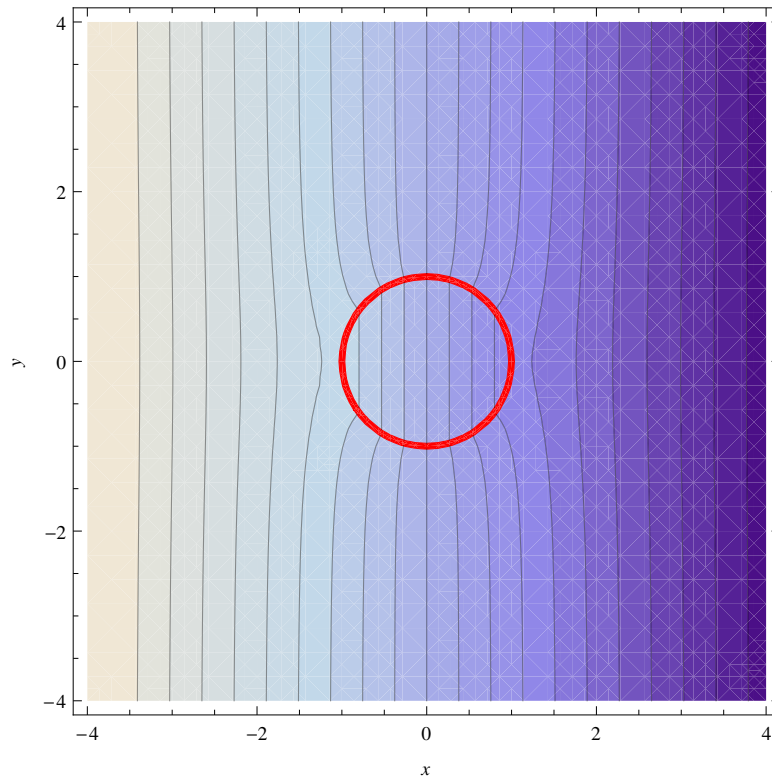


Abbildung 3.3: Äquipotentialflächen einer Kugel mit Radius $r = 1$, Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon^{(I)} = 1$, $\varepsilon^{(II)} = 10$ und angelegtem äußeren elektrischen Feld $\mathbf{E} = (1, 0, 0)$

3.2 Das homogen polarisierte Ellipsoid in dielektrischer Materie

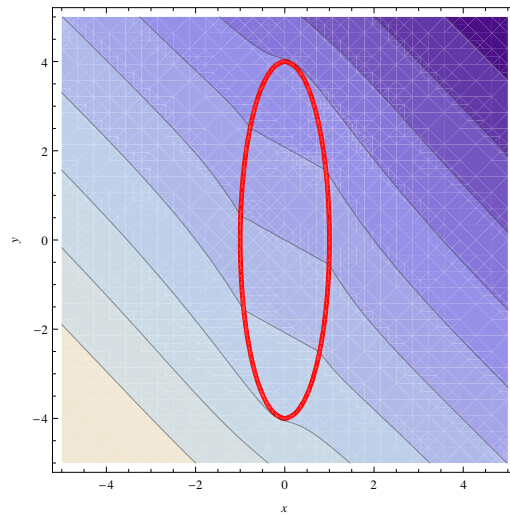


Abbildung 3.4: Äquipotentialflächen eines Ellipsoids mit den Halbachsen $\lambda_x = 1$, $\lambda_y = 4$ und $\lambda_z = 2$, der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon^{(I)} = 3$, $\varepsilon^{(II)} = 1$ und angelegtem äußeren elektrischen Feld: $\mathbf{E} = 1/\sqrt{2}(1, 1, 0)$.

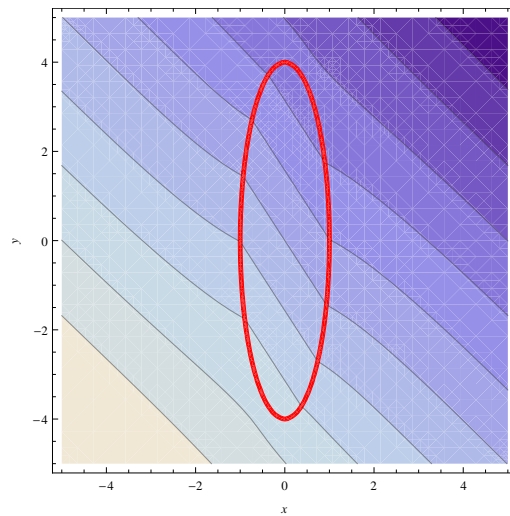


Abbildung 3.5: Äquipotentialflächen eines Ellipsoids mit den Halbachsen $\lambda_x = 1$, $\lambda_y = 4$ und $\lambda_z = 2$, der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon^{(I)} = 1$, $\varepsilon^{(II)} = 3$ und angelegtem äußeren elektrischen Feld: $\mathbf{E} = 1/\sqrt{2}(1, 1, 0)$.

3 Materie im elektrischen Feld

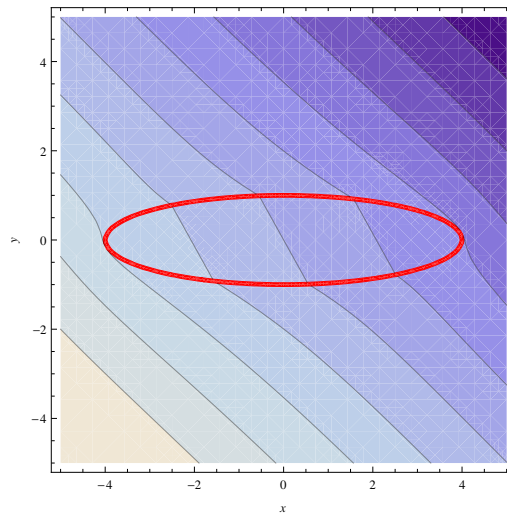


Abbildung 3.6: Äquipotentialflächen eines Ellipsoids mit den Halbachsen $\lambda_x = 4$, $\lambda_y = 1$ und $\lambda_z = 2$, der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon^{(I)} = 3$, $\varepsilon^{(II)} = 1$ und angelegtem äußeren elektrischen Feld: $\mathbf{E} = 1/\sqrt{2}(1, 1, 0)$.

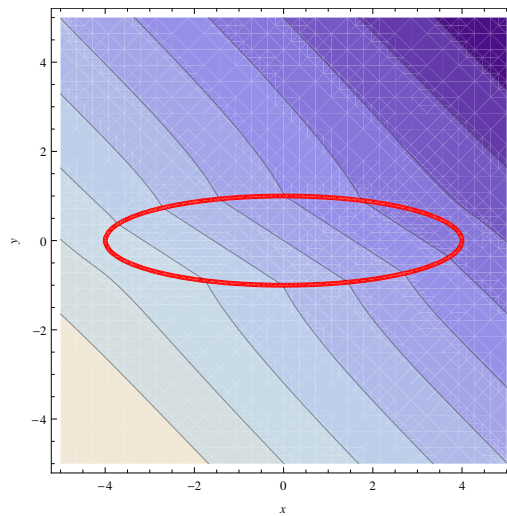


Abbildung 3.7: Äquipotentialflächen eines Ellipsoids mit den Halbachsen $\lambda_x = 4$, $\lambda_y = 1$ und $\lambda_z = 2$, der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon^{(I)} = 1$, $\varepsilon^{(II)} = 3$ und angelegtem äußeren elektrischen Feld: $\mathbf{E} = 1/\sqrt{2}(1, 1, 0)$.

3.3 Clausius-Mosotti-Relation

Die folgende Überlegung stellt einen Zusammenhang zwischen der Dielektrizitätskonstanten ε eines makroskopischen Dielektrikums Ω mit Teilchendichte $n_\Omega = \frac{N}{|\Omega|}$ und der *mikroskopischen* Polarisierbarkeit α eines *einzelnen* Moleküls (Atoms) her. Aufgrund des diskreten Aufbaus der Materie sind die Moleküle (Atome), aus denen ein Dielektrikum (z.B. reines Silizium Si oder BaTiO₃) aufgebaut ist, auf Gitterplätzen

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(m_1, m_2, m_3)} &= m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2 + m_3 \mathbf{b}_3 \\ m_1, m_2, m_3 &\in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (3.79)$$

positioniert, wobei \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 und \mathbf{b}_3 linear unabhängige Basisvektoren sind, die das Gitter Λ aufspannen. Wird an eine Probe des Dielektrikums nun ein äußeres elektrisches Feld $\mathbf{E}^{(0)}$ angelegt, so werden die Moleküle im Inneren der Probe polarisiert, so dass an jedem Gitterplatz $\mathbf{r} = \mathbf{R}^{(m_1, m_2, m_3)} \in \Lambda$ ein induziertes atomares Dipolmoment

$$\mathbf{p}^{(m_1, m_2, m_3)} = \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E}^{(\text{lokal})}(\mathbf{r}) \quad (3.80)$$

erzeugt wird. Hier bezeichnet α die *mikroskopische* Polarisierbarkeit eines einzelnen Moleküls am Gitterplatz $\mathbf{R}^{(m_1, m_2, m_3)}$. Mit der Teilchendichte n_Ω ist demnach die Polarisierung gegeben zu

$$\mathbf{P} = n_\Omega \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E}^{(\text{lokal})}(\mathbf{r}). \quad (3.81)$$

Das lokale Feld $\mathbf{E}^{(\text{lokal})}(\mathbf{r})$ unterscheidet sich vom makroskopischen Feld $\mathbf{E}^{(0)}$, weil die an den anderen Gitterplätzen $\mathbf{R}^{(m'_1, m'_2, m'_3)} \neq \mathbf{R}^{(m_1, m_2, m_3)}$ befindlichen Moleküle, die ja ebenfalls polarisiert sind, ein sog. Depolarisationsfeld generieren. Dementsprechend ist das lokale Feld $\mathbf{E}^{(\text{lokal})}(\mathbf{r})$ auf der Skala des nächsten Nachbarabstands (Gitterkonstante a_G) im Inneren eines Dielektrikums starken örtlichen Schwankungen unterworfen, was die direkte Berechnung des Feldes $\mathbf{E}^{(\text{lokal})}(\mathbf{r})$ auf den ersten Blick sehr erschwert. Wir suchen nun einen Zusammenhang zwischen der makroskopischen Polarisierung \mathbf{P} , die ja in einem linearen Dielektrikum gegeben ist zu

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \mathbf{E}^{(0)}, \quad (3.82)$$

und dem mikroskopischen Dipolmoment eines einzelnen Moleküls gemäß (3.80) und (3.81).

3 Materie im elektrischen Feld

Dazu denken wir uns jetzt um einen Gitterpunkt $\mathbf{R}^{(m_1, m_2, m_3)}$ als Mittelpunkt eine Kugel mit Radius R und schreiben für das Feld in der Umgebung des Kugelmittelpunktes

$$\mathbf{E}^{(\text{lokal})}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(\text{nah})}(\mathbf{r}; R) + \mathbf{E}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}; R) \quad (3.83)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{R}^{(m_1, m_2, m_3)}| < R.$$

Das lokale Feld $\mathbf{E}^{(\text{lokal})}(\mathbf{r})$ am Ort des Mittelpunktes der Kugel setzt sich demnach aus zwei Beiträgen zusammen. Das Nahfeld $\mathbf{E}^{(\text{nah})}(\mathbf{r}; R)$ wird von den elektrischen Feldern der Dipole innerhalb der Kugel erzeugt, das Fernfeld $\mathbf{E}(\mathbf{r}; R)$ von den elektrischen Feldern der Dipole außerhalb der Kugel, sowie dem äußeren makroskopischen Feld $\mathbf{E}^{(0)}$. Die Summe über die Dipolfelder von Molekülen auf Gitterpunkten außerhalb der Kugel kann durch ein Integral ersetzt werden, falls der Radius R der Kugel dabei groß gegenüber der Gitterkonstanten a_G und zugleich aber klein gegenüber den Längenskalen gewählt wird, auf denen das makroskopische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}; R)$ variiert. Für das Dipolmoment $\mathbf{p}^{(m'_1, m'_2, m'_3)}$ der Moleküle auf den Gitterplätzen $\mathbf{R}^{(m'_1, m'_2, m'_3)}$ innerhalb der Kugel gilt dann

$$\mathbf{p}^{(m'_1, m'_2, m'_3)} = \mathbf{p}^{(m_1, m_2, m_3)} \equiv \mathbf{p} \quad (3.84)$$

$$|\mathbf{R}^{(m'_1, m'_2, m'_3)} - \mathbf{R}^{(m_1, m_2, m_3)}| < R,$$

das heißt alle Dipolmomente *innerhalb* der betrachteten Kugel sind gleich orientiert!

Zur Berechnung des Nahfeldes $\mathbf{E}^{(\text{nah})}(\mathbf{r}; R)$ sind die Beiträge der entsprechenden elektrischen Dipolfelder

$$\mathbf{E}^{(D)}\left(\mathbf{R}^{(m'_1, m'_2, m'_3)}\right) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - |\mathbf{r}|^2\mathbf{p}}{|\mathbf{r}|^5} \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{R}^{(m'_1, m'_2, m'_3)}}, \quad (3.85)$$

herrührend jeweils von *einem* Molekül am Gitterplatz $\mathbf{R}^{(m'_1, m'_2, m'_3)}$ innerhalb der Kugel, nun zu summieren:

$$\mathbf{E}^{(\text{nah})}(\mathbf{r}; R) = \sum_{\substack{m'_1, m'_2, m'_3 \\ |\mathbf{R}^{(m'_1, m'_2, m'_3)} - \mathbf{R}^{(m_1, m_2, m_3)}| < R}} \mathbf{E}^{(D)}\left(\mathbf{R}^{(m'_1, m'_2, m'_3)}\right). \quad (3.86)$$

3.3 Clausius-Mosotti-Relation

Der Wert der Summe hängt offensichtlich von der zugrunde liegenden Kristallstruktur des Dielektrikums ab.

In einer *symmetrischen* Situation, wenn z.B. die Moleküle auf den Plätzen eines *kubischen* Gitter positioniert sind, gilt dann tatsächlich

$$\mathbf{E}^{(\text{nah})}(\mathbf{r}; R) = \mathbf{0}, \quad (3.87)$$

denn in einem kubischen Gitter mit Basisvektoren $\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_y$ und $\mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_z$ und Gitterkonstanten a_G sind die Beiträge zum Nahfeld wegen der Symmetrie des Gitters darstellbar als Teilsumme der Felder von je acht immer gleich orientierten Dipolen auf den Ecken eines Würfels mit Mittelpunkt $\mathbf{R}^{(m_1, m_2, m_3)}$, wobei die Positionen $\mathbf{R}^{(m_1 \pm l, m_2 \pm l, m_3 \pm l)}$ der Ecken gegeben sind zu

$$1 \leq l \leq L(R) \quad (3.88)$$

$$\mathbf{R}^{(m_1 \pm l, m_2 \pm l, m_3 \pm l)} = ((m_1 \pm l) \mathbf{e}_x + (m_2 \pm l) \mathbf{e}_y + (m_3 \pm l) \mathbf{e}_z) a_G$$

Insgesamt passt eine endlich große Anzahl $L(R)$ von solchen Würfeln in die betrachtete Kugel. Demnach

$$\mathbf{E}^{(\text{nah})}(\mathbf{r}; R) \quad (3.89)$$

$$= \sum_{l=1}^{L(R)} \left[\begin{array}{l} \mathbf{E}^{(D)}(\mathbf{R}^{(m_1+l, m_2+l, m_3+l)}) + \mathbf{E}^{(D)}(\mathbf{R}^{(m_1+l, m_2+l, m_3-l)}) \\ + \mathbf{E}^{(D)}(\mathbf{R}^{(m_1+l, m_2-l, m_3+l)}) + \mathbf{E}^{(D)}(\mathbf{R}^{(m_1+l, m_2-l, m_3-l)}) \\ \mathbf{E}^{(D)}(\mathbf{R}^{(m_1-l, m_2+l, m_3+l)}) + \mathbf{E}^{(D)}(\mathbf{R}^{(m_1-l, m_2+l, m_3-l)}) \\ + \mathbf{E}^{(D)}(\mathbf{R}^{(m_1-l, m_2-l, m_3+l)}) + \mathbf{E}^{(D)}(\mathbf{R}^{(m_1-l, m_2-l, m_3-l)}) \end{array} \right] + \delta \mathbf{E}^{(\text{nah})}(\mathbf{r}; R).$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\equiv \mathbf{0}}$$

Man überzeugt sich leicht, dass der Beitrag jeder dieser Achtergruppen für $1 \leq l \leq L(R)$ identisch verschwindet, da alle Dipolmomente gemäß (3.84) gleich orientiert sind. Ein zusätzlicher Beitrag $\delta \mathbf{E}^{(\text{nah})}(\mathbf{r}; R)$ zum Nahfeld geht auf die Dipolfelder von Molekülen auf Gitterplätzen $\mathbf{R}^{(m_1 \pm l, m_2 \pm l, m_3 \pm l)}$ zurück, die zwar innerhalb der betrachteten Kugel mit Radius R liegen, für die aber gilt $l > L(R)$, so dass sie nicht mehr auf den Eckpunkten eines Würfels positioniert werden können, der in

3 Materie im elektrischen Feld

die Kugel hineinpasst. Wenn nur R groß genug gewählt wurde, ist dieser Beitrag vernachlässigbar klein.

Damit gilt im Inneren der Kugel (bei kubischer Symmetrie!) die Relation

$$\mathbf{E}^{(\text{lokal})}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}; R). \quad (3.90)$$

Nach dem Gesagten ist die Polarisierung im Inneren der Kugel gleich Null, während außen das makroskopische konstante Feld $\mathbf{E}^{(0)}$ herrscht, das dort eine makroskopische Polarisierung

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \mathbf{E}^{(0)} \quad (3.91)$$

generiert. Diese Polarisierung erzeugt auf der Kugeloberfläche $|\mathbf{r}'| = R$ aufgrund der Randbedingung, dass die Normalkomponente des Verschiebungsfeldes in Abwesenheit von freien Ladungen beim Gang durch die Oberfläche der Kugel stetig ist, nun eine Flächendichte $\omega^{(P)}(\mathbf{r}')$ von Polarisationsladungen:

$$-\omega^{(P)}(\mathbf{r}') = [(-\mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{P}]_{|\mathbf{r}'|=R} = -\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}^{(0)}. \quad (3.92)$$

Am Mittelpunkt $\mathbf{r} = \mathbf{R}^{(m_1, m_2, m_3)}$ der Kugel ist demnach dem äußeren Feld $\mathbf{E}^{(0)}$ aufgrund der auf der Kugeloberfläche sitzenden Polarisationsladungen ein zusätzliches elektrisches Feld überlagert:

$$\mathbf{E}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(\text{lokal})}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(0)} + \int_{|\mathbf{r}'|=R} d^2r' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \omega^{(P)}(\mathbf{r}'). \quad (3.93)$$

Wir führen Kugelkoordinaten ein und legen die Polarachse \mathbf{e}_z in Richtung des äußeren makroskopischen Feldes $\mathbf{E}^{(0)}$, also

$$\mathbf{E}^{(0)} = E^{(0)} \mathbf{e}_z. \quad (3.94)$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 E_x^{(\text{lokal})}(\mathbf{r}; R) &= E_y^{(\text{lokal})}(\mathbf{r}; R) \equiv 0 & (3.95) \\
 E_z^{(\text{lokal})}(\mathbf{r}; R) &= E^{(0)} + R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \frac{R \cos \vartheta}{4\pi \varepsilon_0 R^3} \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E^{(0)} \cos \vartheta \\
 &= E^{(0)} + \frac{\varepsilon - 1}{2} E^{(0)} \cdot \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \cos^2 \vartheta}_{=\frac{2}{3}} \\
 &= E^{(0)} + \frac{1}{3} (\varepsilon - 1) E^{(0)} \\
 &= E^{(0)} + \frac{P_z}{3\varepsilon_0}.
 \end{aligned}$$

Das Resultat ist *unabhängig* vom Radius R der Kugel! Folglich ist die makroskopische Feldstärke $\mathbf{E}^{(\text{lokal})}$ an einem Ort \mathbf{r} im Inneren des Dielektrikums gegeben zu

$$\mathbf{E}^{(\text{lokal})} = \mathbf{E}^{(0)} + \frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P}. \quad (3.96)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E}^{(0)} &= \mathbf{P} & (3.97) \\
 &= n_\Omega \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E}^{(\text{lokal})} \\
 &= n_\Omega \alpha \left(\mathbf{E}^{(0)} + \frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P} \right) \varepsilon_0 \\
 &= n_\Omega \alpha \left(1 + \frac{\varepsilon - 1}{3} \right) \varepsilon_0 \mathbf{E}^{(0)} \\
 &= \frac{n_\Omega \alpha}{3} (\varepsilon + 2) \varepsilon_0 \mathbf{E}^{(0)}.
 \end{aligned}$$

Wir erhalten durch Koeffizientenvergleich in der ersten beziehungsweise letzten Zeile die auf Clausius (1850) und Mosotti (1879) zurückgehende Relation für den Zusammenhang zwischen mikroskopischer Polarisierung α und makroskopischer Dielektrizitätskonstante ε

$$\boxed{\frac{\alpha n_\Omega}{3} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}} \quad (3.98)$$

3 Materie im elektrischen Feld

Eine einfache Umformung liefert äquivalent

$$\varepsilon = \frac{1 + \frac{2}{3}\alpha n_\Omega}{1 - \frac{1}{3}\alpha n_\Omega}. \quad (3.99)$$

Demnach ist die Dielektrizitätskonstante ε in einem dielektrischen Material eine Funktion der Teilchendichte n_Ω und der molekularen (atomaren) Polarisierbarkeit α . Im Sinne der Thermodynamik stellt die Clausius-Mosotti-Relation somit eine *Zustandsgleichung* für ein Dielektrikum im Gleichgewicht dar. In so einem Material gilt dann für die Ableitung von $\varepsilon = \varepsilon[n_\Omega]$ nach der Teilchendichte²

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_\Omega} = \frac{(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)}{3n_\Omega}. \quad (3.100)$$

3.4 Kraft auf einen idealen Leiter im äußeren elektrischen Feld

Nach dem im obigen Abschnitt über das homogen polarisierte Ellipsoid Gesagten folgt das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$ einer *ungeladenen* ideal leitenden Kugel mit Radius R , deren Mittelpunkt z.B. am Ursprung des Koordinatensystems im freien Raum positioniert ist, aus (3.72), indem man $\varepsilon^{(II)} = 1$ setzt und den Limes $\varepsilon^{(I)} \rightarrow \infty$ vollzieht. Trägt die ideal leitende Kugel noch dazu die Ladung q , so ist das entsprechende Potential im Außengebiet der Kugel gegeben zu

$$|\mathbf{r}| \geq R \quad (3.101)$$
$$\phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{r} + R^3 \frac{\mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}|}.$$

Der erste Term beschreibt das homogene konstante äußere Feld, der zweite Term beschreibt das auf der Kugel influenzierte Dipolmoment. Die elektrostatische Feldstärke folgt hieraus zu

$$a \in \{x, y, z\} \quad (3.102)$$
$$E_a(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial r_a} \phi(\mathbf{r}) = E_a^{(0)} + R^3 \frac{3(\mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{r}) r_a - |\mathbf{r}|^2 E_a^{(0)}}{|\mathbf{r}|^5} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_a}{|\mathbf{r}|^3}.$$

²Für Dielektrika mit nicht-kubischer Kristallsymmetrie kann man ähnliche Beziehungen herleiten, allerdings ist die Gittersumme $\mathbf{E}^{(\text{nah})}(\mathbf{r}; R)$ dann nicht mehr gleich Null!

3.4 Kraft auf einen idealen Leiter im äußeren elektrischen Feld

Demnach existiert auf der Oberfläche der Kugel mit Radius R und Flächennormalen $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ eine Flächenladungsdichte

$$\begin{aligned}
 \omega^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r})|_{|\mathbf{r}|=R} &= \varepsilon_0 [\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})]_{|\mathbf{r}|=R} = \varepsilon_0 \left[\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right]_{|\mathbf{r}|=R} & (3.103) \\
 &= \varepsilon_0 \sum_{a \in \{x,y,z\}} \left\{ \frac{r_a}{R} \cdot \left[E_a^{(0)} + \frac{3(\mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{r}) r_a - R^2 E_a^{(0)}}{R^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_a}{R^3} \right] \right\}_{|\mathbf{r}|=R} \\
 &= \varepsilon_0 \left[\frac{3\mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{r}}{R} \frac{\sum_{a \in \{x,y,z\}} r_a^2}{R^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \frac{\sum_{a \in \{x,y,z\}} r_a^2}{R^2} \right]_{|\mathbf{r}|=R} \\
 &= \left[3\varepsilon_0 \mathbf{E}^{(0)} \cdot \frac{\mathbf{r}}{R} + \frac{q}{4\pi R^2} \right]_{|\mathbf{r}|=R}.
 \end{aligned}$$

Die Kraftdichte $f_a(\mathbf{r})$ auf der Oberfläche der Kugel setzen wir jetzt an als das Produkt aus Flächenladungsdichte $\omega^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r})$ und Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, wobei ein Faktor γ noch zu bestimmen bleibt:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{r}| &= R & (3.104) \\
 f_a(\mathbf{r}) &= \gamma \cdot \omega^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r}) E_a(\mathbf{r}).
 \end{aligned}$$

3 Materie im elektrischen Feld

Die Kraft auf die ideal leitende Kugel im homogenen elektrischen Feld $\mathbf{E}^{(0)}$ ist jetzt das Integral über die Kraftdichte

$$\begin{aligned}
 a &\in \{x, y, z\} \\
 F_a &= \int_{|\mathbf{r}'|=R} d^2r' f_a(\mathbf{r}') = \gamma \int_{|\mathbf{r}'|=R} d^2r' \omega^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r}') E_a(\mathbf{r}') \\
 &= \gamma \int_{|\mathbf{r}'|=R} d^2r' \left[3\varepsilon_0 \left(\mathbf{E}^{(0)} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{R} \right) + \frac{q}{4\pi R^2} \right] \\
 &\quad \times \left[E_a^{(0)} + \frac{3 \left(\mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{r}' \right) r'_a - R^2 E_a^{(0)}}{R^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r'_a}{R^3} \right] \\
 &= \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \int_{|\mathbf{r}'|=R} d^2r' \left[3\varepsilon_0 \left(\mathbf{E}^{(0)} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{R} \right) + \frac{q}{4\pi R^2} \right]^2 \frac{r'_a}{R} \\
 &= 6\gamma \frac{q}{4\pi R^2} \sum_{b \in \{x, y, z\}} E_b^{(0)} \underbrace{\int_{|\mathbf{r}'|=R} d^2r' \frac{r'_b r'_a}{R^2}}_{= \frac{4\pi R^2}{3} \delta_{a,b}} \\
 &= 2\gamma q E_a^{(0)}.
 \end{aligned}$$

Wie wir ja bereits wissen, ist das elektrostatische Feld einer ideal leitenden Kugel, die eine Ladung q trägt, im Außengebiet der Kugel äquivalent zum Coulomb-Feld einer Punktladung q am Ort des Mittelpunkts der Kugel. Somit ist klar, dass auf die Kugel im äußeren homogenen elektrostatischen Feld $\mathbf{E}^{(0)}$ die Kraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}^{(0)} \quad (3.105)$$

wirkt. Der Wert des Parameters γ ist folglich festgelegt zu

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad (3.106)$$

Die Kraftdichte $f_a(\mathbf{r})$ auf der Oberfläche $\partial\Omega$ eines beliebig geformten idealen Leiters mit Flächenladungsdichte $\omega^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r})$ in einem elektrostatischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ist demnach

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \mathbf{r} &\in \partial\Omega \\
 f_a(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \omega^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r}) E_a(\mathbf{r}) \\
 a &\in \{x, y, z\}.
 \end{aligned}
 } \quad (3.107)$$

3.5 Kräfte im isotropen Dielektrikum

Ein Dielektrikum wie z.B. Quarz oder reines Silizium ist insbesondere auch ein elastischer Körper, in dessen Innerem rücktreibende Kräfte wirken, die sich einer Kompression oder Deformation des Körpers durch äußere Kräfte widersetzen. Wir betrachten ein Dielektrikum Ω mit Teilchendichte $n^{(\Omega)}(\mathbf{r})$ im äußeren elektrostatischen Potential $\phi(\mathbf{r})$. Die Ladungsdichte des Dielektrikums $\rho(\mathbf{r})$ setzt sich dabei aus der Dichte $\rho^{(f)}(\mathbf{r})$ der freien Ladungen und aus der Dichte $\rho^{(P)}(\mathbf{r})$ der Polarisationsladungen zusammen

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho^{(f)}(\mathbf{r}) + \rho^{(P)}(\mathbf{r}). \quad (3.108)$$

Werden die Ladungen verschoben, entsprechend einer Änderung der Ladungsdichte

$$\delta\rho(\mathbf{r}) = \delta\rho^{(f)}(\mathbf{r}) + \delta\rho^{(P)}(\mathbf{r}), \quad (3.109)$$

so ändert sich die elektrostatische Energie des Systems gemäß

$$\delta U^{(C)} = \int_{\Omega} d^3r [\delta\rho^{(f)}(\mathbf{r}) + \delta\rho^{(P)}(\mathbf{r})] \phi(\mathbf{r}). \quad (3.110)$$

Allerdings ist die Materie stabil, d.h. jeder Änderung $\delta\rho^{(P)}(\mathbf{r})$ der Polarisationsladungsdichte (etwa im Rahmen eines hinreichend langsam geführten adiabatischen Prozesses) wirkt ein Potential $\phi^{(\text{in})}(\mathbf{r})$ der inneren Rückstellkräfte dem äußeren Potential $\phi(\mathbf{r})$ entgegen. Demnach ist die Änderung der Energie des Dielektrikums nicht gegeben durch die elektrostatische Energie $\delta U^{(C)}$, sondern durch

$$\delta U = \int_{\Omega} d^3r \delta\rho^{(f)}(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) + \int_{\Omega} d^3r \delta\rho^{(P)}(\mathbf{r}) [\phi(\mathbf{r}) + \phi^{(\text{in})}(\mathbf{r})]. \quad (3.111)$$

Im Gleichgewicht ist die Energie U des Systems stationär bzgl. einer Änderung $\delta\rho^{(P)}(\mathbf{r})$ der Polarisationsladungen

$$\frac{\delta U}{\delta\rho^{(P)}(\mathbf{r}')} \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.112)$$

Dies ist eine Bestimmungsgleichung für das Potential $\phi^{(\text{in})}(\mathbf{r})$ der inneren Kräfte

$$\phi^{(\text{in})}(\mathbf{r}) = -\phi(\mathbf{r}). \quad (3.113)$$

3 Materie im elektrischen Feld

Das Potential $\phi(\mathbf{r})$ der äußeren Kräfte wird demnach im Gleichgewicht durch das Potential der inneren Kräfte $\phi^{(\text{im})}(\mathbf{r})$ kompensiert, sofern das System ausschließlich *externen* rein elektrostatischen Kräften ausgesetzt ist. Das Dielektrikum befindet sich für $\delta\rho^{(f)}(\mathbf{r}) = 0$ demnach in einem kräftefreien Zustand, oder es wird festgehalten.

Es folgt nach dem Gesagten mit

$$\text{div}[\delta\mathbf{D}(\mathbf{r})] = \delta\rho^{(f)}(\mathbf{r}) \quad (3.114)$$

nunmehr

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega} d^3r \delta\rho^{(f)}(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \\ &= \int_{\Omega} d^3r \text{div}[\delta\mathbf{D}(\mathbf{r})] \phi(\mathbf{r}) \\ &= \int_{\Omega} d^3r [-\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r})] \cdot \delta\mathbf{D}(\mathbf{r}) + \int_{\Omega} d^3r \text{div}[\phi(\mathbf{r}) \delta\mathbf{D}(\mathbf{r})] \\ &= \int_{\Omega} d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{D}(\mathbf{r}) + \int_{\partial\Omega} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \delta\mathbf{D}(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (3.115)$$

Im Limes eines unendlich großen Volumens $|\Omega|$ gibt das Oberflächenintegral über den Rand $\partial\Omega$ keinen Beitrag. Also folgt

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega} d^3r \delta u[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}), \mathbf{D}(\mathbf{r})] \\ &= \int_{\Omega} d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{D}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.116)$$

Das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ im Inneren von thermodynamisch stabiler Materie ist somit gegeben als Variationsableitung der Energiedichte $u[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}), \mathbf{D}(\mathbf{r})]$ nach dem Verschiebungsfeld:

$$\boxed{ \begin{aligned} a &\in \{x, y, z\} \\ E_a(\mathbf{r}) &= \frac{\delta u[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}), \mathbf{D}(\mathbf{r})]}{\delta D_a(\mathbf{r})}. \end{aligned} } \quad (3.117)$$

Wir betrachten jetzt den Sonderfall eines *linearen* Dielektrikums. Wie die Clausius-Mosotti-Relation zeigt, ist die Dielektrizitätskonstante ε von der Teilchendichte $n^{(\Omega)}$ des Materials abhängig. Ist diese eine Funktion des Ortes, so ist auch

3.5 Kräfte im isotropen Dielektrikum

$\varepsilon = \varepsilon[n^{(\Omega)}]$ mittelbar über die Teilchendichte $n^{(\Omega)} = n^{(\Omega)}(\mathbf{r})$ eine Funktion des Ortes. Somit sind die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ im isotropen *linearen* Dielektrikum verknüpft über die Materialgleichung

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon [n^{(\Omega)}] \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (3.118)$$

Im allgemeinen ist die Energiedichte eines elastischen Mediums von seinem Verzerrungszustand abhängig. Im *einfachsten* Fall ist die Energiedichte des Dielektrikums in Abwesenheit von äußeren Coulomb-Kräften nur von der Teilchendichte abhängig, wie z.B. in einer dielektrischen Flüssigkeit:

$$u^{(0)} = u^{(0)} [n^{(\Omega)}(\mathbf{r})]. \quad (3.119)$$

Dann ist die Energiedichte im äußeren elektrostatischen Feld gegeben zu

$$\begin{aligned} u [n^{(\Omega)}, \mathbf{D}(\mathbf{r})] &= u^{(0)} [n^{(\Omega)}] + \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= u^{(0)} [n^{(\Omega)}] + \frac{\varepsilon_0}{2} \varepsilon [n^{(\Omega)}] \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= u^{(0)} [n^{(\Omega)}] + \frac{1}{2\varepsilon_0 \varepsilon [n^{(\Omega)}]} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.120)$$

Werden im Inneren des Dielektrikums nun Massen oder Ladungen gegen eine von außen wirkende Kraft $\mathbf{F}^{(\text{ext})}$ mit Kraftdichte $\mathbf{f}^{(\text{ext})}(\mathbf{r})$ (im adiabatischen Prozess) überall im Inneren des Dielektrikums von der Gleichgewichtsposition \mathbf{r} zu einer benachbarten Gleichgewichtsposition $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}')$ verschoben, so kostet das eine Energie

$$U - U^{(0)} = - \int_{\Omega'} d^3 r' \mathbf{f}^{(\text{ext})}(\mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}'). \quad (3.121)$$

In der folgenden Betrachtung wird die Amplitude $|\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})|$ des Verschiebungsfeldes $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$ als sehr klein gegenüber der Ausdehnung $|\Omega|^{\frac{1}{3}}$ des Systems angenommen. Im (statischen stabilen) Gleichgewicht setzt das System den äußeren Kräften dann entsprechende innere Kräfte mit Kraftdichte

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\mathbf{f}^{(\text{ext})}(\mathbf{r}) \quad (3.122)$$

entgegen. Somit ist

$$U - U^{(0)} = \int d^3 r \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}). \quad (3.123)$$

3 Materie im elektrischen Feld

Wir wollen jetzt die Kraftdichte $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ durch die Teilchendichte $n^{(\Omega)}$ und das elektrostatische Verschiebungsfeld $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ ausdrücken. Dazu beachten wir, dass das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$ aufgrund der *Erhaltung der Teilchenzahl* notwendig ein *solenoïdales* Vektorfeld ist (siehe Anhang C):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.124)$$

Nach dem Gesagten ist

$$\begin{aligned} U - U^{(0)} & \quad (3.125) \\ &= \int_{\Omega} d^3r \sum_{a \in \{x,y,z\}} \left[\left(\frac{\partial u [n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}} \right)_{\mathbf{D}=\text{const}} \frac{\partial n^{(\Omega)}(\mathbf{r})}{\partial r_a} + \sum_{b \in \{x,y,z\}} \frac{\delta u(\mathbf{r})}{\delta D_b} \frac{\partial D_b}{\partial r_a} \right] \eta_a(\mathbf{r}) \\ &= \int_{\Omega} d^3r \sum_{a \in \{x,y,z\}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} \right)_{\mathbf{D}=\text{const}} \frac{\partial n^{(\Omega)}(\mathbf{r})}{\partial r_a} + \sum_{b \in \{x,y,z\}} E_b \frac{\partial D_b}{\partial r_a} \right] \eta_a(\mathbf{r}) \\ &= \int_{\Omega} d^3r \sum_{a \in \{x,y,z\}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} \right)_{\mathbf{D}=\text{const}} \frac{\partial n^{(\Omega)}(\mathbf{r})}{\partial r_a} - \sum_{b \in \{x,y,z\}} \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial r_b} \frac{\partial D_b}{\partial r_a} \right] \eta_a(\mathbf{r}) \\ &= \int_{\Omega} d^3r \sum_{a \in \{x,y,z\}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} \right)_{\mathbf{D}=\text{const}} \frac{\partial n^{(\Omega)}(\mathbf{r})}{\partial r_a} - \sum_{b \in \{x,y,z\}} \frac{\partial}{\partial r_b} \left(\phi(\mathbf{r}) \frac{\partial D_b}{\partial r_a} \right) \right. \\ & \quad \left. + \phi(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial r_a} \sum_{b \in \{x,y,z\}} \frac{\partial D_b}{\partial r_b} \right) \right] \eta_a(\mathbf{r}) \\ &= \int_{\Omega} d^3r \sum_{a \in \{x,y,z\}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} \right)_{\mathbf{D}=\text{const}} \frac{\partial n^{(\Omega)}(\mathbf{r})}{\partial r_a} + \phi(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial r_a} \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \right) \right] \eta_a(\mathbf{r}) \\ & \quad - \sum_{a \in \{x,y,z\}} \left(\int_{\Omega} d^3r \sum_{b \in \{x,y,z\}} \frac{\partial}{\partial r_b} \left(\phi(\mathbf{r}) \frac{\partial D_b}{\partial r_a} \right) \right) \eta_a(\mathbf{r}) \\ &= \int_{\Omega} d^3r \sum_{a \in \{x,y,z\}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} \right)_{\mathbf{D}=\text{const}} \frac{\partial n^{(\Omega)}(\mathbf{r})}{\partial r_a} + \phi(\mathbf{r}) \frac{\partial \rho^{(f)}(\mathbf{r})}{\partial r_a} \right] \eta_a(\mathbf{r}) \\ & \quad - \sum_{a,b \in \{x,y,z\}} \underbrace{\int_{\partial\Omega} d^2r' n'_b \left[\phi(\mathbf{r}') \frac{\partial D_b}{\partial r'_a} \right]}_{\rightarrow 0 \text{ für } |\Omega| \rightarrow \infty} \eta_a(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Lassen wir das Oberflächenintegral über den Rand $\partial\Omega$ außer Acht, so folgt jetzt

3.5 Kräfte im isotropen Dielektrikum

in führender Ordnung bzgl. der Komponenten $\eta_a(\mathbf{r})$ des Verschiebungsfeldes

$$U - U^{(0)} = \int_{\Omega} d^3r \sum_{a \in \{x,y,z\}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} \right)_{\mathbf{D}=\text{const}} \frac{\partial n^{(\Omega)}(\mathbf{r})}{\partial r_a} + \phi(\mathbf{r}) \frac{\partial \rho^{(f)}(\mathbf{r})}{\partial r_a} \right] \eta_a(\mathbf{r}). \quad (3.126)$$

Da das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$ solenoidal ist, dürfen wir schreiben

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \{x,y,z\}} \frac{\partial n^{(\Omega)}(\mathbf{r})}{\partial r_a} \eta_a(\mathbf{r}) &= \sum_{a \in \{x,y,z\}} \frac{\partial}{\partial r_a} \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \eta_a(\mathbf{r}) \right] - n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \sum_{a \in \{x,y,z\}} \frac{\partial}{\partial r_a} \eta_a(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{a \in \{x,y,z\}} \frac{\partial}{\partial r_a} \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \eta_a(\mathbf{r}) \right] - n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \underbrace{\text{div } \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})}_{=0} \\ &= \text{div} \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \right], \end{aligned} \quad (3.127)$$

und ebenso

$$\sum_{a \in \{x,y,z\}} \frac{\partial \rho^{(f)}(\mathbf{r})}{\partial r_a} \eta_a(\mathbf{r}) = \text{div} \left[\rho^{(f)}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \right]. \quad (3.128)$$

Also folgt

$$\begin{aligned} U - U^{(0)} &= \int_{\Omega} d^3r \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} \right)_{\mathbf{D}=\text{const}} \text{div} \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \right] + \phi(\mathbf{r}) \text{div} \left[\rho^{(f)}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \right] \right\} \\ &= \int_{\Omega} d^3r \left\{ \text{div} \left[\left(\frac{\partial u[n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}} \right)_{\mathbf{D}=\text{const}} n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \right] \right. \\ &\quad \left. - n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} \right)_{\mathbf{D}=\text{const}} \right. \\ &\quad \left. + \text{div} \left[\phi(\mathbf{r}) \rho^{(f)}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \right] - \rho^{(f)}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) \right\} \\ &= \int_{\Omega} d^3r \left\{ \rho^{(f)}(\mathbf{r}) \underbrace{\left[-\nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) \right]}_{=\mathbf{E}(\mathbf{r})} - n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} \right)_{\mathbf{D}=\text{const}} \right\} \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \\ &\quad + \underbrace{\int_{\partial\Omega} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}') \left(\frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} \right)_{\mathbf{D}=\text{const}} n^{(\Omega)}(\mathbf{r}')}_{\rightarrow 0 \text{ für } |\Omega| \rightarrow \infty} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\partial\Omega} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') \rho^{(f)}(\mathbf{r}')}_{\rightarrow 0 \text{ für } |\Omega| \rightarrow \infty}. \end{aligned} \quad (3.129)$$

3 Materie im elektrischen Feld

Lassen wir wieder den Beitrag der Oberflächenintegrale über den Rand $\partial\Omega$ außer Acht, so folgt schließlich

$$\begin{aligned} U - U^{(0)} &= \int_{\Omega} d^3r \left[\rho^{(f)}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} \right)_{\mathbf{D}=\text{const}} \right] \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \\ &= \int_{\Omega} d^3r \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.130)$$

Somit lautet der gesuchte Ausdruck für die Kraftdichte eines isotropen Dielektrikums

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \rho^{(f)}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial u [n^{(\Omega)}, \mathbf{D}]}{\partial n^{(\Omega)}} \right)_{\mathbf{D}=\text{const}}. \quad (3.131)$$

Der erste Term ist offensichtlich der Coulomb-Kraft geschuldet.

Für den zweiten Term erhalten wir, in dem wir (3.120) für die Energiedichte eines linearen Dielektrikums einsetzen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} \right)_{\mathbf{D}=\text{const}} &= \frac{\partial}{\partial n^{(\Omega)}} \left[u^{(0)} [n^{(\Omega)}] + \frac{1}{2\varepsilon_0 \varepsilon [n^{(\Omega)}]} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \right] \\ &= \frac{\partial u^{(0)}}{\partial n^{(\Omega)}} + \left(\frac{\partial}{\partial n^{(\Omega)}} \frac{1}{\varepsilon [n^{(\Omega)}]} \right) \frac{\mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})}{2\varepsilon_0} \\ &= \frac{\partial u^{(0)}}{\partial n^{(\Omega)}} - \frac{1}{(\varepsilon [n^{(\Omega)}])^2} \frac{\partial \varepsilon [n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}} \frac{\mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})}{2\varepsilon_0} \\ &= \frac{\partial u^{(0)}}{\partial n^{(\Omega)}} - \frac{\partial \varepsilon [n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}} \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.132)$$

Somit erhalten wir für die Kraftdichte $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ eines linearen isotropen Dielektrikums

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{r}) &= \rho^{(f)}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial n^{(\Omega)}} - \frac{\partial \varepsilon [n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}} \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) \\ &= \rho^{(f)}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial n^{(\Omega)}} \right) + n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial \varepsilon [n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}} \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right). \end{aligned} \quad (3.133)$$

3.5 Kräfte im isotropen Dielektrikum

Wir schreiben jetzt

$$\begin{aligned}
 n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial n^{(\Omega)}} \right) &= \nabla_{\mathbf{r}} \left(n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial n^{(\Omega)}} \right) - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial n^{(\Omega)}} \nabla_{\mathbf{r}} n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \quad (3.134) \\
 &= \nabla_{\mathbf{r}} \left(n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial n^{(\Omega)}} \right) - \nabla_{\mathbf{r}} u^{(0)} [n^{(\Omega)}(\mathbf{r})] \\
 &= \nabla_{\mathbf{r}} \left(n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \frac{\partial u^{(0)}}{\partial n^{(\Omega)}} - u^{(0)} \right) \\
 &\equiv \nabla_{\mathbf{r}} P^{(0)}(\mathbf{r}).
 \end{aligned}$$

Hier ist

$$P^{(0)}(\mathbf{r}) = n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \frac{\partial u^{(0)} [n^{(\Omega)}(\mathbf{r})]}{\partial n^{(\Omega)}} - u^{(0)} [n^{(\Omega)}(\mathbf{r})] \quad (3.135)$$

der *hydrostatische Druck* des Dielektrikums ohne elektrostatisches Feld. In der Tat gilt

$$\int_{\Omega} d^3r [-\nabla_{\mathbf{r}} P^{(0)}(\mathbf{r})] = - \int_{\partial\Omega} d^2r' \mathbf{n}' P^{(0)}(\mathbf{r}') = \mathbf{F}^{(0)}. \quad (3.136)$$

Da \mathbf{n}' die nach außen gerichtete Flächennormale auf dem Rand $\partial\Omega$ bezeichnet, ist $\mathbf{F}^{(0)}$ gerade die Kraft, die auf die Oberfläche $\partial\Omega$ der Probe mit dem Druck $P^{(0)}(\mathbf{r}')$ einwirkt.

Nach weiteren elementaren Umstellungen folgt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}(\mathbf{r}) & \quad (3.137) \\
 &= \rho^{(f)}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \nabla_{\mathbf{r}} P^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{\varepsilon_0}{2} n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{\partial \varepsilon [n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) \\
 &= \rho^{(f)}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \nabla_{\mathbf{r}} P^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\nabla_{\mathbf{r}} \left(n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \frac{\partial \varepsilon [n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \underbrace{\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \frac{\partial \varepsilon [n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}} \nabla_{\mathbf{r}} n^{(\Omega)}(\mathbf{r})}_{=\nabla_{\mathbf{r}} \varepsilon [n^{(\Omega)}]} \right].
 \end{aligned}$$

3 Materie im elektrischen Feld

Schließlich erhalten wir die gesuchte Kraftdichte im linearen isotropen Dielektrikum zu

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{r}) = & \rho^{(f)}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) \nabla_{\mathbf{r}} \varepsilon [n^{(\Omega)}] \\ & + \nabla_{\mathbf{r}} \left[-P^{(0)}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \frac{\partial \varepsilon [n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}} \right]. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Der erste Term proportional zur Dichte $\rho^{(f)}(\mathbf{r})$ ist die Coulomb-Kraft auf die *freien* Ladungen, der zweite Term beschreibt eine Kraft, wie sie auf ein *inhomogenes* Dielektrikum einwirkt, der dritte Term beschreibt den hydrostatischen Druck $P^{(0)}(\mathbf{r})$ und seine Veränderung durch die *Elektrostriktion*. Letztere hängt von der Zustandsgleichung des Dielektrikums ab, insbesondere also davon, wie ε von der Teilchendichte $n^{(\Omega)}(\mathbf{r})$ und der lokalen Temperatur $T(\mathbf{r})$ abhängt! Weitere Einzelheiten hierzu finden sich im Lehrbuch [LLP84, S. 59–64].

Druckprofil in einer inkompressiblen dielektrischen Flüssigkeit im homogenen Schwerfeld

Wir berechnen als Anwendung des Resultates (3.138) nun das Druckprofil in einer inkompressiblen dielektrischen Flüssigkeit (zum Beispiel Öl) im homogenen Schwerfeld der Erde. Der Kraftdichte $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ im Dielektrikum wirkt dann die äußere Kraftdichte der Gravitation entgegen

$$\mathbf{f}^{(\text{ext})}(\mathbf{r}) = -n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) mg_E \mathbf{e}_z. \quad (3.139)$$

Im hydrostatischen Gleichgewicht gilt dann an jedem Ort \mathbf{r} im Inneren der Probe

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) + \mathbf{f}^{(\text{ext})}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (3.140)$$

Mit $\rho^{(f)}(\mathbf{r}) = 0$ und auch (in guter Näherung) $n^{(\Omega)} = \text{const}$ folgt dann überall im Inneren der dielektrischen Flüssigkeit $\nabla_{\mathbf{r}} \varepsilon [n^{(\Omega)}] = 0$. Somit verschwinden in (3.138) die beiden ersten Terme und wir erhalten die lokale Kräftebilanz

$$\nabla_{\mathbf{r}} \left[-P^{(0)}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) n^{(\Omega)} \frac{\partial \varepsilon [n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}} \right] - n^{(\Omega)} mg_E \mathbf{e}_z = \mathbf{0}. \quad (3.141)$$

3.5 Kräfte im isotropen Dielektrikum

Demnach wird der Druck in einem flüssigen Dielektrikum ausgehend von der Grenzfläche zum Vakuum bei $r_z = 0$ mit zunehmender Tiefe r_z größer, wobei der Gravitation die mit $\frac{\partial \varepsilon[n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}}$ gewichtete Energiedichte des elektrostatischen Feldes entgegenwirkt. Das Druckprofil als Funktion der Entfernung r_z zur Oberfläche lautet dann

$$r_z \leq 0 \tag{3.142}$$

$$P^{(0)}(r_z) = P^{(0)}(0) + n^{(\Omega)} \cdot \left[\left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) \frac{\partial \varepsilon[n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}} - mgr_z \right].$$

Drucksprung an der Grenzfläche Dielektrikum – Luft

Wir betrachten die Grenzfläche $r_z = 0$ zwischen einem homogenen isotropen Dielektrikum mit Teilchendichte $\rho^{(I)}$ und Dielektrizitätskonstante $\varepsilon^{(I)} = \varepsilon > 1$), das den Halbraum $r_z < 0$ ausfüllen möge, und Luft ($\varepsilon^{(II)} = \varepsilon = 1$) im Halbraum $r_z > 0$. In Gegenwart eines elektrostatischen Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ gilt, dass die Tangentialkomponente $\mathbf{E}_t(\mathbf{r})$ und die Normalkomponente $\mathbf{D}_n(\mathbf{r})$ des elektrischen Verschiebungsfeldes $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon [n^{(\Omega)}] \mathbf{E}(\mathbf{r})$ beim Gang durch die Grenzfläche stetig sind. Wir schreiben dann für ein isotropes lineares Dielektrikum

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon [n^{(\Omega)}]} \mathbf{D}_n(\mathbf{r}) \tag{3.143}$$

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = 0 = \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}_n(\mathbf{r}) \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon [n^{(\Omega)}]},$$

und weiter

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) \nabla_{\mathbf{r}} \varepsilon [n^{(\Omega)}] \tag{3.144} \\ &= \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) \right) \nabla_{\mathbf{r}} \varepsilon [n^{(\Omega)}] + \left(\frac{1}{2\varepsilon_0} \mathbf{D}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}_n(\mathbf{r}) \right) \frac{1}{(\varepsilon [n^{(\Omega)}])^2} \nabla_{\mathbf{r}} \varepsilon [n^{(\Omega)}] \\ &= \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) \right) \nabla_{\mathbf{r}} \varepsilon [n^{(\Omega)}] - \left(\frac{1}{2\varepsilon_0} \mathbf{D}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}_n(\mathbf{r}) \right) \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{\varepsilon [n^{(\Omega)}]} \right). \end{aligned}$$

3 Materie im elektrischen Feld

Da wir keine freien Ladungen betrachten, gilt $\rho^{(f)}(\mathbf{r}) = 0$. Somit folgt jetzt aus (3.138) für die Kraftdichte im Dielektrikum $\varepsilon^{(I)} = \varepsilon > 1$

$$r_z < 0 \tag{3.145}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = - \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) \right] \nabla_{\mathbf{r}} \varepsilon [n^{(\Omega)}] + \left[\frac{1}{2\varepsilon_0} \mathbf{D}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}_n(\mathbf{r}) \right] \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{\varepsilon [n^{(\Omega)}]} \right) + \nabla_{\mathbf{r}} \left[-P^{(0)}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \frac{\partial \varepsilon [n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}} \right],$$

während der entsprechende Ausdruck im Dielektrikum $\varepsilon^{(II)} = \varepsilon = 1$ (Luft) alleine durch den Druckgradienten bestimmt ist

$$r_z > 0 \tag{3.146}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} [-P^{(0)}(\mathbf{r})].$$

Wir berechnen jetzt das Integral

$$I(\mathbf{r}^{(I)}; \mathbf{r}^{(II)}) = \int_{\mathbf{r}^{(I)}}^{\mathbf{r}^{(II)}} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{s}), \tag{3.147}$$

wobei der Punkt $\mathbf{r}^{(I)} = r_z^{(I)} \mathbf{e}_z$ im Halbraum $r_z < 0$ liegt, und der Punkt $\mathbf{r}^{(II)} = r_z^{(II)} \mathbf{e}_z$ im Halbraum $r_z > 0$. Es folgt, indem wir abkürzen $P^{(I)} = P^{(0)}(\mathbf{r}^{(I)})$ und $P^{(II)} = P^{(0)}(\mathbf{r}^{(II)})$, das Ergebnis

$$I(\mathbf{r}^{(I)}; \mathbf{r}^{(II)}) \tag{3.148}$$

$$= P^{(I)} - P^{(II)}$$

$$+ \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}^{(II)}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}^{(II)}) \right) \underbrace{\rho^{(II)} \frac{\partial \varepsilon^{(II)}}{\partial \rho^{(II)}}}_{=0} - \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}^{(I)}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}^{(I)}) \right) \rho^{(I)} \frac{\partial \varepsilon^{(I)}}{\partial \rho^{(I)}}$$

$$- \int_{\mathbf{r}^{(I)}}^{\mathbf{r}^{(II)}} \mathbf{ds} \cdot \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) \right] \nabla_{\mathbf{r}} \varepsilon [n^{(\Omega)}]$$

$$+ \int_{\mathbf{r}^{(I)}}^{\mathbf{r}^{(II)}} \mathbf{ds} \cdot \left[\frac{1}{2\varepsilon_0} \mathbf{D}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}_n(\mathbf{r}) \right] \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{\varepsilon [n^{(\Omega)}]} \right).$$

3.5 Kräfte im isotropen Dielektrikum

Im Grenzwert $|\mathbf{r}^{(I)} - \mathbf{r}^{(II)}| \rightarrow 0$ folgt dann, da $\mathbf{E}_t(\mathbf{r})$ und $\mathbf{D}_n(\mathbf{r})$ beim Gang durch die Grenzfläche stetig sind

$$\begin{aligned}
 0 &= P^{(I)} - P^{(II)} - \rho^{(I)} \frac{\partial \varepsilon^{(I)}}{\partial \rho^{(I)}} \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^{(I)} \cdot \mathbf{E}^{(I)} \right]_{r_z=0^-} \\
 &\quad - \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}_t^{(I)} \cdot \mathbf{E}_t^{(I)} \right]_{r_z=0} \int_{\mathbf{r}^{(1)}}^{\mathbf{r}^{(2)}} d\mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \varepsilon \left[n^{(\Omega)} \right] \\
 &\quad + \left[\frac{1}{2\varepsilon_0} \mathbf{D}_n^{(I)} \cdot \mathbf{D}_n^{(I)} \right]_{r_z=0} \int_{\mathbf{r}^{(1)}}^{\mathbf{r}^{(2)}} d\mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{\varepsilon \left[n^{(\Omega)} \right]} \right) \\
 &= P^{(I)} - P^{(II)} - \rho^{(I)} \frac{\partial \varepsilon^{(I)}}{\partial \rho^{(I)}} \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^{(I)} \cdot \mathbf{E}^{(I)} \right]_{r_z=0^-} \\
 &\quad - \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}_t^{(I)} \cdot \mathbf{E}_t^{(I)} \right]_{r_z=0} \underbrace{\left[\varepsilon^{(II)} - \varepsilon^{(I)} \right]}_{=1-\varepsilon} \\
 &\quad + \underbrace{\left[\frac{1}{2\varepsilon_0} \mathbf{D}_n^{(I)} \cdot \mathbf{D}_n^{(I)} \right]_{r_z=0}}_{=\frac{\varepsilon_0}{2} \varepsilon^2 \mathbf{E}_n^{(I)} \cdot \mathbf{E}_n^{(I)}} \underbrace{\left[\frac{1}{\varepsilon^{(II)}} - \frac{1}{\varepsilon^{(I)}} \right]}_{=1-\frac{1}{\varepsilon}}.
 \end{aligned}$$

Der Betrachtung entnehmen wir jetzt den hydrostatische Druckunterschied zwischen außen (Luft mit $\varepsilon^{(II)} = \varepsilon = 1$) und innen (Dielektrikum mit $\varepsilon^{(I)} = \varepsilon > 1$) zu

$$\begin{aligned}
 \Delta P &= P^{(II)} - P^{(I)} \tag{3.149} \\
 &= -\rho^{(I)} \frac{\partial \varepsilon^{(I)}}{\partial \rho^{(I)}} \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^{(I)} \cdot \mathbf{E}^{(I)} \right]_{r_z=0^-} \\
 &\quad + (\varepsilon - 1) \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}_t^{(I)} \cdot \mathbf{E}_t^{(I)} \right]_{r_z=0} + \varepsilon (\varepsilon - 1) \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}_n^{(I)} \cdot \mathbf{E}_n^{(I)} \right]_{r_z=0}.
 \end{aligned}$$

Aus dieser Relation lässt sich z.B. über die Zustandsgleichung $\varepsilon = \varepsilon[\rho^{(I)}]$ die Dichte $\rho^{(I)}$ der dielektrischen Flüssigkeit nahe der Oberfläche in Abhängigkeit vom elektrostatischen Feld $\mathbf{E}^{(I)}$ durch eine Messung des Drucksprungs ΔP an der Oberfläche bestimmen.

3.6 Elektrostatischer Spannungstensor im isotropen Dielektrikum

Wir zeigen jetzt, dass die Kraftdichte (3.138) als Divergenz eines (3×3) -Tensors $T_{a,b}$ mit $a, b \in \{x, y, z\}$ dargestellt werden kann. Dazu nehmen wir (3.131) als Ausgangspunkt und schreiben

$$f_a(\mathbf{r}) = \rho^{(f)}(\mathbf{r}) E_a(\mathbf{r}) - n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r_a} \left(\frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} \right). \quad (3.150)$$

Wir formen um

$$\begin{aligned} \rho^{(f)}(\mathbf{r}) E_a(\mathbf{r}) &= [\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r})] E_a(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\partial}{\partial r_b} (D_b E_a) - D_b \frac{\partial}{\partial r_b} E_a \quad (\text{Summenkonvention!}). \end{aligned} \quad (3.151)$$

Nun gilt für elektrostatische Felder

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial}{\partial r_b} E_a &= \frac{\partial}{\partial r_a} E_b. \end{aligned} \quad (3.152)$$

Ferner ist

$$E_c = \frac{\partial}{\partial D_c} u [n^{(\Omega)}, \mathbf{D}]. \quad (3.153)$$

Wir beobachten (Summenkonvention!)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r_a} \left(u [n^{(\Omega)}, \mathbf{D}] - n^{(\Omega)} \frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} - D_c E_c \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} \frac{\partial n^{(\Omega)}}{\partial r_a} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial D_c}}_{\stackrel{(3.153)}{=} E_c} \frac{\partial D_c}{\partial r_a} - \frac{\partial n^{(\Omega)}}{\partial r_a} \frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} - n^{(\Omega)} \frac{\partial}{\partial r_a} \left(\frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial r_a} D_c \right) E_c - D_c \left(\frac{\partial}{\partial r_a} E_c \right) \\ &= -n^{(\Omega)} \frac{\partial}{\partial r_a} \left(\frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} \right) - D_c \frac{\partial}{\partial r_a} E_c. \end{aligned} \quad (3.154)$$

3.6 Elektrostatischer Spannungstensor im isotropen Dielektrikum

Somit folgt mit (3.152) und (3.154) für die Kraftdichte (Summenkonvention beachten!)

$$\begin{aligned}
 a, b, c &\in \{x, y, z\} \\
 f_a(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial r_b} (D_b E_a) - D_c \frac{\partial}{\partial r_a} E_c - n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r_a} \left(\frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial r_b} (D_b E_a) + \frac{\partial}{\partial r_a} \left(u [n^{(\Omega)}, \mathbf{D}] - n^{(\Omega)} \frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} - D_c E_c \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial r_b} \left[E_a D_b + \delta_{a,b} \left(u [n^{(\Omega)}, \mathbf{D}] - n^{(\Omega)} \frac{\partial u}{\partial n^{(\Omega)}} - D_c E_c \right) \right]. \quad (3.155)
 \end{aligned}$$

Demnach ist der elektrostatische Spannungstensor $T_{a,b}(\mathbf{r})$ im Dielektrikum gegeben zu

$$a, b, c \in \{x, y, z\} \quad (3.156)$$

$$T_{a,b}(\mathbf{r}) = E_a(\mathbf{r}) D_b(\mathbf{r}) + \delta_{a,b} \left(u [n^{(\Omega)}, \mathbf{D}] - n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \frac{\partial u [n^{(\Omega)}, \mathbf{D}]}{\partial n^{(\Omega)}} - D_c(\mathbf{r}) E_c(\mathbf{r}) \right)$$

Für die Kraftdichte folgt dann die gesuchte Darstellung als Divergenz eines (3×3) -Tensors:

$$a, b \in \{x, y, z\} \quad (3.157)$$

$$f_a(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial r_b} T_{a,b}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial r_x} T_{a,x}(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial r_y} T_{a,y}(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial r_z} T_{a,z}(\mathbf{r}).$$

Der Vorteil so einer Darstellung für die Kraftdichte $f_a(\mathbf{r})$ als Divergenz des elektrostatischen Spannungstensors $T_{a,b}(\mathbf{r})$ ist, dass das Volumenintegral über die Kraftdichte in ein Oberflächenintegral verwandelt werden kann. Die auf den Körper Ω wirkende Kraft ist dann nach dem Satz von Gauß gleich dem Oberflächenintegral über die Fläche $\partial\Omega$ mit nach außen orientiertem Normalenvektor \mathbf{n}' , wobei der Integrand jetzt gleich der Flächenkraftdichte $T_{a,b}(\mathbf{r}') n'_b$ ist:

$$\begin{aligned}
 F_a &= \int_{\Omega} d^3r f_a(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} d^3r \frac{\partial}{\partial r_b} T_{a,b}(\mathbf{r}) \quad (3.158) \\
 &= \int_{\partial\Omega} d^2r' n'_b T_{a,b}(\mathbf{r}') \\
 &= \int_{\partial\Omega} d^2r' T_{a,b}(\mathbf{r}') n'_b.
 \end{aligned}$$

3 Materie im elektrischen Feld

Im linearen isotropen Dielektrikum gilt für die Energiedichte $u[n^{(\Omega)}, \mathbf{D}]$ der Ausdruck (3.120). Einsetzen ergibt unter Beachtung der Definition des Drucks $P^{(0)}$ für den elektrostatischen Spannungstensor im linearen Dielektrikum sowie der Identität (3.132) für $\frac{\partial u[n^{(\Omega)}, \mathbf{D}]}{\partial n^{(\Omega)}}$ das Ergebnis

$$\begin{aligned}
 T_{a,b}(\mathbf{r}) &= E_a(\mathbf{r}) D_{b(\mathbf{r})} + \delta_{a,b} \left(u^{(0)}[n^{(\Omega)}] + \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right. \\
 &\quad \left. - n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \left[\frac{\partial u^{(0)}}{\partial n^{(\Omega)}} - \frac{\partial \varepsilon[n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}} \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right] - \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) \\
 &= E_a(\mathbf{r}) D_b(\mathbf{r}) + \delta_{a,b} \left(\underbrace{u^{(0)}[n^{(\Omega)}] - n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \frac{\partial u^{(0)}[n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}}}_{=-P^{(0)}[n^{(\Omega)}]} \right. \\
 &\quad \left. + n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \frac{\partial \varepsilon[n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}} \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right).
 \end{aligned} \tag{3.159}$$

Somit lautet der elektrostatische Spannungstensor im linearen isotropen Dielektrikum

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 T_{a,b}(\mathbf{r}) &= E_a(\mathbf{r}) D_b(\mathbf{r}) + \delta_{a,b} \left(-P^{(0)}[n^{(\Omega)}] \right. \\
 &\quad \left. + n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \frac{\partial \varepsilon[n^{(\Omega)}]}{\partial n^{(\Omega)}} \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right).
 \end{aligned}
 } \tag{3.160}$$

Für Vakuum $\varepsilon = 1$ folgt hieraus der elektrostatische Spannungstensor zu

$$\begin{aligned}
 a, b &\in \{x, y, z\} \\
 T_{a,b}(\mathbf{r}) &= \varepsilon_0 \left(E_a(\mathbf{r}) E_b(\mathbf{r}) - \delta_{a,b} \frac{1}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \right).
 \end{aligned} \tag{3.161}$$

Kraft auf Leiteroberfläche im Vakuum

Wir berechnen mit Hilfe des elektrostatischen Spannungstensors die Kraft auf eine ebene ideal leitende Oberfläche $\partial\Omega$ mit Flächennormale \mathbf{n} im homogenen elektrostatischen Feld. Im Außengebiet des Leiters Ω sei Vakuum, die Grenzfläche zum

3.6 Elektrostatischer Spannungstensor im isotropen Dielektrikum

Vakuum sei die Ebene $r_z = 0$, demnach $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$. Dann bestimmt sich im elektrostatischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ die Kraft auf den Leiter Ω zu

$$\begin{aligned} F_a &= \int_{\partial\Omega} d^2r' T_{a,b}(\mathbf{r}') n'_b = \int_{\partial\Omega} d^2r' \varepsilon_0 \left(E_a(\mathbf{r}') E_b(\mathbf{r}') - \delta_{a,b} \frac{1}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r}')|^2 \right) \mathbf{e}_{z,b} \\ &= |\partial\Omega| \varepsilon_0 \left(E_a(\mathbf{r}') E_z(\mathbf{r}') - \delta_{a,z} \frac{1}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r}')|^2 \right)_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega}. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Da das elektrische Feld an der Leiteroberfläche keine Tangentialkomponente besitzt, d.h. $E_x(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega} = 0 = E_y(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega}$, folgt jetzt bezogen auf den Flächeninhalt $|\partial\Omega|$ für die kartesischen Komponenten der Kraft

$$\begin{aligned} F_z &= |\partial\Omega| \frac{\varepsilon_0}{2} E_z^2(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega} \\ F_x &= F_y = 0. \end{aligned} \quad (3.163)$$

Die Flächendichte der Ladungen auf der Oberfläche eines idealen Leiters ist nach (3.15) durch die Normalkomponente des elektrischen Feldes gegeben zu

$$\begin{aligned} \omega^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} &= \varepsilon_0 [\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})]_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} \\ &= \varepsilon_0 E_z(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \partial\Omega}. \end{aligned} \quad (3.164)$$

Dann folgt für die Kraftdichte an der Oberfläche

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\in \partial\Omega \\ f_z(\mathbf{r}) &= \frac{F_z}{|\partial\Omega|} = \frac{\varepsilon_0}{2} E_z^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \omega^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r}) E_z(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.165)$$

was mit dem früher gefundenen Resultat (3.107) übereinstimmt. Da der Normalvektor \mathbf{n} nach außen orientiert ist, herrscht an der Grenzfläche $\partial\Omega$ eines idealen Leiters mit dem Vakuum ein *negativer* Druck proportional zur Energiedichte des elektrostatischen Feldes am Ort der Oberfläche.

4 Ströme in Ohmschen Leitern

Ein lokales elektrisches Feld \mathbf{E} vermag im Inneren eines leitenden Materials (zum Beispiel Silber, Kupfer, Niob, Graphit, dotiertes Silizium, Halbleiter-Heterostrukturen, Polyacetylin, ...) die dort befindlichen itineranten (beweglichen) Ladungsträger (Elektronen, Löcher, Ionen) zu beschleunigen, wobei negative Ladungen antiparallel zu \mathbf{E} fließen. Als Reaktion auf das Vorhandensein eines elektrischen Feldes \mathbf{E} fließt dann ein *stationärer* elektrischer Strom mit Stromdichte \mathbf{j} , da der Beschleunigung von beweglichen Ladungsträgern durch ein elektrisches Feld in normal leitenden Materialien Reibungskräfte entgegenwirken, die aus vielen einzelnen Stoßprozessen zusammengesetzt sind. In einem metallischen Leiter wie zum Beispiel Kupfer wird so bei jedem dieser Stöße Energie und Impuls zwischen den elektronischen Anregungen (Quasiteilchen) nahe der Fermikante und den um ihre Gleichgewichtsposition an Gitterplätzen schwingenden Ionen ausgetauscht (*Elektron-Phonon-Wechselwirkung*), was dann zu einer Verschiebung der Verteilungsfunktion der mobilen Quasiteilchen proportional zur angelegten Feldstärke führt. Die bei der Beschleunigung der beweglichen Ladungsträger im elektrischen Feld gewonnene kinetische Energie wird durch die Elektron-Phonon-Wechselwirkung an kollektive Schwingungszustände (Phononen) der lokalisierten Gitterbausteine übertragen, was ein *irreversibler* Prozess ist.

Wenn ein leitendes Material Ω einen stationären Strom trägt, wird demnach mit konstanter Rate Entropie und damit pro Volumenelement $dV = d^3r$ des Materials *Joulesche Wärme* mit einer Leistungsdichte

$$\frac{d\mathcal{P}^{(J)}}{dV} = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

erzeugt. Die gesamte Wärmeleistung im betreffenden Volumen $|\Omega|$ des Leiters ist demnach

$$\mathcal{P}^{(J)} = \int_{\Omega} d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \frac{d}{dt} \mathcal{E}^{(J)}. \quad (4.2)$$



Georg Simon Ohm
(1789–1854)

4 Ströme in Ohmschen Leitern

In den meisten leitenden Materialien, seien es Festkörper oder Flüssigkeiten, sind nach den Untersuchungen von G. S. Ohm (1825) Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ und lokale Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ *linear* verknüpft

$$\boxed{\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})}, \quad (4.3)$$

wobei die Gleichstromleitfähigkeit σ eine spezifische Materialkonstante ist (Ohmsches Gesetz).

Da durch eine Querschnittsfläche \mathcal{F} mit der Flächennormalen \mathbf{n}' in einem Leiter insgesamt ein Strom

$$I = \int_{\mathcal{F}} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad (4.4)$$

fließt, und der Strom I in Einheiten von [A] gemessen wird, hat die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ die Dimension $\left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2}\right]$. Da die elektrische Feldstärke $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|$ in $\left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]$ gemessen wird, hat somit die Leitfähigkeit σ die Dimension $\left[\frac{\text{A}}{\text{m V}}\right]$.

Verschiedene Materialien können eine extrem unterschiedliche Leitfähigkeit σ besitzen, wie G. S. Ohm bereits um 1825 in seinen für die damalige Zeit sehr präzisen Messungen feststellte. Die höchste Leitfähigkeit aller *Metalle* bei ambienter Temperatur von 300 [K] besitzt Silber $\sigma^{(\text{Ag})} \simeq 6.1 \times 10^6 \left[\frac{\text{A}}{\text{m V}}\right]$, an zweiter Stelle kommt reines Kupfer $\sigma^{(\text{Cu})} \simeq 5.8 \times 10^6 \left[\frac{\text{A}}{\text{m V}}\right]$.

Im Unterschied zu den Metallen sind in einer *elektrolytischen* Flüssigkeit beim Anlegen eines elektrischen Feldes nun die Ionen mobil und tragen so einen Strom. Zwar hat destilliertes (demineralisiertes) Wasser eine äußerst geringe Leitfähigkeit von $5 \times 10^{-6} \left[\frac{\text{A}}{\text{m V}}\right]$. Werden aber reinem Wasser z.B. Salz, Säuren oder Basen hinzugefügt, so dass freibewegliche Ionen in Lösung gehen, dann nimmt die Leitfähigkeit um mehrere Größenordnungen zu. Die Leitfähigkeit von Leitungswasser ist $\sim 5 \times 10^{-2} \left[\frac{\text{A}}{\text{m V}}\right]$, die von Meerwasser $\sim 5 \left[\frac{\text{A}}{\text{m V}}\right]$. Deshalb darf man einen elektrischen Brand nicht mit Leitungswasser zu löschen versuchen, denn dessen Salzgehalt macht es hinreichend leitfähig, so dass durchaus das Risiko eines Stromschlags besteht.

Bei *Halbleitern* wie Silizium oder Germanium hängt die Leitfähigkeit von verschiedenen Faktoren wie Temperatur, Druck oder Belichtung ab. Für technische Anwendungen in der Elektronik kann die Leitfähigkeit eines Halbleiters durch gezielte Einlagerung von Fremdatomen (Dotierung) erheblich verändert werden.

4.1 Relaxationszeit für freie Ladungen im Ohmschen Leiter

Moderne HEMTs (high electron mobility transistor) auf Basis der Eigenschaften des 2D-Elektronengases, wie es an der Grenzfläche von geeignet modulationsdotierten halbleitenden Heterostrukturen wie dem AlGaAs/GaAs oder AlGaN/GaN existiert, ermöglichen heutzutage die Konstruktion entsprechend *rauscharmer* Mikrowellen-Verstärker, die z.B. im sog. *LNB* (low noise block) einer Satellitenschüssel zum Einsatz kommen. Allerdings ist die Leitfähigkeit für Elektronen in solchen Heterostrukturen nicht durch das Ohmsche Gesetz gegeben, sondern von der Feldstärke abhängig, das heißt die Strom-Spannungs-Kennlinien sind nicht linear.

4.1 Relaxationszeit für freie Ladungen im Ohmschen Leiter

Wir zeigen jetzt, dass ein *Überschuss* von freien Ladungen im Inneren eines Ohmschen Leiters im Lauf der Zeit stets abgebaut wird. Sei zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort \mathbf{r} im Inneren eines Leiters eine Dichteverteilung $\rho^{(f)}(\mathbf{r}, 0)$ von freien Ladungen vorgegeben. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt durch Einsetzen von (4.3) für ein dielektrisches leitendes Material mit konstanter Leitfähigkeit σ und konstanter Dielektrizitätskonstante ε :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \rho^{(f)}(\mathbf{r}, t) + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) & (4.5) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \rho^{(f)}(\mathbf{r}, t) + \operatorname{div} [\sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \rho^{(f)}(\mathbf{r}, t) + \operatorname{div} \left[\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \rho^{(f)}(\mathbf{r}, t) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \operatorname{div} [\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \rho^{(f)}(\mathbf{r}, t) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho^{(f)}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Es folgt als Lösung dieser Anfangswertaufgabe

$$\rho^{(f)}(\mathbf{r}, t) = \exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} t\right) \rho^{(f)}(\mathbf{r}, 0). \quad (4.6)$$

Da Ladungen ja nicht tatsächlich verschwinden können, beschreibt die Gleichung einen *Konversionsprozess*, bei dem die überschüssigen freien Ladungen im Inneren

4 Ströme in Ohmschen Leitern

des Materials abgebaut werden und dafür an der Oberfläche des Leiters akkumulieren. Die Zeitkonstante für diese Konversion ist

$$\tau = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma}. \quad (4.7)$$

Je größer die Leitfähigkeit, desto schneller wird demnach eine *überschüssige* Ladungsdichte mobiler Ladungsträger aus dem Inneren eines Leiters verschwinden. Es gibt dabei für verschiedene Materialien *erhebliche* Unterschiede:

Leiter	Relaxationszeit τ
Kupfer (Cu)	1.5×10^{-19} [s]
Quartz (SiO ₂)	4.4×10^6 [s] = 51.2 [Tage]

Während Quartz annähernd ein perfekter Isolator ist, kann Kupfer bis in den Bereich hoher Frequenzen $\omega\tau \ll 1$ als idealer Leiter angesehen werden. Solange man nicht an extrem rasch verlaufenden Einschaltvorgängen interessiert ist, kann man in ausgezeichneter Näherung für metallische Leiter auch in Gegenwart zeitlich veränderlicher Felder postulieren

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \in \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \text{ falls } \omega\tau \ll 1, \end{aligned} \quad (4.8)$$

das heißt ein zu einem bestimmten Zeitpunkt vorhandener Überschuß freier Ladungen findet sich nach Verstreichen einer extrem kurzen Zeitspanne $\tau \simeq 10^{-19}$ [s] nicht mehr im Inneren eines stromtragenden metallischen Ohmschen Leiters, allenfalls auf seiner Oberfläche!

Kirchhoffsche Knotenregel

Für ein leitendes Material, das ein Volumen $|\Omega|$ einnimmt, bedeutet die Relation (4.8) es fließen in jedem Augenblick genauso viele Ladungen durch die Oberfläche $\partial\Omega$ in das Gebiet hinein wie hinaus

$$\int_{\partial\Omega} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) = 0. \quad (4.9)$$

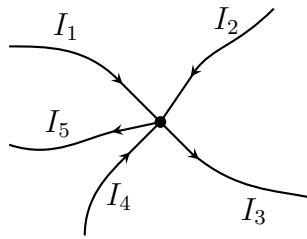


Abbildung 4.1: Knotenpunkt mit zu- und abfließenden Strömen

Auf diesem Sachverhalt beruht die Kirchhoffsche Knotenregel in elektrischen Netzwerken

$$\boxed{\sum_n I^{(n)}(t) = 0.} \quad (4.10)$$

Entsprechend der Konvention werden hineinfließende Ströme als positiv, hinausfließende als negativ gezählt. Die Knotenregel (4.10) ist auch für harmonische Wechselströme $I^{(n)}(t) = \text{Re}[\hat{I}^{(n)}(\omega) e^{-i\omega t}]$ gültig, sofern die Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{f}$ im Vergleich zu den Abmessungen des Netzwerkes makroskopisch groß ist, so dass Retardierungseffekte innerhalb des Netzwerkes keine Rolle spielen.

4.2 Quasi-stationäre Ströme und Felder

Zeitlich veränderliche Stromverteilungen $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, die im Inneren eines Ohmschen Leiters die Gleichung (4.8) erfüllen, heißen *quasi-stationär*. Wir betrachten nun quasi-stationäre elektromagnetische Felder und Ströme mit harmonischer Zeitabhängigkeit:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left[\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right] \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left[\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right] \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left[\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Hier ist $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz. Selbst im sog. Hochfrequenzbereich $f \simeq 10^{10}$ [Hz] ist die zugehörige Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{f} \simeq 3 \times 10^{-2}$ [m] im Vakuum makroskopisch groß, so dass auch dann im Inneren eines Ohmschen Leiters ein *linearer* lokaler Zusammenhang (4.12) zwischen Stromdichte und Feldstärke besteht,

4 Ströme in Ohmschen Leitern

und zwar für die Fourieramplituden $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega)$ und $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$, wobei die Leitfähigkeit $\sigma = \sigma(\mathbf{r})$ eine Materialkonstante ist:

$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) = \sigma(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega). \quad (4.12)$$

Für hinreichend niedrige Frequenzen

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \quad (4.13)$$

kann der Beitrag des Verschiebungsstromes im *Inneren* eines metallischen Ohmschen Leiters ohne weiteres als klein gegenüber dem Ohmschen Strom betrachtet werden und wird deshalb vernachlässigt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left[-i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right] \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left[\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right] = \text{Re} \left[\sigma \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right] \\ \frac{\left| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \right|}{|\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)|} &= \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma} \ll 1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Für einen *ruhenden* (und auch nicht magnetisch geordneten) Ohmschen Leiter mit ortsabhängiger Leitfähigkeit $\sigma = \sigma(\mathbf{r})$ und Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ können wir im *Inneren* des vom Leiter eingenommenen Volumens Ω die relevanten Gleichungen der Elektrodynamik für Ohmsche Leiter unter Zuhilfenahme der Maxwell'schen Gleichungen (1.22) für die Fourieramplituden $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ bzw. $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega)$ der elektromagnetischen Felder für nicht zu hohe Frequenzen angeben zu

$$\begin{aligned} \omega &\ll \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} & (4.15) \\ \mathbf{r} &\in \Omega \\ \text{rot } \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) &= \kappa \mu_0 \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) &= \sigma(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \text{rot } \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= i\omega \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \text{div } \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) &= 0. \end{aligned}$$

Die Bedingung (4.8) ist dabei immer erfüllt, denn $\text{div rot } \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) \equiv 0$.

4.3 Ohmscher Widerstand und Kapazität

Ist λ_ω die Skala der räumlichen Variation der elektromagnetischen Feldamplituden $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ und $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega)$, so soll zusätzlich gelten

$$\begin{aligned} |\nabla_{\mathbf{r}}\sigma(\mathbf{r})| &\ll \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\lambda_\omega} \\ |\nabla_{\mathbf{r}}\varepsilon(\mathbf{r})| &\ll \frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{\lambda_\omega}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

da anderenfalls zur Beschreibung der elektrodynamischen Eigenschaften der kondensierten Materie nicht lokale Integralgleichungen verwendet werden müssen.

4.3 Ohmscher Widerstand und Kapazität

In der Elektrostatik ist das elektrische Feld im Inneren eines idealen Leiters gleich Null. Das gilt aber *nicht* mehr für Ohmsche Leiter im *stromtragenden* Zustand! Zwar ist das elektrische Feld für einen *stationären* Strom immer noch wirbelfrei, d.h. im Inneren eines Leiters Ω mit isotroper Leitfähigkeit $\sigma(\mathbf{r})$ gelten die aus den Grundgleichungen (4.15) für den Spezialfall $\omega \rightarrow 0$ folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\in \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

und es existiert demnach in Gegenwart einer stationären Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ eine Potentialfunktion $\phi^{(\Omega)}(\mathbf{r})$, so dass im *Inneren* eines Ohmschen Leiters gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla_{\mathbf{r}}\phi^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \sigma(\mathbf{r}) \left[-\nabla_{\mathbf{r}}\phi^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Aber ein wesentlicher Unterschied zur Elektrostatik besteht darin, dass das Potential $\phi^{(\Omega)}(\mathbf{r})$ jetzt im Inneren des Ohmschen Leiters ortsabhängig ist, während das Potential $\phi(\mathbf{r})$ in der Elektrostatik nur außerhalb eines Leiters räumlich variiert, während es im Inneren eines (idealen) Leiters überall konstant ist!

4 Ströme in Ohmschen Leitern

Demnach lautet die Bestimmungsgleichung für die Potentialfunktion $\phi^{(\Omega)}(\mathbf{r})$ im Inneren eines stromtragenden Ohmschen Leiters

$$\boxed{\operatorname{div} \left[-\sigma(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \phi^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right] = 0.} \quad (4.19)$$

Für konstantes (isotropes) σ ist das Potential $\phi^{(\Omega)}(\mathbf{r})$ eines Ohmschen Leiters im stationären stromtragenden Zustand natürlich eine Lösung der Laplace-Gleichung.

Diskutieren wir nun die Randbedingungen für einen Ohmschen Leiter Ω , dessen Oberfläche $\partial\Omega$ aus verschiedenen disjunkten Teilen $\partial\Omega^{(i)}$ und $\partial\Omega^{(l)}$ zusammengesetzt ist, ein Teil $\partial\Omega^{(i)}$ nicht leitend, der andere $\partial\Omega^{(l)}$ metallisch leitend:

$$\begin{aligned} \partial\Omega &= \partial\Omega^{(i)} \cup \partial\Omega^{(l)} \\ \partial\Omega^{(i)} \cap \partial\Omega^{(l)} &= \emptyset. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Es bezeichnet jetzt $\partial\Omega^{(i)}$ eine nichtleitende gemeinsame Grenzfläche des Ohmschen Leiters Ω mit einem perfekten *Isolator* $\Omega^{(\text{Isolator})}$ (zum Beispiel Vakuum), während $\partial\Omega^{(l)}$ eine leitende gemeinsame Grenzfläche von Ω mit einem anderen leitenden Material im Gebiet $\Omega^{(\text{Leiter})}$ ist

$$\begin{aligned} \partial\Omega^{(i)} &= \partial\Omega \cap \partial\Omega^{(\text{Isolator})} \\ \partial\Omega^{(l)} &= \partial\Omega \cap \partial\Omega^{(\text{Leiter})}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Auf der Grenzfläche $\partial\Omega^{(i)}$ ist dann die Normalkomponente der Stromdichte gleich Null, wenn man sich der Grenzfläche aus dem Inneren von Ω her nähert:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &\in \partial\Omega^{(i)} \\ \mathbf{n}' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') &= 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Folglich kann im stromtragenden Zustand die elektrische Feldstärke an der Grenzfläche $\partial\Omega^{(i)}$ eines Ohmschen Leiters (mit isotroper Leitfähigkeit σ) zu einem *Isolator* nur *tangential* zur Oberfläche orientiert sein

$$[\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(i)}} = 0 \quad (4.23)$$

Da freie überschüssige Ladungen nicht im Inneren, sondern auf der *Oberfläche* $\partial\Omega$ eines Ohmschen Leiters Ω akkumulieren, werden diese, wenn sie sich auf einer

4.3 Ohmscher Widerstand und Kapazität

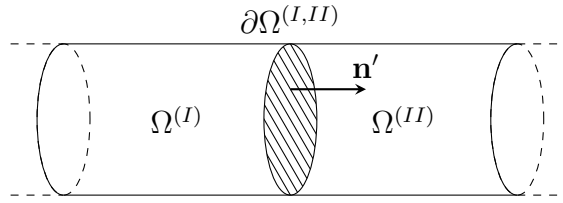


Abbildung 4.2: Ein elektrischer Kontakt zwischen zwei Ohmschen Leitern $\Omega^{(I)}$ und $\Omega^{(II)}$ wird hergestellt durch effizienten Ladungstransport durch die Grenzfläche $\partial\Omega^{(I,II)}$.

solchen Grenzfläche $\partial\Omega^{(i)}$ befinden, bei einem sehr guten Leiter Ω , wie etwa Silber oder Kupfer, dann *sofort* an der Oberfläche des Leiters entlang der durch $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ vorgegebenen Richtung in *tangentialer* Richtung abfließen, falls $\sigma(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in \partial\Omega^{(i)}} \neq 0$ ist!

Man spricht von einem *elektrischen Kontakt* zwischen zwei Ohmschen Leitern $\Omega^{(I)}$ und $\Omega^{(II)}$, siehe Abbildung 4.2, wenn durch deren gemeinsame Grenzfläche

$$\partial\Omega^{(I,II)} = \partial\Omega^{(I)} \cap \partial\Omega^{(II)} \quad (4.24)$$

ein effizienter Transport von Ladungsträgern möglich ist. Demnach fließt über einen elektrischen Kontakt mit Kontaktfläche $|\partial\Omega^{(I,II)}|$ ein Strom $I^{(I,II)}$ in Richtung der von $\Omega^{(I)}$ aus betrachtet nach außen orientierten Flächennormalen \mathbf{n}' von $\partial\Omega^{(I)}$, wobei gilt

$$\frac{d}{dt}q^{(I,II)} + I^{(I,II)} = 0. \quad (4.25)$$

Hier ist $q^{(I,II)}$ die betreffende auf der Kontaktfläche $\partial\Omega^{(I,II)}$ befindliche freie Ladung, die als Strom $I^{(I,II)}$ abfließt oder zufließt. Diese freie Ladung ist das Integral der Flächenladungsdichte $\omega^{(I,II)}(\mathbf{r}')$ über die betreffende Grenzfläche $\partial\Omega^{(I,II)}$. Handelt es sich bei $\Omega^{(II)}$ um einen sehr guten metallischen Leiter, so nennt man $\partial\Omega^{(I,II)}$ eine *Elektrode*.

Im Unterschied zur Grenzfläche zwischen einem Ohmschen Leiter und einem Isolator gilt für die von einer stationären Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ durchflossene gemeinsame Kontaktfläche $\partial\Omega^{(I,II)}$ von zwei Ohmschen Leitern $\Omega^{(I)}$ und $\Omega^{(II)}$, dass auf der Elektrodenfläche $\partial\Omega^{(I,II)}$ nun die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke identisch verschwindet:

$$[\mathbf{n}' \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(I,II)}} = \mathbf{0}. \quad (4.26)$$

4 Ströme in Ohmschen Leitern

Wir betrachten jetzt zwei Ohmsche Leiter $\Omega^{(I)}$ bzw. $\Omega^{(II)}$, charakterisiert durch eine Leitfähigkeit $\sigma^{(I)}$ bzw. $\sigma^{(II)}$ und eine Dielektrizitätskonstante $\varepsilon^{(I)}$ bzw. $\varepsilon^{(II)}$. Dann können wir die Flächenladungsdichte $\omega^{(I,II)}(\mathbf{r}')$ der freien Ladungen auf der Kontaktfläche $\partial\Omega^{(I,II)}$ allein durch die Normalkomponente $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')$ der über den elektrischen Kontakt fließenden Stromdichte ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}' &\in \partial\Omega^{(I,II)} & (4.27) \\
 \omega^{(I,II)}(\mathbf{r}') &= \mathbf{n}' \cdot [\mathbf{D}^{(II)}(\mathbf{r}') - \mathbf{D}^{(I)}(\mathbf{r}')] \\
 &= \mathbf{n}' \cdot [\varepsilon_0 \varepsilon^{(II)} \mathbf{E}^{(II)}(\mathbf{r}') - \varepsilon_0 \varepsilon^{(I)} \mathbf{E}^{(I)}(\mathbf{r}')] \\
 &= \mathbf{n}' \cdot \left[\frac{\varepsilon_0 \varepsilon^{(II)}}{\sigma^{(II)}} \mathbf{j}^{(II)}(\mathbf{r}') - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon^{(I)}}{\sigma^{(I)}} \mathbf{j}^{(I)}(\mathbf{r}') \right] \\
 &= \left[\frac{\varepsilon_0 \varepsilon^{(II)}}{\sigma^{(II)}} - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon^{(I)}}{\sigma^{(I)}} \right] \mathbf{n}' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}').
 \end{aligned}$$

Beim Übergang zur letzten Zeile wurde verwendet, dass die Normalkomponente $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')$ beim Gang durch eine leitende Grenzfläche $\partial\Omega^{(I,II)}$ stetig ist, eine direkte Konsequenz von (4.8). Die auf der Elektrodenfläche $|\partial\Omega^{(I,II)}|$ befindliche freie Ladung $q^{(I,II)}$ für eine stationäre Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ ist demnach

$$\begin{aligned}
 q^{(I,II)} &= \int_{\partial\Omega^{(I,II)}} d^2r' \omega^{(I,II)}(\mathbf{r}') \\
 &= \int_{\partial\Omega^{(I,II)}} d^2r' \left[\frac{\varepsilon_0 \varepsilon^{(II)}}{\sigma^{(II)}} - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon^{(I)}}{\sigma^{(I)}} \right] \mathbf{n}' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}').
 \end{aligned}$$

Für metallische Leiter ist allerdings $\sigma^{(I)}$ bzw. $\sigma^{(II)}$ derart groß, dass der Effekt als klein anzusehen ist.

Wir betrachten ein leitendes Gebiet Ω mit isotroper Leitfähigkeit $\sigma^{(\Omega)}(\mathbf{r})$, das von einem Isolator $\Omega^{(\text{Isolator})}$ umgeben ist und das jetzt über zwei Elektroden mit zwei anderen leitenden Gebieten $\Omega^{(I)}$ bzw. $\Omega^{(II)}$ im elektrischen Kontakt verbunden ist. Die Oberfläche $\partial\Omega$ von Ω besteht somit aus disjunkten Partialflächen (siehe Abbildung 4.3), einmal aus der Grenzfläche $\partial\Omega^{(i)} = \partial\Omega \cap \partial\Omega^{(\text{Isolator})}$ zum Isolator, und zum anderen aus den beiden Elektrodenflächen

$$\begin{aligned}
 \partial\Omega^{(1)} &= \partial\Omega \cap \partial\Omega^{(I)} & (4.28) \\
 \partial\Omega^{(2)} &= \partial\Omega \cap \partial\Omega^{(II)}.
 \end{aligned}$$

4.3 Ohmscher Widerstand und Kapazität

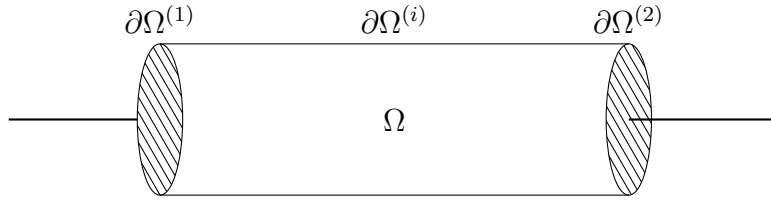


Abbildung 4.3: Ohmscher Leiter Ω mit elektrischen Kontaktflächen $\partial\Omega^{(1)}$ und $\partial\Omega^{(2)}$, und Grenzfläche $\partial\Omega^{(i)}$.

Somit:

$$\begin{aligned}\partial\Omega &= \partial\Omega^{(i)} \cup \partial\Omega^{(1)} \cup \partial\Omega^{(2)} & (4.29) \\ \partial\Omega^{(i)} \cap \partial\Omega^{(1)} &= \emptyset = \partial\Omega^{(i)} \cap \partial\Omega^{(2)} \\ \partial\Omega^{(1)} \cap \partial\Omega^{(2)} &= \emptyset.\end{aligned}$$

Durch die Elektrode $\partial\Omega^{(1)} \subset \Omega$ fließt nun ein *stationärer* Strom $I^{(1)}$ in das Gebiet Ω hinein (Flächennormale \mathbf{n}' antiparallel zu $\mathbf{j}|_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(1)}}$), und durch die zweite Elektrode $\partial\Omega^{(2)} \subset \partial\Omega$ fließt entsprechend ein stationärer Strom $I^{(2)}$ aus dem Gebiet Ω hinaus (Flächennormale \mathbf{n}' parallel zu $\mathbf{j}|_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(2)}}$). Dabei gilt für die Ströme

$$\begin{aligned}k &= 1, 2 & (4.30) \\ I^{(k)} &= \int_{\partial\Omega^{(k)}} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')\end{aligned}$$

durch die betreffenden Kontaktflächen $\partial\Omega^{(l)}$ vollumfänglich die Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned}k &= 1, 2 & (4.31) \\ \frac{d}{dt}q^{(k)} + I^{(k)} &= 0 \\ I^{(1)} + I^{(2)} &= 0 \\ q^{(1)} + q^{(2)} &= 0.\end{aligned}$$

Der hineinfließende Strom $I^{(1)}$ ist, da es nur zwei Elektroden gibt, natürlich gleich dem (negativen) des hinausfließenden Stroms $I^{(2)}$. Entsprechend der Konvention

4 Ströme in Ohmschen Leitern

werden in das Gebiet Ω hineinfließende Ströme als positiv, hinausfließende als negativ gezählt.

Gesucht wird nun die Potentialfunktion $\phi^{(\Omega)}(\mathbf{r})$ im Inneren von Ω als Lösung von (4.19), ergänzt durch die entsprechenden Randbedingungen auf den Grenzflächen $\partial\Omega^{(1)}$, $\partial\Omega^{(2)}$ und $\partial\Omega^{(i)}$ der Oberfläche $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} k &= 1, 2 & (4.32) \\ \left[\mathbf{n}' \wedge \nabla_{\mathbf{r}} \phi^{(\Omega)}(\mathbf{r}') \right]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(k)}} &= \mathbf{0} \\ \left[\phi^{(\Omega)}(\mathbf{r}') \right]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(k)}} &= \phi^{(k)} = \text{const} \\ \left[\mathbf{n}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi^{(\Omega)}(\mathbf{r}') \right]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(i)}} &= 0. \end{aligned}$$

Die Spannungsdifferenz zwischen den Elektroden ist dann, da das Feld im Inneren eines Ohmschen Leiters in Gegenwart von *stationär* fließenden Strömen wirbelfrei ist, gegeben zu

$$U^{(1,2)} = \phi^{(1)} - \phi^{(2)} = \int_{\mathcal{C}[\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}]} \mathbf{ds} \cdot \left[-\nabla_{\mathbf{s}} \phi^{(\Omega)}(\mathbf{s}) \right]. \quad (4.33)$$

Hier ist $\mathcal{C}[\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}]$ ein Pfad durch das Innere von Ω vom Ort $\mathbf{r}^{(1)} \in \partial\Omega^{(1)}$ zum Ort $\mathbf{r}^{(2)} \in \partial\Omega^{(2)}$. Der Ohmsche Widerstand R der betrachteten Anordnung von Elektroden für das Gebiet Ω ist dann der Quotient

$$R = \frac{U^{(1,2)}}{I} = \frac{\int_{\mathcal{C}[\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}]} \mathbf{ds} \cdot \left[-\nabla_{\mathbf{s}} \phi^{(\Omega)}(\mathbf{s}) \right]}{\int_{\partial\Omega^{(1)}} d^2 r' \mathbf{n}' \cdot \left[-\sigma^{(\Omega)}(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} \phi^{(\Omega)}(\mathbf{r}') \right]}. \quad (4.34)$$

O.B.d.A. ist $R > 0$. Anderenfalls wird $\phi^{(1)}$ gegen $\phi^{(2)}$ getauscht, bzw. es wird der Pfad $\mathcal{C}[\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}]$ durch den inversen Pfad $\mathcal{C}[\mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{r}^{(1)}]$ ersetzt.

Die gestellte Randwertaufgabe ist in der Tat völlig äquivalent zum Problem, die Kapazität $C^{(\Omega)}$ eines Dielektrikums mit Dielektrizitätskonstante $\varepsilon^{(\Omega)}(\mathbf{r})$ in einem Gebiet Ω mit gleicher geometrischer Gestalt zu ermitteln, auf dessen Oberfläche $\partial\Omega$ zudem auf identische Weise die Elektroden $\partial\Omega^{(1)}$ und $\partial\Omega^{(2)}$ aufgebracht sind. Im Unterschied zur vorherigen Aufgabenstellung für den Ohmschen Leiter ist jetzt das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$ im Inneren von Ω Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\in \Omega & (4.35) \\ \text{div} \left[-\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) \right] &= 0, \end{aligned}$$

4.3 Ohmscher Widerstand und Kapazität

wobei auf $\partial\Omega^{(1)}$, $\partial\Omega^{(2)}$ und $\partial\Omega^{(i)}$ die entsprechenden Randbedingungen für leitende bzw. isolierende Grenzflächen vorgegeben sind:

$$\begin{aligned}
 k &= 1, 2 & (4.36) \\
 [\mathbf{n}' \wedge \nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(k)}} &= \mathbf{0} \\
 [\phi(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(k)}} &= \text{const} = \phi^{(k)} \\
 [\mathbf{n}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(i)}} &= 0.
 \end{aligned}$$

Die auf den Oberflächen der Elektroden $\partial\Omega^{(l)}$ influenzierten Ladungen sind dann bestimmt zu

$$\begin{aligned}
 l &= 1, 2 & (4.37) \\
 q^{(l)} &= \int_{\partial\Omega^{(l)}} d^2r' \mathbf{n}' \cdot [-\varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}')],
 \end{aligned}$$

wobei

$$q^{(1)} + q^{(2)} = 0. \quad (4.38)$$

Die Kapazität der betrachteten Anordnung ergibt sich mit

$$U^{(1,2)} = \phi^{(1)} - \phi^{(2)} = \int_{\mathcal{C}[\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}]} d\mathbf{s} \cdot [-\nabla_{\mathbf{s}}\phi(\mathbf{s})] \quad (4.39)$$

nun zu

$$C = \frac{q^{(1)}}{U^{(1,2)}} = \frac{\int_{\partial\Omega^{(1)}} d^2r' \mathbf{n}' \cdot [-\varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}')]}{\int_{\mathcal{C}[\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}]} d\mathbf{s} \cdot [-\nabla_{\mathbf{s}}\phi(\mathbf{s})]}. \quad (4.40)$$

O.B.d.A. ist $C > 0$. Anderenfalls wird $q^{(1)}$ gegen $q^{(2)}$ ausgetauscht.

Wir betrachten jetzt den Fall, dass die räumliche Verteilung von der dielektrischen Funktion $\varepsilon(\mathbf{r})$ im Inneren eines Gebietes Ω proportional zur räumlichen Verteilung der Gleichstromleitfähigkeit $\sigma(\mathbf{r})$ im gleichen Gebiet Ω ist. Gleiches Gebiet Ω bedeutet hier mit gleicher Aufteilung der Oberfläche $\partial\Omega = \partial\Omega^{(i)} \cup \partial\Omega^{(1)} \cup \partial\Omega^{(2)}$ in isolierende und leitende Grenzflächen. Demnach

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\mathbf{r}) &= \varepsilon \cdot \nu(\mathbf{r}) & (4.41) \\
 \sigma(\mathbf{r}) &= \sigma \cdot \nu(\mathbf{r}) \\
 \varepsilon &= \text{const} \\
 \sigma &= \text{const}
 \end{aligned}$$

4 Ströme in Ohmschen Leitern

mit ein und derselben dimensionslosen Verteilungsfunktion $\nu(\mathbf{r})$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\in \Omega \\ \phi(\mathbf{r}) &= \phi^{(\Omega)}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (4.42)$$

und es folgt nach dem Gesagten die universelle Relation

$$\begin{aligned} RC &= \frac{U^{(1,2)}}{I} \frac{q^{(1)}}{U^{(1,2)}} = \frac{q^{(1)}}{I} \\ &= \frac{\int_{\partial\Omega^{(1)}} d^2r' \mathbf{n}' \cdot [-\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}')] }{\int_{\partial\Omega^{(1)}} d^2r' \mathbf{n}' \cdot [-\sigma(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} \phi^{(\Omega)}(\mathbf{r}')] } \\ &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Damit ist also:

$$\boxed{RC = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma}}. \quad (4.44)$$

Kennt man die Kapazität C eines Dielektrikums mit der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon \cdot \nu(\mathbf{r})$ in einem Gebiet Ω mit der Oberflächenaufteilung $\partial\Omega = \partial\Omega^{(i)} \cup \partial\Omega^{(1)} \cup \partial\Omega^{(2)}$, so ist der Widerstand R eines Ohmschen Leiters mit Leitfähigkeit $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma \cdot \nu(\mathbf{r})$ im selben Gebiet Ω mit identischer Oberflächenaufteilung $\partial\Omega$ durch die Relation (4.43) festgelegt und umgekehrt!

Plattenkondensator

Ein homogener Ohmscher Leiter mit Leitfähigkeit σ , der den Raum zwischen zwei planparallelen Elektroden der Fläche $|\mathcal{F}|$ im Abstand d ausfüllt (Plattenkondensator) hat demnach einen Widerstand

$$R = \frac{1}{C} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma}. \quad (4.45)$$

Wird der Raum zwischen den Elektroden mit einem homogenen Dielektrikum ε gefüllt, so ist bekanntlich die Kapazität der Anordnung

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{|\mathcal{F}|}{d}. \quad (4.46)$$

Demnach ist der Ohmsche Widerstand von der Leitfähigkeit σ und von der Geometrie abhängig:

$$R = \frac{d}{|\mathcal{F}|} \frac{1}{\sigma}. \quad (4.47)$$

Koaxialkabel

Entsprechend hat ein Koaxialkabel der Länge L , mit innerem Radius a und äußerem Radius $b > a$, in dessen Innerem $a < r < b$ sich leitendes Material mit Leitfähigkeit σ befindet, einen Widerstand

$$R = \frac{1}{C} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma}, \quad (4.48)$$

wobei der Strom in radialer Richtung fließt. Die Kapazität der entsprechenden Anordnung als zylindrischer Kondensator ist bekanntlich

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}. \quad (4.49)$$

Somit

$$R = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi L} \frac{1}{\sigma}. \quad (4.50)$$

4.4 Der Skin-Effekt

Gemäß (4.15) bildet sich im *Außenraum* eines von Strom durchflossenen Leiters um diesen herum ein magnetisches Induktionsfeld. Für einen Wechselstrom erzeugt dieses Magnetfeld nun auch Wirbelströme im *Inneren* des Leiters, welche dem Erzeugerstrom entgegengesetzt gerichtet sind. Solange gilt $\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$ darf der Beitrag des Verschiebungsstroms im Vergleich zum Beitrag von $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega)$ ignoriert werden, was für Metalle wie Kupfer bis jenseits von Frequenzen von 10^{12} [Hz] ohne weiteres erlaubt ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) &= \kappa \mu_0 \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \operatorname{rot} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= i\omega \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega). \end{aligned} \quad (4.51)$$

4 Ströme in Ohmschen Leitern

Somit

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \operatorname{rot} \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = \kappa\mu_0 i\omega \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) = \kappa\mu_0 i\omega \sigma \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega). \quad (4.52)$$

Wir betrachten einen im Vakuum positionierten Metalldraht mit Gleichstromleitfähigkeit σ , etwa in Gestalt eines langen dünnen Zylinders mit Radius a , wobei die Achse des Zylinders entlang der Richtung \mathbf{e}_z orientiert ist. Dann ist die Stromdichteamplitude $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega)$ im Inneren des Drahtes parallel zu \mathbf{e}_z orientiert, da durch die Mantelfläche des Zylinders kein Strom fließen kann. Demnach ist auch das elektrische Feld parallel zu \mathbf{e}_z orientiert. In Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} r_x &= r_\perp \cos(\alpha) \\ r_y &= r_\perp \sin(\alpha) \\ r_z &= z \end{aligned} \quad (4.53)$$

ist eine Basis orthonormaler Einheitsvektoren $\{\mathbf{e}_{r_\perp}, \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_z\}$ gegeben zu

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{r_\perp} &= \cos(\alpha) \mathbf{e}_x + \sin(\alpha) \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\alpha &= -\sin(\alpha) \mathbf{e}_x + \cos(\alpha) \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Wir suchen jetzt eine Lösung $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$, die invariant ist unter einer Translation $z \rightarrow z - z_0$ entlang der Achse des Drahtes, und auch invariant ist bezüglich einer Drehung $\alpha \rightarrow \alpha - \alpha_0$ um die Zylinderachse. Nach dem Gesagten

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = E(r_\perp, \omega) \mathbf{e}_z. \quad (4.55)$$

Wir berechnen nun in Zylinderkoordinaten auf direktem Weg

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= \operatorname{rot} [E(r_\perp, \omega) \mathbf{e}_z] = -\frac{\partial E(r_\perp, \omega)}{\partial r_\perp} \mathbf{e}_\alpha \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= \operatorname{rot} \left[-\frac{\partial E(r_\perp, \omega)}{\partial r_\perp} \mathbf{e}_\alpha \right] = -\frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial r_\perp} \left[r_\perp \frac{\partial E(r_\perp, \omega)}{\partial r_\perp} \right] \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Folglich lautet die Bestimmungsgleichung für die gesuchte elektrische Feldamplitude im Inneren des Drahtes

$$\begin{aligned} 0 \leq r_\perp \leq a \\ \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial r_\perp} \left[r_\perp \frac{\partial E(r_\perp, \omega)}{\partial r_\perp} \right] + k_\omega^2 E(r_\perp, \omega) = 0, \end{aligned} \quad (4.57)$$

wobei

$$k_\omega^2 = \kappa\mu_0 i\omega\sigma$$

$$k_\omega = (1+i) \sqrt{\frac{\kappa\mu_0\omega\sigma}{2}} = \frac{1+i}{\lambda_\omega}.$$

Die Größe

$$\lambda_\omega = \sqrt{\frac{2}{\kappa\mu_0\omega\sigma}} \quad (4.58)$$

mit der physikalischen Dimension einer Länge bezeichnet die sog. *Skin-Eindringtiefe*. Sie variiert proportional zu $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$.

Sei nun $E(a, \omega)$ die Amplitude des elektrischen Feldes an der Drahtoberfläche $r_\perp = a$. Dann lautet die Lösung der obigen Differentialgleichung für die Feldamplitude $E(r_\perp, \omega)$ im Inneren des Drahtes

$$0 \leq r_\perp \leq a, \quad (4.59)$$

$$E(r_\perp, \omega) = E(a, \omega) \frac{J_0(k_\omega r_\perp)}{J_0(k_\omega a)}.$$

Hier bezeichnet $J_0(z)$ die Besselfunktion

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{64} + \dots \quad (4.60)$$

Da die Nullstellen von $J_0(z)$ auf der *reellen Achse* positioniert sind, aber $k_\omega = \frac{1+i}{\lambda_\omega}$ komplexwertig ist, ist nicht zu befürchten, dass $J_0(k_\omega r_\perp)$ als Funktion von r_\perp im Inneren des Drahtes $0 \leq r_\perp \leq a$ gleich Null wird. Die Metallelektronen im Inneren des Drahtes spüren somit ein zeitlich veränderliches elektrisches Wechselfeld

$$0 \leq r_\perp \leq a \quad (4.61)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right] = \text{Re} \left[E(r_\perp, \omega) e^{-i\omega t} \right] \mathbf{e}_z.$$

Die Amplitude der Feldstärke im Inneren des Drahtes ist demnach durch den Betrag der komplexen Zahl $E(r_\perp, \omega)$ gegeben:

$$|E(r_\perp, \omega)| = \sqrt{E(r_\perp, \omega) [E(r_\perp, \omega)]^\dagger}. \quad (4.62)$$

4 Ströme in Ohmschen Leitern

Herrscht auf der Drahtoberfläche bei $r_{\perp} = a$ ein Feld $E(a, \omega)$, so ist die mittlere Feldstärke nahe der Drahtachse abgefallen auf den Wert

$$\begin{aligned}
 0 \leq r_{\perp} \ll \lambda_{\omega} & \qquad (4.63) \\
 |E(r_{\perp}, \omega)| &= E(a, \omega) \left| \frac{J_0(k_{\omega} r_{\perp})}{J_0(k_{\omega} a)} \right| \\
 &= \frac{E(a, \omega)}{|J_0(k_{\omega} a)|} \left[1 + \frac{1}{16} \left(\frac{r_{\perp}}{\lambda_{\omega}} \right)^4 + \mathcal{O} \left(\frac{r_{\perp}}{\lambda_{\omega}} \right)^8 \right].
 \end{aligned}$$

Demnach nimmt bei Wechselstrom die Stromdichte im Draht auch schon bei niedrigen Frequenzen von Innen nach Außen rasch zu, während sie bei Gleichstrom über den Querschnitt konstant ist.

Für ganz hohe Frequenzen mit $\lambda_{\omega} \ll a$ approximieren wir nahe des Drahtoberfläche

$$\begin{aligned}
 0 < s \ll a & \qquad (4.64) \\
 r_{\perp} &= a - s \\
 0 &= \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} \left[r_{\perp} \frac{\partial E(r_{\perp}, \omega)}{\partial r_{\perp}} \right] + k_{\omega}^2 E(r_{\perp}, \omega) \\
 &= \frac{1}{a - s} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \left[(a - s) \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) E(a - s, \omega) \right] + k_{\omega}^2 E(a - s, \omega) \\
 &\simeq \frac{\partial^2}{\partial s^2} E(a - s, \omega) + k_{\omega}^2 E(a - s, \omega) + \mathcal{O}(\text{small}).
 \end{aligned}$$

Folglich lautet die Lösung für $E(a - s, \omega)$ nahe der Oberfläche

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\omega} \ll a & \qquad (4.65) \\
 0 \leq s \ll a & \\
 E(a - s, \omega) &= E(a, \omega) \cdot e^{ik_{\omega}(a-s)} \\
 &= E(a, \omega) \cdot e^{(i-1)\frac{a-s}{\lambda_{\omega}}}.
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist, dass die Amplitude der elektrischen Feldstärke bei hohen Fre-

4.4 Der Skin-Effekt

quenzen mit zunehmender Eindringtiefe s *exponentiell* schnell abnimmt:

$$\begin{aligned} \lambda_\omega &\ll a \\ 0 \leq s &\ll a \\ |E(a-s, \omega)| &= E(a, \omega) e^{-\frac{a-s}{\lambda_\omega}}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Ein Wechselstrom fließt demnach in einem Draht mit Radius a bei hohen Frequenzen nur in einer dünnen Schicht $\lambda_\omega \ll a$ nahe der Oberfläche. Dies ist der sog. *Skin-Effekt*. Siehe Abbildung 4.4 für eine Darstellung.

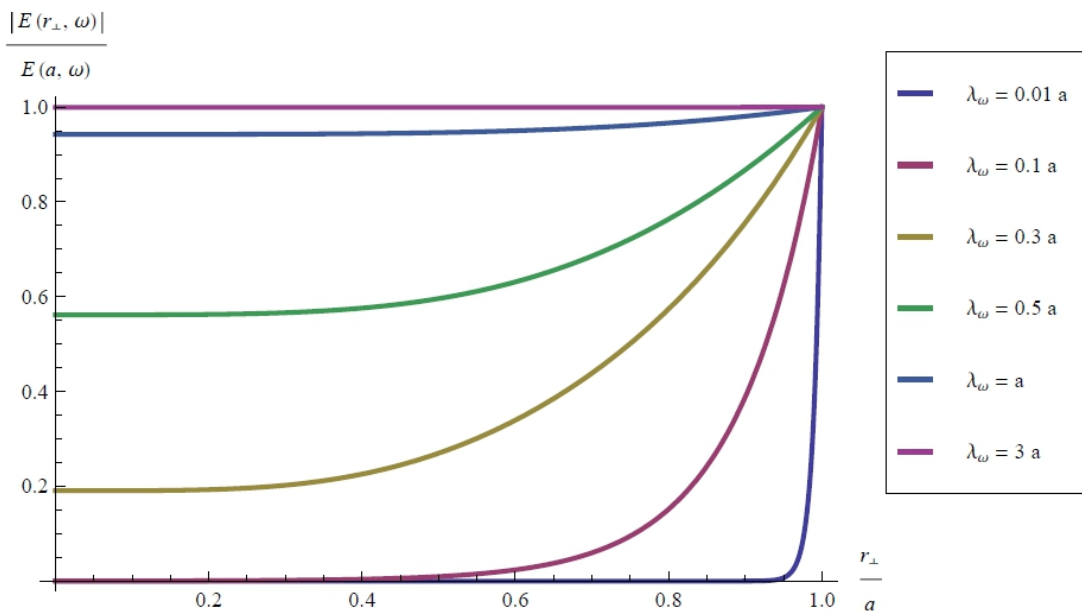


Abbildung 4.4: Skin-Effekt im zylindrischen Draht mit Radius a . Gezeigt ist die Stromdichteverteilung (vgl. (4.52)) in radialer Richtung.

Ein leitender Draht mit Radius a und Länge L hat einen Gleichstromwiderstand von

$$R_0 = \frac{L}{\pi a^2 \sigma}. \quad (4.67)$$

Bei hohen Frequenzen reduziert sich der effektive stromtragende Querschnitt des Drahtes infolge des Skin-Effekts auf den Wert

$$\pi [a_\perp^2 - (a - \lambda_\omega)^2] \simeq 2\pi a \lambda_\omega, \quad (4.68)$$

4 Ströme in Ohmschen Leitern

wenn also durch den Draht ein hochfrequenter Wechselstrom mit Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ fließt, so steigt der *effektive* Ohmsche Widerstand an auf den Wert

$$R_\omega = \frac{L}{2\pi a \lambda_\omega \sigma} = \frac{a}{2\lambda_\omega} R_0. \quad (4.69)$$

4.5 Joulesche Wärme und Dissipationsfunktional

Wird ein Ohmscher Leiter während einer Zeitspanne $t_f - t_i$ von Strom durchflossen, so entsteht dabei eine *Joulesche Wärme*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(J)} &= \int_{t_i}^{t_f} dt' \mathcal{P}^{(J)}(t') \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt' \int_\Omega d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}, t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt' \int_\Omega d^3r \frac{|\mathbf{j}(\mathbf{r}, t')|^2}{\sigma(\mathbf{r})} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt' \int_\Omega d^3r \sigma(\mathbf{r}) |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t')|^2. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Der Effekt wird nutzbringend in Wasserkochern, Toastern und anderen elektrischen Heizsystemen angewendet.

Wir betrachten einen Ohmschen Leiter Ω , auf dessen Oberfläche $\partial\Omega$ zwei (disjunkte) Elektroden $\partial\Omega^{(1)}$ und $\partial\Omega^{(2)}$ aufgebracht sind, durch die ein stationärer Strom I bei $\partial\Omega^{(1)}$ in den Leiter hinein und bei $\partial\Omega^{(2)}$ wieder hinausfließt. Da die Stromdichte im Inneren von Ω stationär ist, gilt dort $\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, das heißt $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}}\phi^{(\Omega)}(\mathbf{r})$. Damit ist die in Ω dissipierte Leistung gegeben zu

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}^{(J)} = \int_\Omega d^3r \sigma(\mathbf{r}) |\nabla_{\mathbf{r}}\phi^{(\Omega)}(\mathbf{r})|^2. \quad (4.71)$$

Im stationären stromtragenden Zustand sind die Elektrodenflächen $\partial\Omega^{(1)}$ und $\partial\Omega^{(2)}$ somit Äquipotentialflächen.

Die Oberfläche $\partial\Omega$ des Ohmschen Leiters Ω sei jetzt aus disjunkten isolierenden und leitenden Teilflächen zusammengesetzt

$$\begin{aligned} \partial\Omega &= \partial\Omega^{(i)} \cup \partial\Omega^{(1)} \cup \partial\Omega^{(2)} \\ \partial\Omega^{(1)} \cap \partial\Omega^{(2)} &= \emptyset \\ \partial\Omega^{(i)} \cap \partial\Omega^{(1)} &= \emptyset = \partial\Omega^{(i)} \cap \partial\Omega^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

4.5 Joulesche Wärme und Dissipationsfunktional

Auf der Grenzfläche $\partial\Omega^{(i)}$ von Ω mit einem Isolator $\Omega^{(I)}$ wollen wir jetzt annehmen

$$[\sigma(\mathbf{r}')]\big|_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(i)}} = 0. \quad (4.73)$$

Statt den Strom I vorzugeben, können wir genauso gut Werte für die Potentiale auf den Elektroden $\partial\Omega^{(1)}$ und $\partial\Omega^{(2)}$ vorgeben

$$\begin{aligned} k &= 1, 2 & (4.74) \\ \phi^{(\Omega)}(\mathbf{r}^{(k)}) &= \phi^{(k)} \text{ für } \mathbf{r}^{(k)} \in \partial\Omega^{(k)} \end{aligned}$$

und anschließend, sobald die entsprechende Randwertaufgabe (4.19), (4.32) für das Potential $\phi^{(\Omega)}(\mathbf{r})$ gelöst ist, zum Beispiel den durch die Elektrodenfläche $|\partial\Omega^{(1)}|$ fließenden Strom $I = I^{(1)}$ gemäß

$$I^{(1)} = \int_{\partial\Omega^{(1)}} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \int_{\partial\Omega^{(1)}} d^2r' \mathbf{n}' \cdot [-\nabla_{\mathbf{r}} \phi^{(\Omega)}(\mathbf{r})] \sigma(\mathbf{r}') \quad (4.75)$$

berechnen.

Für eine gegebene Leitfähigkeit $\sigma(\mathbf{r})$ mit der Eigenschaft (4.73) betrachten wir jetzt das Dissipationsfunktional (Gustav Robert Kirchhoff 1848)

$$\mathcal{W}[\phi] = \int_{\Omega} d^3r \sigma(\mathbf{r}) |\nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r})|^2, \quad (4.76)$$

ergänzt durch die Randbedingung

$$\begin{aligned} k &= 1, 2 & (4.77) \\ \phi(\mathbf{r}^{(k)}) &= \phi^{(k)} \text{ für } \mathbf{r}^{(k)} \in \partial\Omega^{(k)}. \end{aligned}$$

Abgesehen davon, dass $\phi(\mathbf{r})$ die gleichen Randbedingungen auf den Elektrodenflächen $\partial\Omega^{(k)}$ erfüllen soll wie das Potential $\phi^{(\Omega)}(\mathbf{r})$, unterliegt die Funktion $\phi(\mathbf{r})$ keinen Einschränkungen. Damit ist klar, dass $\mathcal{W}[\phi]$ kein Maximum besitzt, da ja insbesondere zugelassen ist, dass $|\nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r})|$ beliebig große Werte annehmen darf. Aber das Funktional $\mathcal{W}[\phi]$ besitzt ein Minimum

$$0 < \mathcal{W}[\phi^{(m)}] < \mathcal{W}[\phi]. \quad (4.78)$$

Um das einzusehen, betrachten wir die Variation

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi^{(m)}(\mathbf{r}) + \eta(\mathbf{r}), \quad (4.79)$$

4 Ströme in Ohmschen Leitern

wobei wir übrigens nicht voraussetzen, dass $|\eta(\mathbf{r})|$ klein sein soll! Aufgrund der Randbedingungen (4.77) gilt dann notwendig

$$\begin{aligned} k &= 1, 2 \\ \eta(\mathbf{r}^{(k)}) &= 0 \text{ für } \mathbf{r}^{(k)} \in \partial\Omega^{(k)}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}[\phi^{(m)}(\mathbf{r}) + \eta(\mathbf{r})] - \mathcal{W}[\phi^{(m)}(\mathbf{r})] \\ &= \int_{\Omega} d^3r \sigma(\mathbf{r}) \left(|\nabla_{\mathbf{r}}\phi^{(m)}(\mathbf{r}) + \nabla_{\mathbf{r}}\eta(\mathbf{r})|^2 - |\nabla_{\mathbf{r}}\phi^{(m)}(\mathbf{r})|^2 \right) \\ &= 2 \int_{\Omega} d^3r \sigma(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}}\phi^{(m)}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\eta(\mathbf{r}) + \int_{\Omega} d^3r \sigma(\mathbf{r}) |\nabla_{\mathbf{r}}\eta(\mathbf{r})|^2 \\ &= 2 \int_{\partial\Omega} d^2r' [\mathbf{n}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\phi^{(m)}(\mathbf{r}')] \sigma(\mathbf{r}') \eta(\mathbf{r}') \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} d^3r \operatorname{div} [\sigma(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}}\phi^{(m)}(\mathbf{r})] \eta(\mathbf{r}) + \int_{\Omega} d^3r \sigma(\mathbf{r}) |\nabla_{\mathbf{r}}\eta(\mathbf{r})|^2. \end{aligned}$$

Das Oberflächenintegral zerlegen wir in drei Anteile, entsprechend den beiden Elektrodenflächen $\partial\Omega^{(1)}$, $\partial\Omega^{(2)}$ und der Grenzfläche $\partial\Omega^{(i)}$. Auf der Grenzfläche $\partial\Omega^{(i)}$ zum Isolator ist die Leitfähigkeit gleich Null, d.h. $[\sigma(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial\Omega^{(i)}} = 0$, und auf den beiden Elektrodenflächen verschwindet nach Voraussetzung die Variation $\eta(\mathbf{r}')$, siehe (4.80). Somit folgt

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega} d^2r' [\mathbf{n}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\phi^{(m)}(\mathbf{r}')] \sigma(\mathbf{r}') \eta(\mathbf{r}') \\ &= \int_{\partial\Omega^{(i)}} d^2r' [\mathbf{n}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\phi^{(m)}(\mathbf{r}')] \sigma(\mathbf{r}') \eta(\mathbf{r}') + \int_{\partial\Omega^{(1)}} d^2r' [\mathbf{n}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\phi^{(m)}(\mathbf{r}')] \sigma(\mathbf{r}') \eta(\mathbf{r}') \\ &\quad + \int_{\partial\Omega^{(2)}} d^2r' [\mathbf{n}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\phi^{(m)}(\mathbf{r}')] \sigma(\mathbf{r}') \eta(\mathbf{r}') \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nach dem Gesagten ist jetzt

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}[\phi^{(m)}(\mathbf{r}) + \eta(\mathbf{r})] - \mathcal{W}[\phi^{(m)}(\mathbf{r})] \\ &= -2 \int_{\Omega} d^3r \operatorname{div} [\sigma(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}}\phi^{(m)}(\mathbf{r})] \eta(\mathbf{r}) + \int_{\Omega} d^3r \sigma(\mathbf{r}) |\nabla_{\mathbf{r}}\eta(\mathbf{r})|^2. \end{aligned} \quad (4.81)$$

4.5 Joulesche Wärme und Dissipationsfunktional

Die Bestimmungsgleichung für ein Minimum des Funktionals an der Stelle $\phi(\mathbf{r}) = \phi^{(m)}(\mathbf{r})$ lautet

$$\mathcal{W}[\phi^{(m)}(\mathbf{r}) + \eta(\mathbf{r})] - \mathcal{W}[\phi^{(m)}(\mathbf{r})] \stackrel{!}{=} \underbrace{\int_{\Omega} d^3r \sigma(\mathbf{r}) |\nabla_{\mathbf{r}} \eta(\mathbf{r})|^2}_{>0}. \quad (4.82)$$

Folglich ist die gesuchte Funktion $\phi^{(m)}(\mathbf{r})$, die das Dissipationsfunktional $\mathcal{W}[\phi]$ minimiert, Lösung der Randwertaufgabe

$$\operatorname{div} [\sigma(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \phi^{(m)}(\mathbf{r})] = 0 \quad (4.83)$$

mit Randbedingungen

$$k = 1, 2 \quad (4.84)$$

$$\phi^{(m)}(\mathbf{r}^{(k)}) = \phi^{(k)} \text{ für } \mathbf{r}^{(k)} \in \partial\Omega^{(k)}.$$

Der Vergleich mit (4.19), (4.32) zeigt, dass gilt $\phi^{(m)}(\mathbf{r}) \equiv \phi^{(\Omega)}(\mathbf{r})$. Trägt ein Ohmscher Leiter Ω einen stationären Strom, so ist die Potentialfunktion $\phi^{(\Omega)}(\mathbf{r})$ und damit die Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}} \phi^{(\Omega)}(\mathbf{r})$ im Inneren von Ω dadurch charakterisiert, dass sie das Dissipationsfunktional *minimiert*

$$\boxed{\mathcal{W}[\phi] \geq \mathcal{W}[\phi^{(\Omega)}] = \int_{\Omega} d^3r \sigma(\mathbf{r}) |\nabla_{\mathbf{r}} \phi^{(\Omega)}(\mathbf{r})|^2 > 0.} \quad (4.85)$$

Alle mit stationärem Strom betriebenen elektrischen Heizsystemen arbeiten sozusagen maximal schlecht.

Drude-Modell der Leitfähigkeit

Pauschal gesprochen resultiert auf einen beweglichen Ladungsträger mit effektiver Masse m^* und Elementarladung $|e|$ in Gegenwart eines elektrischen Felds im Inneren eines Ohmschen Leiters eine *Reibungskraft*, die proportional zu dessen Geschwindigkeit \mathbf{v} ist:

$$\frac{d}{dt} (m_0 \mathbf{v}) = |e| \mathbf{E} - \frac{m^*}{\tau} \mathbf{v}. \quad (4.86)$$

4 Ströme in Ohmschen Leitern

Dabei ist τ eine charakteristische *Relaxationszeit*, die beschreibt, wie schnell das Teilchen nach dem Abschalten des Feldes abbremsst. Ist n_0 die Teilchendichte der Ladungsträger, so folgt jetzt als Stromdichte der freien Ladungsträger

$$\mathbf{j}(t) = |e| n_0 \mathbf{v}(t). \quad (4.87)$$

Folglich gilt entsprechend diesem einfachen Modell jetzt

$$\frac{m^*}{n_0 |e|} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(t) = |e| \mathbf{E} - \frac{m^*}{n_0 |e|} \frac{1}{\tau} \mathbf{j}(t). \quad (4.88)$$

Im stationären Gleichgewicht ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(t) = \mathbf{0}, \quad (4.89)$$

was für ein konstantes elektrisches Feld \mathbf{E} zur Folge hat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{j}(t) = \frac{n_0 |e|^2}{m^*} \tau \mathbf{E}. \quad (4.90)$$

Demnach ist

$$\boxed{\sigma_0 = \frac{n_0 |e|^2}{m^*} \tau} \quad (4.91)$$

die Gleichstromleitfähigkeit.

Wir schreiben jetzt für ein zeitabhängiges äußeres Feld die Relation (4.88) um zu

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(t) = \sigma_0 \mathbf{E}(t) - \mathbf{j}(t). \quad (4.92)$$

Betrachten wir z.B. ein zeitlich veränderliches elektrisches Wechselfeld der Frequenz $\omega = 2\pi f$, etwa

$$\mathbf{E}(t) = \text{Re} \left[\widehat{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t} \right]. \quad (4.93)$$

Die Lösung der Relaxationsgleichung für die Stromdichte $\mathbf{j}(t)$ der beweglichen Ladungsträger lautet dann

$$\mathbf{j}(t) = \text{Re} \left[\widehat{\mathbf{j}}(\omega) e^{-i\omega t} \right], \quad (4.94)$$

wobei

$$\widehat{\mathbf{j}}(\omega) = \sigma(\omega) \widehat{\mathbf{E}}(\omega) \quad (4.95)$$

4.6 Ohmsche Leiter in Bewegung

und $\sigma(\omega)$ eine *frequenzabhängige* komplexwertige Leitfähigkeit ist

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}. \quad (4.96)$$

Bemerkung

Die Relation (4.96) beschreibt die Leitfähigkeit von Metallen überraschend gut. Sie wurde auf der Basis der klassischen kinetischen Gastheorie für ein Modell mobiler Elektronen um 1902 von P. Drude aufgestellt und von A. Sommerfeld im Jahr 1933 im Rahmen des Fermi-Gas Modells für Metallelektronen wesentlich modifiziert, da bei Temperaturen $T \ll T_F$ aufgrund des Pauliverbotes nur die Elektronen nahe der Fermi-Energie $E_F = k_B T_F$ vom elektrischen Feld beschleunigt werden können. Drude hatte noch angenommen, dass die Elektronen an einzelnen Ionenrümpfen im Gitter stoßen, woraus man auf eine mittlere freie Weglänge gegeben durch den Abstand der Ionenrümpfe im Gitter schließen muss, etwa 0.1–0.5 [nm]. Im Experiment ist die mittlere freie Weglänge l der Elektronen an der Fermikante aber mindestens um den Faktor 100 größer! Die Erklärung dieser Diskrepanz beruht auf dem Umstand, dass nach der Quantenmechanik ein *periodisches* Gitter aus positiv geladenen Ionenrümpfen die Elektronen gar nicht streuen kann. Erst eine Unregelmäßigkeit in der Periodizität des Gitters führt zur Streuung von Elektronen, sei es eine statische Störung, verursacht durch Einbau von Fremdatomen beziehungsweise Leerstellen, oder eine dynamische Störung, verursacht durch kollektive Schwingungen bei der Temperaturbewegung der Ionenrümpfe (Phononen)! Berechnet man die Stoßzeit zu $\tau = \frac{l}{v_F}$ mit v_F als Fermigeschwindigkeit und l als gemessene freie Weglänge, so ist die Relation (4.96) eine nützliche Formel zur Beschreibung der Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit von Metallen (im Rahmen des Gültigkeitsbereiches der lokalen Theorie).

4.6 Ohmsche Leiter in Bewegung

Es bezeichne im folgenden $\rho(\mathbf{r}, t)$ die Ladungsdichte und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ die Stromdichte im Inneren eines Ohmschen Leiters Ω mit Leitfähigkeit σ , auf dessen mobile Ladungsträger jetzt elektromagnetische Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ einwirken. Für einen in einem Inertialsystem (Laborsystem) $\mathcal{S}(r_a)$ ruhenden Leiter Ω lautet das Ohmsche

4 Ströme in Ohmschen Leitern

Gesetz

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (4.97)$$

Wir betrachten ein bewegtes Bezugssystem $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(r'_a)$, welches aus dem Laborsystem \mathcal{S} durch eine Boost-Transformation

$$a \in \{x, y, z\} \quad (4.98)$$

$$t' = t$$

$$r'_a(t) = r_a - R_a(t)$$

$$\left| \frac{d}{dt} R_a(t) \right| \ll c \quad (4.99)$$

hervorgeht. Bei einer Drehbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine Drehachse \mathbf{n} gilt dann

$$R_a(t) = \omega t [\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}]_a \quad (4.100)$$

$$r'_a(t) = r_a - v_a t,$$

genau wie bei einer Galilei-Transformation. Wie ist das Ohmsche Gesetz zu modifizieren, wenn sich der Leiter Ω im äußeren magnetischen Induktionsfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ mit (im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c geringer) Geschwindigkeit

$$v_a(t) = \frac{d}{dt} R_a(t) \quad (4.101)$$

entlang einer Bahn $R_a(t)$ relativ zum Laborsystem $\mathcal{S} = \mathcal{S}(r_a)$ bewegt? Die elektrische Ladung im Volumenelement d^3r' ist im System \mathcal{S}' gegeben zu

$$dq' = \rho'(\mathbf{r}', t') d^3r', \quad (4.102)$$

während sie im System \mathcal{S} im Volumen d^3r gegeben ist zu

$$dq = \rho(\mathbf{r}, t) d^3r. \quad (4.103)$$

Nun ändert die Transformation (4.98) weder das Volumen des Leiters, noch wird dabei Ladung generiert oder abgebaut, d.h. es gilt die Invarianzeigenschaft

$$\begin{aligned} d^3r' &= d^3r, \\ dq' &= dq. \end{aligned} \quad (4.104)$$

4.6 Ohmsche Leiter in Bewegung

Folglich muss für die Ladungsdichte (für $|\mathbf{v}| \ll c$) gelten

$$\rho'(\mathbf{r}', t') = \rho(\mathbf{r}, t), \quad (4.105)$$

d.h. die Ladungsdichte ist eine Invariante unter der Transformation (4.98).

Das Transformationsverhalten der Stromdichte ist dagegen komplizierter

$$\mathbf{j}'(\mathbf{r}', t') = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) - \underbrace{\mathbf{v}(t) \rho(\mathbf{r}, t)}_{\text{Konvektionsterm}}. \quad (4.106)$$

Das Auftreten des Konvektionsterms in (4.106) ist für die Ladungserhaltung unbedingt erforderlich. Um dies einzusehen verwenden wir die Identität

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \rho[\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t] \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{j}[\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t]. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Betrachten wir die Kontinuitätsgleichung im System \mathcal{S}' , so finden wir, in dem wir (4.105) und (4.106) einsetzen und (4.107) verwenden:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \operatorname{div}' \mathbf{j}'(\mathbf{r}', t') \\ & \stackrel{t'=t}{=} \frac{d}{dt} \rho[\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t] + \operatorname{div}' \{ \mathbf{j}[\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t] - \mathbf{v}(t) \rho[\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t] \} \\ & = \sum_{a \in \{x, y, z\}} \frac{\partial}{\partial r'_a} \rho[\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t] \underbrace{\frac{d}{dt} R_a(t)}_{=v_a(t)} + \frac{\partial}{\partial t} \rho[\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t] \\ & \quad + \sum_{a \in \{x, y, z\}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r'_a} j_a[\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t] - v_a(t) \frac{\partial}{\partial r'_a} \rho[\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t] \right\} \\ & = \underbrace{\left[\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \right]}_{=0}_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{R}(t)} \\ & = 0. \end{aligned}$$

Damit die Kontinuitätsgleichung unter der Transformation (4.98) invariant bleibt, muss sich die Stromdichte gemäß (4.106) transformieren.

4 Ströme in Ohmschen Leitern

Wir betrachten jetzt die dem Induktionsgesetz entsprechende Untergruppe (1.22) der Maxwell-Gleichungen und fragen nach dem Transformationsverhalten der elektromagnetischen Felder unter der Koordinatentransformation (4.98). Wie man leicht bestätigt, hängen die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, wie sie im System \mathcal{S} durch ihre Wirkung auf eine Testladung gemessen werden, mit den entsprechenden Feldern $\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t')$ und $\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t')$ im System \mathcal{S}' wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t') &= \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \kappa \mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}$$

Wenn die Untergruppe (1.22) der Maxwell-Gleichungen für $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ im System \mathcal{S} erfüllt ist, dann ist sie auch für $\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t')$ und $\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t')$ im System \mathcal{S}' erfüllt. Zum Beweis verwenden wir, dass unter der Transformation (4.98) gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}(\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t), \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t).\end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{div}' \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t') &= \operatorname{div}' \mathbf{B}(\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t) \\ &= \underbrace{\left[\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right]}_{=0} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{R}(t)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ebenso

$$\begin{aligned}& \operatorname{rot}' \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') + \kappa \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t') \tag{4.108} \\ &= \operatorname{rot}' [\mathbf{E}(\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t) + \kappa \mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t)] + \kappa \frac{d}{dt} \mathbf{B}(\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t) \\ &= \operatorname{rot}' [\mathbf{E}(\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t) + \kappa \mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t)] \\ &\quad + \kappa \sum_{a \in \{x, y, z\}} \frac{\partial}{\partial r'_a} \mathbf{B}[\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t] \underbrace{\frac{d}{dt} R_a(t)}_{=v_a(t)} + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}' + \mathbf{R}(t), t) \\ &= \left[\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \kappa \operatorname{rot} [\mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] + \kappa [\mathbf{v}(t) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}] \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right. \\ &\quad \left. + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\int_0^t d\tau \mathbf{v}(\tau)}.\end{aligned}$$

4.6 Ohmsche Leiter in Bewegung

Mit der Identität

$$\operatorname{rot} [\mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] + [\mathbf{v}(t) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}] \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t) \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (4.109)$$

folgt dann

$$\begin{aligned} & \operatorname{rot}' \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') + \kappa \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t') \\ &= \left[\underbrace{\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}_{=0} + \mathbf{v}(t) \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}_{=0} \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{R}(t)} \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Das Ohmsche Gesetz lautet somit, wenn wir den Leiter Ω mit Bezug auf sein eigenes instantanes Ruhesystem \mathcal{S}' beschreiben

$$\mathbf{j}'(\mathbf{r}', t') = \sigma'(\mathbf{r}') \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t'). \quad (4.110)$$

Für die Leitfähigkeit $\sigma'(\mathbf{r}')$ im System \mathcal{S}' und die Leitfähigkeit $\sigma(\mathbf{r})$ im System \mathcal{S} postulieren wir den Zusammenhang

$$\sigma'(\mathbf{r}') = \sigma(\mathbf{r}).$$

Nach dem Gesagten ist das Ohmsche Gesetz (4.110) für einen mit Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegten Ohmschen Leiter jetzt zu schreiben als

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v} \rho^{(f)}(\mathbf{r}, t) = \sigma(\mathbf{r}) [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \kappa \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]. \quad (4.111)$$

Der Betrag des Konvektionsterms $\mathbf{v} \rho^{(f)}$ für mobile (freie) Überschussladungen mit Dichte $\rho^{(f)}$ im Inneren eines bewegten Leiters unterscheidet sich um einen Faktor $|\mathbf{v}| \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma}$ vom Beitrag des Ohmschen Terms $\sigma \mathbf{E}$. Für nicht relativistische Geschwindigkeit $|\mathbf{v}| \ll c$ und eine große Leitfähigkeit σ , wie sie für metallische Ohmsche Leiter typisch ist, spielt der Konvektionsterm dann offensichtlich keine Rolle, siehe (4.6)! Dann gilt

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma(\mathbf{r}) [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \kappa \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]. \quad (4.112)$$

Der unipolare Induktor

Als Entdecker des Induktionsgesetzes sind der Engländer Michael Faraday, der Amerikaner Joseph Henry und der Däne Hans Christian Ørsted zu nennen, die alle drei voneinander unabhängig das Induktionsgesetz um das Jahr 1830 entdeckten. Heutzutage wissen wir, immer wenn ein bewegter Ohmscher Leiter magnetische Kraftlinien schneidet, dann entsteht eine elektrische Spannung und es fließt Strom. Dabei ist es gleich, ob der Leiter sich relativ zum Magneten bewegt oder anders herum, oder ob die Kraft vom elektrischen oder vom magnetischen Anteil der Lorentz-Kraft verursacht wird.

Um 1832 experimentierte Faraday insbesondere mit einer gelochten Kupferscheibe, die er über einem *ruhenden Stabmagneten* in Drehung versetzte (siehe Abbildung 4.5). Faraday beobachtete zwischen dem inneren Rand der Scheibe und dem äußeren Rand eine elektrische *Gleichspannung* proportional zur *Winkelgeschwindigkeit* der Drehbewegung. Diese als *unipolarer Induktor* bekannt geworden

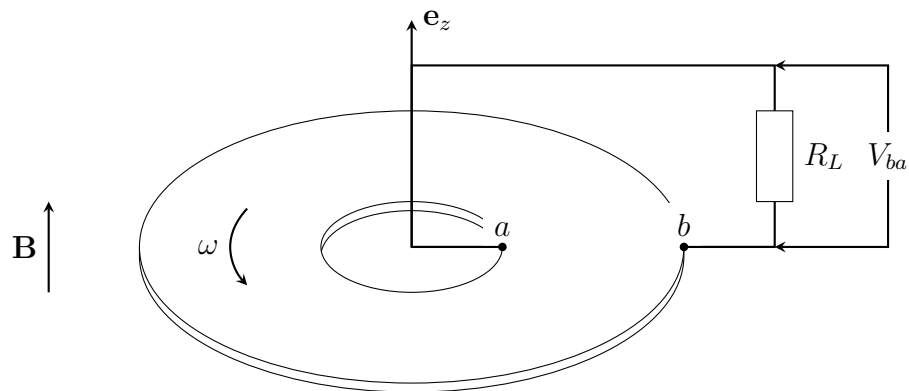


Abbildung 4.5: Unipolarer Induktor

ne Anordnung besteht aus einem leitenden Hohlzylinder Ω mit Leitfähigkeit σ , mit äußerem Radius b , innerem Radius $a < b$ und Höhe L . Für $L < a$ sieht der Hohlzylinder aus wie eine gelochte Scheibe. Sowohl der innere Zylindermantel $r_{\perp} = a$ als auch der äußere Zylindermantel $r_{\perp} = b$ sind jeweils metallisch beschichtet, so dass sie als Elektroden fungieren, d.h. insbesondere sind $r_{\perp} = a$ bzw. $r_{\perp} = b$ beides Äquipotentialflächen. Der Zylinder werde jetzt im konstanten äußeren magnetischen Induktionsfeldes $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ um seine Achse \mathbf{e}_z in Rotation versetzt. Zwei sehr

4.6 Ohmsche Leiter in Bewegung

gut leitende Schleifkontakte befinden sich einmal auf dem inneren Zylindermantel $r_{\perp} = a$ und einmal auf dem äußeren Zylindermantel $r_{\perp} = b$.

Wir berechnen jetzt den Gleichstrom I , der über die Schleifkontakte bei *konstanter* Winkelgeschwindigkeit ω abfließt. Nach dem Gesagten ist die Geschwindigkeit \mathbf{v} der mobilen Ladungsträger im Abstand \mathbf{r}_{\perp} zur Drehachse gegeben zu $\mathbf{v} = \omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{r}_{\perp}$. In Gegenwart eines konstanten magnetischen Induktionsfeldes $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$ parallel zur Drehachse gilt für eine reine Drehbewegung

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \omega B (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{r}_{\perp}) \wedge \mathbf{e}_z = \omega B \mathbf{r}_{\perp} = \omega B r_{\perp} \mathbf{e}_{r_{\perp}}. \quad (4.113)$$

Der Geometrie der Anordnung entsprechend fließt jetzt ein stationärer *Gleichstrom* nur in radialer Richtung $\mathbf{e}_{r_{\perp}}$, also

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}_{\perp}) &= j(r_{\perp}) \mathbf{e}_{r_{\perp}} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}_{\perp}) &= E(r_{\perp}) \mathbf{e}_{r_{\perp}} \\ E(r_{\perp}) &= -\frac{\partial}{\partial r_{\perp}} \phi^{(\Omega)}(r_{\perp}). \end{aligned} \quad (4.114)$$

Das ergibt, wenn der Gleichstrom I durch die innere Elektrode hinein bzw. durch die äußere Elektrode hinausfließt, einen Spannungsabfall von

$$V_{ba} = -\int_a^b dr_{\perp} E(r_{\perp}). \quad (4.115)$$

Nun ist (SI-Einheiten, also $\kappa = 1$, siehe Anhang A):

$$j(r_{\perp}) = \sigma [E(r_{\perp}) + \omega B r_{\perp}]. \quad (4.116)$$

Es fließt durch eine innere Mantelfläche $2\pi r_{\perp} L$ mit Radius $r_{\perp} \in (a, b)$ des Zylinders offensichtlich immer der selbe Strom I , d.h. es gilt für die Stromdichte

$$j(r_{\perp}) = \frac{I}{2\pi r_{\perp} L}. \quad (4.117)$$

4 Ströme in Ohmschen Leitern

Damit

$$\begin{aligned}
 V_{ba} &= - \int_a^b dr_{\perp} E(r_{\perp}) & (4.118) \\
 &= - \int_a^b dr_{\perp} \left[\frac{j(r_{\perp})}{\sigma} - \omega B r_{\perp} \right] \\
 &= - \int_a^b dr_{\perp} \left[\frac{I}{2\pi L \sigma} \frac{1}{r_{\perp}} - \omega B r_{\perp} \right] \\
 &= - \frac{I}{2\pi L \sigma} \ln \frac{b}{a} + \frac{\omega B}{2} (b^2 - a^2) \\
 &= -IR_{ab} + \frac{\omega B}{2} (b^2 - a^2).
 \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde verwendet, dass der Ohmsche Widerstand für einen vom inneren Zylindermantel zum äußeren Zylindermantel fließenden Strom I (ohne Rotation) gemäß (4.50) gegeben ist zu

$$\begin{aligned}
 a &< b, & (4.119) \\
 R_{ab} &= \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi L} \frac{1}{\sigma}.
 \end{aligned}$$

Werden die Schleifkontakte kurzgeschlossen, so ist $V_{ba} = 0$. Dann fließt ein *Kurzschlussstrom* gegeben zu

$$I^{(KS)} = \frac{\omega B}{2R_{ab}} (b^2 - a^2). \quad (4.120)$$

Wird statt dessen zwischen die Schleifkontakte ein hoher Lastwiderstand R_L gebracht, siehe Abbildung 4.5, so ist $I \simeq 0$, es resultiert eine *Klemmenspannung* gegeben zu

$$V_{ba}^{(0)} = \frac{\omega B}{2} (b^2 - a^2). \quad (4.121)$$

Diese Klemmenspannung entspricht gerade der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses $\Phi^{(M)}(t)$ durch eine geschlossene (orientierte) Leiterschleife, die aus zwei disjunkten Flächen zusammengesetzt ist, nämlich dem Rechteck $abcdefa$ und dem Kreisringsegment $fb'b$, wobei die Strecke \bar{ab} mit der Strecke $\bar{a'b'}$ einen zeitabhängigen Winkel $\alpha(t)$ einschließt (siehe Abbildung 4.6). Die Fläche des Rechtecks $abcdefa$ ist zeitunabhängig und liefert auch keinen Beitrag zum magnetischen

4.6 Ohmsche Leiter in Bewegung

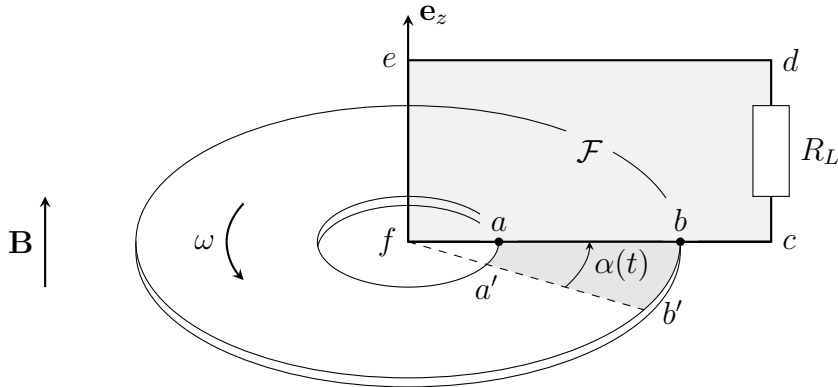


Abbildung 4.6: Die Schleifkontakte bilden eine Leiterschleife $\mathcal{L} = abcdefa = \partial\mathcal{F}$, welche die Fläche \mathcal{F} berandet.

Fluss, da der Normalenvektor dieser Fläche orthogonal zu $\mathbf{B}(\mathbf{r}') = B\mathbf{e}_z$ orientiert ist:

$$\begin{aligned}\Phi^{(M)}(t) &= \int_{\mathcal{A}(t)} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}') & (4.122) \\ &= B \int_0^{\alpha(t)} d\alpha' \int_a^b dr' r' \\ &= \alpha(t) B \frac{b^2 - a^2}{2}.\end{aligned}$$

Nach dem Induktionsgesetz folgt dann für konstante Winkelgeschwindigkeit $\frac{d}{dt}\alpha(t) = \omega$ zwischen dem inneren und äußeren Rand der rotierenden Kreisscheibe die Klemmenpannung

$$V_{ab}^{(0)} = -\frac{d}{dt}\Phi^{(M)}(t) = -\frac{\omega B}{2}(b^2 - a^2), \quad (4.123)$$

was wegen $V_{ab}^{(0)} = -V_{ba}^{(0)}$ genau dem Resultat in (4.121) entspricht.

Numerisches Beispiel

Für eine dünne Scheibe aus Kupfer sei $L = 1$ [mm], $a = 1$ [cm], $b = 10$ [cm], $\frac{\omega}{2\pi} = 60$ [Hz], $B = 0.1$ [T]. Dann folgt mit der Leitfähigkeit von Kupfer $\sigma^{(\text{Cu})} \simeq 5.8 \times 10^6$ $\left[\frac{\text{A}}{\text{m V}}\right]$ bereits ein hoher Kurzschlussstrom von $I^{(KS)} \simeq 3 \times 10^4$ [A]. Die

4 Ströme in Ohmschen Leitern

über den Elektroden abfallende Klemmenspannung ist jedoch klein: $V_{ab}^{(0)} \simeq 0.2 \text{ [V]}$.
Fazit: ein unipolarer Induktor erzeugt bei kleiner Spannung recht hohe Ströme!

5 Magnetostatik

Das moderne Verständnis der magnetischen Erscheinungen geht auf Untersuchungen des dänischen Physikochemikers Hans Christian Ørsted zurück, der während einer Vorlesung im Jahr 1820 bemerkte, dass ein stromtragender Leiter eine Kraft auf eine Kompassnadel ausübt. Schon vor Ørsteds Entdeckung hatte der italienische Philosoph und Jurist Gian Domenico Romagnosi um 1802 über einen Zusammenhang von Elektrizität und Magnetismus berichtet, seine Entdeckung wurde seinerzeit aber leider nicht beachtet. André-Marie Ampère zeigte nur zwei Wochen nachdem er von Ørsteds Entdeckung erfahren hatte, dass Ørsted die Ablenkung der Magnetnadel durch das Erdmagnetfeld nicht berücksichtigt hatte. In einer verbesserten Versuchsanordnung zeigte Ampère, dass zwei parallel positionierte lange Drähte im stromtragenden Zustand eine zu den Drähten senkrecht orientierte anziehende Kraft spüren, wenn die elektrische Stromrichtung in beiden Leitern gleich ist, und dass diese Kraft umgekehrt proportional zum Abstand der beiden Drähte variiert.

Die in (1.51) angegebenen Grundgleichungen der Magnetostatik vereinfachen sich (in *zusammenziehbaren* Gebieten) mit der Einführung des Vektorpotentials (C. F. Gauß, 1835)

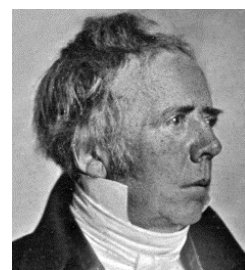
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (5.1)$$

zu

$$\text{rot rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \kappa\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (5.2)$$

Für die kartesischen Komponenten $A_a(\mathbf{r})$ des Vektorpotentials $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ folgt dann

$$a \in \{x, y, z\} \quad (5.3)$$
$$[\text{rot rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})]_a = -\nabla_{\mathbf{r}}^2 A_a(\mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial r_a} [\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r})] = \kappa\mu_0 j_a(\mathbf{r}).$$



Hans Christian Ørsted (1777–1851)



Carl Friedrich Gauß (1777–1855)

Coulomb-Eichung

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir jetzt annehmen

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.4)$$

Dies ist die Bedingung der sog. Coulomb-Eichung.

Angenommen $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ würde nicht der Coulomb-Eichung genügen. In dem Fall betrachten wir anstelle von $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ein physikalisch äquivalentes Vektorpotential

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \nabla_{\mathbf{r}}\chi(\mathbf{r}) \quad (5.5)$$

und wählen die Eichfunktion $\chi(\mathbf{r})$ als Lösung der Poisson-Gleichung

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2\chi(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (5.6)$$

Also gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.7)$$

Am Wert des magnetischen Induktionsfeldes $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ändert sich dabei überhaupt nichts

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} [\mathbf{A}(\mathbf{r}) - \nabla_{\mathbf{r}}\chi(\mathbf{r})] = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (5.8)$$

Bei Wahl der Coulomb-Eichung für das Vektorpotential verbleibt noch die Freiheit, Eichtransformationen mit *harmonischen* Eichfunktionen $\eta(\mathbf{r})$ durchzuführen:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(\mathbf{r}) &= \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \nabla_{\mathbf{r}}\eta(\mathbf{r}) \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2\eta(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Dann gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = 0 = \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (5.10)$$

Poisson-Gleichung für Vektorpotential

Nach dem Gesagten genügen die drei kartesischen Komponenten $A_a(\mathbf{r})$ des Vektorpotentials in der Coulomb-Eichung jeweils einer Poisson-Gleichung

$$\boxed{\begin{aligned} a &\in \{x, y, z\} \\ -\nabla_{\mathbf{r}}^2 A_a(\mathbf{r}) &= \kappa\mu_0 j_a(\mathbf{r}). \end{aligned}} \quad (5.11)$$

Verlangen wir als Randbedingung, dass $A_a(\mathbf{r})$ außerhalb des stromtragenden Volumens Ω (mindestens) wie $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}$ gegen Null strebt, wenn die Entfernung $|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|$ zum Mittelpunkt $\mathbf{r}^{(0)}$ des Gebietes Ω groß wird, so folgt entsprechend zu den in (2.8) angestellten Überlegungen das Vektorpotential einer lokalisierten Stromverteilung zu

$$\boxed{\begin{aligned} a &\in \{x, y, z\} \\ A_a(\mathbf{r}) &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3r' \frac{j_a(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \end{aligned}} \quad (5.12)$$

Randbedingungen für das magnetische Induktionsfeld an leitenden Oberflächen

In Analogie zur Diskussion der Randbedingungen für das elektrostatische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ an einer ideal leitenden (ruhenden) Oberfläche $\partial\Omega$ mit nach außen orientierter Flächennormalen $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ folgt jetzt für das magnetische Induktionsfeld der folgende Satz von Randbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\in \partial\Omega \\ \mathbf{n}_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \mathbf{n}_{\partial\Omega} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \kappa\mu_0 \mathbf{J}^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Hier bezeichnet $\mathbf{J}^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r})$ eine *Flächenstromdichte*. Um diese präzise zu definieren, betrachten wir zwei orthogonale Einheitsvektoren $\mathbf{m}_{\partial\Omega}^{(I)}$ und $\mathbf{m}_{\partial\Omega}^{(II)}$, die am Ort $\mathbf{r} \in \partial\Omega$ tangential zur Oberfläche orientiert sein mögen, so dass gilt

$$\mathbf{m}_{\partial\Omega}^{(I)} \wedge \mathbf{m}_{\partial\Omega}^{(II)} = \mathbf{n}_{\partial\Omega}. \quad (5.14)$$

Wenn pro Zeiteinheit dt durch ein in die Oberfläche $\partial\Omega$ eingebettetes Liniensegment \mathcal{L} der Länge $|\mathcal{L}| = \int_{\mathcal{L}} dl$ eine Quantität $dQ^{(\mathcal{L})}$ von Ladungen fließt, so entspricht dies einem Flächenstrom

$$\frac{dQ^{(\mathcal{L})}}{dt} = I^{(\partial\Omega)} = \int_{\mathcal{L}} dl \left[\mathbf{m}_{\partial\Omega}^{(II)} \cdot \mathbf{J}^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r}) \right]_{\mathbf{r} \in \mathcal{L}}, \quad (5.15)$$

das heißt $\mathbf{J}^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r})$ ist die Flächenstromdichte am Ort des Liniensegments \mathcal{L} . Dieser zweidimensionalen Begriffsbildung entspricht in drei Dimensionen der Ausdruck $\int_{\partial\mathcal{F}} d^2r' [\mathbf{n}' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')]_{\mathbf{r}' \in \partial\mathcal{F}}$ für den Strom durch eine Querschnittsfläche $\partial\mathcal{F}$ im Inneren eines Leiters.

Magnetisches Induktionsfeld einer Stromverteilung

Das magnetische Induktionsfeld einer lokalisierten Stromverteilung folgt hieraus zu

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) & (5.16) \\ &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3r' \text{rot} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] \\ &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3r' \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \wedge \mathbf{j}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3r' \left(-\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \wedge \mathbf{j}(\mathbf{r}').\end{aligned}$$

Nach einer elementaren Umstellung folgt

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.} \quad (5.17)$$

Vektorpotential und magnetisches Induktionsfeld für dünne leitende Drähte

Für eine linienförmige Stromverteilung, zum Beispiel ein dünner metallischer Draht \mathcal{C} mit Linienelement $d\mathbf{s}$ am Ort \mathbf{r} in Richtung von $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, gilt

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3r = I d\mathbf{s}, \quad (5.18)$$

wenn der Querschnitt des Drahtes den Strom I trägt. Es folgt im Rahmen so eines Stromfadenmodells

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\kappa\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{s} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} & (5.19) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\kappa\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{s} \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}.\end{aligned}$$

Gibt es mehrere stromführende Drähte $\mathcal{C}^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots, N$, so ist über die Beiträge aller stromführenden Drähte im System zu summieren

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi} \sum_{n=1}^N I^{(n)} \int_{\mathcal{C}^{(n)}} d\mathbf{s}^{(n)} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}^{(n)}|} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi} \sum_{n=1}^N I^{(n)} \int_{\mathcal{C}^{(n)}} d\mathbf{s}^{(n)} \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}^{(n)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}^{(n)}|^3}.\end{aligned}\quad (5.20)$$

Magnetfeld eines linearen stromtragenden Drahtes

Das magnetische Feld in der Umgebung eines einen Strom I tragenden (unendlich langen) dünnen Drahtes, der zum Beispiel entlang \mathbf{e}_z orientiert sein möge, ist mittels (5.19) leicht zu berechnen:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}(\lambda) &= \lambda\mathbf{e}_z \text{ mit } -\infty < \lambda < \infty \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\kappa\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{d\mathbf{s}(\lambda)}{d\lambda} \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}(\lambda)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\lambda)|^3} \\ &= \frac{\kappa\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\lambda)|^3} \mathbf{e}_z \wedge [r_x\mathbf{e}_x + r_y\mathbf{e}_y + (r_z - \lambda)\mathbf{e}_z].\end{aligned}\quad (5.21)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_z &= \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_y &= -\mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_y.\end{aligned}\quad (5.22)$$

5 Magnetostatik

Folglich

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\kappa\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{1}{[r_x^2 + r_y^2 + (r_z - \lambda)^2]^{\frac{3}{2}}} (-r_y \mathbf{e}_x + r_x \mathbf{e}_y) \quad (5.23) \\
 &= \frac{\kappa\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{d}{d\lambda} \left[-\frac{1}{r_x^2 + r_y^2} \frac{(r_z - \lambda)}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + (r_z - \lambda)^2}} \right] (-r_y \mathbf{e}_x + r_x \mathbf{e}_y) \\
 &= \frac{\kappa\mu_0 I}{4\pi} \left[-\frac{1}{r_x^2 + r_y^2} \frac{(r_z - \lambda)}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + (r_z - \lambda)^2}} \right]_{\lambda \rightarrow -\infty}^{\lambda \rightarrow \infty} \times (-r_y \mathbf{e}_x + r_x \mathbf{e}_y) \\
 &= \frac{\kappa\mu_0 I}{4\pi} \frac{2}{r_x^2 + r_y^2} (r_x \mathbf{e}_y - r_y \mathbf{e}_x) \\
 &= \frac{\kappa\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} \mathbf{e}_\alpha.
 \end{aligned}$$

Hier ist \mathbf{e}_α der Einheitsvektor, der am Punkt (r_\perp, α) des Kreisbogens mit Radius $r_\perp = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$ tangential orientiert ist:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_\alpha &= -\frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} \mathbf{e}_x + \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} \mathbf{e}_y \quad (5.24) \\
 \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha &= 1.
 \end{aligned}$$

Eine alternative Berechnungsmethode nutzt die Symmetrie des Problems aus. Für das Integral der Stromdichte über die Querschnittsfläche \mathcal{F}_0 des Drahtes folgt unter Verwendung der magnetostatischen Grundgleichung (1.51) und dem Satz von Stokes

$$\begin{aligned}
 \kappa\mu_0 I &= \kappa\mu_0 \int_{\mathcal{F}_0} d^2 r' \mathbf{n}' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad (5.25) \\
 &= \kappa\mu_0 \int_{\mathcal{F}} d^2 r' \mathbf{n}' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') \\
 &= \int_{\mathcal{F}} d^2 r' \mathbf{n}' \cdot \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}') \\
 &= \int_{\partial\mathcal{F}} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{s}).
 \end{aligned}$$

Beim Übergang von der ersten zur zweiten Zeile ist \mathcal{F} jetzt ein größerer Querschnitt, der \mathcal{F}_0 als Teilmenge enthält, wobei die Stromdichte außerhalb von \mathcal{F}_0 identisch Null ist:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}')|_{\mathbf{r}' \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0} = \mathbf{0}. \quad (5.26)$$

Wählen wir \mathcal{F} als einen Kreis mit Radius $r_\perp > r_0$, so gilt in ebenen Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} s_x &= r_\perp \cos \alpha \\ s_y &= r_\perp \sin \alpha \\ s_z &= r_z \\ \frac{d\mathbf{s}}{d\alpha} &= r_\perp \mathbf{e}_\alpha. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Aus Symmetriegründen sind die Komponenten des Vektorfeldes $\mathbf{B}(\mathbf{s})$ auf dem Pfad $\partial\mathcal{F}$ nur längs der Richtung \mathbf{e}_α von Null verschieden, und dort auch nur vom Radius r_\perp abhängig.

$$\mathbf{B}(\mathbf{s})|_{\mathbf{s} \in \partial\mathcal{F}} = B_\alpha(r_\perp) \mathbf{e}_\alpha. \quad (5.28)$$

Wir erhalten

$$\kappa\mu_0 I = \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{d\mathbf{s}}{d\alpha} \cdot [B_\alpha(r_\perp) \mathbf{e}_\alpha] = 2\pi r_\perp B_\alpha(r_\perp) \quad (5.29)$$

und schließlich

$$B_\alpha(r_\perp) = \frac{\kappa\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r_\perp}, \quad (5.30)$$

was mit (5.23) übereinstimmt.

Es gilt die sog. rechte Hand-Regel. Zeigt der Daumen in Richtung des Stromflusses im Draht, so weisen die Finger der rechten Hand in Richtung des magnetischen Induktionsfeldes.

5.1 Biot-Savart-Gesetz

Fließt durch einen Querschnitt eines Leitervolumens Ω ein elektrischer Strom I mit Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, so wirkt in Gegenwart eines magnetischen Induktionsfeldes $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ auf das Volumen Ω des Leiters eine Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F}^{(\Omega)} = \kappa \int_\Omega d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (5.31)$$

5 Magnetostatik

Setzt sich das stromtragende Gebiet Ω aus mehreren (fest positionierten!) disjunkten dünnen einfach geschlossenen Leiterschleife $\mathcal{C}^{(n)}$ zusammen ($n = 1, 2, \dots, N$), so wirkt auf die m -te Schleife $\mathcal{C}^{(m)}$ bei festgehaltener Position und Orientierung der übrigen $N - 1$ Leiterschleifen eine Kraft

$$\mathbf{F}^{(\mathcal{C}^{(m)})} = \kappa I^{(m)} \oint_{\mathcal{C}^{(m)}} d\mathbf{s}^{(m)} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{s}^{(m)}), \quad (5.32)$$

wobei

$$\mathbf{B}(\mathbf{s}^{(m)}) = \frac{\kappa\mu_0}{4\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N I^{(n)} \oint_{\mathcal{C}^{(n)}} d\mathbf{s}^{(n)} \wedge \frac{\mathbf{s}^{(m)} - \mathbf{s}^{(n)}}{|\mathbf{s}^{(m)} - \mathbf{s}^{(n)}|^3} \quad (5.33)$$

das magnetische Induktionsfeld am Ort $\mathbf{s}^{(m)}$ ist, das von der gesamten Anordnung von Leiterschleifen $\mathcal{C}^{(n)}$ generiert wird. In der Summe über $n = 1, 2, \dots, N$ rührt der Beitrag $n = m$ vom Eigenfeld der Schleife $\mathcal{C}^{(m)}$ her. Da die Feldlinien des Eigenfeldes eines einen Strom $I^{(m)}$ tragenden Leiterelements $d\mathbf{s}^{(m)}$ *kreisförmig* um das Leiterelement herum verlaufen, ist dieser Beitrag aus Symmetriegründen identisch Null. Folglich ist die Kraft auf die Leiterschleife $\mathcal{C}^{(m)}$ in Gegenwart von $N - 1$ anderen Leiterschleifen $\mathcal{C}^{(n)}$ eine Summe aller Paarkräfte

$$\mathbf{F}^{(\mathcal{C}^{(m)})} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \mathbf{F}[\mathcal{C}^{(m)}, \mathcal{C}^{(n)}] \quad (5.34)$$

$$\mathbf{F}[\mathcal{C}^{(m)}, \mathcal{C}^{(n)}] = \frac{\kappa^2 \mu_0}{4\pi} I^{(m)} I^{(n)} \oint_{\mathcal{C}^{(m)}} d\mathbf{s}^{(m)} \wedge \left[\oint_{\mathcal{C}^{(n)}} d\mathbf{s}^{(n)} \wedge \frac{\mathbf{s}^{(m)} - \mathbf{s}^{(n)}}{|\mathbf{s}^{(m)} - \mathbf{s}^{(n)}|^3} \right].$$

Die Kraft $\mathbf{F}[\mathcal{C}^{(m)}, \mathcal{C}^{(n)}]$ ist das Analogon zum Coulomb-Gesetz für Ladungen. Zwei stromdurchflossene Leiter üben eine anziehende Kraft aufeinander aus, wenn in beiden Leitern die Elektrische Stromrichtung *gleich* ist, und entsprechend eine abstoßende Kraft, wenn die Stromrichtung entgegengesetzt ist. Historisch wurde das Kraftgesetz für fest positionierte, einen stationären Strom tragende dünne Leiterschleifen um 1820 von André-Marie Ampère experimentell untersucht und von Jean-Baptiste Biot und von Felix Savart mathematisch formuliert (Biot-Savart-Gesetz). Der Zusammenhang mit der allgemeinen Lorentz-Kraft wurde erst später klar.

Den Ausdruck (5.34) formen wir noch in eine äquivalente Darstellung um. Dazu

schreiben wir jetzt für $m \neq n$

$$\begin{aligned}
 & d\mathbf{s}^{(m)} \wedge \left[d\mathbf{s}^{(n)} \wedge \frac{\mathbf{s}^{(m)} - \mathbf{s}^{(n)}}{|\mathbf{s}^{(m)} - \mathbf{s}^{(n)}|^3} \right] \\
 &= d\mathbf{s}^{(m)} \wedge \left[d\mathbf{s}^{(n)} \wedge \left(-\nabla_{\mathbf{s}^{(m)}} \frac{1}{|\mathbf{s}^{(m)} - \mathbf{s}^{(n)}|} \right) \right] \\
 &= \left[d\mathbf{s}^{(m)} \cdot d\mathbf{s}^{(n)} \right] \nabla_{\mathbf{s}^{(m)}} \frac{1}{|\mathbf{s}^{(m)} - \mathbf{s}^{(n)}|} - \left[d\mathbf{s}^{(m)} \cdot \nabla_{\mathbf{s}^{(m)}} \frac{1}{|\mathbf{s}^{(m)} - \mathbf{s}^{(n)}|} \right] d\mathbf{s}^{(n)}.
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Nun ist das Wegintegral eines Gradienten über eine geschlossene Kurve $\mathcal{C}^{(m)}$ identisch Null

$$\oint_{\mathcal{C}^{(m)}} d\mathbf{s}^{(m)} \cdot \nabla_{\mathbf{s}^{(m)}} \frac{1}{|\mathbf{s}^{(m)} - \mathbf{s}^{(n)}|} = 0. \tag{5.36}$$

Also wirkt nach dem Gesagten auf eine (einfach geschlossene) Leiterschleife $\mathcal{C}^{(m)}$ in Gegenwart einer anderen fest gehaltenen (ebenfalls einfach geschlossenen) Leiterschleifen $\mathcal{C}^{(n)}$ eine Kraft

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 & m \neq n \\
 & \mathbf{F} [\mathcal{C}^{(m)}, \mathcal{C}^{(n)}] \\
 &= \frac{\kappa^2 \mu_0}{4\pi} I^{(m)} I^{(n)} \oint_{\mathcal{C}^{(m)}} \oint_{\mathcal{C}^{(n)}} \left[d\mathbf{s}^{(m)} \cdot d\mathbf{s}^{(n)} \right] \nabla_{\mathbf{s}^{(m)}} \frac{1}{|\mathbf{s}^{(m)} - \mathbf{s}^{(n)}|}.
 \end{aligned}
 } \tag{5.37}$$

Dies ist das allgemeine Kraftgesetz von Biot und Savart für (einfach geschlossene) fadenförmige Leiter. Offensichtlich gilt für diese Kraft

$$\mathbf{F} [\mathcal{C}^{(m)}, \mathcal{C}^{(n)}] = -\mathbf{F} [\mathcal{C}^{(n)}, \mathcal{C}^{(m)}], \tag{5.38}$$

entsprechend dem Newtonschen Prinzip „actio est reactio“. Im Unterschied zum Coulomb-Gesetz, wo sich ja Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens anziehen, entnehmen wir der Darstellung (5.37), dass sich *entgegengesetzt gerichtete* Ströme in linienförmigen Leitern *abstoßen*! Wie wir noch sehen werden, führt dies unter anderem dazu, dass im Gleichgewicht die magnetostatische Wechselwirkungsenergie ein Maximum ist, und nicht wie die elektrische Wechselwirkungsenergie ein Minimum.

5.2 Ampèresches Kraftgesetz

Wir betrachten zwei zum Einheitsvektor \mathbf{e}_z parallel orientierte dünne geradlinige Leiter $\mathcal{C}^{(1)}$ und $\mathcal{C}^{(2)}$ im Abstand R , beide in der Ebene $r_y = 0$. Führt der eine Leiter einen stationären Strom $I^{(1)}$ und der andere einen Strom $I^{(2)}$, so wirkt nach dem Gesagten eine Kraft

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}^{(1)} &= \lambda^{(1)} \mathbf{e}_z & (5.39) \\
 \mathbf{s}^{(2)} &= \lambda^{(2)} \mathbf{e}_z + R \mathbf{e}_x, \\
 \mathbf{F} [\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}] &= \frac{\kappa^2 \mu_0}{4\pi} I^{(1)} I^{(2)} \oint_{\mathcal{C}^{(1)}} \oint_{\mathcal{C}^{(2)}} [\mathbf{ds}^{(1)} \cdot \mathbf{ds}^{(2)}] \nabla_{\mathbf{s}^{(1)}} \frac{1}{|\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)}|} \\
 &= \frac{\kappa^2 \mu_0}{4\pi} I^{(1)} I^{(2)} \oint_{\mathcal{C}^{(1)}} \oint_{\mathcal{C}^{(2)}} [\mathbf{ds}^{(1)} \cdot \mathbf{ds}^{(2)}] \left(-\frac{\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)}}{|\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)}|^3} \right) \\
 &= \frac{\kappa^2 \mu_0}{4\pi} I^{(1)} I^{(2)} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} d\lambda^{(1)} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda^{(2)} \left(-\frac{-R \mathbf{e}_x + (\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}) \mathbf{e}_z}{[R^2 + (\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})^2]^{\frac{3}{2}}} \right).
 \end{aligned}$$

Die Kraftkomponente parallel zu \mathbf{e}_z ist identisch Null, denn

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda^{(2)} \frac{(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})}{[r_{\perp}^2 + (\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})^2]^{\frac{3}{2}}} & (5.40) \\
 &= \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} d\lambda^{(2)} \frac{\partial}{\partial \lambda^{(2)}} \frac{1}{[r_{\perp}^2 + (\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})^2]^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{[r_{\perp}^2 + (\lambda^{(1)} - \frac{l}{2})^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[r_{\perp}^2 + (\lambda^{(1)} + \frac{l}{2})^2]^{\frac{1}{2}}} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Die Kraft $\mathbf{F}[\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}]$ wirkt ausschließlich entlang der Richtung \mathbf{e}_x , steht also orthogonal zur Orientierungsrichtung \mathbf{e}_z der beiden geradlinigen dünnen Leiter. Somit

$$\begin{aligned} \mathbf{F}[\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}] &= \frac{\kappa^2 \mu_0}{4\pi} I^{(1)} I^{(2)} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} d\lambda^{(1)} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda^{(2)} \left(\frac{R}{[R^2 + (\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})^2]^{\frac{3}{2}}} \right) \mathbf{e}_x \\ &= \frac{\kappa^2 \mu_0}{4\pi} I^{(1)} I^{(2)} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} d\lambda^{(1)} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda^{(2)} \frac{\partial}{\partial \lambda^{(2)}} \left[-\frac{1}{R} \frac{\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}}{[R^2 + (\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \mathbf{e}_x \\ &= \frac{\kappa^2 \mu_0}{4\pi} I^{(1)} I^{(2)} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} d\lambda^{(1)} \left(\frac{2}{R} \right) \mathbf{e}_x. \end{aligned}$$

Pro Einheitslänge wirkt für $I^{(1)} I^{(2)} > 0$ auf den Leiter $\mathcal{C}^{(1)}$ bei festgehaltener Position des Leiters $\mathcal{C}^{(2)}$ eine *anziehende* Kraft in Richtung der Verbindungslinie \mathbf{e}_x von $\mathcal{C}^{(1)}$ nach $\mathcal{C}^{(2)}$, die proportional zum Kehrwert des Abstands R ist

$$\boxed{\frac{1}{l} \mathbf{F}[\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}] = \frac{\kappa^2 \mu_0}{2\pi} \frac{I^{(1)} I^{(2)}}{R} \mathbf{e}_x.} \quad (5.41)$$

Im Jahr 1822 beschäftigte sich Ampère mit der Kraft zwischen zwei parallel orientierten stromdurchflossenen Metalldrähten. Er konnte experimentell zeigen, dass diese Kraft proportional zum Kehrwert des Abstands R der beiden Drähte ist. Im SI-Einheitensystem wird das Ampèresche Kraftgesetz zur Festlegung der Einheit der Stromstärke verwendet (siehe Anhang A).



André-Marie
Ampère
(1775–1836)

5.3 Ringströme

Wir betrachten jetzt eine dünne *geschlossene* Leiterschleife \mathcal{C} , die eine Fläche \mathcal{F} mit Rand $\partial\mathcal{F} = \mathcal{C}$ einschließen möge. Für ein *beliebiges* Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ gilt nach dem Satz von Stokes

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\mathcal{F}} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{s}) &= \int_{\mathcal{F}} d^2 r' \mathbf{n}' \cdot \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}') \\ &= \int_{\mathcal{F}} d^2 r' (\mathbf{n}' \wedge \nabla_{\mathbf{r}'}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (5.42)$$

5 Magnetostatik

Hier bezeichnet \mathbf{n}' die Flächennormale der Fläche \mathcal{F} am Ort $\mathbf{r}' \in \mathcal{F}$, deren Rand $\mathcal{C} = \partial\mathcal{F}$ eine einfach geschlossene Kurve ist. Formal entspricht dies der Operator-Identität

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} d\mathbf{s} \dots = \int_{\mathcal{F}} d^2r' (\mathbf{n}' \wedge \nabla_{\mathbf{r}'}) \dots \quad (5.43)$$

Die gegebene Darstellung (5.19) des Vektorpotentials als Linienintegral über den Rand $\partial\mathcal{F} = \mathcal{C}$ für eine einfach *geschlossene* Leiterschleife \mathcal{C} lässt sich mit dem Satz von Stokes dann umformen zu

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\kappa\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\partial\mathcal{F}} d\mathbf{s} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \\ &= \frac{\kappa\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{F}} d^2r' \mathbf{n}' \wedge \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\kappa\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{F}} d^2r' \mathbf{n}' \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Sei $R_{\mathcal{C}} = \sqrt{|\mathcal{F}|/\pi}$ nun der Durchmesser einer stromtragenden einfach geschlossenen Schleife \mathcal{C} , die wir uns um den Punkt $\mathbf{r}^{(0)}$ zentriert denken. Dann gilt für großen Abstand $|\mathbf{r}| \gg R_{\mathcal{C}}$ zum Zentrum $\mathbf{r}^{(0)}$ dieser Schleife

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{C}} &\ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}| \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 \boldsymbol{\mu} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)})}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|^3}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Der Vektor $\boldsymbol{\mu}$ mit kartesischen Komponenten

$$\boxed{\begin{aligned} a &\in \{x, y, z\} \\ \mu_a &= \kappa I \int_{\mathcal{F}} d^2r' n'_a \end{aligned}} \quad (5.46)$$

bezeichnet hier das vom stationären Strom I in der geschlossenen Schleife $\partial\mathcal{F} = \mathcal{C}$ generierte *magnetische Dipolmoment*. Hier ist n'_a die kartesische Komponente des Normalenvektors \mathbf{n}' am Ort \mathbf{r}' der Fläche \mathcal{F} , die von der betrachteten einfach geschlossenen Leiterschleife umrandet ist. Da das Oberflächenintegral über jede *geschlossene* Fläche identisch verschwindet, ist der Wert von $\boldsymbol{\mu}$ unabhängig davon,

über welche Fläche $\tilde{\mathcal{F}} \neq \mathcal{F}$ integriert wird, wenn nur der Rand beider Flächen mit der Kurve \mathcal{C} übereinstimmt, d.h. wenn gilt $\partial\tilde{\mathcal{F}} = \partial\mathcal{F} = \mathcal{C}$.

Ein an einer Stelle $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{0}$ positionierter magnetischer Dipol $\boldsymbol{\mu}$ erzeugt an einem Ort $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ ein magnetisches Induktionsfeld

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) & (5.47) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \left(\frac{\boldsymbol{\mu} \wedge \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\boldsymbol{\mu} \text{div} \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right) - (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right) \right] \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\boldsymbol{\mu} \text{div} \left(-\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) + (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \left(\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) \right] \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\underbrace{\boldsymbol{\mu} \left(-\nabla_{\mathbf{r}}^2 \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right)}_{=4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r})} + (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \left(\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) \right] \\
 &= \mu_0 \left[\boldsymbol{\mu} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu}|\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^5} \right].
 \end{aligned}$$

Der Term mit der Deltafunktion ist unbedingt erforderlich, damit gilt

$$\begin{aligned}
 \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mu_0 \left[\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \left(\nabla_{\mathbf{r}}^2 \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) \right] & (5.48) \\
 &= \mu_0 \left[\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) [-4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r})] \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Es folgt für das magnetische Induktionsfeld, das ein am Ort $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{0}$ positionierter magnetischer Dipol $\boldsymbol{\mu}$ erzeugt:

$$\boxed{\mathbf{r} \neq \mathbf{0}}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu}|\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^5}. \quad (5.49)$$

Das magnetische Induktionsfeld (5.49) eines magnetischen Dipols $\boldsymbol{\mu}$ unterscheidet sich für $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ hinsichtlich der Orts- und Orientierungsabhängigkeit nicht vom elektrischen Feld eines elektrischen Dipols \mathbf{p} , siehe (2.83).

Kraft und Drehmoment auf einen magnetischen Dipol

Auf eine dünne geschlossene, einen Strom I tragende Leiterschleife \mathcal{C} im *äußeren* Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ wirkt nach dem Gesagten eine Kraft

$$\mathbf{F}^{(\mathcal{C})} = \kappa I \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{s} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{s}), \quad (5.50)$$

wobei jetzt $\mathbf{B}(\mathbf{s})$ den Beitrag des Eigenfeldes der Leiterschleife \mathcal{C} nicht enthält! Der Term $m = n$ trägt nicht bei, siehe (5.34).

Wir wenden jetzt die Identität (5.43) auf den Ausdruck (5.50) an und schreiben

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(\mathcal{C})} &= \kappa I \oint_{\partial\mathcal{F}} d\mathbf{s} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{s}) & (5.51) \\ &= \kappa I \int_{\mathcal{F}} d^2r' (\mathbf{n}' \wedge \nabla_{\mathbf{r}'}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}') \\ &= \kappa I \int_{\mathcal{F}} d^2r' \left[\mathbf{n}' \wedge \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}') + (\mathbf{n}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) \mathbf{B}(\mathbf{r}') - \underbrace{\mathbf{n}' \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}')}_{=0} \right]. \end{aligned}$$

Im Rahmen der Gültigkeit der magnetostatischen Approximation gilt für das äußere Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r}')$ am Ort \mathbf{r}' der von einer einfach geschlossenen Leiterschleife $\mathcal{C} = \partial\mathcal{F}$ umrandeten Fläche \mathcal{F} natürlich auch $\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$. Also

$$\mathbf{F}^{(\mathcal{C})} = \kappa I \int_{\mathcal{F}} d^2r' (\mathbf{n}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) \mathbf{B}(\mathbf{r}'). \quad (5.52)$$

Im homogenen konstanten äußeren Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r}') = \mathbf{B}^{(0)}$ wirkt demnach gar keine Kraft auf die Leiterschleife!

Ist nun das Feld zwar inhomogen, jedoch der Durchmesser einer um die Position \mathbf{r} zentrierten Leiterschleife $\mathcal{C} = \partial\mathcal{F}$ klein gegenüber der Längenskala, auf der $\frac{\partial}{\partial r_c} B_a(\mathbf{r})$ variiert, so folgt in guter Näherung

$$\begin{aligned} a &\in \{x, y, z\} & (5.53) \\ F_a^{(\mathcal{C})} &= \kappa I \int_{\mathcal{F}} d^2r' (\mathbf{n}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}) B_a(\mathbf{r}') \\ &\simeq \sum_{c \in \{x, y, z\}} \underbrace{\kappa I \int_{\mathcal{F}} d^2r' n'_c}_{=\mu_c, \text{ siehe (5.46)}} \frac{\partial}{\partial r_c} B_a(\mathbf{r}) = \sum_{c \in \{x, y, z\}} \mu_c \frac{\partial}{\partial r_c} B_a(\mathbf{r}) \\ &= (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) B_a(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Aus dem Kraftgesetz (5.53) könnte man in Analogie zu den angestellten Überlegungen zum elektrischen Dipol (2.82) unmittelbar auf die potentielle Energie eines magnetischen Dipols $\boldsymbol{\mu}$ im äußeren magnetischen Induktionsfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ schließen:

$$U^{(\text{Dipol})}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (5.54)$$

Hier ist Vorsicht geboten, denn bei der Bewegung einer stromtragenden Leiterschleife im äußeren magnetischen Induktionsfeld ist noch der Beitrag der Induktionsspannung aufgrund der Änderung des magnetischen Flußes, der die von der Leiterschleife umrandete Fläche durchsetzt, mit in die Energiebilanz aufzunehmen!

Handelt es sich jedoch bei $\boldsymbol{\mu}$ um ein *permanentes* magnetisches Dipolmoment, zum Beispiel dasjenige eines Elementarteilchens, Atoms oder Moleküls, so ist (5.54) korrekt, da sich das magnetische Moment von atomaren Systemen nicht stetig ändern lässt. Wir werden diesen Punkt weiter unten noch im Zusammenhang mit der Arbeitsleistung von bewegten stromtragenden Leiterschleifen diskutieren.

Mit Bezug auf eine Drehachse durch den Punkt \mathbf{r} wirkt gemäß (5.50) auf eine stromtragende einfach geschlossene Leiterschleife \mathcal{C} ein Drehmoment

$$\mathbf{M}^{(\mathcal{C})} = \kappa I \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{s} - \mathbf{r}) \wedge [\mathrm{d}\mathbf{s} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{s})]. \quad (5.55)$$

Für ein *homogenes* magnetisches Induktionsfeld $\mathbf{B}(\mathbf{s}) = \mathbf{B}^{(0)}$ folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(\mathcal{C})} &= \kappa I \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\mathbf{s} [(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}^{(0)}] - \kappa I \mathbf{B}^{(0)} \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{r}) \\ &= \kappa I \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\mathbf{s} [(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}^{(0)}] - \underbrace{\frac{\kappa I}{2} \mathbf{B}^{(0)} \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{s}} [(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{r})]}_{=0}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

denn das Linienintegral eines Gradienten über den geschlossenen Pfad \mathcal{C} ist gleich Null. Wir schreiben jetzt unter Beachtung von $\mathcal{C} = \partial\mathcal{F}$ und Verwendung der Identität (5.43)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(\mathcal{C})} &= \kappa I \oint_{\partial\mathcal{F}} \mathrm{d}\mathbf{s} [(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}^{(0)}] \\ &= \kappa I \int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}^2 r' (\mathbf{n}' \wedge \nabla_{\mathbf{r}'} [(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}^{(0)}]) \\ &= \kappa I \underbrace{\int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}^2 r' \mathbf{n}' \wedge \mathbf{B}^{(0)}}_{\equiv \boldsymbol{\mu}}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

5 Magnetostatik

Ausgedrückt durch das magnetische Moment $\boldsymbol{\mu}$ einer geschlossenen Leiterschleife $\mathcal{C} = \partial\mathcal{F}$ mit eingeschlossener Fläche \mathcal{F} , siehe (5.46), folgt demnach, dass das Drehmoment im *homogenen* Magnetfeld $\mathbf{B}^{(0)} = \text{const}$ unabhängig von der Position der Schleife ist:

$$\mathbf{M}^{(\mathcal{C})} = \boldsymbol{\mu} \wedge \mathbf{B}^{(0)}. \quad (5.58)$$

Dipol-Dipol Wechselwirkung für permanente magnetische Dipole

Die Wechselwirkungsenergie von zwei *permanenten* magnetischen Dipolen $\boldsymbol{\mu}^{(I)}$ und $\boldsymbol{\mu}^{(II)}$ an zwei Orten $\mathbf{R}^{(I)}$ und $\mathbf{R}^{(II)}$ ergibt sich aus (5.54) zu

$$U^{(I,II)}(\mathbf{R}^{(I)} - \mathbf{R}^{(II)}) = -\boldsymbol{\mu}^{(I)} \cdot \mathbf{B}^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)}), \quad (5.59)$$

wobei $\mathbf{B}^{(II)}(\mathbf{R}^{(I)})$ das von dem am Ort $\mathbf{R}^{(II)}$ befindlichen magnetischen Dipol $\boldsymbol{\mu}^{(II)}$ erzeugte Feld am Ort $\mathbf{R}^{(I)}$ des magnetischen Dipols $\boldsymbol{\mu}^{(I)}$ ist, siehe (5.49). Es folgt nach dem Gesagten für die gesuchte Wechselwirkungsenergie von zwei magnetischen Dipolen $\boldsymbol{\mu}^{(I)}$ und $\boldsymbol{\mu}^{(II)}$ im Abstand \mathbf{r} der Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{R}^{(I)} - \mathbf{R}^{(II)} \\ U^{(I,II)}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\boldsymbol{\mu}^{(I)} \cdot \boldsymbol{\mu}^{(II)}) |\mathbf{r}|^2 - 3(\boldsymbol{\mu}^{(I)} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\mu}^{(II)} \cdot \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^5}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Vektorpotential und B-Feld eines Ringstroms

Wir berechnen das Vektorpotential $\mathbf{A}^{(L)}(\mathbf{r})$ für einen stationären Kreisstrom $I^{(L)}$, der in einer um den Ursprung zentrierten ringförmigen dünnen Leiterschleife $\mathcal{C}^{(L)}$ fließt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die Leiterschleife in die Ebene $r_z = r_z^{(L)}$ eingebettet. Nach (5.44) gilt dann am Ort \mathbf{r} für das Vektorpotential des betrachteten ringförmigen Leiters

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(L)}(\mathbf{r}) &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{4\pi} \int_{\mathcal{C}^{(L)}} \frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \\ &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{d\mathbf{s}^{(L)}(\phi)}{d\phi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}^{(L)}(\phi)|}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Hier ist $\mathbf{s}^{(L)}(\phi)$ mit $-\pi < \phi \leq \pi$ ein Punkt auf dem Kreis $\mathcal{C}^{(L)}$ mit Radius $\rho^{(L)}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}^{(L)}(\phi) &= \rho^{(L)} \cos(\phi) \mathbf{e}_x + \rho^{(L)} \sin(\phi) \mathbf{e}_y + r_z^{(L)} \mathbf{e}_z & (5.62) \\ \frac{d\mathbf{s}^{(L)}(\phi)}{d\phi} &= -\rho^{(L)} \sin(\phi) \mathbf{e}_x + \rho^{(L)} \cos(\phi) \mathbf{e}_y \\ \mathbf{r} &= r_x \mathbf{e}_x + r_y \mathbf{e}_y + r_z \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(L)}(\mathbf{r}) & & (5.63) \\ &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{4\pi} \rho^{(L)} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{-\sin(\phi) \mathbf{e}_x + \cos(\phi) \mathbf{e}_y}{\left[(r_x - \rho^{(L)} \cos \phi)^2 + (r_y - \rho^{(L)} \sin \phi)^2 + (r_z - r_z^{(L)})^2 \right]^{1/2}} \\ &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{4\pi} \rho^{(L)} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi (-\sin(\phi) \mathbf{e}_x + \cos(\phi) \mathbf{e}_y) \\ &\quad \times \frac{1}{\left[r_x^2 + r_y^2 + (r_z - r_z^{(L)})^2 + [\rho^{(L)}]^2 - 2\rho^{(L)} \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \left(\frac{r_x \cos \phi}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} + \frac{r_y \sin \phi}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} \right) \right]^{1/2}}.\end{aligned}$$

Mit

$$\cos \alpha = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}, \quad r_{\perp} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \quad (5.64)$$

schreiben wir

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(L)}(\mathbf{r}) &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{4\pi} \rho^{(L)} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi (-\sin(\phi) \mathbf{e}_x + \cos(\phi) \mathbf{e}_y) & (5.65) \\ &\quad \times \frac{1}{\left[r_{\perp}^2 + (r_z - r_z^{(L)})^2 + [\rho^{(L)}]^2 - 2\rho^{(L)} r_{\perp} \underbrace{(\cos \alpha \cos \phi + \sin \alpha \sin \phi)}_{\equiv \cos(\phi - \alpha)} \right]^{1/2}}.\end{aligned}$$

Nach der Substitution

$$\chi = \phi - \alpha \quad (5.66)$$

folgt dann

$$\mathbf{A}^{(L)}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{4\pi} \rho^{(L)} \int_{-\pi - \alpha}^{\pi - \alpha} d\chi \frac{-\sin(\chi + \alpha) \mathbf{e}_x + \cos(\chi + \alpha) \mathbf{e}_y}{\left[r_{\perp}^2 + (r_z - r_z^{(L)})^2 + [\rho^{(L)}]^2 - 2\rho^{(L)} r_{\perp} \cos \chi \right]^{1/2}}.$$

5 Magnetostatik

Sei $F(\chi)$ eine 2π -periodische Funktion, also $F(\chi + 2\pi) = F(\chi)$. Dann gilt für beliebiges $\delta \in \mathbb{R}$ das Shift-Lemma:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi+\delta}^{\pi+\delta} d\chi F(\chi) &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{\pi+\delta} - \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} \right) d\chi F(\chi) \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} d\chi F(\chi) + \left(\int_{\pi}^{\pi+\delta} - \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} \right) d\chi F(\chi) \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} d\chi F(\chi) + \int_0^{\delta} d\chi \underbrace{[F(\chi + \pi) - F(\chi - \pi)]}_{=0} \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} d\chi F(\chi).
 \end{aligned} \tag{5.67}$$

Somit erhalten wir jetzt mit $\delta = -\alpha$:

$$\mathbf{A}^{(L)}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{4\pi} \rho^{(L)} \int_{-\pi}^{\pi} d\chi \frac{-\sin(\chi + \alpha) \mathbf{e}_x + \cos(\chi + \alpha) \mathbf{e}_y}{\sqrt{r_{\perp}^2 + (r_z - r_z^{(L)})^2 + [\rho^{(L)}]^2 - 2\rho^{(L)} r_{\perp} \cos \chi}} \tag{5.68}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
 \sin(\chi + \alpha) &= \sin \chi \cos \alpha + \cos \chi \sin \alpha \\
 \cos(\chi + \alpha) &= \cos \chi \cos \alpha - \sin \chi \sin \alpha.
 \end{aligned} \tag{5.69}$$

Die Integration über die Terme proportional zu $\sin \chi$ liefert einen verschwindenden Beitrag:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^{(L)}(\mathbf{r}) &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{4\pi} \rho^{(L)} \int_{-\pi}^{\pi} d\chi \frac{-\begin{bmatrix} \sin \chi \cdot \cos \alpha \\ + \cos \chi \cdot \sin \alpha \end{bmatrix} \mathbf{e}_x + \begin{bmatrix} \cos \chi \cdot \cos \alpha \\ - \sin \chi \cdot \sin \alpha \end{bmatrix} \mathbf{e}_y}{\sqrt{r_{\perp}^2 + (r_z - r_z^{(L)})^2 + [\rho^{(L)}]^2 - 2\rho^{(L)} r_{\perp} \cos \chi}} \\
 &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{4\pi} \rho^{(L)} \int_{-\pi}^{\pi} d\chi \frac{-\cos(\chi) \sin(\alpha) \mathbf{e}_x + \cos(\chi) \cos(\alpha) \mathbf{e}_y}{\sqrt{r_{\perp}^2 + (r_z - r_z^{(L)})^2 + [\rho^{(L)}]^2 - 2\rho^{(L)} r_{\perp} \cos \chi}} \\
 &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{4\pi} \rho^{(L)} [-\sin(\alpha) \mathbf{e}_x + \cos(\alpha) \mathbf{e}_y] \\
 &\quad \times 2 \int_0^{\pi} d\chi \frac{\cos(\chi)}{\sqrt{r_{\perp}^2 + (r_z - r_z^{(L)})^2 + [\rho^{(L)}]^2 - 2\rho^{(L)} r_{\perp} \cos \chi}}.
 \end{aligned} \tag{5.70}$$

Mit der Abkürzung

$$f^{(L)}(r_z, r_\perp) = \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{2\pi} \rho^{(L)} \int_0^\pi d\chi \frac{\cos(\chi)}{\sqrt{(r_z - r_z^{(L)})^2 + r_\perp^2 + [\rho^{(L)}]^2 - 2\rho^{(L)}r_\perp \cos \chi}}$$

$$r_\perp = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \quad (5.71)$$

folgt jetzt

$$\mathbf{A}^{(L)}(\mathbf{r}) \quad (5.72)$$

$$= \left(-\frac{r_y}{r_\perp} \mathbf{e}_x + \frac{r_x}{r_\perp} \mathbf{e}_y \right) \underbrace{\frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{2\pi} \rho^{(L)} \int_0^\pi d\chi \frac{\cos(\chi)}{\sqrt{(r_z - r_z^{(L)})^2 + r_\perp^2 + [\rho^{(L)}]^2 - 2\rho^{(L)}r_\perp \cos \chi}}}_{\equiv f^{(L)}(r_z, r_\perp)}$$

$$= (-r_y \mathbf{e}_x + r_x \mathbf{e}_y) \frac{f^{(L)}(r_z, r_\perp)}{r_\perp}.$$

Das Vektorpotential $\mathbf{A}^{(L)}(\mathbf{r})$ eines stationären Stromes in einer ringförmigen Leiter-
schleife ist demnach parallel zur Ringebene orientiert.

Die Funktion $f^{(L)}(r_z, r_\perp)$ kann exakt durch elliptische Integrale dargestellt werden. Dazu schreiben wir

$$f^{(L)}(r_z, r_\perp) \quad (5.73)$$

$$= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{2\pi} \rho^{(L)} \int_0^\pi d\chi \frac{2 \cos^2\left(\frac{\chi}{2}\right) - 1}{\sqrt{(r_z - r_z^{(L)})^2 + r_\perp^2 + [\rho^{(L)}]^2 - 2\rho^{(L)}r_\perp [2 \cos^2\left(\frac{\chi}{2}\right) - 1]}}$$

$$= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)} \rho^{(L)}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\gamma \frac{2 \cos^2(\gamma) - 1}{\sqrt{(r_z - r_z^{(L)})^2 + (r_\perp + \rho^{(L)})^2 - 4\rho^{(L)}r_\perp \cos^2(\gamma)}}$$

$$= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho^{(L)}}{r_\perp}} \cdot \sqrt{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\gamma \frac{2 \cos^2(\gamma) - 1}{\sqrt{1 - m \cos^2(\gamma)}}$$

$$m = \frac{4\rho^{(L)}r_\perp}{(r_z - r_z^{(L)})^2 + (r_\perp + \rho^{(L)})^2}.$$

5 Magnetostatik

Mit den sog. vollständigen elliptischen Integralen

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2(\varphi)}}$$

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - m \sin^2(\varphi)}$$

folgt dann

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\gamma \frac{2 \cos^2(\gamma) - 1}{\sqrt{1 - m \cos^2(\gamma)}} = \left(\frac{2}{m} - 1 \right) K(m) - \frac{2}{m} E(m). \quad (5.74)$$

Vollständige elliptische Integrale wie $K(m)$ und $E(m)$ werden am besten mit der Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels berechnet, siehe [Pre88].

Nach dem Gesagten gilt

$$f^{(L)}(r_z, r_\perp) = \frac{\kappa \mu_0 I^{(L)}}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho^{(L)}}{r_\perp}} \cdot \left[\frac{2-m}{\sqrt{m}} K(m) - \frac{2}{\sqrt{m}} E(m) \right] \quad (5.75)$$

$$\mathbf{A}^{(L)}(\mathbf{r}) = (-r_y \mathbf{e}_x + r_x \mathbf{e}_y) \frac{f^{(L)}(r_z, r_\perp)}{r_\perp}.$$

Aus (5.72) folgt das zugeordnete magnetische Induktionsfeld zu

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(L)}(\mathbf{r}) &= \text{rot } \mathbf{A}^{(L)}(\mathbf{r}) = \text{rot} \left[(-r_y \mathbf{e}_x + r_x \mathbf{e}_y) \frac{f^{(L)}(r_z, r_\perp)}{r_\perp} \right] \quad (5.76) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial r_y} A_z^{(L)} - \frac{\partial}{\partial r_z} A_y^{(L)} \right] \mathbf{e}_x + \left[\frac{\partial}{\partial r_z} A_x^{(L)} - \frac{\partial}{\partial r_x} A_z^{(L)} \right] \mathbf{e}_y + \left[\frac{\partial}{\partial r_x} A_y^{(L)} - \frac{\partial}{\partial r_y} A_x^{(L)} \right] \mathbf{e}_z \\ &= -\frac{\partial}{\partial r_z} \left[\frac{r_x}{r_\perp} f^{(L)}(r_z, r_\perp) \right] \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial r_z} \left[-\frac{r_y}{r_\perp} f^{(L)}(r_z, r_\perp) \right] \mathbf{e}_y \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial r_x} \left[\frac{r_x}{r_\perp} f^{(L)}(r_z, r_\perp) \right] - \frac{\partial}{\partial r_y} \left[-\frac{r_y}{r_\perp} f^{(L)}(r_z, r_\perp) \right] \right\} \mathbf{e}_z \\ &= -\frac{\partial f^{(L)}(r_z, r_\perp)}{\partial r_z} \frac{1}{r_\perp} (r_x \mathbf{e}_x + r_y \mathbf{e}_y) + \left[\frac{f^{(L)}(r_z, r_\perp)}{r_\perp} + \frac{\partial f^{(L)}(r_z, r_\perp)}{\partial r_\perp} \right] \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Die kartesischen Komponenten $B_a^{(L)}(\mathbf{r})$ von $\mathbf{B}^{(L)}(\mathbf{r})$ lesen wir hieraus ab zu

$$\begin{aligned} B_x^{(L)}(\mathbf{r}) &= -\frac{r_x}{r_\perp} \frac{\partial f^{(L)}(r_z, r_\perp)}{\partial r_z} \\ B_y^{(L)}(\mathbf{r}) &= -\frac{r_y}{r_\perp} \frac{\partial f^{(L)}(r_z, r_\perp)}{\partial r_z} \\ B_z^{(L)}(\mathbf{r}) &= \frac{f^{(L)}(r_z, r_\perp)}{r_\perp} + \frac{\partial f^{(L)}(r_z, r_\perp)}{\partial r_\perp}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Elementare Zwischenrechnungen liefern zunächst

$$\begin{aligned} &\frac{f^{(L)}(r_z, r_\perp)}{r_\perp} + \frac{\partial f^{(L)}(r_z, r_\perp)}{\partial r_\perp} \\ &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)} \rho^{(L)}}{\pi \sqrt{(r_z - r_z^{(L)})^2 + (r_\perp + \rho^{(L)})^2}} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{r_\perp} - \frac{r_\perp + \rho^{(L)}}{(r_z - r_z^{(L)})^2 + (r_\perp + \rho^{(L)})^2} + \frac{\partial m}{\partial r_\perp} \frac{\partial}{\partial m} \right] \left[\left(\frac{2}{m} - 1 \right) K(m) - \frac{2}{m} E(m) \right] \end{aligned} \quad (5.78)$$

und ebenso

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f^{(L)}(r_z, r_\perp)}{\partial r_z} \\ &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)} \rho^{(L)}}{\pi \sqrt{(r_z - r_z^{(L)})^2 + (r_\perp + \rho^{(L)})^2}} \\ &\quad \times \left[-\frac{r_z - r_z^{(L)}}{(r_z - r_z^{(L)})^2 + (r_\perp + \rho^{(L)})^2} + \frac{\partial m}{\partial r_z} \frac{\partial}{\partial m} \right] \left[\left(\frac{2}{m} - 1 \right) K(m) - \frac{2}{m} E(m) \right]. \end{aligned} \quad (5.79)$$

5 Magnetostatik

Mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial m}{\partial r_{\perp}} &= 4\rho^{(L)} \frac{(r_z - r_z^{(L)})^2 - r_{\perp}^2 + [\rho^{(L)}]^2}{\left[(r_z - r_z^{(L)})^2 + (r_{\perp} + \rho^{(L)})^2 \right]^2} \\ \frac{\partial m}{\partial r_z} &= -8\rho^{(L)} \frac{r_{\perp} (r_z - r_z^{(L)})}{\left[(r_z - r_z^{(L)})^2 + (r_{\perp} + \rho^{(L)})^2 \right]^2}\end{aligned}\quad (5.80)$$

und den Relationen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial m} K(m) &= \frac{1}{2m} \left[\frac{E(m)}{1-m} - K(m) \right] \\ \frac{\partial}{\partial m} E(m) &= \frac{1}{2m} [E(m) - K(m)] \\ \frac{\partial}{\partial m} [K(m) - E(m)] &= \frac{1}{2} \frac{E(m)}{1-m}\end{aligned}\quad (5.81)$$

erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned}\frac{f^{(L)}(r_z, r_{\perp})}{r_{\perp}} + \frac{\partial f^{(L)}(r_z, r_{\perp})}{\partial r_{\perp}} &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(r_z - r_z^{(L)})^2 + (r_{\perp} + \rho^{(L)})^2}} \\ &\times \left[K(m) - \frac{(r_z - r_z^{(L)})^2 + r_{\perp}^2 - [\rho^{(L)}]^2}{(r_z - r_z^{(L)})^2 + (r_{\perp} - \rho^{(L)})^2} E(m) \right]\end{aligned}\quad (5.82)$$

und ebenso

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^{(L)}(r_z, r_{\perp})}{\partial r_z} &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{2\pi} \frac{r_z - r_z^{(L)}}{r_{\perp}} \frac{1}{\sqrt{(r_z - r_z^{(L)})^2 + (r_{\perp} + \rho^{(L)})^2}} \\ &\times \left[K(m) - \frac{(r_z - r_z^{(L)})^2 + r_{\perp}^2 + [\rho^{(L)}]^2}{(r_z - r_z^{(L)})^2 + (r_{\perp} - \rho^{(L)})^2} E(m) \right].\end{aligned}\quad (5.83)$$

Die kartesischen Komponenten $B_a^{(L)}(\mathbf{r})$ des magnetischen Induktionsfeldes an einem beliebigen Ort \mathbf{r} außerhalb des betrachteten ringförmigen Leiters sind dann gegeben zu

$$\begin{aligned}
 r_{\perp} &= \sqrt{r_x^2 + r_y^2}, \quad m = \frac{4\rho^{(L)}r_{\perp}}{\left(r_z - r_z^{(L)}\right)^2 + \left(r_{\perp} + \rho^{(L)}\right)^2} & (5.84) \\
 w(r_z, r_{\perp}) &= \sqrt{\left(r_z - r_z^{(L)}\right)^2 + \left(r_{\perp} + \rho^{(L)}\right)^2} \\
 B_x^{(L)}(\mathbf{r}) &= -\frac{\kappa\mu_0 I^{(L)} r_x \left(r_z - r_z^{(L)}\right)}{2\pi r_{\perp}^2} \frac{1}{w(r_z, r_{\perp})} \\
 &\quad \times \left[K(m) - \frac{\left(r_z - r_z^{(L)}\right)^2 + r_{\perp}^2 + [\rho^{(L)}]^2}{\left(r_z - r_z^{(L)}\right)^2 + \left(r_{\perp} - \rho^{(L)}\right)^2} E(m) \right] \\
 B_y^{(L)}(\mathbf{r}) &= -\frac{\kappa\mu_0 I^{(L)} r_y \left(r_z - r_z^{(L)}\right)}{2\pi r_{\perp}^2} \frac{1}{w(r_z, r_{\perp})} \\
 &\quad \times \left[K(m) - \frac{\left(r_z - r_z^{(L)}\right)^2 + r_{\perp}^2 + [\rho^{(L)}]^2}{\left(r_z - r_z^{(L)}\right)^2 + \left(r_{\perp} - \rho^{(L)}\right)^2} E(m) \right] \\
 B_z^{(L)}(\mathbf{r}) &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{2\pi} \frac{1}{w(r_z, r_{\perp})} \left[K(m) - \frac{\left(r_z - r_z^{(L)}\right)^2 + r_{\perp}^2 + [\rho^{(L)}]^2}{\left(r_z - r_z^{(L)}\right)^2 + \left(r_{\perp} - \rho^{(L)}\right)^2} E(m) \right].
 \end{aligned}$$

Dieser exakte Ausdruck für das magnetische Induktionsfeld eines stationären Kreisstroms kann für verschiedene Spezialfälle ausgewertet werden. Entlang der Achse $r_{\perp} = 0$ des betrachteten dünnen ringförmigen Leiters gilt offensichtlich

$$\begin{aligned}
 r_{\perp} &= 0, \quad m = 0 & (5.85) \\
 \lim_{m \rightarrow 0} K(m) &= \frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow 0} E(m) \\
 B_x^{(L)}(0, 0, r_z) &= 0 = B_y^{(L)}(0, 0, r_z) \\
 B_z^{(L)}(0, 0, r_z) &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{2} \frac{[\rho^{(L)}]^2}{\left[\left(r_z - r_z^{(L)}\right)^2 + [\rho^{(L)}]^2\right]^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

Magnetfeld im Inneren einer zylinderförmigen Spule

Wir erhalten aus (5.85) mit Hilfe des Superpositionsprinzips das magnetische Induktionsfeld im Inneren einer Spule mit einer Anzahl $N \gg 1$ von Windungen, die sich von $r_z^{(L)} = -\frac{l}{2}$ bis $r_z^{(L)} = \frac{l}{2}$ erstreckt. Für den Fall einer konstanten Belegungsdichte $\frac{N}{l}$ mit Windungen bekommt man auf der Mittelachse so einer Spule ein magnetisches Induktionsfeld

$$\begin{aligned}
 B_z^{(\text{Spule})}(0, 0, r_z) &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dr'_z \frac{N}{l} \frac{[\rho^{(L)}]^2}{[(r_z - r'_z)^2 + [\rho^{(L)}]^2]^{3/2}} \quad (5.86) \\
 &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{2} \frac{N}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dr'_z \frac{d}{dr'_z} \left[-\frac{r_z - r'_z}{\sqrt{(r_z - r'_z)^2 + [\rho^{(L)}]^2}} \right] \\
 &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{2} \frac{N}{l} \left[-\frac{r_z - \frac{l}{2}}{\sqrt{(r_z - \frac{l}{2})^2 + [\rho^{(L)}]^2}} + \frac{r_z + \frac{l}{2}}{\sqrt{(r_z + \frac{l}{2})^2 + [\rho^{(L)}]^2}} \right] \\
 &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{2} \frac{N}{l} \left[\frac{\frac{l}{2} + r_z}{\sqrt{(\frac{l}{2} + r_z)^2 + [\rho^{(L)}]^2}} + \frac{\frac{l}{2} - r_z}{\sqrt{(\frac{l}{2} - r_z)^2 + [\rho^{(L)}]^2}} \right].
 \end{aligned}$$

Grenzfall der langen Spule

Für eine Spule der Länge l mit Radius $\rho^{(L)} \ll l$ darf man in der Mitte der Spule den Term $[\rho^{(L)}]^2$ gegenüber $(\frac{l}{2} \pm r_z)^2$ vernachlässigen. Es folgt dann das magnetische Induktionsfeld entlang der Spulenachse zu

$$\begin{aligned}
 |r_z| &\ll l \quad (5.87) \\
 B_z^{(\text{Spule})}(0, 0, r_z) &= \kappa\mu_0 I^{(L)} \frac{N}{l}.
 \end{aligned}$$

Magnetische Feldstärke in der Umgebung des Mittelpunkts eines stromtragenden Rings

In der Umgebung des Mittelpunkts $\mathbf{r} = r_z^{(L)} \mathbf{e}_z$ des betrachteten stromtragenden Rings liefert eine Taylor-Entwicklung der kartesischen Komponenten des magne-

5.4 Magnetostatische Feldenergie und Induktivität

tischen Induktionsfeldes

$$\begin{aligned}
 r_{\perp}^2 &= r_x^2 + r_y^2 & (5.88) \\
 B_x^{(L)}(\mathbf{r}) &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{2\rho^{(L)}} \frac{r_x (r_z - r_z^{(L)})}{[\rho^{(L)}]^2} \left[\frac{3}{2} + \frac{15}{16} \frac{3r_{\perp}^2 - 4(r_z - r_z^{(L)})^2}{[\rho^{(L)}]^2} + \dots \right] \\
 B_y^{(L)}(\mathbf{r}) &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{2\rho^{(L)}} \frac{r_y (r_z - r_z^{(L)})}{[\rho^{(L)}]^2} \left[\frac{3}{2} + \frac{15}{16} \frac{3r_{\perp}^2 - 4(r_z - r_z^{(L)})^2}{[\rho^{(L)}]^2} + \dots \right] \\
 B_z^{(L)}(\mathbf{r}) &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{2\rho^{(L)}} \left[1 + \frac{3r_{\perp}^2 - 2(r_z - r_z^{(L)})^2}{4[\rho^{(L)}]^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{15}{64} \frac{3r_{\perp}^4 - 24r_{\perp}^2 (r_z - r_z^{(L)})^2 + 8(r_z - r_z^{(L)})^4}{[\rho^{(L)}]^4} + \dots \right].
 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich für die Feldstärke nahe des Mittelpunktes einer dünnen stromtragenden Leiterschleife unter Vernachlässigung der Terme vierter Ordnung

$$|\mathbf{B}^{(L)}(\mathbf{r})| = \frac{\kappa\mu_0 I^{(L)}}{2\rho^{(L)}} \left| 1 + \frac{3r_{\perp}^2 - 2(r_z - r_z^{(L)})^2}{4[\rho^{(L)}]^2} + \dots \right| \geq 0. \quad (5.89)$$

Die Feldstärke $|\mathbf{B}^{(L)}(\mathbf{r})|$ steigt in radialer Richtung an, während sie mit zunehmendem Abstand $|r_z - r_z^{(L)}|$ zur Ringebene abnimmt. Es befindet sich demnach am Mittelpunkt $\mathbf{r} = r_z^{(L)}\mathbf{e}_z$ eines stromtragenden Rings ein *Sattelpunkt* der magnetischen Feldstärke.

5.4 Magnetostatische Feldenergie und Induktivität

Wir betrachten die magnetostatische Feldenergie

$$U^{(\text{mag})} = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (5.90)$$

5 Magnetostatik

einer stationären lokalisierten Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. Ausgehend von der Identität

$$\operatorname{div} [\mathbf{A}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r})] = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (5.91)$$

substituieren wir die magnetostatischen Grundgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \kappa \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (5.92)$$

und erhalten

$$\operatorname{div} [\mathbf{A}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r})] = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \kappa \mu_0 \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (5.93)$$

Dann folgt nach dem Gaußschen Satz

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega} d^2 r' \mathbf{n}' \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r})] \\ &= \int_{\Omega} d^3 r \operatorname{div} [\mathbf{A}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r})] \\ &= \int_{\Omega} d^3 r \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \kappa \mu_0 \int_{\Omega} d^3 r \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.94)$$

Dehnen wir das Gebiet Ω jetzt bis ins Unendliche aus, so verschwindet der Beitrag des Oberflächenintegrals auf der linken Seite. Demnach folgt die magnetische Feldenergie jetzt zu

$$U^{(\text{mag})} = \frac{\kappa}{2} \int d^3 r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (5.95)$$

Dieser Ausdruck für $U^{(\text{mag})}$ enthält noch den Beitrag der magnetischen Selbstenergie der betrachteten Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$.

Für eine Anzahl N von einfach geschlossenen stromtragenden linienförmigen Leitern $\mathcal{C}^{(n)}$ schreiben wir die Stromdichte mittels (5.18) um und erhalten

$$U^{(\text{mag})} = \frac{\kappa}{2} \sum_{n=1}^N I^{(n)} \oint_{\mathcal{C}^{(n)}} d\mathbf{s}^{(n)} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s}^{(n)}). \quad (5.96)$$

Hier ist $I^{(n)}$ der Strom durch den Querschnitt des n -ten Leiters. Gemäß (5.20) ist das von allen solchen Ringströmen $I^{(n)}$ erzeugte Vektorpotential am Ort \mathbf{r} gegeben zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa \mu_0}{4\pi} \sum_{m=1}^N I^{(m)} \oint_{\mathcal{C}^{(m)}} d\mathbf{s}^{(m)} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}^{(m)}|}. \quad (5.97)$$

5.4 Magnetostatische Feldenergie und Induktivität

Also folgt

$$U^{(\text{mag})} = \frac{\kappa^2 \mu_0}{8\pi} \sum_{n,m=1}^N I^{(n)} I^{(m)} \oint_{\mathcal{C}^{(n)}} d\mathbf{s}^{(n)} \cdot \oint_{\mathcal{C}^{(m)}} d\mathbf{s}^{(m)} \frac{1}{|\mathbf{s}^{(n)} - \mathbf{s}^{(m)}|}. \quad (5.98)$$

Die Matrix

$$n, m \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (5.99)$$

$$L_{n,m} = \frac{\kappa^2 \mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}^{(n)}} d\mathbf{s}^{(n)} \cdot \oint_{\mathcal{C}^{(m)}} d\mathbf{s}^{(m)} \frac{1}{|\mathbf{s}^{(n)} - \mathbf{s}^{(m)}|}$$

heißt *Induktivitätsmatrix*. Offensichtlich ist die Induktivitätsmatrix symmetrisch

$$L_{n,m} = L_{m,n}. \quad (5.100)$$

In SI-Einheiten ($\kappa = 1$) ist die Maßeinheit für $L_{n,m}$ der Quotient $\left[\frac{\text{T m}^2}{\text{A}}\right]$, wobei $[\text{T}] = \left[\frac{\text{N}}{\text{A m}}\right]$ (ein Tesla) die Maßeinheit der magnetischen Induktion ist. Die Werte der Induktivitäten $L_{n,m}$ hängen nur von der Geometrie der betrachteten Anordnung von Leiterschleifen $\mathcal{C}^{(m)}$ ab. Damit folgt für die magnetostatische Energie jetzt

$$U^{(\text{mag})} = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N L_{n,m} I^{(n)} I^{(m)}. \quad (5.101)$$

Die Induktivitätsmatrix ist positiv definit, da $U^{(\text{mag})}$ gemäß (5.90) manifest positiv ist. Die Diagonalelemente $L_{n,n}$ der Induktivitätsmatrix heißen *Selbstinduktivitäten*. Die Selbstinduktivitäten sind sämtlich positiv

$$n \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (5.102)$$

$$L_{n,n} > 0.$$

Desweiteren lässt sich mittels der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung leicht zeigen

$$n, m \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (5.103)$$

$$L_{n,m}^2 \leq L_{n,n} L_{m,m}.$$

Sehr nützlich für die Praxis ist die folgende identische Umformung für die magnetische Feldenergie. Mit der Identität (5.43) schreiben wir die Summe von Linienintegralen in (5.96) um auf eine entsprechende Summe von Flächenintegralen

5 Magnetostatik

über alle Flächen $\mathcal{F}^{(n)}$, deren Rand $\partial\mathcal{F}^{(n)}$ gerade mit den einfach geschlossenen Pfaden $\mathcal{C}^{(n)}$ übereinstimmt. Wir schreiben dann mit $\mathcal{C}^{(n)} = \partial\mathcal{F}^{(n)}$:

$$\begin{aligned} U^{(\text{mag})} &= \frac{\kappa}{2} \sum_{n=1}^N I^{(n)} \oint_{\partial\mathcal{F}^{(n)}} d\mathbf{s}^{(n)} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s}^{(n)}) \\ &= \frac{\kappa}{2} \sum_{n=1}^N I^{(n)} \int_{\mathcal{F}^{(n)}} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{\kappa}{2} \sum_{n=1}^N I^{(n)} \int_{\mathcal{F}^{(n)}} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (5.104)$$

Die Größe

$$\Phi^{(n)} = \int_{\mathcal{F}^{(n)}} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}') \quad (5.105)$$

ist gerade der magnetische Fluss, der die n -te Fläche $\mathcal{F}^{(n)}$ mit Rand $\mathcal{C}^{(n)} = \partial\mathcal{F}^{(n)}$ durchsetzt. Somit schreiben wir jetzt für die magnetische Feldenergie der betrachteten Anordnung von geschlossenen Leiterschleifen

$$U^{(\text{mag})} = \frac{\kappa}{2} \sum_{n=1}^N I^{(n)} \Phi^{(n)}. \quad (5.106)$$

Vergleichen wir die Ausdrücke (5.106) und (5.101), so folgt zwischen den magnetischen Flüssen $\Phi^{(n)}$ und den Strömen $I^{(m)}$ der lineare Zusammenhang

$$\Phi^{(n)} = \frac{1}{\kappa} \sum_{m=1}^N L_{n,m} I^{(m)}. \quad (5.107)$$

Diese Relation kann die Berechnung von Gegeninduktivitäten erheblich erleichtern!

Zwei Beispiele zur Berechnung der Gegeninduktivität

Gefragt wird nach der Gegeninduktivität zwischen einem *geradlinigen* dünnen Leiter (1) und einen *kreisförmigen* dünnen Leiter (2) mit Radius a . Beide Leiter sind in der Ebene $r_z = 0$ positioniert. Der Leiter (1) sei entlang der Koordinatenachse \mathbf{e}_x orientiert, der kürzeste Abstand des Leiters (2), der um den Ort $\mathbf{r}^{(0)} = a\mathbf{e}_y$ zentriert sein möge, von dem geradlinigen Leiter sei b , wobei gilt $b > a$, siehe Abbildung 5.1. Gesucht ist die Gegeninduktivität L_{21} zwischen den beiden Leitern.

5.4 Magnetostatische Feldenergie und Induktivität

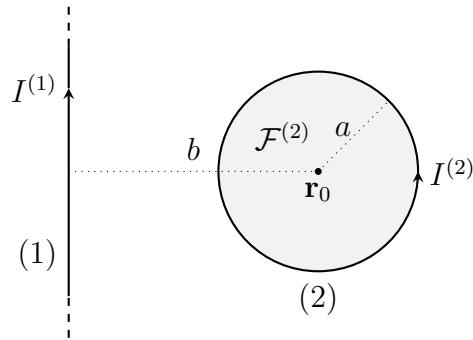


Abbildung 5.1: Anordnung von zwei Leitern, deren Gegeninduktivität bestimmt wird.

Fließt in den Leitern (1) bzw. (2) jeweils ein stationärer Strom $I^{(1)}$ bzw. $I^{(2)}$, so geht durch die Kreisfläche $|\mathcal{F}^{(2)}| = \pi a^2$, die vom Leiter (2) umrandet wird, ein magnetischer Fluss

$$\Phi^{(2)} [I^{(1)}, I^{(2)}] = \frac{1}{\kappa} (L_{22}I^{(2)} + L_{21}I^{(1)}). \quad (5.108)$$

Um die Gegeninduktivität zu ermitteln, setzen wir jetzt $I^{(2)} = 0$ und erhalten

$$L_{21} = \kappa \frac{\Phi^{(2)} [I^{(1)}, I^{(2)} = 0]}{I^{(1)}}. \quad (5.109)$$

Nun verwenden wir, dass der Leiter (1) am Ort \mathbf{r}' der vom Leiter (2) eingeschlossenen Kreisfläche $|\mathcal{F}^{(2)}|$ ein magnetisches Induktionsfeld

$$\mathbf{B} = \frac{\kappa\mu_0 I^{(1)}}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}'|} \mathbf{e}_z \quad (5.110)$$

5 Magnetostatik

generiert. Somit ist der magnetische Fluss $\Phi^{(2)}[I^{(1)}, I^{(2)} = 0]$ des vom Leiter (1) generierten Magnetfelds durch die Kreisfläche des Leiters (2) gegeben zu

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)} [I^{(1)}, I^{(2)} = 0] &= \int_{\mathcal{F}^{(2)}} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}') & (5.111) \\ &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(1)}}{2\pi} \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}^{(0)}| < a} \frac{d^2r'}{|\mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\kappa\mu_0 I^{(1)}}{2\pi} \times \underbrace{2 \int_{-a}^a dx \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{b + x}}_{=\pi(b - \sqrt{b^2 - a^2})}. \end{aligned}$$

In Anhang D.1 wird vorgeführt, wie das Integral in der letzten Zeile berechnet wird. Es folgt als Ergebnis für die gesuchte Gegeninduktivität

$$L_{21} = \kappa^2 \mu_0 (b - \sqrt{b^2 - a^2}). \quad (5.112)$$

Gegeninduktivität von zwei konzentrischen parallel orientierten kreisförmigen Leiterschleifen

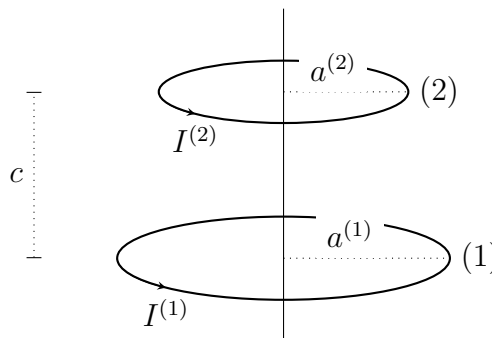


Abbildung 5.2: Zwei konzentrische, parallel orientierte Leiterschleifen im Abstand c mit den Radien $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$.

Das zweite Beispiel betrifft die Gegeninduktivität von zwei dünnen stromtragenden kreisförmigen Leiterschleifen (1) und (2), die eine mit Radius $a^{(1)}$, die andere mit Radius $a^{(2)}$. Die von den Leitern (1) bzw. (2) berandeten Kreisflächen seien

5.4 Magnetostatische Feldenergie und Induktivität

parallel orientiert, so dass die Flächennormalen beider Kreisflächen parallel zur gemeinsamen Achse \mathbf{e}_3 orientiert sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit befinde sich der Kreismittelpunkt für den Leiter (1) am Ursprung des Koordinatensystems, der des Leiters (2) sei um eine Distanz c entfernt am Ort $\mathbf{r}^{(2)} = c\mathbf{e}_3$ positioniert, siehe Abbildung 5.2. Trägt jetzt der Leiter (1) einen stationären Strom $I^{(1)}$ und der Leiter (2) einen stationären Strom $I^{(2)}$, so gilt für den magnetischen Fluss $\Phi^{(2)}$, der die Kreisfläche des Leiters (2) durchsetzt

$$\Phi^{(2)}(I^{(1)}, I^{(2)}) = \frac{1}{\kappa} (L_{22}I^{(2)} + L_{21}I^{(1)}). \quad (5.113)$$

Diese Relation ist für beliebige Ströme $I^{(1)}, I^{(2)}$ gültig. Wir betrachten jetzt eine Situation, bei der im Leiter (1) ein stationärer Strom $I^{(1)}$ fließt, während im Leiter (2) kein Strom fließt, $I^{(2)} = 0$. Dann gilt insbesondere

$$L_{21} = \kappa \frac{\Phi^{(2)}(I^{(1)}, I^{(2)} = 0)}{I^{(1)}}. \quad (5.114)$$

Das magnetische Induktionsfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}')$, das ausgehend von dem ringförmigen Leiter (1) jetzt die vom Leiter (2) umrandete Kreisfläche durchsetzt, erzeugt dort einen magnetischen Fluss

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)}(I^{(1)}, I^{(2)} = 0) &= \int_{\mathcal{F}^{(2)}} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}') & (5.115) \\ &= \int_{\mathcal{F}^{(2)}} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}') \\ &= \int_{\partial\mathcal{F}^{(2)}} d\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s}^{(2)}). \end{aligned}$$

Hier ist das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{s}^{(2)})$ für $\mathbf{s}^{(2)} \in \partial\mathcal{F}^{(2)}$ nun gemäß (5.75) auszuwerten:

$$\begin{aligned} s_x^{(2)} &= a^{(2)} \cos \phi, & s_y^{(2)} &= a^{(2)} \sin \phi, & s_z^{(2)} &= c & (5.116) \\ s_{\perp}^{(2)} &= \sqrt{[s_x^{(2)}]^2 + [s_y^{(2)}]^2} = a^{(2)}. \end{aligned}$$

Dann folgt mit

$$\begin{aligned} r_z^{(L)} &= 0 & (5.117) \\ \rho^{(L)} &= a^{(1)} \\ m &= \frac{4a^{(1)}a^{(2)}}{c^2 + (a^{(2)} + a^{(1)})^2} \end{aligned}$$

5 Magnetostatik

durch Einsetzen in (5.75):

$$f^{(L)}(c, a^{(2)}) = \frac{\kappa \mu_0 I^{(1)}}{2\pi} \sqrt{\frac{a^{(1)}}{a^{(2)}}} \cdot \left[\frac{2-m}{\sqrt{m}} K(m) - \frac{2}{\sqrt{m}} E(m) \right] \quad (5.118)$$

$$\mathbf{A}^{(L)}(\mathbf{s}^{(2)}) = \left(-s_y^{(2)} \mathbf{e}_x + s_x^{(2)} \mathbf{e}_y \right) \frac{f^{(L)}(c, a^{(2)})}{a^{(2)}}.$$

Somit

$$\begin{aligned} & \int_{\partial \mathcal{F}^{(2)}} d\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s}^{(2)}) \quad (5.119) \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi a^{(2)} \underbrace{(-\mathbf{e}_x \sin \phi + \mathbf{e}_y \cos \phi)}_{=d\mathbf{s}^{(2)}} \cdot \underbrace{a^{(2)} (-\mathbf{e}_x \sin \phi + \mathbf{e}_y \cos \phi) \frac{f^{(L)}(c, a^{(2)})}{a^{(2)}}}_{=\mathbf{A}(\mathbf{s}^{(2)})} \\ &= 2\pi a^{(2)} \cdot f^{(L)}(c, a^{(2)}). \end{aligned}$$

Das Ergebnis für die gesuchte Gegeninduktivität von zwei übereinander im Abstand c positionierten konzentrischen kreisförmigen Leitern lautet

$$\begin{aligned} L_{21} &= \kappa \frac{\Phi^{(2)}(I^{(1)}, I^{(2)} = 0)}{I^{(1)}} \quad (5.120) \\ &= \kappa \frac{\int_{\partial \mathcal{F}^{(2)}} d\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s}^{(2)})}{I^{(1)}} \\ &= \kappa \frac{2\pi a^{(2)} \cdot f^{(L)}(c, a^{(2)})}{I^{(1)}} \\ &= \kappa^2 \mu_0 \sqrt{a^{(2)} a^{(1)}} \cdot \left[\frac{2-m}{\sqrt{m}} K(m) - \frac{2}{\sqrt{m}} E(m) \right] \\ m &= \frac{4a^{(1)} a^{(2)}}{c^2 + (a^{(2)} + a^{(1)})^2}. \end{aligned}$$

Wir diskutieren dieses allgemeine Resultat nun für zwei extreme Grenzfälle: (a) $m \ll 1$ und (b) $m = 1 - \varepsilon$ mit $0 < \varepsilon \ll 1$. Eine Reihenentwicklung der elliptischen

5.4 Magnetostatische Feldenergie und Induktivität

Integrale liefert

$$\begin{aligned} & \frac{2-m}{\sqrt{m}} K(m) - \frac{2}{\sqrt{m}} E(m) \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{16} m^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(m^{\frac{5}{2}}) & \text{für } 0 < m \ll 1, \\ -2 + 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon \ln \varepsilon) & \text{für } 0 < \varepsilon = 1 - m \ll 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.121)$$

Demnach gilt in führender Ordnung für die Gegeninduktivität

$$L_{21} = \kappa^2 \mu_0 \begin{cases} \sqrt{a^{(2)} a^{(1)}} \cdot \frac{\pi}{16} m^{\frac{3}{2}} & \text{für } 0 < m \ll 1, \\ \sqrt{a^{(2)} a^{(1)}} \cdot \left[\ln \left(\frac{4}{\sqrt{1-m}} \right) - 2 \right] & \text{für } 0 < 1 - m \ll 1. \end{cases} \quad (5.122)$$

Der Fall (a) $0 < m \ll 1$ tritt z.B. bei großem Abstand c der beiden Kreismittelpunkte ein, oder auch für $a^{(1)} \ll a^{(2)}$ bzw. $a^{(2)} \ll a^{(1)}$. Der Fall (b) $0 < 1 - m \ll 1$ liegt vor für $a^{(1)} = a$, $a^{(2)} = a + \varepsilon$ mit $0 < \varepsilon \ll 1$ und $|c| \ll a$. Wir schreiben jetzt

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sqrt{1-m}} &= \frac{4}{\sqrt{1 - \frac{4a^{(1)} a^{(2)}}{c^2 + (a^{(2)} + a^{(1)})^2}}} \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{c^2 + (a^{(2)} + a^{(1)})^2}}{\sqrt{c^2 + (a^{(2)} - a^{(1)})^2}} \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{c^2 + (2a + \varepsilon)^2}}{\sqrt{c^2 + \varepsilon^2}} \\ &= \frac{8a}{\sqrt{c^2 + \varepsilon^2}} \cdot \underbrace{\sqrt{\left(1 + \frac{\varepsilon}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{2a}\right)^2}}_{=1 + \mathcal{O}(\text{small})}. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Die Gegeninduktivität für zwei konzentrische, nahe beieinander positionierte, kreisförmige Leiter mit nur wenig unterschiedlichen Radien $a^{(1)} \simeq a \simeq a^{(1)}$ ist somit in führender Ordnung gegeben zu

$$\begin{aligned} \varepsilon &= |a^{(2)} - a^{(1)}| \\ 0 &< \varepsilon \ll a \\ |c| &\ll a \\ L_{21} &= \kappa^2 \mu_0 a \cdot \left[\ln \frac{8a}{\sqrt{c^2 + \varepsilon^2}} - 2 \right] + \mathcal{O}(\text{small}). \end{aligned} \quad (5.124)$$

Selbstinduktivität eines dünnen ringförmigen Leiters

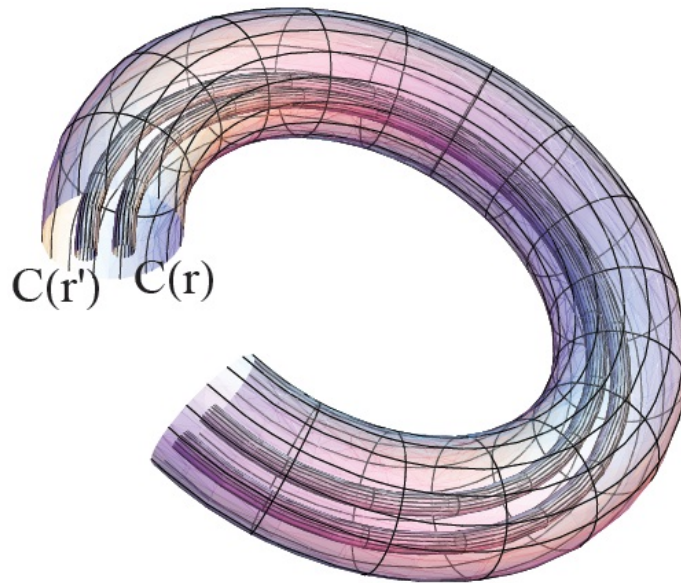


Abbildung 5.3: Modellierung des dünnen ringförmigen Leiters als Ringtorus, der aus unendlich vielen infinitesimal dünnen Fäden aufgebaut ist. Hier sind exemplarisch zwei Fäden $C(\mathbf{r})$ und $C(\mathbf{r}')$ eingezeichnet.

Wir betrachten einen ringförmigen Leiter mit Radius a , den wir als einen Ringtorus \mathcal{T} mit Radius a und Querschnittsfläche πb^2 modellieren, wobei $b \ll a$ gelten soll (Rettungsring), siehe Abbildung 5.3. Man kann die Oberfläche $\partial\mathcal{T}$ des Ringtorus \mathcal{T} dadurch generieren, dass man die Randpunkte einer Kreisfläche \mathcal{K}_0 mit Radius b um eine Achse \mathbf{e}_z , die in der Kreisebene liegt und im Abstand a zum Mittelpunkt des Kreises positioniert ist, dann einmal um die Achse \mathbf{e}_z rotiert. Für

5.4 Magnetostatische Feldenergie und Induktivität

die Punkte im Inneren von \mathcal{T} gilt demnach die parametrische Darstellung

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \alpha < 2\pi & (5.125) \\
 0 &\leq \phi < 2\pi \\
 0 &\leq \rho \leq b \\
 0 &< b < a \\
 r_x(\rho, \alpha, \phi) &= (a + \rho \cos \alpha) \cos \phi \\
 r_y(\rho, \alpha, \phi) &= (a + \rho \cos \alpha) \sin \phi \\
 r_z(\rho, \alpha, \phi) &= \rho \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

Wir betrachten eine Querschnittsfläche \mathcal{K}_0 des Torus in der Ebene $y = 0$, also $\phi = 0$. Fließt ein Strom I mit homogener Stromdichte durch diese Querschnittsfläche, so fließt durch ein um den Ort $\mathbf{r} \in \mathcal{K}_0$ zentriertes Flächenelement d^2r der Querschnittsfläche ein Strom $dI = I \frac{d^2r}{\pi b^2}$. Rotieren wir das kleine Flächenelement d^2r einmal um die Achse \mathbf{e}_z , so entsteht ein dünner stromtragender Faden $\mathcal{C}(\mathbf{r})$ (siehe Abbildung 5.3). Betrachten wir jetzt ein anderes Flächenelement d^2r' , das am Ort $\mathbf{r}' \in \mathcal{K}_0$ zentriert sein möge, und rotieren dieses Flächenelement ebenfalls einmal um die Achse \mathbf{e}_z , so entsteht ein zweiter stromtragender Faden $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(\mathbf{r}')$, der jetzt den Strom $dI[\mathcal{C}'] = I \frac{d^2r'}{\pi b^2}$ trägt. Für den magnetischen Fluss $d\Phi[\mathcal{C}, \mathcal{C}']$ durch den geschlossenen Stromfaden \mathcal{C} , der vom Strom dI' im geschlossenen Faden \mathcal{C}' generiert wird, gilt jetzt

$$d\Phi[\mathcal{C}, \mathcal{C}'] = \frac{1}{\kappa} L[\mathcal{C}, \mathcal{C}'] dI[\mathcal{C}']. \quad (5.126)$$

Hierbei ist $L[\mathcal{C}, \mathcal{C}']$ die *Gegeninduktivität* zwischen den beiden betrachteten Fäden. Für $L[\mathcal{C}, \mathcal{C}']$ dürfen wir, da die Radien von $\mathcal{C}[\mathbf{r}]$ und $\mathcal{C}[\mathbf{r}']$ wegen $b \ll a$ sehr nahe beieinander liegen, die Näherungsformel (5.124) verwenden. Mit $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathcal{K}_0$ folgt dann

$$\begin{aligned}
 r_z(\rho, \alpha, 0) - r_z(\rho', \alpha, 0) &= c & (5.127) \\
 r_x(\rho, \alpha, 0) - r_x(\rho', \alpha, 0) &= \varepsilon \\
 c^2 + \varepsilon^2 &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \\
 L[\mathcal{C}, \mathcal{C}'] &= \kappa^2 \mu_0 a \cdot \left[\ln \frac{8a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - 2 \right].
 \end{aligned}$$

5 Magnetostatik

Insgesamt geht durch die vom Faden $\mathcal{C}[\mathbf{r}]$ eingeschlossene Fläche ein magnetischer Fluss

$$\begin{aligned}\Phi[\mathcal{C}(\mathbf{r})] &= \frac{1}{\kappa} \sum_{\mathcal{C}'} L[\mathcal{C}, \mathcal{C}'] dI[\mathcal{C}'] \\ &\rightarrow \frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{K}_0} d^2r' \frac{I}{\pi b^2} \kappa^2 \mu_0 a \cdot \left[\ln \frac{8a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - 2 \right].\end{aligned}\quad (5.128)$$

Der mittlere magnetische Fluss Φ durch den betrachteten Ringtorus ist somit

$$\Phi = \frac{1}{\pi b^2} \int_{\mathcal{K}_0} d^2r \Phi[\mathcal{C}(\mathbf{r})] = \frac{1}{\pi b^2} \int_{\mathcal{K}_0} d^2r \int_{\mathcal{K}_0} d^2r' \frac{I}{\pi b^2} \kappa \mu_0 a \cdot \left[\ln \frac{8a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - 2 \right].$$

Es folgt als Ergebnis für die Selbstinduktivität des betrachteten ringförmigen dünnen Leiters mit Radius a :

$$\begin{aligned}L &= \kappa \frac{\Phi}{I} \\ &= \kappa^2 \mu_0 a \cdot \left[-2 + \ln 8a - \underbrace{\frac{1}{(\pi b^2)^2} \int_{\mathcal{K}_0} d^2r \int_{\mathcal{K}_0} d^2r' \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}_{\equiv \ln b - \frac{1}{4}} \right] \\ &= \kappa^2 \mu_0 a \cdot \left[\ln \left(\frac{8a}{b} \right) - \frac{7}{4} \right].\end{aligned}\quad (5.129)$$

Für die Berechnung des Integrals verweisen wir auf den Anhang D.2.

Bemerkung

Bei der Berechnung der *Selbstinduktivität* eines (unendlich) dünnen leitenden Drahtes tritt nach dem Gesagten immer eine logarithmische Divergenz auf, wenn man die Stromverteilung über den Querschnitt des Drahtes nicht berücksichtigt. Für Wechselströme spielt der Skineffekt eine Rolle, so dass die Stromdichte über den Querschnitt eines Drahtes (in Abhängigkeit von der Frequenz) dann zur Mitte des Drahtes hin abnimmt, also auch nicht mehr homogen verteilt ist. Bei supraleitenden Schaltkreisen auf Basis von Dünnschichttechnik ist neben der hier betrachteten geometrischen Induktivität zusätzlich noch die sog. *kinetische Induktivität* zu berücksichtigen.

Selbstinduktivität einer langen Spule

Wir betrachten ein Solenoid (zylinderförmige Spule) der Länge l mit Radius a , wobei die Achse der Spule entlang \mathbf{e}_z orientiert sei. Fließt in der Spule mit Windungszahl $\frac{N}{l}$ ein Strom I , so ist die magnetische Feldenergie für eine lange Spule $l \gg a$ hauptsächlich im Inneren der Spule konzentriert:

$$U^{(\text{mag})} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{|\mathbf{r}_\perp| < a} d^3r \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (5.130)$$

Gemäß (5.87) gilt dann

$$|\mathbf{r}_\perp| < a \quad (5.131)$$

$$\frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})}{2\mu_0} = \frac{[B_z^{(\text{Spule})}(0, 0, r_z)]^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\kappa\mu_0 I \cdot \frac{N}{l} \right)^2.$$

Demnach erhalten wir mit (5.101)

$$U^{(\text{mag})} = l \times \pi a^2 \times \frac{1}{2\mu_0} \left(\kappa\mu_0 I \cdot \frac{N}{l} \right)^2 \equiv \frac{L}{2} I^2, \quad (5.132)$$

d.h. die Selbstinduktivität einer langen Spule mit N Windungen ist gegeben zu

$$\boxed{L = \kappa^2 \mu_0 \frac{\pi a^2}{l} N^2.} \quad (5.133)$$

5.5 Materie im magnetischen Induktionsfeld

Das Antwortverhalten der Materie auf die Gegenwart statischer elektrischer Felder wird mit dem Begriff der elektrischen Polarisierung erfasst. Entsprechendes gilt für magnetische Materialien. An die Stelle der dielektrischen Konstanten tritt die magnetische Permeabilität. Wir betrachten zur Illustration eine Anzahl N von mikroskopisch kleinen *permanenten* magnetischen Dipolen $\boldsymbol{\mu}^{(j)}$ in einem Volumen Ω . Die Dichteverteilung der $\boldsymbol{\mu}^{(j)}$ in einem Volumenelement d^3r' , das um den Ort \mathbf{r}' zentriert sei, werde durch eine Verteilungsfunktion $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ repräsentiert. Dann gilt mit einer langsam veränderlichen Testfunktion $f(\mathbf{r}')$:

$$\sum_j \boldsymbol{\mu}^{(j)} f(\mathbf{r}^{(j)}) = \int_\Omega d^3r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}'). \quad (5.134)$$

5 Magnetostatik

Jedes permanente magnetische Dipolmoment $\boldsymbol{\mu}^{(j)}$ am Platz $\mathbf{r}^{(j)}$ generiert gemäß (5.45) ein Vektorpotential

$$\mathbf{A}^{(j)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu}^{(j)} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}|^3}. \quad (5.135)$$

Alle durch die Verteilungsfunktion $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ repräsentierten magnetischen Dipole zusammen generieren demnach ein Vektorpotential

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_j \frac{\boldsymbol{\mu}^{(j)} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}|^3} & (5.136) \\ &\rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3r' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3r' \left[-\nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \wedge \mathbf{M}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}') - \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial\Omega} d^2r' \mathbf{n}' \wedge \mathbf{M}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_{=0, \text{ da } \mathbf{M}(\mathbf{r}')=0 \text{ für } \mathbf{r}' \in \partial\Omega} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3r' \frac{\operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned}$$

Fließt im Volumen Ω zusätzlich noch ein stationärer Strom *freier* Ladungsträger mit Stromdichte $\mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r})$, so gilt jetzt entsprechend dem Superpositionsprinzip für das gesamte Vektorpotential

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{\Omega} d^3r' \frac{\kappa \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{\Omega} d^3r' \frac{\operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] & (5.137) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3r' \frac{\kappa \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}') + \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\kappa \mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} d^3r' \frac{\mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}') + \mathbf{j}^{(M)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned}$$

Die Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ generiert folglich eine Stromdichte

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\in \Omega & (5.138) \\ \mathbf{j}^{(M)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\kappa} \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

5.5 Materie im magnetischen Induktionsfeld

Wir erhalten unter Verwendung der Coulomb-Eichung

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.139)$$

dann die magnetostatische Maxwell-Gleichung zu

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \underbrace{\nabla \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r})}_{\equiv 0} \quad (5.140)$$

$$\begin{aligned} &= \kappa \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \kappa \mu_0 [\mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}^{(M)}(\mathbf{r})] \\ &= \mu_0 [\kappa \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}) + \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r})] \end{aligned} \quad (5.141)$$

Dies schreiben wir um zu

$$\operatorname{rot} \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{M}(\mathbf{r}) \right] = \kappa \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}). \quad (5.142)$$

Das Feld

$$\boxed{\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{M}(\mathbf{r})} \quad (5.143)$$

wird *Magnetfeld* genannt. Es ist für den Experimentator von Bedeutung, da dieser freie Ladungen und ihre Ströme leichter kontrollieren kann als das magnetische Induktionsfeld. Die magnetostatischen Grundgleichungen für die magnetisierbare Materie lauten jetzt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \kappa \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}) \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.144)$$

Auf der Oberfläche $\partial\Omega$ eines magnetisierbaren Materials mit Volumen Ω und nach außen orientierter Flächennormalen \mathbf{n} gilt

$$\begin{aligned} &\mathbf{r} \in \partial\Omega \quad (5.145) \\ \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \mathbf{n} \wedge [\mathbf{H}(\mathbf{r} + \eta \mathbf{n}) - \mathbf{H}(\mathbf{r} - \eta \mathbf{n})] &= \mathbf{J}^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r}) \\ \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{r} + \eta \mathbf{n}) - \mathbf{B}(\mathbf{r} - \eta \mathbf{n})] &= 0. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $\mathbf{J}^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r})$ eine auf der Grenzfläche $\partial\Omega$ fließende *Flächenstromdichte* der freien Ladungen (sofern vorhanden).

5 Magnetostatik

In vielen Metallen (z.B. Kupfer, Aluminium) ist die Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ nicht permanent vorhanden, sondern ist proportional zum lokalen magnetischen Induktionsfeld

$$\mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \chi^{(\text{mag})} \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (5.146)$$

Den Koeffizienten $\chi^{(\text{mag})}$ bezeichnet man als die *magnetische Suszeptibilität*. Materialien mit $\chi^{(\text{mag})} < 0$ nennt man *diamagnetisch*, Materialien mit $\chi^{(\text{mag})} > 0$ heißen *paramagnetisch*.

Dem Gesagten entnehmen wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \chi^{(\text{mag})} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) & (5.147) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \left[1 - \chi^{(\text{mag})} \right] \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{1 - \chi^{(\text{mag})}} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mu \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Die Materialkonstante

$$\mu = \frac{1}{1 - \chi^{(\text{mag})}} \quad (5.148)$$

ist die sog. *magnetische Permeabilität*. Haben wir es *nicht* mit einem Ferromagneten zu tun, so gilt für die meisten Materialien $10^{-9} < |\chi^{(\text{mag})}| < 10^{-4}$. In solchen Fällen macht es keinen großen Unterschied, ob man $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ oder $\frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0}$ betrachtet. Anders liegt der Fall bei Materialien mit permanenter Magnetisierung (unterhalb der Curie-Temperatur) wie z.B. Eisen, Cobalt, Nickel und verschiedenen Legierungen wie Cobalt-Eisen, Silizium-Eisen oder Nickel-Eisen. Deren magnetische Suszeptibilität $\chi^{(\text{mag})}$ ist in der Tat eine nichtlineare Funktion der angelegten Feldstärke, die insbesondere auch von der Magnetisierungs-Vorgeschichte abhängt (Hysterese).

5.6 Magnetisches skalares Potential als Alternative zum Vektorpotential

Wir betrachten nun einen Ferromagneten (z.B. Eisen) nahe der Sättigung. Auch verlangen wir *Abwesenheit* von Strömen freier Ladungsträger, d.h.

$$\mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (5.149)$$

5.6 Magnetisches skalares Potential als Alternative zum Vektorpotential

Dann lauten die magnetostatischen Grundgleichungen

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0} \\ \operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -\operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{5.150}$$

In dem Fall existiert nach dem Vorbild der Elektrostatik ein sog. *magnetisches skalares Potential* $\Psi(\mathbf{r})$ mit

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}}\Psi(\mathbf{r}).\tag{5.151}$$

Ist die Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ eine *gegebene* Größe, so ist das magnetostatische Randwertproblem rückführbar auf die Poisson-Gleichung der *skalaren* Potentialtheorie:

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2\Psi(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{r}).\tag{5.152}$$

Im einfachsten Fall ist als Randbedingung gefordert, dass $\Psi(\mathbf{r})$ im Unendlichen mindestens wie $\frac{1}{|\mathbf{r}|}$ abfällt. Dann lautet die Lösung

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.\tag{5.153}$$

Der skizzierte Lösungsweg funktioniert nicht, wenn das Magnetfeld auch noch durch Ströme freier Ladungsträger generiert wird, d.h. für $\mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$.

Gleichförmig magnetisierter Zylinder

Ein Zylinder mit Radius a und der Länge $l \gg a$ sei *gleichförmig* entlang seiner Achse magnetisiert. Wir legen die Achse \mathbf{e}_z des Koordinatensystems entlang der Zylinderachse, den Mittelpunkt des Zylinders identifizieren wir mit dem Ursprung des Koordinatensystems. Dann gilt im vorliegenden Fall

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\mathbf{r}') &= M^{(0)}(r_z) \mathbf{e}_z \\ M^{(0)}(r_z) &= \begin{cases} M^{(0)} & \text{für } |r_z| < \frac{l}{2} \text{ und } \sqrt{r_x^2 + r_y^2} < a, \\ 0 & \text{für } |r_z| > \frac{l}{2} \text{ oder } \sqrt{r_x^2 + r_y^2} < a. \end{cases}\end{aligned}\tag{5.154}$$

Folglich ist hier

$$\operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial r_z} M^{(0)}(r_z) = M^{(0)} \left[\delta\left(r_z + \frac{l}{2}\right) - \delta\left(r_z - \frac{l}{2}\right) \right] \Theta\left(a - \sqrt{r_x^2 + r_y^2}\right).\tag{5.155}$$

5 Magnetostatik

Nur die beiden Stirnflächen des Zylinders tragen zur Lösung der Poisson-Gleichung bei

$$\begin{aligned}
 \Psi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} & (5.156) \\
 &= -\frac{M^{(0)}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr' r' \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dr'_z \frac{[\delta(r'_z + \frac{l}{2}) - \delta(r'_z - \frac{l}{2})]}{\sqrt{(r_x - r'_x)^2 + (r_y - r'_y)^2 + (r_z - r'_z)^2}} \\
 &= -\frac{M^{(0)}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr' r' \\
 &\times \left[\frac{1}{\sqrt{(r_x - r'_x)^2 + (r_y - r'_y)^2 + (r_z + \frac{l}{2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{(r_x - r'_x)^2 + (r_y - r'_y)^2 + (r_z - \frac{l}{2})^2}} \right].
 \end{aligned}$$

Wir werten das Integral für große Entfernung zum Ursprung aus

$$\begin{aligned}
 a \ll l \ll |\mathbf{r}| & & (5.157) \\
 & \frac{1}{\sqrt{(r_x - r'_x)^2 + (r_y - r'_y)^2 + (r_z + \frac{l}{2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{(r_x - r'_x)^2 + (r_y - r'_y)^2 + (r_z - \frac{l}{2})^2}} \\
 & \simeq \frac{1}{|\mathbf{r}|} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + l \frac{r_z}{|\mathbf{r}|} + \frac{l^2}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - l \frac{r_z}{|\mathbf{r}|} + \frac{l^2}{4}}} \right) = -\frac{lr_z}{|\mathbf{r}|^3}.
 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{M^{(0)}}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr' r' \left(-\frac{lr_z}{|\mathbf{r}|^3} \right) = \frac{M^{(0)} \pi a^2 l}{4\pi} \frac{r_z}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (5.158)$$

Dies ist das Potential eines entlang der Richtung \mathbf{e}_z orientierten magnetischen Dipols mit Dipolmoment

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\mu} &= |\boldsymbol{\mu}| \mathbf{e}_z & (5.159) \\
 |\boldsymbol{\mu}| &= M^{(0)} \underbrace{\pi a^2 l}_{\text{Volumen}}.
 \end{aligned}$$

Also

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{1}{4\pi} \boldsymbol{\mu} \cdot \left(-\nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right). \quad (5.160)$$

5.6 Magnetisches skalares Potential als Alternative zum Vektorpotential

Das zugeordnete Magnetfeld ist ein Dipolfeld

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -\nabla_{\mathbf{r}}\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\nabla_{\mathbf{r}}\left[(\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla_r)\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla_r)\left(\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{3(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}-\boldsymbol{\mu}|\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^5}.\end{aligned}\tag{5.161}$$

Schließlich ist

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}-\boldsymbol{\mu}|\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^5}\tag{5.162}$$

in Übereinstimmung mit (5.49).

6 Energie- und Impuls-Bilanz für elektromagnetische Felder

In der Elektrostatik war es zweckmäßig, die gesamte Ladungsdichte ρ in den Anteil $\rho^{(f)}$ der freien Ladungsträger und den komplementären Anteil der Polarisationsladungen $\rho^{(P)}$ zu zerlegen. Die dort angestellten Betrachtungen lassen sich auf zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder übertragen. Wir schreiben jetzt im Inneren des Volumens Ω eines materiellen Körpers

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}, t) &= \rho^{(f)}(\mathbf{r}, t) + \rho^{(P)}(\mathbf{r}, t) \\ \rho^{(P)}(\mathbf{r}) &= -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

und entsprechend für die Stromdichte in der magnetisierbaren und polarisierbaren Materie

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}^{(P)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}^{(M)}(\mathbf{r}, t), \quad (6.1)$$

wobei

$$\begin{aligned}\mathbf{j}^{(P)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{j}^{(M)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\kappa} \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}, t).\end{aligned} \quad (6.2)$$

Solange es in der stabilen Materie keine Konversion von freien Ladungen in Polarisationsladungen gibt und umgekehrt, sind freie Ladungen und Polarisationsladungen für sich genommen Erhaltungsgrößen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \rho^{(f)}(\mathbf{r}, t) + \operatorname{div} \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho^{(P)}(\mathbf{r}, t) + \operatorname{div} \mathbf{j}^{(P)}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{j}^{(M)}(\mathbf{r}, t) &= 0.\end{aligned} \quad (6.3)$$

6 Energie- und Impuls-Bilanz für elektromagnetische Felder

Durch Einsetzen in die Maxwell-Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] &= \rho(\mathbf{r}, t) = \rho^{(f)}(\mathbf{r}, t) + \rho^{(P)}(\mathbf{r}, t) & (6.4) \\ \operatorname{div} [\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)] &= \rho^{(f)}(\mathbf{r}, t) \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \kappa \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \\ &= \mu_0 \left[\kappa \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \right]. \end{aligned}$$

Also

$$\operatorname{rot} [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)] - \kappa \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)] = \kappa \mu_0 \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t). \quad (6.5)$$

Auch für zeitabhängige elektromagnetische Felder ist es üblich, die Linearkombination

$$\boxed{\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)} \quad (6.6)$$

als *magnetisches Feld* zu bezeichnen, und die Linearkombination

$$\boxed{\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)} \quad (6.7)$$

als *Verschiebungsfeld*. Demnach ergeben sich die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen in Materie mit frei beweglichen Ladungen $\rho^{(f)}(\mathbf{r}, t)$ und Strömen $\mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t)$ als Quellen für $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ zu

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \rho^{(f)}(\mathbf{r}, t) & (6.8) \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \kappa \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Im Inneren von Ω gilt natürlich wie im freien Raum

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 & (6.9) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

6.1 Energie-Bilanz für zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder

Wir betrachten jetzt polarisierbare und magnetisierbare Materie, wobei (abgesehen von den freien Ladungen) der wesentliche Anteil der Materie (bestehend aus den Atomrümpfen) im Volumen Ω (durch äußere Kräfte) *fix* positioniert gehalten wird. Dann können sich in Gegenwart von äußeren elektromagnetischen Feldern $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ nur die *freien* Ladungsträger aufgrund der Lorentz-Kraftdichte

$$\mathbf{f}^{(L)}(\mathbf{r}, t) = \rho^{(f)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \kappa \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (6.10)$$

bewegen. Pro Zeiteinheit wird dabei durch die Bewegung der freien Ladungsträger im Volumen Ω eine *Joulesche Energie* $\mathcal{E}^{(\Omega)}$ mit der Rate

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}^{(\Omega)} = \int_{\Omega} d^3r' \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) \quad (6.11)$$

dissipiert, d.h. dem System *entzogen*. Im stationären Grenzfall entspricht dies der in (4.2) gegebenen Definition der Jouleschen Wärmeleistung für stromtragende Materie.

Im Umkehrschluss muss dem System mit der Rate $-\frac{d}{dt} \mathcal{E}^{(\Omega)}$ Energie zugeführt werden, damit die Bewegung der freien Ladungsträger nicht zum Erliegen kommt. Wir schreiben jetzt mit der Maxwell-Gleichung (6.8) für die dem System pro Zeiteinheit zugeführte Energie

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \mathcal{E}^{(\Omega)} &= -\int_{\Omega} d^3r \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega} d^3r \left[-\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \right] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Nun gilt, wie man leicht zeigt, die folgende Identität für zwei Vektorfelder $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{v}(\mathbf{r})$:

$$\operatorname{div} [\mathbf{u}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{v}(\mathbf{r})] = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (6.13)$$

Somit folgt jetzt

$$\begin{aligned} -[\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{div} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] - \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ &= \operatorname{div} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] - \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \left[-\kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

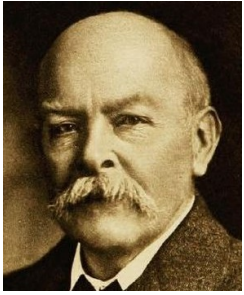
6 Energie- und Impuls-Bilanz für elektromagnetische Felder

In der letzten Zeile wurde verwendet, dass $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen (6.8) sind, somit über das Induktionsgesetz verknüpft sind. Einsetzen von (6.14) in (6.12) liefert

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\mathcal{E}^{(\Omega)} &= -\int_{\Omega} d^3r \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ &= \int_{\Omega} d^3r \operatorname{div} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \frac{\mathbf{H}}{\kappa}(\mathbf{r}, t) \right] \\ &\quad + \int_{\Omega} d^3r \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Mit (6.11) schreiben wir (6.15) um zu einer *lokalen* Energiebilanz für (festgehaltene) ruhende Materie mit frei beweglichen Ladungen

$$\begin{aligned} -\mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\kappa} \operatorname{div} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] + \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ &\quad + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.16)$$



John Henry Poynting
(1852–1914)

Der Vektor

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \frac{\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\kappa} \quad (6.17)$$

ist der sog. *Poynting-Vektor*. Mit dem Satz von Gauß schreiben wir für (6.15) jetzt

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\mathcal{E}^{(\Omega)} &= \int_{\partial\Omega} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}', t) \\ &\quad + \int_{\Omega} d^3r \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Die dem Volumen Ω zugeführte Energie wird einerseits von den Feldern und der Materie im Volumen Ω gespeichert, andererseits durch die Oberfläche $\partial\Omega$ des Volumens transportiert. Offensichtlich kann der Poynting-Vektor $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ dann als die *Energiestromdichte* des elektromagnetischen Feldes gedeutet werden, die durch die Oberfläche $\partial\Omega$ in das Innere des Körpers Ω gelangt.

Die Energiedichte u eines polarisierbaren und/oder magnetisierbaren Materials hängt nicht nur von den Feldern $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ in der Materie ab, sondern z.B. auch von der Massendichte $n^{(\Omega)}(\mathbf{r})$ der Bausteine der Materie

$$u = u \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}, t), \mathbf{D}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (6.19)$$

6.1 Energie-Bilanz für zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder

Wir sehen der Einfachheit halber davon ab, dass die Energiedichte u der Materie im Allgemeinen nicht nur von der Massendichte $n^{(\Omega)}$, sondern auch noch von den elastischen Verzerrungen (und gegebenenfalls weiteren thermodynamischen Zustandsvariablen) der Materie abhängen wird.

Für festgehaltene, also *ruhende* stabile Materie ist die Massendichte $n^{(\Omega)}$ *zeitunabhängig*, $\frac{\partial n^{(\Omega)}}{\partial t} = 0$. In dem Fall gilt für die Änderung des Energieinhaltes $U^{(\Omega)}(t)$ im (fixen) Volumen Ω

$$\text{Summenkonvention!} \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned} \frac{dU^{(\Omega)}}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3r u \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}), \mathbf{D}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] \\ &= \int_{\Omega} d^3r \left[\frac{\delta u}{\delta n^{(\Omega)}(\mathbf{r})} \underbrace{\frac{\partial n^{(\Omega)}(\mathbf{r})}{\partial t}}_{=0} + \frac{\delta u}{\delta D_a(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial D_a(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\delta u}{\delta B_a(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial B_a(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right]. \end{aligned}$$

Die Arbeitsleitung gegen die inneren Kräfte, die die Materie in Ruhe halten, ist gleich Null. In dem Fall ist $\frac{dU^{(\Omega)}}{dt}$ allein durch die elektromagnetischen Felder $D_a(\mathbf{r}, t)$ und $B_a(\mathbf{r}, t)$ bestimmt.

Da die (festgehaltene) Materie bezüglich einer Variation der Polarisationsladungen im stabilen Gleichgewicht ist, gilt

$$\frac{\delta u}{\delta D_a(\mathbf{r}, t)} = E_a(\mathbf{r}, t), \tag{6.21}$$

was bereits in (3.117) gezeigt wurde. Entsprechend ist

$$\frac{\delta u}{\delta B_a(\mathbf{r}, t)} = H_a(\mathbf{r}, t), \tag{6.22}$$

siehe [Bec82] und [LLP84]. Insgesamt lautet die Energiebilanz dann

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \mathcal{E}^{(\Omega)} &= \int_{\partial\Omega} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}', t) + \int_{\Omega} d^3r \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \\ &= \int_{\partial\Omega} d^2r' \mathbf{n}' \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}', t) + \frac{dU^{(\Omega)}}{dt}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

6 Energie- und Impuls-Bilanz für elektromagnetische Felder

Für ein lineares (isotropes) Medium mit zeitunabhängiger Dielektrizitätskonstante ε und Permeabilität μ , siehe (3.19) und (5.147), folgt hieraus der Energieinhalt des betrachteten Mediums in Gegenwart elektromagnetischer Felder zu

$$U^{(\Omega)} = \int_{\Omega} d^3r u^{(0)} [n^{(\Omega)}(\mathbf{r})] + \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^3r \left[\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0 \mu} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (6.24)$$

Hier ist

$$u^{(0)}[n^{(\Omega)}(\mathbf{r})] = \lim_{\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{0}} \lim_{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{0}} u[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}), \mathbf{D}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (6.25)$$

die Energiedichte der Materie in Abwesenheit der äußeren elektromagnetischen Felder.

Machen wir die einfache Modellannahme, dass sich im Volumen Ω ausschließlich freie Ladungsträger mit Stromdichte $\mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t)$ und Ladungsdichte $\rho^{(f)}(\mathbf{r}, t)$ befinden, d.h. sehen wir von Effekten der polarisierbaren oder magnetisierbaren Materie ab, so gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (6.26)$$

In dem Fall ist in Gegenwart der elektromagnetischen Felder, die dieses Volumen durchsetzen, die entsprechende Energiebilanz gegeben zu

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \mathcal{E}^{(\Omega)}(t) &= -\int_{\Omega} d^3r \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ &= \int_{\Omega} d^3r \operatorname{div} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3r \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Mit der Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$$u^{(\text{em})}(\mathbf{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

6.1 Energie-Bilanz für zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder

folgt nach dem Gesagten die lokale Energiebilanz zu

$$-\mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{div} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} u^{(\text{em})}(\mathbf{r}, t) \quad (6.28)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\kappa\mu_0}.$$

Beispiel: Poynting-Vektor für einen dünnen stromtragenden Ohmschen Leiter

Durch einen dünnen langen Zylinder (Draht) mit Leitfähigkeit σ fließt ein Strom I . Dann herrscht längs der Zylinderachse \mathbf{e}_z pro Längeneinheit l ein Spannungsabfall, d.h. dem Ohmschen Gesetz entsprechend existiert im Inneren des Drahtes ein konstantes elektrisches Feld

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \frac{I}{\pi a^2} \mathbf{e}_z = \frac{V^{(R)}}{l} \mathbf{e}_z, \quad (6.29)$$

wenn a den Radius des Zylinders bezeichnet. Das magnetische Induktionsfeld, welches der Strom I im Außengebiet $r_\perp > a$ des Drahtes erzeugt, ist gemäß (5.30) gegeben zu

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa\mu_0 I}{2\pi r_\perp} \mathbf{e}_\alpha. \quad (6.30)$$

Für den Poynting-Vektor des stromtragenden Drahtes im Außengebiet finden wir somit

$$r_\perp \geq a$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) \wedge \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\kappa\mu_0} = \frac{V^{(R)}}{l} \frac{I}{2\pi r_\perp} \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_\alpha \quad (6.31)$$

$$= -\frac{V^{(R)} I}{l} \frac{1}{2\pi r_\perp} \mathbf{e}_{r_\perp}. \quad (6.32)$$

Insgesamt fließt aus einem Segment der Länge l durch die Oberfläche eines stromtragenden Drahtes (mit nach außen orientierter Flächennormalen \mathbf{n}') pro Zeit dt eine Energie $d\mathcal{E}$ mit der Rate

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_{\substack{r'_\perp=a \\ |r'_z|<l}} d^2 r' \mathbf{n}' \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}') = -\frac{V^{(R)} I}{l} \frac{1}{2\pi a} 2\pi a \cdot l = -V^{(R)} I \quad (6.33)$$

heraus, d.h. der Draht benötigt eine Ohmsche Leistung $V^{(R)}I$, damit der Stromfluss auf Grund der Jouleschen Wärmeverluste im Inneren des Drahtes nicht zum Erliegen kommt.

6.2 Impuls-Bilanz für zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder

Die Impuls-Bilanz für die mit zeitabhängigen elektromagnetischen Feldern wechselwirkende Materie aufzustellen ist deutlich schwieriger, denn anders als bei der Energie-Bilanz tragen bei der Impuls-Bilanz *alle* Kräfte bei, also auch die Kräfte, die einen realen (also polarisierbaren und magnetisierbaren) materiellen Körper Ω in Ruhe halten. Es wäre natürlich möglich, von einem kräftefreien Zustand auszugehen, was allerdings voraussetzt, dass man die Kräfte, die in der Materie bei einer Verschiebung ihrer Atome aus der Gleichgewichtslage wirken, tatsächlich kennt!

Es ist daher viel leichter, die Impuls-Bilanz für elektromagnetische Felder in einem Volumen Ω aufzustellen, in dessen Innerem eine nicht polarisierbare und nicht magnetisierbare starre Modellmaterie, bestehend aus freien Ladungen mit Ladungsdichte $\rho^{(f)}(\mathbf{r}, t)$ und Stromdichte $\mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t)$, den durch das Volumen Ω propagierenden elektromagnetischen Feldern ausgesetzt ist.

Um die „Atome“ einer solchen Modellmaterie im Volumen Ω in Ruhe zu halten, ist dann eine Kraftdichte $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ aufzuwenden, die der Lorentz-Kraftdichte (6.10) das Gleichgewicht hält

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}^{(L)}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) &= -\rho^{(f)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \kappa \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Mit (1.21) und (1.22) folgt nun

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) &= -[\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \left[\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right] \wedge \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} \\ &= \kappa \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} \right] - \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \underbrace{\left[\kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right]}_{= -\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)} \\ &\quad - [\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \left[\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

6.2 Impuls-Bilanz für zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder

$$\begin{aligned}
 &= \kappa \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} \right] + \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - [\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\
 &\quad + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \wedge \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \underbrace{\left[\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right]}_{=0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \tag{6.35}
 \end{aligned}$$

Nun gilt (Summenkonvention!)

$$\begin{aligned}
 &a, b, c \in \{x, y, z\} \tag{6.36} \\
 &[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]_a - [\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] E_a(\mathbf{r}, t) \\
 &= \varepsilon_{abc} E_b(\mathbf{r}, t) \underbrace{[\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]_c}_{\equiv \varepsilon_{cmn} \frac{\partial}{\partial r_m} E_n} - \left[\frac{\partial}{\partial r_b} E_b(\mathbf{r}, t) \right] E_a(\mathbf{r}, t) \\
 &= \underbrace{(\delta_{a,m} \delta_{b,n} - \delta_{a,n} \delta_{b,m})}_{\equiv \varepsilon_{abc} \varepsilon_{cmn}} E_b(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial r_m} E_n - \left[\frac{\partial}{\partial r_b} E_b(\mathbf{r}, t) \right] E_a(\mathbf{r}, t) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_a} [E_b(\mathbf{r}, t) E_b(\mathbf{r}, t)] - \frac{\partial}{\partial r_b} [E_b(\mathbf{r}, t) E_a(\mathbf{r}, t)].
 \end{aligned}$$

Entsprechend schreiben wir

$$\begin{aligned}
 &[\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \wedge \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]_a - [\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] B_a(\mathbf{r}, t) \tag{6.37} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_a} [B_b(\mathbf{r}, t) B_b(\mathbf{r}, t)] - \frac{\partial}{\partial r_b} [B_b(\mathbf{r}, t) \cdot B_a(\mathbf{r}, t)].
 \end{aligned}$$

6 Energie- und Impuls-Bilanz für elektromagnetische Felder

Insgesamt

$$\begin{aligned}
 a, b, c &\in \{x, y, z\} & (6.38) \\
 f_a(\mathbf{r}, t) &= \kappa \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} \right]_a \\
 &+ \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_a} [E_c(\mathbf{r}, t) E_c(\mathbf{r}, t)] - \frac{\partial}{\partial r_b} [E_b(\mathbf{r}, t) E_a(\mathbf{r}, t)] \right\} \\
 &+ \frac{1}{\mu_0} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_a} [B_c(\mathbf{r}, t) B_c(\mathbf{r}, t)] - \frac{\partial}{\partial r_b} [B_b(\mathbf{r}, t) B_a(\mathbf{r}, t)] \right\} \\
 &= \kappa^2 \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\kappa \mu_0} \right]_a \\
 &+ \frac{\partial}{\partial r_a} \left[\frac{\varepsilon_0}{2} E_c(\mathbf{r}, t) E_c(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} B_c(\mathbf{r}, t) B_c(\mathbf{r}, t) \right] \\
 &- \frac{\partial}{\partial r_b} \left[\varepsilon_0 E_b(\mathbf{r}, t) E_a(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} B_b(\mathbf{r}, t) B_a(\mathbf{r}, t) \right].
 \end{aligned}$$

Den ersten Term deutet man unschwer als zeitliche Ableitung der Impulsdichte $\mathbf{p}^{(S)}(\mathbf{r}, t)$ für elektromagnetische Strahlung, die offensichtlich proportional zum Poynting-Vektor ist:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}^{(S)}(\mathbf{r}, t) &= \underbrace{\kappa^2 \varepsilon_0 \mu_0}_{\equiv 1/c^2} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\kappa \mu_0} \right]_a & (6.39) \\
 &= \frac{1}{c^2} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t).
 \end{aligned}$$

Somit ist die Impulsdichte der elektromagnetischen Strahlung bis auf einen Faktor $\frac{1}{c^2}$ gleich der Energiestromdichte!

Die Größen

$$\begin{aligned}
 a, b, c &\in \{x, y, z\} & (6.40) \\
 T_{ab}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 E_b(\mathbf{r}, t) E_a(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} B_b(\mathbf{r}, t) B_a(\mathbf{r}, t) \\
 &- \delta_{a,b} \frac{1}{2} \left[\varepsilon_0 E_c(\mathbf{r}, t) E_c(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} B_c(\mathbf{r}, t) B_c(\mathbf{r}, t) \right]
 \end{aligned}$$

6.2 Impuls-Bilanz für zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder

sind die Komponenten des *elektromagnetischen Spannungstensors* im betrachteten Fall, dass im Volumen Ω nur freie Ladungen existieren.

Es folgt für die Komponenten der Kraft, die der Lorentzkraft im Volumen Ω das Gleichgewicht hält (Summenkonvention!), der Ausdruck

$$a, b, c \in \{x, y, z\} \tag{6.41}$$

$$\int_{\Omega} d^3r f_a(\mathbf{r}, t) = \int_{\Omega} d^3r \frac{\partial}{\partial t} p_a^{(S)}(\mathbf{r}, t) - \int_{\Omega} d^3r \frac{\partial}{\partial r_b} T_{ab}(\mathbf{r}, t).$$

Umstellen liefert (für ein konstantes Volumen Ω) das Ergebnis

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3r p_a^{(S)}(\mathbf{r}, t) &= \int_{\Omega} d^3r f_a(\mathbf{r}, t) + \int_{\Omega} d^3r \frac{\partial}{\partial r_b} T_{ab}(\mathbf{r}, t) \\ &= \int_{\Omega} d^3r f_a(\mathbf{r}, t) + \int_{\partial\Omega} d^2r' n'_b T_{ab}(\mathbf{r}', t). \end{aligned} \tag{6.42}$$

In differentieller Form lautet die Impuls-Bilanz

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} p_a^{(S)}(\mathbf{r}, t) = f_a(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial r_b} T_{ab}(\mathbf{r}, t).} \tag{6.43}$$

Die linke Seite ist die zeitliche Änderung des Strahlungsimpulses im Volumen Ω , die rechte Seite ist eine Summe von Kräften. Diese Kräfte sind erstens die Gegenkraft zur Lorentzkraft, wobei diese ja im vorliegenden Fall den (als nicht polarisierbar und als nicht magnetisierbar modellierten starren) Körper Ω in Ruhe hält, und zweitens das Integral über die Flächendichte $n'_b T_{ab}(\mathbf{r}', t)$ der wirkenden *Spannungskräfte* über die *Oberfläche* $\partial\Omega$. Der *negative* Spannungstensor $-T_{ab}(\mathbf{r}', t)$ entspricht, da n'_b gemäß der Konvention die nach *außen* orientierte Komponente der Flächennormalen auf der Oberfläche $\partial\Omega$ ist, der a -ten kartesischen Komponente des *Impulsflusses* durch die Oberfläche in die b -te kartesische Richtung.

Zur realistischen Beschreibung von (nicht starrer) polarisierbarer oder magnetisierbarer Materie muss allerdings sehr genau definiert werden, was man unter dem elektromagnetischen Spannungstensor im Inneren der Materie verstehen will, da hiervon die Aufteilung in mechanischen Impuls und elektromagnetischen Impuls abhängig ist. Die Impuls-Bilanz für die polarisierbare und magnetisierbare Materie realistisch zu behandeln würdet eine detaillierte Kenntnis der thermodynamischen Zustandsgleichung der Materie im Volumen Ω erfordern, was aber nicht Untersuchungsgegenstand dieser Vorlesung ist.

Drehimpuls

Ein elektromagnetisches Feld mit Strahlungsimpulsdichte $\mathbf{p}^{(S)}(\mathbf{r}, t)$ im Volumen Ω trägt mit Bezug auf eine Drehachse durch den Punkt $\mathbf{r}^{(0)}$ einen Drehimpuls

$$\mathbf{J}^{(S)} = \int_{\Omega} d^3r [\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}] \wedge \mathbf{p}^{(S)}(\mathbf{r}, t). \quad (6.44)$$

Wenn zum Beispiel ein magnetisches Induktionsfeld parallel zur Achse eines (drehbar gelagerten) elektrisch geladenen Zylinderkondensators (plötzlich) eingeschaltet wird, bewirkt dies ein Drehmoment $\frac{d}{dt}\mathbf{J}^{(S)}(t)$, d.h. der Zylinderkondensator wird um seine Achse in Rotation versetzt.

6.3 Arbeitsaufwand zum Verschieben einer stromtragenden Leiterschleufe

Wir betrachten zwei stromtragende Leiterschleifen $\mathcal{C}^{(1)}$ und $\mathcal{C}^{(2)}$, wobei $\mathcal{C}^{(2)}$ um den Ort $\mathbf{r}^{(2)}$ zentriert sein möge und $\mathcal{C}^{(1)}$ um den Ort $\mathbf{r}^{(1)}$. Dann gilt gemäß (5.37) für die Kraft, die von einer stromtragenden Leiterschleife $\mathcal{C}^{(2)}$ auf eine stromtragende Leiterschleife $\mathcal{C}^{(1)}$ ausgeübt wird

$$\begin{aligned} \mathbf{F}[\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}; \mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)}] & \quad (6.45) \\ &= \frac{\kappa^2 \mu_0}{4\pi} I^{(1)} I^{(2)} \oint_{\mathcal{C}^{(1)}} \oint_{\mathcal{C}^{(2)}} [\mathbf{ds}^{(1)} \cdot \mathbf{ds}^{(2)}] \nabla_{\mathbf{s}^{(1)}} \frac{1}{|\mathbf{r}^{(1)} + \mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)} - \mathbf{s}^{(2)}|} \\ &= \frac{\kappa^2 \mu_0}{4\pi} I^{(1)} I^{(2)} \oint_{\mathcal{C}^{(1)}} \oint_{\mathcal{C}^{(2)}} [\mathbf{ds}^{(1)} \cdot \mathbf{ds}^{(2)}] \left[\nabla_{\mathbf{r}^{(1)}} \frac{1}{|\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)} + \mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)}|} \right] \\ &= \nabla_{\mathbf{r}^{(1)}} \frac{\kappa^2 \mu_0}{4\pi} I^{(1)} I^{(2)} \oint_{\mathcal{C}^{(1)}} \oint_{\mathcal{C}^{(2)}} [\mathbf{ds}^{(1)} \cdot \mathbf{ds}^{(2)}] \frac{1}{|\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)} + \mathbf{s}^{(2)} - \mathbf{s}^{(1)}|} \\ &= I^{(1)} I^{(2)} \nabla_{\mathbf{r}^{(1)}} L_{12}(\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)}). \end{aligned}$$

Diese Kraft ist nach dem Gesagten proportional zum Gradienten der Gegeninduktivität $L_{12}(\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)})$, siehe (5.99). Offensichtlich übernimmt hier nicht die Gegeninduktivität $L_{12}(\mathbf{r})$, sondern $-L_{12}(\mathbf{r})$ die Rolle eines mechanischen Potentials! Das hängt damit zusammen, dass sich entgegengesetzt gerichtete Ströme in Leiterschleifen abstoßen, während sich entgegengesetzte Punktladungen anziehen.

6.4 Energiebilanz für Systeme stromtragender Leiterschleifen

Im Gleichgewicht, bei konstant gehaltener Gestalt der Leiterschleifen $\mathcal{C}^{(1)}$ und $\mathcal{C}^{(2)}$ und konstant gehaltenen Strömen $I^{(1)}$ und $I^{(2)}$, ist demnach die magnetische Wechselwirkungsenergie *maximal* und nicht, wie die elektrostatische Wechselwirkungsenergie, *minimal*.

Die gegen die von $\mathcal{C}^{(2)}$ auf $\mathcal{C}^{(1)}$ ausgeübte Kraft $\mathbf{F}[\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}; \mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)}]$ zu leistende Arbeit bei der Verschiebung von $\mathcal{C}^{(1)}$ von einer Anfangsposition $\mathbf{r}^{(I)}$ hin zu einer Endposition $\mathbf{r}^{(II)}$ bei *konstant* gehaltener Gestalt der Leiterschleifen $\mathcal{C}^{(1)}$ und $\mathcal{C}^{(2)}$ und *konstant* gehaltenen Strömen $I^{(1)}$ und $I^{(2)}$ ist demnach allein durch den Gradienten der Gegeninduktivität bestimmt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 U_{II}^{(\text{mech})} - U_I^{(\text{mech})} &= - \int_{\mathbf{r}^{(I)}}^{\mathbf{r}^{(II)}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} [\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}; \mathbf{r}] & (6.46) \\
 &= -I^{(1)}I^{(2)} [L_{12}(\mathbf{r}^{(II)}) - L_{12}(\mathbf{r}^{(I)})] \\
 &= - [U^{(W,W)}(\mathcal{C}_I^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) - U^{(W,W)}(\mathcal{C}_{II}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)})]_{I^{(n)}=\text{const}}.
 \end{aligned}$$

Das *Negative* der Wechselwirkungsenergie übernimmt bei festgehaltenen Strömen die Rolle eines mechanischen Potentials. Dieses Ergebnis darf große Allgemeinheit beanspruchen, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird.

6.4 Energiebilanz für Systeme stromtragender Leiterschleifen

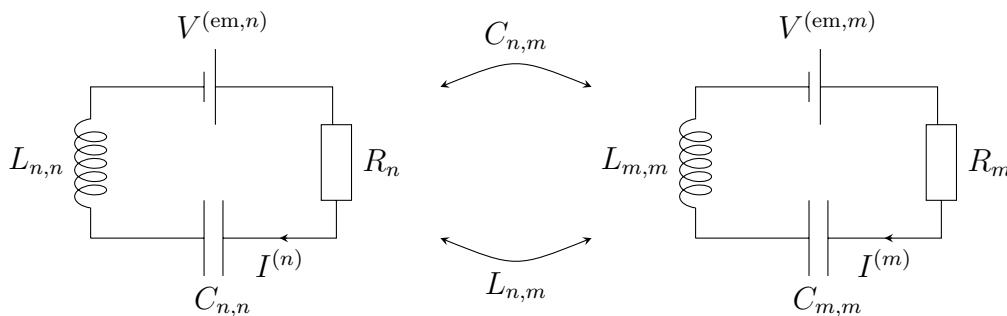


Abbildung 6.1: Kopplung von zwei stromtragenden Leiterschleifen $\mathcal{C}^{(m)}$ und $\mathcal{C}^{(n)}$.

6 Energie- und Impuls-Bilanz für elektromagnetische Felder

Wir betrachten eine Anzahl von N geschlossenen Leiterschleifen $\mathcal{C}^{(n)}$, die jeweils eine Spannungsquelle $V^{(\text{em},n)}$ (etwa eine Batterie, die chemische Energie in elektrische Energie umwandelt), dazu Ohmsche Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten enthalten. Spannungsquellen liefern aufgrund der wirkenden elektromotorischen Kraft eine Spannung $V^{(\text{em},n)}$ (Überführungsarbeit pro Ladung vom Minus zum Pluspol der Batterie), siehe Abbildung 6.1 Fließt im geschlossenen Leiter $\mathcal{C}^{(n)}$ ein Strom $I^{(n)}$, so führt eine Spannungsquelle dem Leiter eine Leistung (Energie pro Zeiteinheit) von $V^{(\text{em},n)} I^{(n)}$ zu. Hat der Leiter einen Ohmschen Widerstand R , so generiert dieser längs des Leiters einen Spannungsabfall $V^{(R,n)} = I^{(n)} R$, wobei eine Leistung $-I^{(n)} V^{(R,n)}$ *dissipiert* wird. An einer zum Widerstand R in Serie geschalteten Kapazität C gibt es für zeitlich veränderliche Ströme einen Spannungsabfall $V^{(C,n)} = \frac{q^{(n)}}{C}$, wobei zum Zeitpunkt t die Ladung am Kondensator zu $q^{(n)} = \int_0^t dt' I^{(n)}(t')$ gegeben ist. Für einen zeitlich veränderlichen Abstand zwischen den Leiterschleifen oder für zeitlich veränderliche Ströme $I^{(n)}$ wirken zusätzliche elektromotorische Kräfte auf die betrachteten Leiterschleife $\mathcal{C}^{(n)}$, z.B. die Induktionsspannung

$$V^{(\text{ind},n)} = -\kappa \frac{d}{dt} \Phi^{(n)}, \quad (6.47)$$

wobei $\Phi^{(n)}$ den magnetischen Fluss durch die von $\mathcal{C}^{(n)}$ umschlossene Fläche darstellt. Dieser Fluss ist gemäß (5.107) über die Induktivitätsmatrix $L_{n,m}$ mit allen Strömen $I^{(m)}$, die in den Leiterschleifen $\mathcal{C}^{(m)}$ des Systems fließen, gekoppelt.

Wir wollen nun die Energie eines Systems von stromtragenden Leiterschleifen bestimmen, indem wir aus dem Unendlichen kommend weitere Leiterschleife $\mathcal{C}^{(n)}$ in die nähere Umgebung einer bereits vorhandenen fix positionierten stromtragenden Leiterschleife $\mathcal{C}^{(1)}$ verschieben. Bei dem Prozess ändert sich dann der relative Abstand der Leiterschleifen, und damit natürlich die Gegeninduktivität $L_{n,m}$ als Funktion der Zeit.

Die Rate, mit der sich die elektromagnetische Energie $U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}^{(N)})$ so eines Systems ändert, ist im allgemeinen gegeben zu

$$\frac{d}{dt} U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}^{(N)}) = \sum_{n=1}^N I^{(n)} (V^{(\text{em},n)} - V^{(R,n)}) + \frac{d}{dt} U^{(\text{mech})}, \quad (6.48)$$

wobei $\frac{d}{dt} U^{(\text{mech})}$ die Änderung der *mechanischen* Energie des Systems bilanziert, z.B. kinetische und potentielle Energie der Drähte, mechanische Biegekräfte der Drähte, mechanische Federkräfte. Das Minuszeichen berücksichtigt hier Joulesche

6.4 Energiebilanz für Systeme stromtragender Leiterschlaufen

Verluste aufgrund des Ohmschen Widerstands stromtragender Leiter. Die Energie des Systems ändert sich demnach, weil aufgrund Joulescher Verluste irreversibel Energie abgeführt wird (Minuszeichen!), während die elektromotorischen Kräfte sowie die mechanischen Kräfte dem System insgesamt Energie zuführen.

Die *Kirchhoffsche Maschenregel* besagt nun, dass beim Umlauf um eine Masche herum (das ist in unserem Fall die betrachtete Leiterschleife $\mathcal{C}^{(n)}$) die Summe aller *elektromotorischen* Spannungsabfälle gleich der Summe der übrigen Spannungsabfälle sein muss

$$V^{(\text{em},n)} + V^{(\text{ind},n)} = V^{(\mathcal{C},n)} + V^{(R,n)}. \quad (6.49)$$

Diese Aussage ist äquivalent zur mikroskopischen Formulierung des Induktionsgesetzes von Faraday.

Aus (6.49) ergibt sich die Identität

$$\boxed{V^{(\text{em},n)} - V^{(R,n)} = V^{(\mathcal{C},n)} - V^{(\text{ind},n)}}, \quad (6.50)$$

d.h.

$$\frac{d}{dt}U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}^{(N)}) = \sum_{n=1}^N I^{(n)}V^{(\mathcal{C},n)} - \sum_{n=1}^N I^{(n)}V^{(\text{ind},n)} + \frac{d}{dt}U^{(\text{mech})}. \quad (6.51)$$

Die Influenzladung $q^{(n)}$ am n -ten Kondensator sei über eine Kapazitätsmatrix $C_{n,m}$ mit den Spannungswerten $V^{(\mathcal{C},m)}$ in allen Leiterschlaufen $\mathcal{C}^{(m)}$ verknüpft

$$q^{(n)} = \sum_{m=1}^N C_{n,m}V^{(\mathcal{C},m)} \quad (6.52)$$

$$\frac{d}{dt}q^{(n)} = I^{(n)}.$$

Entsprechend ist der magnetische Fluss $\Phi^{(n)}$, der die geschlossene Leiterschleife $\mathcal{C}^{(n)}$ durchsetzt, über die Induktivitätsmatrix $L_{n,m}$ mit den Strömen in allen Leiterschlaufen $\mathcal{C}^{(m)}$ verknüpft

$$\Phi^{(n)} = \frac{1}{\kappa} \sum_{m=1}^N L_{n,m}I^{(m)} \quad (6.53)$$

$$\kappa \frac{d}{dt}\Phi^{(n)} = -V^{(\text{ind},n)}.$$

6 Energie- und Impuls-Bilanz für elektromagnetische Felder

Halten wir die geometrische Form aller N Leiterschleifen sowie deren relative Position und Orientierung zueinander konstant, so ist sowohl die Induktivitätsmatrix $L_{n,m}$ als auch die Kapazitätsmatrix $C_{n,m}$ zeitlich konstant. Auch wird in dem Fall am System der Leiterschleifen überhaupt keine mechanische Arbeit geleistet, da sich nichts bewegt

$$\frac{d}{dt}U^{(\text{mech})} = 0. \quad (6.54)$$

Für eine *konstante* Kapazitätsmatrix folgt jetzt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N I^{(n)}V^{(C,n)} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{d}{dt}q^{(n)} \right) V^{(C,n)} & (6.55) \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{d}{dt} \sum_{m=1}^N C_{n,m}V^{(C,m)} \right) V^{(C,n)} \\ &= \sum_{n,m=1}^N C_{n,m} \left(\frac{d}{dt}V^{(C,m)} \right) V^{(C,n)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N C_{n,m} \left[\left(\frac{d}{dt}V^{(C,m)} \right) V^{(C,n)} + \left(\frac{d}{dt}V^{(C,n)} \right) V^{(C,m)} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N C_{n,m}V^{(C,m)}V^{(C,n)} \right]. \end{aligned}$$

Beim Übergang zur vorletzten Zeile wurde die Symmetrie $C_{n,m} = C_{m,n}$ verwendet. Dieser Term beschreibt offensichtlich die zeitliche Änderung der *elektrischen Feldenergie*, die in dem System von N ruhenden Leiterschleifen mit konstanter Kapazitätsmatrix $C_{n,m}$ gespeichert ist.

6.4 Energiebilanz für Systeme stromtragender Leiterschleifen

Für eine *konstante* Induktivitätsmatrix $L_{n,m}$ folgt entsprechend

$$\begin{aligned}
 - \sum_{n=1}^N I^{(n)} V^{(\text{ind},n)} &= \sum_{n=1}^N I^{(n)} \frac{d}{dt} \kappa \Phi^{(n)} & (6.56) \\
 &= \sum_{n=1}^N I^{(n)} \frac{d}{dt} \sum_{m=1}^N L_{n,m} I^{(m)} \\
 &= \sum_{n=1}^N I^{(n)} \sum_{m=1}^N L_{n,m} \frac{d}{dt} I^{(m)} \\
 &= \sum_{n,m=1}^2 L_{n,m} \left(I^{(n)} \frac{d}{dt} I^{(m)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N L_{n,m} \left(I^{(n)} \frac{d}{dt} I^{(m)} + I^{(m)} \frac{d}{dt} I^{(n)} \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N L_{n,m} I^{(n)} I^{(m)} \right).
 \end{aligned}$$

Beim Übergang zur vorletzten Zeile wurde die Symmetrie $L_{n,m} = L_{m,n}$ verwendet. Dieser Term beschreibt offensichtlich die Änderung der *magnetischen Feldenergie*, die in in dem System von N ruhenden Leiterschleifen mit konstanter Kapazitätsmatrix $C_{n,m}$ gespeichert ist.

Nach dem Gesagten gilt jetzt für die *ruhende* Anordnung von N stromtragenden Leiterschleifen insgesamt

$$\frac{d}{dt} U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}^{(N)}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N C_{n,m} V^{(C,m)} V^{(C,n)} + \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N L_{n,m} I^{(n)} I^{(m)} \right). \quad (6.57)$$

Daraus folgt (bis auf eine unwesentliche Konstante) für die *elektromagnetische Feldenergie* einer Anordnung von Induktivitäten und Kapazitäten der Ausdruck

$$U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}^{(N)}) = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N C_{n,m} V^{(C,m)} V^{(C,n)} + \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N L_{n,m} I^{(n)} I^{(m)}. \quad (6.58)$$

Es ist hier nicht verlangt, dass Spannungen $V^{(C,n)}$ oder Ströme $I^{(n)}$ in den Leiterschleife $\mathcal{C}^{(n)}$ zeitlich konstant sind! Der gefundene Ausdruck für die elektromagnetische Feldenergie ist demnach allgemein. Die Formel (6.58) dient uns jetzt als

6 Energie- und Impuls-Bilanz für elektromagnetische Felder

Definition der elektromagnetischen Feldenergie für den allgemeinen Fall, bei dem nicht nur Ströme und Spannungen, sondern auch Kapazitäten und Induktivitäten von der Zeit abhängen dürfen.

Was geschieht, wenn einige der Stromkreise $\mathcal{C}^{(n)}$ gegeneinander bewegt werden? Sobald sich die Abstände zwischen zwei Leiterschleifen oder auch die Form jeder einzelnen Leiterschleife zeitlich ändern darf, ist natürlich die mechanische Arbeitsleistung am System nicht länger gleich Null, $\frac{d}{dt}U^{(\text{mech})} \neq 0$, da Induktivitäten $L_{n,m}$ und auch Kapazitäten $C_{n,m}$ jetzt Funktionen der Zeit sind. Gemäß (6.51) folgt nun unter Beachtung der Symmetrie $C_{n,m} = C_{m,n}$ und $L_{n,m} = L_{m,n}$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}U^{(\text{mech})} &= \frac{d}{dt}U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}^{(N)}) - \sum_{n=1}^N I^{(n)}V^{(C,n)} + \sum_{n=1}^N I^{(n)}V^{(\text{ind},n)} \quad (6.59) \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N C_{n,m}V^{(C,m)}V^{(C,n)} + \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N L_{n,m}I^{(n)}I^{(m)} \right) \\
 &\quad - \sum_{n=1}^N I^{(n)}V^{(C,n)} - \sum_{n=1}^N I^{(n)} \frac{d}{dt}\Phi^{(n)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N \left(\frac{d}{dt}C_{n,m} \right) V^{(C,m)}V^{(C,n)} + \sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=1}^N C_{n,m} \frac{d}{dt}V^{(C,m)} \right) V^{(C,n)} \\
 &\quad - \sum_{n=1}^N I^{(n)}V^{(C,n)} + \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N \left(\frac{d}{dt}L_{n,m} \right) I^{(n)}I^{(m)} \\
 &\quad + \sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=1}^N L_{n,m}I^{(m)} \right) \frac{d}{dt}I^{(n)} - \sum_{n=1}^N I^{(n)} \left[\frac{d}{dt} \sum_{m=1}^N L_{n,m}I^{(m)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N \left(\frac{d}{dt}C_{n,m} \right) V^{(C,m)}V^{(C,n)} + \sum_{n=1}^N \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\sum_{m=1}^N C_{n,m}V^{(C,m)} \right)}_{=I^{(n)}} V^{(C,n)} \\
 &\quad - \sum_{n=1}^N \left[\sum_{m=1}^N \left(\frac{d}{dt}C_{n,m} \right) V^{(C,m)} \right] V^{(C,n)} - \sum_{n=1}^N I^{(n)}V^{(C,n)} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N \left(\frac{d}{dt}L_{n,m} \right) I^{(n)}I^{(m)} + \sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=1}^N L_{n,m}I^{(m)} \right) \frac{d}{dt}I^{(n)} \\
 &\quad - \sum_{n=1}^N I^{(n)} \sum_{m=1}^N L_{n,m} \frac{d}{dt}I^{(m)} - \sum_{n=1}^N I^{(n)} \sum_{m=1}^N \left(\frac{d}{dt}L_{n,m} \right) I^{(m)}.
 \end{aligned}$$

Alles zusammen genommen folgt die mechanische Arbeitsleistung am System

6.4 Energiebilanz für Systeme stromtragender Leiterschleifen

somit zu

$$\frac{d}{dt}U^{(\text{mech})} = -\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N \left(\frac{d}{dt}C_{n,m} \right) V^{(C,m)}V^{(C,n)} - \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N \left(\frac{d}{dt}L_{n,m} \right) I^{(n)}I^{(m)}. \quad (6.60)$$

Die rechte Seite ist hier gemäß (6.58) identisch mit der negativen Ableitung der elektromagnetischen Feldenergie $U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}^{(N)})$ des Systems nach der Zeit bei *festgehaltenen* Spannungen $V^{(C,n)}$ und *festgehaltenen* Strömen $I^{(n)}$ für $n \in \{1, 2, \dots, N\}$. Also erhalten wir für die mechanische Arbeitsleistung am System die Relation

$$\frac{d}{dt}U^{(\text{mech})} = - \left[\frac{d}{dt}U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}^{(N)}) \right]_{\substack{I^{(n)}=\text{const} \\ V^{(C,n)}=\text{const}}} . \quad (6.61)$$

Der mechanische Arbeitsaufwand zur Verschiebung eines induktiv bzw. kapazitiv gekoppelten Systems von Leiterschleifen $\mathcal{C}^{(n)}$ von einer Anfangskonfiguration $\mathcal{C}_I^{(n)}$ hin zu einer Endposition $\mathcal{C}_{II}^{(n)}$ ist demnach gleich der *negativen* Differenz der elektromagnetischen Feldenergie für die betreffenden Konfigurationen $\mathcal{C}_I^{(n)}$ und $\mathcal{C}_{II}^{(n)}$ bei *konstant* gehaltenen Spannungen $V^{(C,n)} = \text{const}$ und *konstant* gehaltenen Strömen $I^{(n)}$!

$$U_I^{(\text{mech})} - U_{II}^{(\text{mech})} = - \left[U(\mathcal{C}_I^{(1)}, \mathcal{C}_I^{(2)}, \dots, \mathcal{C}_I^{(N)}) - U(\mathcal{C}_{II}^{(1)}, \mathcal{C}_{II}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}_{II}^{(N)}) \right]_{\substack{I^{(n)}=\text{const} \\ V^{(C,n)}=\text{const}}} . \quad (6.62)$$

Wir schreiben jetzt den Ausdruck (6.58) für die elektromagnetische Feldenergie

6 Energie- und Impuls-Bilanz für elektromagnetische Felder

um auf die Variablen elektrische Ladung $q^{(n)}$ und magnetischer Fluss $\Phi^{(n)}$:

$$\begin{aligned}
 U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}^{(N)}) & \quad (6.63) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N C_{n,m} V^{(C,m)} V^{(C,n)} + \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N L_{n,m} I^{(m)} I^{(n)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N C_{n,m} V^{(C,m)} \underbrace{\sum_l \sum_j [C^{-1}]_{n,j} C_{j,l} V^{(C,l)}}_{=\delta_{n,l}} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N L_{n,m} I^{(m)} \underbrace{\sum_l \sum_j [L^{-1}]_{n,j} L_{j,l} I^{(l)}}_{=\delta_{n,l}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=1}^N C_{n,m} V^{(C,m)} \right) \sum_j [C^{-1}]_{n,j} \left(\sum_l C_{j,l} V^{(C,l)} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=1}^N L_{n,m} I^{(m)} \right) \sum_j [L^{-1}]_{n,j} \left(\sum_l L_{j,l} I^{(l)} \right).
 \end{aligned}$$

Mit (6.52) und (6.53) folgt schließlich für die elektromagnetische Feldenergie umgeschrieben auf die Variablen $q^{(n)}$ und $\Phi^{(n)}$:

$$U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}^{(N)}) = \frac{1}{2} \sum_{n,j=1}^N q^{(n)} [C^{-1}]_{n,j} q^{(j)} + \frac{\kappa^2}{2} \sum_{n,j=1}^N \Phi^{(n)} [L^{-1}]_{n,j} \Phi^{(j)}. \quad (6.64)$$

Mit der für jede invertierbare Matrix U gültigen Relation

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} (U \circ U^{-1}) = \left(\frac{d}{dt} U \right) \circ U^{-1} + U \circ \left(\frac{d}{dt} U^{-1} \right) \quad (6.65) \\
 \frac{d}{dt} U^{-1} &= -U^{-1} \left(\frac{d}{dt} U \right) \circ U^{-1}
 \end{aligned}$$

ergibt sich nun für die Ableitung der inversen Kapazitätsmatrix und der inversen

6.4 Energiebilanz für Systeme stromtragender Leiterschleifen

Induktivitätsmatrix

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}C^{-1} &= -C^{-1} \left(\frac{d}{dt}C \right) \circ C^{-1} \\ \frac{d}{dt}L^{-1} &= -L^{-1} \left(\frac{d}{dt}L \right) \circ L^{-1}.\end{aligned}\tag{6.66}$$

Wenn wir alle Influenzladungen $q^{(n)}$ auf den Kondensatoren und alle magnetischen Flüsse $\Phi^{(n)}$ durch die N Leiterschleifen $\mathcal{C}^{(n)}$, die untereinander sowohl induktiv als auch kapazitiv gekoppelt sein dürfen, jetzt konstant halten,

$$\begin{aligned}n &\in \{1, 2, \dots, N\} \\ \frac{d}{dt}q^{(n)} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\Phi^{(n)} &= 0,\end{aligned}\tag{6.67}$$

so ergibt sich für die am System geleistete Arbeit bei einer Veränderung der Form oder relativen Lage der Leiterschleifen der Ausdruck

$$\begin{aligned}&\left[\frac{d}{dt}U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}^{(N)}) \right]_{\substack{q^{(n)}=\text{const} \\ \Phi^{(n)}=\text{const}}} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \sum_{n,j=1}^N q^{(n)} [C^{-1}]_{n,j} q^{(j)} + \frac{\kappa^2}{2} \sum_{n,j=1}^N \Phi^{(n)} [L^{-1}]_{n,j} \Phi^{(j)} \right]_{\substack{q^{(n)}=\text{const} \\ \Phi^{(n)}=\text{const}}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n,j=1}^N q^{(n)} \left[\frac{d}{dt}C^{-1} \right]_{n,j} q^{(j)} + \frac{\kappa^2}{2} \sum_{n,j=1}^N \Phi^{(n)} [L^{-1}]_{n,j} \Phi^{(j)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n,j=1}^N q^{(n)} \left[-C^{-1} \left(\frac{d}{dt}C \right) \circ C^{-1} \right]_{n,j} q^{(j)} \\ &\quad + \frac{\kappa^2}{2} \sum_{n,j=1}^N \Phi^{(n)} \left[-L^{-1} \left(\frac{d}{dt}L \right) \circ L^{-1} \right]_{n,j} \Phi^{(j)}.\end{aligned}\tag{6.68}$$

6 Energie- und Impuls-Bilanz für elektromagnetische Felder

Nun gilt in Umkehrung der Relationen (6.52) und (6.53)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N q^{(n)} [C^{-1}]_{n,m} &= V^{(C,m)} \\ \kappa \sum_{n=1}^N \Phi^{(n)} [L^{-1}]_{n,m} &= I^{(m)}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned} &\left[\frac{d}{dt} U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}^{(N)}) \right]_{\substack{q^{(n)}=\text{const} \\ \Phi^{(n)}=\text{const}}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{m,m'=1}^N V^{(C,m)} \left(\frac{d}{dt} C_{m,m'} \right) V^{(C,m')} - \frac{1}{2} \sum_{m,m'=1}^N I^{(m)} \left(\frac{d}{dt} L_{m,m'} \right) I^{(m')} \\ &= - \left[\frac{d}{dt} U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}^{(N)}) \right]_{\substack{I^{(n)}=\text{const} \\ V^{(C,n)}=\text{const}}} . \end{aligned} \quad (6.70)$$

Ein Vergleich mit (6.60) zeigt dann

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}^{(N)}) \right]_{\substack{q^{(n)}=\text{const} \\ \Phi^{(n)}=\text{const}}} &= \frac{d}{dt} U^{(\text{mech})} \\ &= - \left[\frac{d}{dt} U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}^{(N)}) \right]_{\substack{I^{(n)}=\text{const} \\ V^{(C,n)}=\text{const}}} . \end{aligned} \quad (6.71)$$

Der mechanische Arbeitsaufwand zur Verschiebung des gekoppelten Systems der Leiterschleifen $\mathcal{C}^{(n)}$ von einer Anfangskonfiguration $\mathcal{C}_I^{(n)}$ hin zu einer Endposition $\mathcal{C}_{II}^{(n)}$ ist demnach gleich der Differenz der elektromagnetischen Feldenergie für die betreffenden Konfigurationen $\mathcal{C}_I^{(n)}$ und $\mathcal{C}_{II}^{(n)}$ bei *konstant* gehaltenen Influenzladungen $q^{(n)}$ und *konstant* gehaltenen magnetischen Flüssen $\Phi^{(n)}$, oder gleich dem Negativen dieser Differenz bei *konstant* gehaltenem Strömen $I^{(n)}$ und *konstant*

6.5 Wechselwirkungsenergie für zwei stromtragende Leiterschlaufen

gehaltenen Spannungen $V^{(C,n)}$:

$$\begin{aligned}
 & U_I^{(\text{mech})} - U_{II}^{(\text{mech})} \\
 &= \left[U(\mathcal{C}_I^{(1)}, \mathcal{C}_I^{(2)}, \dots, \mathcal{C}_I^{(N)}) - U(\mathcal{C}_{II}^{(1)}, \mathcal{C}_{II}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}_{II}^{(N)}) \right]_{\substack{q^{(n)}=\text{const} \\ \Phi^{(n)}=\text{const}}} \\
 &= - \left[U(\mathcal{C}_I^{(1)}, \mathcal{C}_I^{(2)}, \dots, \mathcal{C}_I^{(N)}) - U(\mathcal{C}_{II}^{(1)}, \mathcal{C}_{II}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}_{II}^{(N)}) \right]_{\substack{I^{(n)}=\text{const} \\ V^{(C,n)}=\text{const}}} \cdot
 \end{aligned} \tag{6.72}$$

6.5 Wechselwirkungsenergie für zwei stromtragende Leiterschlaufen

Ein System von zwei stromtragenden Leiterschlaufen mit konstanten Strömen $I^{(1)}$ und $I^{(2)}$ hat nach dem Gesagten eine Energie

$$\begin{aligned}
 U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) &= U^{(\text{selbst})}(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) + U^{(W,W)}(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) \\
 &= \frac{1}{2} L_{11} [I^{(1)}]^2 + \frac{1}{2} L_{22} [I^{(2)}]^2 + \frac{1}{2} (L_{12} + L_{21}) I^{(1)} I^{(2)}.
 \end{aligned} \tag{6.73}$$

Demnach ist die Selbstenergie $U^{(\text{selbst})}(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)})$ bzw. die Wechselwirkungsenergie $U^{(W,W)}(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)})$ der Anordnung gegeben zu

$$\begin{aligned}
 U^{(\text{selbst})}(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) &= \frac{1}{2} L_{11} [I^{(1)}]^2 + \frac{1}{2} L_{22} [I^{(2)}]^2 \\
 U^{(W,W)}(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) &= \frac{1}{2} (L_{12} + L_{21}) I^{(1)} I^{(2)}.
 \end{aligned} \tag{6.74}$$

Wegen der Symmetrie

$$L_{12} = L_{21} \tag{6.75}$$

ist die Wechselwirkungsenergie einer am Ort $\mathbf{r}^{(1)}$ zentrierten Leiterschleife $\mathcal{C}^{(1)}$ mit einer am Ort $\mathbf{r}^{(2)}$ zentrierten Leiterschleife $\mathcal{C}^{(2)}$ gleich

$$\begin{aligned}
 U^{(W,W)}(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) &= L_{12} I^{(1)} I^{(2)} \\
 &= I^{(1)} I^{(2)} \frac{\kappa^2 \mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}^{(1)}} d\mathbf{s}^{(1)} \cdot \oint_{\mathcal{C}^{(2)}} d\mathbf{s}^{(2)} \frac{1}{|\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)}|} \\
 &= \kappa I^{(1)} \oint_{\mathcal{C}^{(1)}} d\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{s}^{(1)}),
 \end{aligned} \tag{6.76}$$

6 Energie- und Impuls-Bilanz für elektromagnetische Felder

wobei $\mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{s}^{(1)})$ das von der Leiterschleife $\mathcal{C}^{(2)}$ generierte Vektorpotential am Ort $\mathbf{r} = \mathbf{s}^{(1)}$ bezeichnet:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa\mu_0}{4\pi} I^{(2)} \oint_{\mathcal{C}^{(2)}} d\mathbf{s}^{(2)} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}^{(2)}|}. \quad (6.77)$$

Mit dem Satz von Stokes folgt jetzt mit $\partial\mathcal{F}^{(1)} = \mathcal{C}^{(1)}$ die äquivalente Darstellung

$$\begin{aligned} U^{(W,W)}(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) &= \kappa I^{(1)} \oint_{\partial\mathcal{F}^{(1)}} d\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{s}^{(1)}) \\ &= \kappa I^{(1)} \int_{\mathcal{F}^{(1)}} d^2r' (\mathbf{n}' \wedge \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{r}')). \end{aligned} \quad (6.78)$$

Ist die Leiterschleife nun um den Ort \mathbf{r} zentriert, und ändert sich das äußere Magnetfeld $\mathbf{B}^{(2)} = \text{rot } \mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{r})$, das die stromtragende Schleife $\mathcal{C}^{(2)}$ auf der Skala des Durchmessers der Leiterschleife $\mathcal{C}^{(1)}$ generiert, als Funktion des Ortes nur sehr langsam, z.B. weil $\mathcal{C}^{(2)}$ weit entfernt von $\mathcal{C}^{(1)}$ ist, so liefert die für $\mathbf{r}' \in \mathcal{F}^{(1)}$ gültige Taylor-Reihenentwicklung der kartesischen Komponenten von $\mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{r}')$ um den Ort \mathbf{r}

$$\begin{aligned} a \in \{x, y, z\} \\ A_a^{(2)}(\mathbf{r}') &= A_a^{(2)}(\mathbf{r}) + [(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}] A_a^{(2)}(\mathbf{r}) + \dots \end{aligned} \quad (6.79)$$

Demnach (Summenkonvention beachten)

$$\begin{aligned} a, b, c \in \{x, y, z\} \\ U^{(W,W)}(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) &= \kappa I^{(1)} \int_{\mathcal{F}^{(1)}} d^2r' \varepsilon_{abc} n'_b \frac{\partial}{\partial r'_c} \left[A_a^{(2)}(\mathbf{r}) + [(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}] A_a^{(2)}(\mathbf{r}) + \dots \right] \\ &= \kappa I^{(1)} \underbrace{\int_{\mathcal{F}^{(1)}} d^2r' n'_b}_{=\mu_b^{(1)}} \varepsilon_{abc} \underbrace{\frac{\partial}{\partial r'_c} A_a^{(2)}(\mathbf{r})}_{=[\text{rot } \mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{r})]_b} = \mu_b^{(1)} B_b^{(2)}(\mathbf{r}) \\ &= \boldsymbol{\mu}^{(1)} \cdot \mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (6.80)$$

Der korrekte Ausdruck für die Wechselwirkungsenergie einer einen *konstanten Strom* tragenden Leiterschleife \mathcal{C} mit magnetischem Dipolmoment $\boldsymbol{\mu}$ am Ort \mathbf{r} mit einem äußeren magnetischen Induktionsfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ist demnach gegeben zu

$$U^{(W,W)} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (6.81)$$

6.5 Wechselwirkungsenergie für zwei stromtragende Leiterschleifen

Weshalb ist dann die Wechselwirkungsenergie eines *permanenten* magnetischen Dipols mit dem äußeren Feld gleich $-U^{(W,W)}$?

Wir beschreiben jetzt die Wechselwirkung zwischen zwei permanenten magnetischen Dipolen, in dem wir diese für $n = 1, 2$ jeweils durch eine einen Strom $I^{(n)}$ tragende Leiterschleife $\mathcal{C}^{(n)}$ modellieren, die einen *konstanten* magnetischen Fluss $\Phi^{(n)}$ durch die von $\mathcal{C}^{(n)} = \partial\mathcal{F}^{(n)}$ umrandete Fläche $\mathcal{F}^{(n)}$ erzeugt. Zugleich sollen die Selbstinduktivitäten L_{11} und L_{22} beide konstant sein.

Für einen derart *konstant* gehaltenen magnetischen Fluss (der Einfachheit halber ignorieren wir Kapazitätseffekte) gilt entsprechend unserer oben dargelegten Überlegung (6.70) für die Rate der Energieänderung bei einer Verschiebung von $\mathcal{C}^{(1)}$ relativ zu $\mathcal{C}^{(2)}$ entlang einer Trajektorie $\mathbf{r}(t)$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) \right]_{\Phi^{(n)}=\text{const}} &= - \left[\frac{d}{dt} U(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) \right]_{I^{(n)}=\text{const}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{m,m'=1}^2 I^{(m)} \left(\frac{d}{dt} L_{m,m'} \right) I^{(m')}. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Da wir die Selbstinduktivitäten L_{11} und L_{22} als konstant angenommen haben, folgt dann mit

$$\frac{d}{dt} L_{11} = 0 = \frac{d}{dt} L_{22} \quad (6.83)$$

und $L_{12} = L_{21}$ sofort der Ausdruck

$$\left[\frac{d}{dt} U^{(W,W)}(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) \right]_{\Phi^{(n)}=\text{const}} = -I^{(1)} I^{(2)} \frac{d}{dt} L_{12}. \quad (6.84)$$

Verschieben wir (bei konstant gehaltenen magnetischen Flüssen $\Phi^{(n)}$ durch die von $\mathcal{C}^{(n)}$ umrandeten Flächen $\mathcal{F}^{(n)}$) während einer Zeitspanne $\Delta t = t_{II} - t_I$ die Leiterschleife $\mathcal{C}^{(1)}$ entlang einer Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ vom Ort $\mathbf{r}^{(I)} = \mathbf{r}(t_I)$ relativ zur *festgehaltenen* Leiterschleife $\mathcal{C}^{(2)}$ hin zum Ort $\mathbf{r}^{(II)} = \mathbf{r}(t_{II})$, so folgt ein Energieunterschied, der allein durch die Ortsabhängigkeit der Gegeninduktivität L_{12}

6 Energie- und Impuls-Bilanz für elektromagnetische Felder

gegeben ist:

$$\begin{aligned}
 & \left[U^{(W,W)}(\mathcal{C}_{II}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) - U^{(W,W)}(\mathcal{C}_I^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) \right]_{\Phi^{(n)}=\text{const}} \quad (6.85) \\
 &= \int_{t_I}^{t_{II}} dt \left[\frac{d}{dt} U^{(W,W)}(\mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) \right]_{\Phi^{(n)}=\text{const}} \\
 &= -I^{(1)} I^{(II)} \left[L_{12}(\mathbf{r}^{(II)}) - L_{12}(\mathbf{r}^{(I)}) \right] \\
 &= - \left[U^{(W,W)}(\mathcal{C}_{II}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) - U^{(WW)}(\mathcal{C}_I^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}) \right]_{I^{(n)}=\text{const}} .
 \end{aligned}$$

Die Energiedifferenz bei einer Verschiebung von $\mathcal{C}^{(1)}$ relativ zu $\mathcal{C}^{(2)}$ bei *konstant gehaltenen magnetischen Flüssen* ist somit das *Negative* der Energiedifferenz bei einer entsprechenden Verschiebung bei *konstant gehaltenen Strömen*!

Die Wechselwirkungsenergie eines (kleinen) *permanenten* magnetischen Dipols $\boldsymbol{\mu}$ am Ort \mathbf{r} mit einem äußeren magnetischen Induktionsfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ist demnach

$$\left[U^{(\text{Dipol})} \right]_{\Phi=\text{const}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) . \quad (6.86)$$

Der Beweis für die Richtigkeit der Relation (5.54) für permanente Dipole ist damit erbracht.

7 Elektromagnetische Strahlung

Ausgangspunkt sind die Maxwell'schen Gleichungen (1.22) und (1.21). Mit der Darstellung des magnetischen Induktionsfeldes $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ durch das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ gemäß

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (7.1)$$

folgt jetzt aus (1.22)

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ &= \text{rot} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right] \\ &\equiv \text{rot} [\nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}, t)]. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Somit existiert ein Skalarpotential $\phi(\mathbf{r}, t)$ mit der Eigenschaft

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}, t) - \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (7.3)$$

Einsetzen dieser Darstellung für die elektromagnetischen Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ in (1.21) ergibt

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \kappa \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \\ \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \text{rot rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[-\nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}, t) - \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right] = \kappa \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (7.4)$$

7 Elektromagnetische Strahlung

und weiter

$$\begin{aligned}
 -\nabla_r^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \kappa \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (7.5) \\
 \left(\operatorname{rot} \operatorname{rot} + \kappa^2 \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla_r \phi(\mathbf{r}, t) &= \kappa \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t).
 \end{aligned}$$

Mit der für die kartesischen Komponenten A_a des Vektorfelds $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ gültigen Identität

$$[\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]_a = -\nabla_r^2 A_a(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial r_a} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad a \in \{x, y, z\} \quad (7.6)$$

folgt nun

$$\begin{aligned}
 \left(-\nabla_r^2 + \kappa^2 \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi(\mathbf{r}, t) - \kappa \frac{\partial}{\partial t} \left[\kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) + \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right] &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \\
 \left(-\nabla_r^2 + \kappa^2 \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A_a(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial r_a} \left[\kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) + \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right] &= \kappa \mu_0 j_a(\mathbf{r}, t) \\
 & \quad a \in \{x, y, z\}. \quad (7.7)
 \end{aligned}$$

Die Darstellung (7.1) und (7.3) der elektromagnetischen Felder durch Potentiale ist bekanntlich nicht eindeutig. Es gibt einen Eichfreiheitsgrad, der dazu verwendet werden kann, die Bestimmungsgleichungen für das Skalarpotential und das Vektorpotential zu vereinfachen. Einem Vorschlag des dänischen Physikers Ludvig Valentin Lorenz aus dem Jahr 1867 folgend wählt man für Strahlungsprobleme als Eichbedingung

$$\boxed{\kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) + \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \stackrel{!}{=} 0.} \quad (7.8)$$

Es folgt zur Bestimmung der elektromagnetischen Potentiale $\phi(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, mit der Abkürzung

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 \mu_0 \varepsilon_0}}} \quad (7.9)$$

7.1 Lösung der inhomogenen Wellengleichung in drei Dimensionen

für die Lichtgeschwindigkeit im freien Raum, der folgende Satz von inhomogenen Wellengleichungen

$$\begin{aligned} \left(-\nabla_r^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \\ \left(-\nabla_r^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_a(\mathbf{r}, t) &= \kappa \mu_0 j_a(\mathbf{r}, t), \quad a \in \{x, y, z\}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Bemerkung

Unabhängig von dem schottischen Physiker James Clerk Maxwell (1831–1879) gab der dänische Physiker Ludvig Valentin Lorenz (1829–1891) die Gleichungen für elektromagnetische Wellen und Licht an! Der Däne Lorenz wird oft verwechselt mit seinem viel jüngeren Zeitgenossen, dem Holländer Hendrik Lorentz (1853–1928), einem der Wegbereiter der Relativitätstheorie, von dem ebenfalls fundamentale Beiträge zur Elektrodynamik stammen. Die Lorenz-Eichung wurde lange Zeit wegen der Namensähnlichkeit fälschlicherweise dem Holländer Lorentz zugeschrieben, der Artikel [Ili08] geht näher darauf ein. Erwähnt sei, dass der deutsche Mathematiker Bernhard G. W. Riemann (1826–1866) in seinen Vorlesungen bereits ab 1861 die gleiche Eichbedingung verwendete.



Ludvig Valentin
Lorenz (1829–1891)

7.1 Lösung der inhomogenen Wellengleichung in drei Dimensionen

Wir betrachten die inhomogene Wellengleichung in $D = 3$ Dimensionen für eine skalare Funktion $u(\mathbf{r}, t)$ mit einer zeitlich und räumlich veränderlichen Inhomogenität $w(\mathbf{r}, t)$ als Quelle

$$\left(-\nabla_r^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(\mathbf{r}, t) = w(\mathbf{r}, t). \quad (7.11)$$

Zur Zeit $t = 0$ wird als *Anfangswert* vorgeschrieben

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} u(\mathbf{r}, t) &= a(\mathbf{r}) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{r}, t) &= b(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (7.12)$$

7 Elektromagnetische Strahlung

Da es sich um ein lineares Problem handelt, suchen wir die allgemeine Lösung aus speziellen Lösungen der inhomogenen Gleichung mit homogenen Anfangsbedingungen sowie aus speziellen Lösungen der homogenen Gleichung mit inhomogenen Anfangsbedingungen zu superponieren:

$$u(\mathbf{r}, t) = u^{(I)}(\mathbf{r}, t) + u^{(II)}(\mathbf{r}, t) + u^{(III)}(\mathbf{r}, t). \quad (7.13)$$

Hier sind $u^{(I)}(\mathbf{r}, t)$ und $u^{(II)}(\mathbf{r}, t)$ Lösungen der homogenen Wellengleichung mit inhomogenen Anfangsbedingungen, und zwar

$$\left(-\nabla_r^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u^{(I)}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (7.14)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} u^{(I)}(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} u^{(I)}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\left(-\nabla_r^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u^{(II)}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (7.15)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} u^{(II)}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} u^{(II)}(\mathbf{r}, t) = b(\mathbf{r}),$$

während $u^{(III)}(\mathbf{r}, t)$ eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung mit homogenen Anfangsbedingungen ist:

$$\left(-\nabla_r^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u^{(III)}(\mathbf{r}, t) = w(\mathbf{r}, t) \quad (7.16)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} u^{(III)}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} u^{(III)}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Wir betrachten als erstes die Aufgabe, die homogene Wellengleichung mit der inhomogenen Anfangsbedingung (7.15) zu lösen. Wir suchen *kugelsymmetrische* Lösungen

$$k(\mathbf{r}, t) = K(r, t) \quad (7.17)$$

7.1 Lösung der inhomogenen Wellengleichung in drei Dimensionen

von (7.15), die nur vom Abstand

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \quad (7.18)$$

zum Ursprung des Koordinatensystems abhängen sollen.

Eine elementare Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}}^2 k(\mathbf{r}, t) &= \sum_{a \in \{x, y, z\}} \frac{\partial^2}{\partial r_a^2} k(\mathbf{r}, t) & (7.19) \\ &= \sum_{a \in \{x, y, z\}} \frac{\partial}{\partial r_a} \left[\frac{\partial}{\partial r_a} K(r, t) \right] \\ &= \sum_{a \in \{x, y, z\}} \frac{\partial}{\partial r_a} \left[\frac{\partial K(r, t)}{\partial r} \frac{\partial |\mathbf{r}|}{\partial r_a} \right] \\ &= \sum_{a \in \{x, y, z\}} \frac{\partial}{\partial r_a} \left[\frac{\partial K(r, t)}{\partial r} \frac{r_a}{|\mathbf{r}|} \right] \\ &= \sum_{a \in \{x, y, z\}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r_a} \frac{\partial K(r, t)}{\partial r} \right) \frac{r_a}{|\mathbf{r}|} + \frac{\partial K(r, t)}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r_a} \left(\frac{r_a}{|\mathbf{r}|} \right) \right] \\ &= \sum_{a \in \{x, y, z\}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial K(r, t)}{\partial r} \frac{r_a}{|\mathbf{r}|} \right) \frac{r_a}{|\mathbf{r}|} + \frac{\partial K(r, t)}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r_a} \left(\frac{r_a}{|\mathbf{r}|} \right) \right] \\ &= \frac{\partial^2 K(r, t)}{\partial r^2} \underbrace{\sum_{a \in \{x, y, z\}} \frac{r_a^2}{|\mathbf{r}|^2}}_{=1} + \frac{\partial K(r, t)}{\partial r} \underbrace{\sum_{a \in \{x, y, z\}} \frac{|\mathbf{r}|^2 - r_a^2}{|\mathbf{r}|^3}}_{=\frac{2}{|\mathbf{r}|}} \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) K(r, t) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[K(r, t) + r \frac{\partial}{\partial r} K(r, t) \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} [r \cdot K(r, t)]. \end{aligned}$$

Nach dem Gesagten folgt

$$0 = \left(-\nabla_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) k(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r \cdot K(r, t)] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} K(r, t). \quad (7.20)$$

Dies ist äquivalent zu einer *eindimensionalen* Wellengleichung

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) [r \cdot K(r, t)] = 0. \quad (7.21)$$

7 Elektromagnetische Strahlung

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung in $D = 1$ Dimensionen lautet für $x \in \mathbb{R}$ mit zwei beliebigen (stückweise) zweifach differenzierbaren Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, wie man leicht bestätigt

$$r \cdot K(r, t) = f(r - ct) + g(r + ct). \quad (7.22)$$

Demnach ist

$$k(\mathbf{r}, t) = K(r, t) = \frac{f(r - ct)}{r} + \frac{g(r + ct)}{r} \quad (7.23)$$

eine spezielle Lösung der homogenen Wellengleichung in $D = 3$ Dimensionen. Die derart konstruierte Lösung beschreibt die Superposition einer vom Koordinatenursprung *auslaufenden* Kugelwelle $f(r - ct)/r$ mit einer hin zum Koordinatenursprung *einlaufenden* Kugelwelle $g(r + ct)/r$. Wir beschränken unsere Betrachtungen zunächst auf auslaufende Kugelwellen und setzen $g(x) \equiv 0$. Die auslaufende Kugelwelle

$$k(\mathbf{r}, t) = \frac{f(|\mathbf{r}| - ct)}{|\mathbf{r}|} \quad (7.24)$$

ist demnach eine Lösung der homogenen Wellengleichung in $D = 3$ Dimensionen.

Weitere Lösungen erhalten wir, in dem die Kugelwellen jetzt nicht vom Koordinatenursprung auslaufen, sondern von einem anderen Punkt $\mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$. Eine Überlagerung solcher auslaufenden Kugelwellen gemäß

$$u^{(II)}(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \psi(\mathbf{r}') \frac{f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - ct)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7.25)$$

mit einer beliebigen Gewichtsfunktion $\psi(\mathbf{r}')$ ist somit ebenfalls eine Lösung der homogenen Wellengleichung in $D = 3$ Dimensionen.

Die große Flexibilität bei der Wahl der Funktionen $\psi(\mathbf{r}')$ und $f(x)$ in (7.25) kann nun in geeigneter Weise ausgenutzt werden, eine Lösung der Wellengleichung an die gestellten Anfangswertbedingungen anzupassen. Dazu wählen wir jetzt als Gewichtsfunktion

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{b(\mathbf{r})}{4\pi c} \quad (7.26)$$

und wählen für die Funktion $f(x)$ die spezielle Form

$$f(x) = \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{für } -\varepsilon < x < \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.27)$$

7.1 Lösung der inhomogenen Wellengleichung in drei Dimensionen

Offensichtlich ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx = 1, \quad (7.28)$$

wobei für jede (stetige) Testfunktion $q(x)$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx q(x) \delta_{\varepsilon}(x) = q(0), \quad (7.29)$$

d.h. $\delta_{\varepsilon}(x)$ strebt für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen eine Dirac-Deltafunktion. Weshalb die Gewichtsfunktion $\psi(\mathbf{r})$ in (7.26) zur Konstruktion der Lösung $u^{(II)}(\mathbf{r}, t)$ von (7.15) hier proportional zum Anfangswert $b(\mathbf{r})$ in der angegebenen Form gewählt ist wird weiter unten klar werden.

Der Beitrag zum Integral (7.25) stammt bei der vorgeschlagenen Wahl für $f(x)$ gemäß (7.27) aus einer Kugelschale der Dicke 2ε und einem Radius ct um den Punkt \mathbf{r} als Mittelpunkt. Im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt dann, wenn wir noch $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ substituieren, als spezielle Lösung von (7.15)

$$u^{(II)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi c} \int d^3 r'' b(\mathbf{r} + \mathbf{r}'') \frac{\delta(|\mathbf{r}''| - ct)}{|\mathbf{r}''|}. \quad (7.30)$$

Es ist im vorliegenden Fall naheliegend, Kugelkoordinaten einzuführen:

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha < 2\pi & & r''_x &= r'' \cos \alpha \sin \vartheta \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi & & r''_y &= r'' \sin \alpha \sin \vartheta \\ 0 \leq r'' < \infty & & r''_z &= r'' \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Dann folgt mit

$$\mathbf{r}'' = r'' \mathbf{n} \quad (7.32)$$

und

$$\begin{aligned} n_x &= \cos \alpha \sin \vartheta \\ n_y &= \sin \alpha \sin \vartheta \\ n_z &= \cos \vartheta \\ d\Omega_{\mathbf{n}} &= d\vartheta \sin \vartheta d\alpha \end{aligned} \quad (7.33)$$

7 Elektromagnetische Strahlung

für die gesuchte Lösung der homogenen Wellengleichung die Darstellung

$$\begin{aligned}
 u^{(II)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi c} \int_0^\infty dr'' (r'')^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\alpha b(\mathbf{r} + r'' \mathbf{n}) \frac{\delta(r'' - ct)}{r''} \\
 &= \frac{1}{4\pi c} \cdot ct \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\alpha b(\mathbf{r} + \mathbf{n}ct) \\
 &= t \cdot \langle b \rangle_t.
 \end{aligned} \tag{7.34}$$

Das Integral ist proportional zum Mittelwert $\langle b \rangle_t$ der Funktion $b(\mathbf{r})$ über die Oberfläche einer Kugel mit Mittelpunkt \mathbf{r} und mit *zeitabhängigem* Radius ct :

$$\langle b(\mathbf{r}) \rangle_t = \int \frac{d\Omega_{\mathbf{n}}}{4\pi} b(\mathbf{r} + \mathbf{n}ct) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\alpha b(\mathbf{r} + \mathbf{n}ct). \tag{7.35}$$

Offensichtlich gilt für $t \rightarrow 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle b(\mathbf{r}) \rangle_t = b(\mathbf{r}). \tag{7.36}$$

Also ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} u^{(II)}(\mathbf{r}, t) = \lim_{t \rightarrow 0} [t \cdot \langle b(\mathbf{r}) \rangle_t] = 0 \tag{7.37}$$

und auch

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} u^{(II)}(\mathbf{r}, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} (t \cdot \langle b(\mathbf{r}) \rangle_t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\langle b(\mathbf{r}) \rangle_t + t \frac{\partial}{\partial t} \langle b(\mathbf{r}) \rangle_t \right] = b(\mathbf{r}). \tag{7.38}$$

In der Tat erhalten wir unter Verwendung des Satzes von Gauß für eine beliebige Gewichtsfunktion $\psi(\mathbf{r})$ die Identität

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(\mathbf{r}) \rangle_t &= \int \frac{d\Omega_{\mathbf{n}}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r} + \mathbf{n}ct) \\
 &= c \int \frac{d\Omega_{\mathbf{n}}}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r} + \mathbf{n}ct) \\
 &\stackrel{d^2 r'' = (ct)^2 d\Omega_{\mathbf{n}}}{=} \frac{c}{4\pi (ct)^2} \int_{|\mathbf{r}''|=ct} d^2 r'' \mathbf{n}'' \cdot \nabla_{\mathbf{r}''} \psi(\mathbf{r} + \mathbf{r}'') \\
 &= \frac{1}{4\pi ct^2} \int_{|\mathbf{r}'| < ct} d^3 r' \operatorname{div}' [\nabla_{\mathbf{r}'} \psi(\mathbf{r} + \mathbf{r}')] \\
 &= \frac{1}{4\pi ct^2} \underbrace{\int_{|\mathbf{r}'| < ct} d^3 r' \nabla_{\mathbf{r}'}^2 \psi(\mathbf{r} + \mathbf{r}')}_{\propto (ct)^3}.
 \end{aligned} \tag{7.39}$$

7.1 Lösung der inhomogenen Wellengleichung in drei Dimensionen

Da das Volumen des Integrationsgebietes $|\mathbf{r}'| < ct$ für $t \rightarrow 0$ proportional zu $(ct)^3$ gegen Null strebt, und wir annehmen wollen, dass $\nabla_{\mathbf{r}}^2 \psi(\mathbf{r})$ beschränkt bleibt, gilt somit

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(\mathbf{r}) \rangle_t = 0. \quad (7.40)$$

Damit ist bewiesen, dass die Funktion

$$u^{(II)}(\mathbf{r}, t) = t \cdot \langle b(\mathbf{r}) \rangle_t \quad (7.41)$$

eine Lösung der in (7.15) gestellten Anfangswertaufgabe ist.

Wir zeigen jetzt, dass die Funktion

$$u^{(I)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (t \cdot \langle a(\mathbf{r}) \rangle_t) \quad (7.42)$$

die in (7.14) gestellte Anfangswertaufgabe löst. Aufgrund der obigen Ausführungen ist die Funktion $t \cdot \langle a(\mathbf{r}) \rangle_t$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung in $D = 3$ Dimensionen

$$\left(-\nabla_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (t \cdot \langle a(\mathbf{r}) \rangle_t) = 0. \quad (7.43)$$

Dann ist auch die Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} (t \cdot \langle a(\mathbf{r}) \rangle_t)$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\left(-\nabla_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} (t \cdot \langle a(\mathbf{r}) \rangle_t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (t \cdot \langle a(\mathbf{r}) \rangle_t) = 0. \quad (7.44)$$

Die in (7.14) gestellte Anfangswertbedingung wird in der Tat erfüllt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} u^{(I)}(\mathbf{r}, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} (t \cdot \langle a(\mathbf{r}) \rangle_t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\langle a(\mathbf{r}) \rangle_t + t \frac{\partial}{\partial t} \langle a(\mathbf{r}) \rangle_t \right] = a(\mathbf{r}) \quad (7.45)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} u^{(I)}(\mathbf{r}, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (t \cdot \langle a(\mathbf{r}) \rangle_t) = c^2 \nabla_{\mathbf{r}}^2 \lim_{t \rightarrow 0} (t \cdot \langle a(\mathbf{r}) \rangle_t) = 0.$$

In der letzten Zeile wurde verwendet, dass $t \cdot \langle a(\mathbf{r}) \rangle_t$ der Gleichung (7.43) genügt.

Nach dem Gesagten ist die Funktion

$$u^{(h)}(\mathbf{r}, t) = u^{(I)}(\mathbf{r}, t) + u^{(II)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (t \cdot \langle a(\mathbf{r}) \rangle_t) + t \cdot \langle b(\mathbf{r}) \rangle_t \quad (7.46)$$

7 Elektromagnetische Strahlung

eine Lösung der homogenen Wellengleichung in $D = 3$ Dimensionen, welche die in (7.14) und (7.15) geforderten inhomogenen Anfangswertbedingungen erfüllt

$$\begin{aligned} \left(-\nabla_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u^{(h)}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} u^{(h)}(\mathbf{r}, t) &= a(\mathbf{r}) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} u^{(h)}(\mathbf{r}, t) &= b(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (7.47)$$

Wir suchen jetzt eine spezielle Lösung der inhomogenen Wellengleichung zu homogenen Anfangswerten. Dazu bemerken wir, dass die Funktionenschar

$$v(\mathbf{r}, t; \tau) = (t - \tau) \langle w(\mathbf{r}, \tau) \rangle_{t-\tau} \quad (7.48)$$

für jeden Wert des Parameters τ nach unseren obigen Ausführungen eine Lösung der homogenen Wellengleichung ist

$$\left(-\nabla_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) v(\mathbf{r}, t; \tau) = 0. \quad (7.49)$$

Jede Funktion $v(\mathbf{r}, t; \tau)$ genügt, wie man mit Hilfe der obigen Ausführungen für die Lösung $u^{(II)}(\mathbf{r}, t)$ leicht zeigt, dabei der Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \tau} v(\mathbf{r}, t; \tau) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{\partial}{\partial t} v(\mathbf{r}, t; \tau) &= w(\mathbf{r}, \tau). \end{aligned} \quad (7.50)$$

Wir betrachten nun, entsprechend dem Prinzip von Jean-Marie Constant Duhamel (1797–1872), das Integral über den Parameter τ :

$$u^{(III)}(\mathbf{r}, t) = c^2 \int_0^t d\tau v(\mathbf{r}, t; \tau). \quad (7.51)$$

7.1 Lösung der inhomogenen Wellengleichung in drei Dimensionen

Offensichtlich erfüllt $u^{(III)}(\mathbf{r}, t)$ homogene Anfangswertbedingungen zur Zeit $t = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} u^{(III)}(\mathbf{r}, t) &= 0 & (7.52) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} u^{(III)}(\mathbf{r}, t) &= c^2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau v(\mathbf{r}, t; \tau) \\ &= c^2 \lim_{t \rightarrow 0} \left[\underbrace{v(\mathbf{r}, t; t)}_{=0} + \int_0^t d\tau \frac{\partial}{\partial t} v(\mathbf{r}, t; \tau) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung nach der Zeit t erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^{(III)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t d\tau v(\mathbf{r}, t; \tau) & (7.53) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\underbrace{v(\mathbf{r}, t; t)}_{=0} + \int_0^t d\tau \frac{\partial}{\partial t} v(\mathbf{r}, t; \tau) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \frac{\partial}{\partial t} v(\mathbf{r}, t; \tau) \\ &= \underbrace{\lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\partial}{\partial t} v(\mathbf{r}, t; \tau)}_{=w(\mathbf{r}, t)} + \int_0^t d\tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(\mathbf{r}, t; \tau). \end{aligned}$$

Die Funktion $v(\mathbf{r}, t; \tau)$ ist aber Lösung der homogenen Wellengleichung, das heißt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v(\mathbf{r}, t; \tau) = c^2 \nabla_{\mathbf{r}}^2 v(\mathbf{r}, t; \tau). \quad (7.54)$$

Damit folgt jetzt

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^{(III)}(\mathbf{r}, t) &= w(\mathbf{r}, t) + \nabla_{\mathbf{r}}^2 \left[\underbrace{c^2 \int_0^t d\tau v(\mathbf{r}, t; \tau)}_{=u^{(III)}(\mathbf{r}, t)} \right] \\ &= w(\mathbf{r}, t) + \nabla_{\mathbf{r}}^2 u^{(III)}(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

oder nach einer elementaren Umstellung

$$\left(-\nabla_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u^{(III)}(\mathbf{r}, t) = w(\mathbf{r}, t), \quad (7.55)$$

7 Elektromagnetische Strahlung

was zu zeigen war.

Die gefundene Lösung (7.51) der inhomogenen Wellengleichung zu homogenen Anfangswertbedingungen schreiben wir jetzt noch um zu

$$\begin{aligned}
 u^{(III)}(\mathbf{r}, t) &= c^2 \int_0^t d\tau v(\mathbf{r}, t; \tau) \\
 &= c^2 \int_0^t d\tau (t - \tau) \langle w(\mathbf{r}, \tau) \rangle_{t-\tau} \\
 &= c^2 \int_0^t d\tau (t - \tau) \int \frac{d\Omega_{\mathbf{n}}}{4\pi} w[\mathbf{r} + \mathbf{n}c(t - \tau), \tau].
 \end{aligned} \tag{7.56}$$

Mit der Substitution

$$\begin{aligned}
 r'' &= c(t - \tau) \\
 dr'' &= -cd\tau
 \end{aligned} \tag{7.57}$$

folgt dann die gesuchte spezielle Lösung der inhomogenen Wellengleichung zu homogenen Anfangswerten (entsprechend einer Überlagerung von auslaufenden Kugelwellen) zu

$$\begin{aligned}
 u^{(III)}(\mathbf{r}, t) &= \int_0^{ct} dr'' r'' \int \frac{d\Omega_{\mathbf{n}}}{4\pi} w\left(\mathbf{r} + \mathbf{n}r'', t - \frac{r''}{c}\right) \\
 &= \int_0^{ct} dr'' (r'')^2 \int \frac{d\Omega_{\mathbf{n}}}{4\pi} \frac{w\left(\mathbf{r} + \mathbf{n}r'', t - \frac{r''}{c}\right)}{r''} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{r}''| < ct} d^3r'' \frac{w\left(\mathbf{r} + \mathbf{r}'', t - \frac{|\mathbf{r}''|}{c}\right)}{|\mathbf{r}''|} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < ct} d^3r' \frac{w\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.
 \end{aligned} \tag{7.58}$$

Anders als bei der Lösung der Poisson-Gleichung trägt jedes um den Punkt \mathbf{r}' zentrierte Volumenelement d^3r' , in dem die Quelle $w(\mathbf{r}', t')$ von Null verschieden ist, zum Wert des Integrals zu einem *retardierten* Zeitpunkt $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ bei. Die eintretende Verzögerung ist die Laufzeit $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$, die ein Signal benötigt, um vom Punkt \mathbf{r}' zum Punkt \mathbf{r} zu gelangen. Im freien Raum ist die zugehörige Signalgeschwindigkeit gleich der *Lichtgeschwindigkeit*

$$c = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 \varepsilon_0 \mu_0}}. \tag{7.59}$$

7.1 Lösung der inhomogenen Wellengleichung in drei Dimensionen

Insbesondere tragen nur Punkte \mathbf{r}' *innerhalb* des Horizonts $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = ct$ zum Integral bei. Die zum Zeitpunkt t *hinter* dem Horizont $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = ct$ liegenden Punkte, für die gilt $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > ct$, tragen nicht zum Integral bei, selbst wenn die Quelle $w(\mathbf{r}'; t')$ dort von Null verschieden ist. Da der Horizont proportional zu t wächst, können Punkte \mathbf{r}' , die zum Zeitpunkt t_1 hinter dem Horizont liegen, zu einem späteren Zeitpunkt $t_2 > t_1$ innerhalb des Horizonts liegen.

Die entsprechenden Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen (7.10) mit homogenen Anfangswerten für die elektromagnetischen Potentiale in $D = 3$ Dimensionen sind die sog. *retardierten* Potentiale

$$\boxed{\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|<ct} d^3r' \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ A_a(\mathbf{r}, t) &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|<ct} d^3r' \frac{j_a\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad a \in \{x, y, z\}.\end{aligned}} \quad (7.60)$$

Beispiel

Um den Retardierungseffekt zu veranschaulichen, betrachten wir eine leitende Kugel mit Radius a , die zur Zeit $t = 0$ plötzlich mit einer Ladung q aufgeladen wird, so dass die Flächenladungsdichte

$$\omega_0^{(2)} = \frac{q}{4\pi a^2} \quad (7.61)$$

konstant bleibt. Die zugeordnete Ladungsdichte in $D = 3$ Dimensionen ist demnach

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \omega_0^{(2)} \delta(|\mathbf{r}| - a) \Theta(t). \quad (7.62)$$

Das skalare Potential an einem Ort \mathbf{r} *außerhalb* der Kugel ist dann gemäß (7.60) gegeben zu

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}| > a & \quad (7.63) \\ \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{\omega_0^{(2)}}{4\pi\epsilon_0} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|<ct} d^3r' \frac{\delta(|\mathbf{r}'| - a) \Theta\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.\end{aligned}$$

Wir führen Kugelkoordinaten ein, so dass die Polarachse den Mittelpunkt der Kugel mit dem Punkt \mathbf{r} verbindet. Den Ursprung des Koordinatensystems legen

7 Elektromagnetische Strahlung

wir in den Kugelmittelpunkt. Dann gilt auf der Kugeloberfläche

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \varphi < 2\pi & (7.64) \\
 0 &\leq \vartheta \leq \pi \\
 r'_x &= a \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\
 r'_y &= a \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\
 r'_z &= a \cos(\vartheta) \\
 |\mathbf{r}'| &= a \\
 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \sqrt{|\mathbf{r}|^2 + a^2 - 2a|\mathbf{r}|\cos(\vartheta)} \equiv R(\vartheta).
 \end{aligned}$$

Folglich ist wegen $a < |\mathbf{r}|$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\vartheta \rightarrow 0} R(\vartheta) &= |\mathbf{r}| - a & (7.65) \\
 \lim_{\vartheta \rightarrow \pi} R(\vartheta) &= |\mathbf{r}| + a.
 \end{aligned}$$

Wir beobachten

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\vartheta} R(\vartheta) &= \frac{a|\mathbf{r}|\sin(\vartheta)}{R(\vartheta)} & (7.66) \\
 \sin(\vartheta) d\vartheta &= \frac{R}{a|\mathbf{r}|} dR.
 \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{\omega_0^{(2)}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr' (r')^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \left[\frac{\delta(|\mathbf{r}'| - a) \Theta\left(t - \frac{R(\vartheta)}{c}\right)}{R(\vartheta)} \right] \\
 &= \frac{\omega_0^{(2)}}{4\pi\epsilon_0} 2\pi a^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin(\vartheta) \frac{\Theta\left(t - \frac{R(\vartheta)}{c}\right)}{R(\vartheta)} \\
 &= \frac{\omega_0^{(2)}}{4\pi\epsilon_0} 2\pi a^2 \int_{|\mathbf{r}-a}^{|\mathbf{r}+a} dR \frac{R}{a|\mathbf{r}|} \frac{\Theta\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} \\
 &= \frac{\omega_0^{(2)}}{2\epsilon_0} \frac{a}{|\mathbf{r}|} \int_{|\mathbf{r}-a}^{|\mathbf{r}+a} dR \Theta\left(t - \frac{R}{c}\right). & (7.67)
 \end{aligned}$$

Schließlich folgt

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } ct < |\mathbf{r}| - a, \\ \frac{\omega_0^{(2)}}{2\varepsilon_0} \frac{a(ct - |\mathbf{r}| + a)}{|\mathbf{r}|} & \text{für } |\mathbf{r}| - a < ct < |\mathbf{r}| + a, \\ \frac{\omega_0^{(2)}}{\varepsilon_0} \frac{a^2}{|\mathbf{r}|} & \text{für } |\mathbf{r}| + a < ct. \end{cases} \quad (7.68)$$

Zu einer früheren Zeit $t < (|\mathbf{r}| - a)/c$ liegt die Kugel hinter dem Horizont, das Potential ist Null. Im Zeitintervall $(|\mathbf{r}| - a)/c < t < (|\mathbf{r}| + a)/c$ wächst die Kugeloberfläche in den Horizont hinein, das Potential ist während dieser Zeitspanne zeitabhängig. Zur späteren Zeit $t > (|\mathbf{r}| + a)/c$ liegt die gesamte Kugel *innerhalb* des Horizonts, das Potential ist dann identisch mit dem Resultat der Elektrostatik, d.h. es ist identisch mit dem Coulomb-Potential einer am Kugelmittelpunkt positionierten Punktladung $q = \omega_0^{(2)} 4\pi a^2$.

7.2 Hertzsche Superpotentiale

Wir verwenden SI-Einheiten, $\kappa = 1$. Die Eichbedingung von Lorenz (7.8)

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (7.69)$$

erinnert an die bekannte Kontinuitätsgleichung, die ja gemäß

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (7.70)$$

die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ und die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ in jedem um den Ort \mathbf{r} zentrierten Volumenelement d^3r verknüpft. Wir schreiben jetzt mit

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (7.71)$$

für die Maxwell'schen Gleichungen (1.21)

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (7.72)$$

7 Elektromagnetische Strahlung

Diese Darstellung von $\rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ durch *Strom-Ladungs-Potentiale* $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ genügt manifest der Kontinuitätsgleichung.



Heinrich Rudolf
Hertz (1857–1894)

In Analogie hierzu definieren wir (einem Gedanken von Heinrich Hertz folgend) zwei Vektorfelder $\mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t)$, so dass gilt

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \phi(\mathbf{r}, t) &= -\operatorname{div} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) \\ \frac{1}{\mu_0} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\operatorname{rot} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\tag{7.73}$$

Diese Darstellung der elektromagnetischen Potentiale $\phi(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ durch Hertzsche *Superpotentiale* $\mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t)$ genügt manifest der Lorenz-Eichung. Für die elektromagnetischen Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ folgt dann die Darstellung

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla_{\mathbf{r}} \operatorname{div} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[-\operatorname{rot} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) \right].\end{aligned}\tag{7.74}$$

Die Idee, die elektromagnetischen Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ durch Vektorfelder $\mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t)$ darzustellen, geht auf Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894) zurück. Dass diese Darstellung für Antennenprobleme sehr vorteilhaft sein kann, wird im Folgenden klar werden.

Somit lauten die Maxwell'schen Gleichungen (1.21) jetzt ausgedrückt durch die

7.2 Hertzsche Superpotentiale

Superpotentiale $\mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) & \qquad \qquad \qquad (7.75) \\ &= \operatorname{div} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla_{\mathbf{r}} \operatorname{div} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[-\operatorname{rot} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) \right] \right\} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) & \\ &= \operatorname{rot} \left[-\mu_0 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) \right] \\ &\quad - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla_{\mathbf{r}} \operatorname{div} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[-\operatorname{rot} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) \right] \right\} \\ &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Elementare Umstellungen führen nun mit der für die kartesischen Komponenten $Z_a^{(e,m)}(\mathbf{r}, t)$ des Vektorfelds $\mathbf{Z}^{(e,m)}(\mathbf{r}, t)$ gültigen Umformung

$$a \in \{x, y, z\} \qquad (7.76)$$

$$\begin{aligned} \left[\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Z}^{(e,m)}(\mathbf{r}, t) \right]_a &= -\nabla_{\mathbf{r}}^2 Z_a^{(e,m)}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial r_a} \operatorname{div} \mathbf{Z}^{(e,m)}(\mathbf{r}, t) \\ \operatorname{div} \nabla_{\mathbf{r}} \left[\operatorname{div} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) \right] &= \nabla_{\mathbf{r}}^2 \operatorname{div} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{div} \nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

sowie der Berücksichtigung der bekannten Identitäten

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) = 0 \qquad (7.77)$$

$$\operatorname{rot} \nabla_{\mathbf{r}} \left[\operatorname{div} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) \right] = \mathbf{0}$$

auf einen zu den Maxwell'schen Gleichungen äquivalenten Satz von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[\nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) \right] &= \rho(\mathbf{r}, t) \\ \operatorname{rot} \left[-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) \right] & \qquad \qquad (7.78) \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left[\underbrace{\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) - \nabla_{\mathbf{r}} \operatorname{div} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t)}_{=-\nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t)} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) \right] &= \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

7 Elektromagnetische Strahlung

Weitere elementare Umformungen ergeben

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{rot} \left[-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) \right] \\
 &= \operatorname{rot} \left[\nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) - \nabla_{\mathbf{r}} \operatorname{div} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) \right] \\
 &= \operatorname{rot} \left[\nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) \right],
 \end{aligned} \tag{7.79}$$

denn $\operatorname{rot} \nabla_{\mathbf{r}} [\operatorname{div} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t)] \equiv 0$. Wir schreiben jetzt

$$\begin{aligned}
 \rho(\mathbf{r}, t) &= -\operatorname{div} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \\
 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) + \operatorname{rot} \mu(\mathbf{r}, t) \\
 \mu_0 \varepsilon_0 &= \frac{1}{c^2}.
 \end{aligned} \tag{7.80}$$

Dann folgt

$$\left(-\nabla_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \tag{7.81}$$

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{rot} \left[\nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) \right] \\
 &+ \frac{\partial}{\partial t} \left[-\nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) \right] = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t).
 \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
 a \in \{x, y, z\} \\
 \left(-\nabla_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) Z_a^{(e)}(\mathbf{r}, t) &= p_a(\mathbf{r}, t) \\
 \left(-\nabla_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) Z_a^{(m)}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_a(\mathbf{r}, t).
 \end{aligned} \tag{7.82}$$

Die Hertzschen Vektorfelder $\mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t)$ genügen somit der inhomogenen Wellengleichung in $D = 3$ Dimensionen. Die retardierten Lösungen zu homogenen Anfangswerten lauten dann

$$\begin{aligned}
 a &\in \{x, y, z\} & (7.83) \\
 Z_a^{(e)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| < ct} d^3r' \frac{p_a\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
 Z_a^{(m)}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| < ct} d^3r' \frac{\mu_a\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.
 \end{aligned}$$

Auf den ersten Blick ist die Frage berechtigt, weshalb es vorteilhaft sein soll, von vier Potentialfeldern $\phi(\mathbf{r}, t)$ und $A_a(\mathbf{r}, t)$ zu sechs Feldern $Z_a^{(e)}(\mathbf{r}, t)$ und $Z_a^{(m)}(\mathbf{r}, t)$ überzugehen, aus denen sich die elektromagnetischen Felder $E_a(\mathbf{r}, t)$ und $B_a(\mathbf{r}, t)$ über komplizierte Linearkombinationen von zweiten Ableitungen der Hertzschen Superpotentiale, siehe (7.74), darstellen lassen. Es gibt aber eine Vielzahl von Problemen mit intrinsischer Symmetrie, so dass nur drei oder weniger Komponenten der sechs Felder $Z_a^{(e)}(\mathbf{r}, t)$ und $Z_a^{(m)}(\mathbf{r}, t)$ ungleich Null sind. Immer wenn sich die Ladungs- bzw. Stromverteilung nur über einen im Vergleich zur Wellenlänge kleinen Bereich erstreckt, ist die Darstellung der elektromagnetischen Felder durch die Hertzschen Superpotentiale sehr zweckmäßig.

7.3 Der Hertzsche Dipol

Wir betrachten einen zeitlich veränderlichen *elektrischen* Dipol $\mathbf{p}(t)$, der permanent am Ort $\mathbf{r}^{(0)}$ lokalisiert sein soll,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{p}(t) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}) & (7.84) \\
 \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}, t) &\equiv \mathbf{0},
 \end{aligned}$$

7 Elektromagnetische Strahlung

wobei $\mathbf{p}(t) \equiv \mathbf{0}$ für $t < 0$. Dementsprechend folgt dann durch Einsetzen in (7.83)

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| < ct} d^3r' \frac{\mathbf{p}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}^{(0)})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{p}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|} \\ \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) &\equiv \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (7.85)$$

Liegt die Position \mathbf{r} eines Beobachters hinter dem Horizont, so muss dieser eine Zeitspanne $|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|/c$ warten, bis er ein Signal registrieren kann, das von $\mathbf{r}^{(0)}$ ausgesendet wurde.

Wegen $\mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{0}$ vereinfacht sich die Berechnung der elektromagnetischen Potentiale $\phi(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ erheblich. Eine elementare Rechnung führt zu folgenden Ergebnissen

$$\begin{aligned}\mathbf{n}^{(0)} &= \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|} \\ \phi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{p}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}^{(0)} \cdot \mathbf{p}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|^2} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{n}^{(0)} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{p}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|} \right] \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\frac{d}{dt} \mathbf{p}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}.\end{aligned}\quad (7.86)$$

Hieraus folgt dann

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{n}^{(0)} \wedge \frac{d}{dt} \mathbf{p}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|^2} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{n}^{(0)} \wedge \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{p}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|} \right]\end{aligned}\quad (7.87)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3 \left[\mathbf{n}^{(0)} \cdot \mathbf{p} \left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right) \right] \mathbf{n}^{(0)} - \mathbf{p} \left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|^3} \right. \\
 &\quad + \frac{1}{c} \frac{3 \left[\mathbf{n}^{(0)} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{p} \left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right) \right] \mathbf{n}^{(0)} - \frac{d}{dt}\mathbf{p} \left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|^2} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{c^2} \frac{\left[\mathbf{n}^{(0)} \cdot \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{p} \left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right) \right] \mathbf{n}^{(0)} - \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{p} \left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|} \right].
 \end{aligned} \tag{7.88}$$

Wir betrachten jetzt ein zeitharmonisch veränderliches elektrisches Dipolmoment

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^{(0)} \cos(\omega t). \tag{7.89}$$

Die Phasenlage und auch die Stärke der elektromagnetischen Felder sind verschieden, je nachdem man sich in der Nahzone $|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}| \ll \frac{c}{\omega}$ oder der Fernzone $|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}| \gg \frac{c}{\omega}$ befindet. In der Nahzone spielt die Retardierung kaum eine Rolle. Das elektrische Feld gleicht im Wesentlichen dem eines elektrostatischen Dipols, wobei das Dipolmoment allerdings zeitlich veränderlich ist, so dass auch eine kleine Komponente des magnetischen Induktionsfeldes existiert. In der Fernzone dagegen ist $|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}| \gg \frac{c}{\omega}$, so dass dort in guter Näherung gilt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{O}(\text{small}) \tag{7.90}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{O}(\text{small})$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\left[\mathbf{n}^{(0)} \cdot \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{p} \left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right) \right] \mathbf{n}^{(0)} - \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{p} \left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{n}^{(0)} \wedge \left[\mathbf{n}^{(0)} \wedge \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{p} \left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right) \right]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \mathbf{n}^{(0)} \wedge \mathbf{E}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t).$$

In jeder Richtung $\mathbf{n}^{(0)}$ sind die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ in der Fernzone eines elektrischen Hertzschen Dipols vom Ort $\mathbf{r}^{(0)}$ der Quelle auslaufende *transversale*

7 Elektromagnetische Strahlung

Kugelwellen:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}| &\gg \frac{c}{\omega} \\ \mathbf{E}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}^{(0)} &= 0 = \mathbf{B}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}^{(0)}. \end{aligned} \quad (7.91)$$

Bemerkung

In der Fernzone gilt auf den ersten Blick

$$\text{div } \mathbf{E}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{O}\left(\frac{\omega^2}{c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|^2}\right) \neq 0. \quad (7.92)$$

Dies bedeutet natürlich nicht, dass sich in der Fernzone $|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}| \gg \frac{c}{\omega}$ irgendwelche elektrischen Ladungen befinden, sondern nur, dass die vernachlässigten Feldkomponenten doch noch eine Rolle spielen, so dass tatsächlich für $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}^{(0)}$ überall gilt

$$\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (7.93)$$

Abgestrahlte Leistung beim Hertzschen Dipol

Wir stellen in der Fernfeldzone einen Detektor mit einer Querschnittsfläche

$$df = d^2r \mathbf{n}$$

auf, der sich relativ zur Position eines strahlenden Hertzschen Dipols (Sender) *in Ruhe* befinden soll. Der Energiefluss pro Flächeneinheit, mit der die dem Sender zugewandte Seite des Detektor die zufließende Energie pro Zeiteinheit und Flächeneinheit df registriert, ist dann durch den Poynting-Vektor bestimmt zu

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dt df} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} \cdot (-\mathbf{n}), \quad (7.94)$$

wobei \mathbf{n} die nach außen orientierte (d.h. die dem Sender zugewandte) Flächennormale der Detektorfläche df bezeichnet.

Bemerkung

Würde sich der Detektor im freien Raum mit (nicht relativistischer) Geschwindigkeit \mathbf{v} relativ zum Sender bewegen, so wäre der Energiefluss gegeben zu

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dt df} = [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \wedge \left[\frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} - \mathbf{v} \wedge \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right] \cdot (-\mathbf{n}). \quad (7.95)$$

Larmor-Formel

Ohne großen Fehler für $\frac{d^2\mathcal{E}}{dt df}$ dürfen in der Fernzone $|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}| \gg \frac{c}{\omega}$ anstelle der exakten Lösungen für die elektromagnetischen Felder des Hertzschen Dipols die asymptotisch führenden Fernfelder eingesetzt werden

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} &= \mathbf{E}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t) \wedge \frac{\mathbf{B}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} + \mathcal{O}(\text{small}) \\ &= \frac{|\mathbf{E}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t)|^2}{\mu_0 c} \mathbf{n}^{(0)} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sin^2(\vartheta)}{4\pi c^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|^2} \left[\frac{d^2}{dt^2} p \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right) \right]^2 \mathbf{n}^{(0)}. \end{aligned} \quad (7.96)$$

Hier bezeichnet ϑ den Winkel zwischen der Polarachse, die wir in Richtung des Dipolmoments $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z$ legen, und dem Einheitsvektor $\mathbf{n}^{(0)}$. Orientieren wir die Targetfläche df so, dass gilt

$$\mathbf{n}^{(0)} \cdot (-\mathbf{n}) = 1, \quad (7.97)$$

so folgt, dass ein Flächenelement der Kugel

$$df = d^2 r \mathbf{n}^{(0)} = d\Omega |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|^2 \mathbf{n}^{(0)} \quad (7.98)$$

(mit der Position $\mathbf{r}^{(0)}$ als Mittelpunkt) nun unter dem Raumwinkelement

$$d\Omega = d\vartheta \sin(\vartheta) d\varphi \quad (7.99)$$

pro Zeiteinheit eine Energiemenge

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dt df} \cdot df = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sin^2(\vartheta)}{c^3} \left[\frac{d^2}{dt^2} p \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right) \right]^2 \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (7.100)$$

7 Elektromagnetische Strahlung

registriert. Die Intensität der abgestrahlten Wellen ist in der Äquatorialebene $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ des Dipols am größten.

Das Integral über die Oberfläche der Kugel mit Radius $|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}| = \text{const} \gg \frac{c}{\omega}$ ergibt dann die insgesamt nach allen Richtungen abgestrahlte Leistung eines *elektrischen* Hertzschen Dipols zu

$$\begin{aligned} P^{(\text{el})} &= \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin^2(\vartheta)}{c^3} \left[\frac{d^2}{dt^2} p \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right) \right]^2 \\ &= \frac{1}{4\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin^3(\vartheta)}_{=\frac{2}{3}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3} \left[\frac{d^2}{dt^2} p \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right) \right]^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\boxed{P^{(\text{el})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \left[\frac{d^2}{dt^2} p \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right) \right]^2.} \quad (7.101)$$

Diese Relation ist als *Larmor-Formel* bekannt. Für harmonisch schwingende Dipole ist die Strahlungsleistung proportional zur vierten Potenz der Frequenz und zum Quadrat des Dipolmomentes.

Der magnetische Hertzsche Dipol

Ein magnetischer Dipol wird z.B. durch eine kleine stromtragende Leiterschleife realisiert. Wir betrachten jetzt einen zeitlich veränderlichen *magnetischen* Dipol $\boldsymbol{\mu}(t)$, der permanent um den Ort $\mathbf{r}^{(0)}$ zentriert sein soll,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}, t) &= \boldsymbol{\mu}(t) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}) \\ \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) &\equiv \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (7.102)$$

wobei $\boldsymbol{\mu}(t) \equiv \mathbf{0}$ für $t < 0$. Dementsprechend folgt dann durch Einsetzen in (7.83)

$$\mathbf{Z}^{(e)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (7.103)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|<ct} d^3r' \frac{\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}. \end{aligned}$$

Eine (längere) Rechnung gemäß (7.74) ergibt für die abgestrahlten elektromagnetischen Felder eines magnetischen Hertzschen Dipols das Ergebnis

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}^{(0)} &= \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|} \\
 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) \tag{7.104} \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \left[\frac{\mathbf{n}^{(0)} \wedge \boldsymbol{\mu} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|^2} + \frac{\mathbf{n}^{(0)} \wedge \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mu} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right)}{c |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|} \right] \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3 \left[\mathbf{n}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\mu} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right) \right] \mathbf{n}^{(0)} - \boldsymbol{\mu} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|^3} \right. \\
 &\quad + \frac{3 \left[\mathbf{n}^{(0)} \cdot \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mu} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right) \right] \mathbf{n}^{(0)} - \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mu} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right)}{c |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|^2} \\
 &\quad \left. + \frac{\mathbf{n}^{(0)} \wedge \left[\mathbf{n}^{(0)} \wedge \frac{d^2}{dt^2} \boldsymbol{\mu} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right) \right]}{c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{Z}^{(m)}(\mathbf{r}, t) \tag{7.105} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{n}^{(0)} \wedge \frac{d}{dt} \boldsymbol{\mu} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|^2} + \frac{\mathbf{n}^{(0)} \wedge \frac{d^2}{dt^2} \boldsymbol{\mu} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right)}{c |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|} \right].
 \end{aligned}$$

Für ein zeitharmonisch veränderliches magnetisches Dipolmoment

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \boldsymbol{\mu}^{(0)} \cos(\omega t) \tag{7.106}$$

gilt, dass die Phasenlage und auch die Stärke der elektromagnetischen Felder unterschiedlich sind, je nachdem ob man sich in der Nahzone $|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}| \ll \frac{c}{\omega}$ oder der Fernzone $|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}| \gg \frac{c}{\omega}$ befindet. In der Nahzone spielt die Retardierung kaum eine Rolle. Das magnetische Induktionsfeld gleicht im Wesentlichen dem eines magnetischen Dipols, wobei das Dipolmoment allerdings zeitlich veränderlich ist, so dass auch eine kleine Komponente des elektrischen Feldes existiert. In der Fernzone

7 Elektromagnetische Strahlung

dagegen ist $|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}| \gg \frac{c}{\omega}$, so dass dort in guter Näherung gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{O}(\text{small}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{O}(\text{small}) \\ \mathbf{E}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{n}^{(0)} \wedge \frac{d^2 \boldsymbol{\mu}}{dt^2} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right)}{c |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|} \\ \mathbf{B}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \mathbf{n}^{(0)} \wedge \mathbf{E}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (7.107)$$

In jeder Richtung $\mathbf{n}^{(0)}$ sind die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ in der Fernzone eines magnetischen Dipols vom Ort $\mathbf{r}^{(0)}$ der Quelle auslaufende *transversale* Kugelwellen:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}| &\gg \frac{c}{\omega} \\ \mathbf{E}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}^{(0)} &= 0 = \mathbf{B}^{(\text{fern})}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}^{(0)}. \end{aligned} \quad (7.108)$$

In völliger Analogie zum Fall des elektrischen Hertzschen Dipols berechnet man für die abgestrahlte Leistung eines *magnetischen* Hertzschen Dipols

$$P^{(\text{mag})} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2}{3c^3} \left[\frac{d^2 \boldsymbol{\mu}}{dt^2} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right) \right]^2. \quad (7.109)$$

7.4 Kurze Stabantenne als elektrischer Hertzscher Dipol

Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems in die Mitte eines zylinderförmigen leitenden Drahtes der Länge l und orientieren die Zylinderachse entlang der Richtung \mathbf{e}_z . Das Intervall $-\frac{l}{2} < r_z < \frac{l}{2}$ entspricht dann der Zylinderachse. Der Leiter erstreckt sich somit über das Gebiet

$$\Omega = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \left[-\frac{l}{2} < r_z < \frac{l}{2} \right] \wedge \left[\sqrt{r_x^2 + r_y^2} < a \right] \right\}. \quad (7.110)$$

Die Stromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = j(r_z, t) \mathbf{e}_z \quad (7.111)$$

7.4 Kurze Stabantenne als elektrischer Hertzscher Dipol

über den Querschnitt am Ort r_z des Drahtes $|\mathcal{F}(r_z)| = \pi a^2$ des Drahtes sei konstant, hängt aber wie bei einer *stehenden Welle* von der Zeit t und vom Ort r_z auf der Zylinderachse ab, wobei an beiden Enden des Drahts der Strom gleich Null ist:

$$-\frac{l}{2} < r_z < \frac{l}{2} \tag{7.112}$$

$$I(r_z, t) = \int_{\mathcal{F}(r_z)} d^2r' \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) = \pi a^2 j(r_z, t) = I_0 \cos\left(\frac{\pi}{l} r_z\right) \sin(\omega t).$$

Die Kontinuitätsgleichung besagt

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(r_z, t) + \frac{\partial}{\partial r_z} j(r_z, t) = 0, \tag{7.113}$$

also folgt für die Ladungsdichte $\rho(r_z, t)$ entlang der Zylinderachse der Ausdruck

$$-\frac{l}{2} < r_z < \frac{l}{2} \tag{7.114}$$

$$\rho(r_z, t) = -\frac{I_0}{\pi a^2} \frac{\pi}{l} \sin\left(\frac{\pi}{l} r_z\right) \frac{\cos(\omega t)}{\omega}.$$

Für $t = 0$ ist $\rho(r_z, t)$ am oberen Ende $r_z = \frac{l}{2}$ des Drahtes maximal, verschwindet bei $r_z = 0$, und wird am unteren Ende $r_z = -\frac{l}{2}$ minimal. Zur späteren Zeit $t = \frac{\pi}{\omega}$ ist es umgekehrt wie im Fall $t = 0$, d.h. $\rho(r_z, t)$ ist am oberen Ende $r_z = \frac{l}{2}$ des Drahtes minimal, verschwindet bei $r_z = 0$, und wird am unteren Ende $r_z = -\frac{l}{2}$ maximal. Dazwischen, zum Zeitpunkt $t = \frac{\pi}{2\omega}$, ist die Ladungsdichte überall auf dem Draht gleich Null.

Das Dipolmoment der Anordnung ist dann gegeben durch das erste Moment der

7 Elektromagnetische Strahlung

Ladungsdichte

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}(t) &= p(t) \mathbf{e}_z & (7.115) \\
 p(t) &= \int_{\Omega} d^3r r_z \rho(r_z, t) \\
 &= \pi a^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dr_z r_z \rho(r_z, t) \\
 &= I_0 \left[\underbrace{-\frac{\pi}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dr_z r_z \sin\left(\frac{\pi}{l} r_z\right)}_{=\frac{2l}{\pi}} \right] \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \\
 &= -\frac{2I_0 l}{\pi \omega} \cos(\omega t).
 \end{aligned}$$

Wellenlänge und Frequenz der in den freien Raum abgestrahlten elektromagnetischen Signale sind gegeben zu

$$\begin{aligned}
 \lambda &\equiv \frac{2\pi c}{\omega} & (7.116) \\
 \omega &= ck \\
 k &= \frac{2\pi}{\lambda}.
 \end{aligned}$$

Für $l \ll \lambda$ ist die betrachtete Stabantenne in guter Näherung ein punktförmiger Hertzscher Dipol. Die abgestrahlte Leistung ist dann gemäß (7.101) in der Fernzone auf der Kugelschale mit Radius $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}| \gg \frac{c}{\omega}$ gegeben zu

$$\begin{aligned}
 P^{(\text{el})} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \left[\frac{d^2}{dt^2} p \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right) \right]^2 & (7.117) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \left\{ \frac{2I_0 l}{\pi} \omega \cos \left[\omega \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right) \right] \right\}^2.
 \end{aligned}$$

Gemittelt über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ folgt als mittlere Leistungsabgabe der be-

trachteten (kurzen) Stabantenne

$$\begin{aligned} \langle P^{(\text{el})} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt P^{(\text{el})}(t) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \left(\frac{2I_0 l}{\pi} \omega \right)^2 \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T dt \cos^2 \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}|}{c} \right) \right]}_{=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\omega^2 I_0^2 l^2}{3\pi^2 c^3}. \end{aligned}$$

Die Zahl

$$\frac{1}{\epsilon_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.73 [\Omega] \simeq 120\pi [\Omega]$$

ist der sog. Wellenwiderstand (Impedanz) im freien Raum.

7.5 Liénard-Wiechert-Potentiale

Wir betrachten eine Punktladung $q^{(0)}$, die sich entlang einer vorgegebenen Trajektorien $\mathbf{r}^{(0)}(t)$ (sog. Weltlinie) im Raum bewegen möge, egal ob gleichförmig oder beschleunigt. Die zugeordnete Ladungsdichte bzw. Stromdichte ist

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= q^{(0)} \delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t)] & (7.118) \\ a &\in \{x, y, z\} \\ j_a(\mathbf{r}, t) &= q^{(0)} v_a^{(0)}(t) \delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t)] \\ v_a^{(0)}(t) &= \frac{dr_a^{(0)}(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Die einer zeitabhängigen Ladungsdichte bzw. Stromdichte entsprechenden retardierten elektromagnetischen Potentiale $\phi(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ sind in (7.60) angegeben. Um die betreffenden Integrale auszuwerten, verwendet man einen Kunstgriff

7 Elektromagnetische Strahlung

und schreibt

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|<ct} d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} & (7.119) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|<ct} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|<ct} d^3r' \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) \frac{q^{(0)}\delta^{(3)}[\mathbf{r}' - \mathbf{r}^{(0)}(t')]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
 &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t' + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}(t')|}{c} - t\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}(t')|} \\
 &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\partial t'}{\partial \tau} \frac{\delta(\tau - t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}[t'(\mathbf{r}, \tau)]|}.
 \end{aligned}$$

Ebenso

$$a \in \{x, y, z\} \quad (7.120)$$

$$\begin{aligned}
 A_a(\mathbf{r}, t) &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|<ct} d^3r' \frac{j_a(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
 &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|<ct} d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) \frac{j_a(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
 &= \frac{\kappa\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|<ct} d^3r' \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) \frac{q^{(0)}v_a^{(0)}(t')\delta^{(3)}[\mathbf{r}' - \mathbf{r}^{(0)}(t')]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
 &= \frac{\kappa\mu_0 q^{(0)}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}(t')|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}(t')|} v_a^{(0)}(t') \\
 &= \frac{\kappa\mu_0 q^{(0)}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\partial t'}{\partial \tau} \frac{\delta(\tau - t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(0)}[t'(\mathbf{r}, \tau)]|} v_a^{(0)}[t'(\mathbf{r}, \tau)].
 \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $t'(\mathbf{r}, \tau)$ eine Funktion der Variablen $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ und $\tau \in \mathbb{R}$, die *implizit* über die Forderung

$$t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|}{c} \stackrel{!}{=} \tau \quad (7.121)$$

7.5 Liénard-Wiechert-Potentiale

definiert ist. Wegen der Deltafunktion $\delta(\tau - t)$ im Integranden müssen wir die Ableitung $\frac{\partial t'}{\partial \tau}$ (zum Glück!) nur an der Stelle $\tau = t$ bestimmen. Aus der zu (7.121) für $\tau = t$ äquivalenten Forderung

$$c(t - t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')| \quad (7.122)$$

folgt jetzt mit der Abkürzung

$$\mathbf{n}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}[t'(\mathbf{r}, t)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}[t'(\mathbf{r}, t)]|} \quad (7.123)$$

durch Ableiten nach der Variablen t auf beiden Seiten der Gleichung (7.122) der Zusammenhang (Summenkonvention beachten)

$$\begin{aligned} c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')| & (7.124) \\ &= \frac{\partial}{\partial r_a^{(0)}} |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')| \frac{\partial r_a^{(0)}(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \\ &= - \frac{r_a - r_a^{(0)}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|} v_a^{(0)}(t') \frac{\partial t'}{\partial t} \\ &= -\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t') \frac{\partial t'}{\partial t}. \end{aligned}$$

Auflösen nach der gesuchten Größe $\frac{\partial t'}{\partial t}$ ergibt

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}} \quad (7.125)$$

Damit erhalten wir aus (7.119) bzw. (7.120) die gesuchten elektromagnetischen Potentiale zu

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|} \right]_{t'=t'(\mathbf{r}, t)} & (7.126) \\ A_a(\mathbf{r}, t) &= \frac{\kappa\mu_0 q^{(0)}}{4\pi} \left[\frac{1}{1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|} v_a^{(0)}(t') \right]_{t'=t'(\mathbf{r}, t)}. \end{aligned}$$

7 Elektromagnetische Strahlung

Eine elementare Umformung liefert unter Beachtung von (7.123) jetzt die sog. *Liénard-Wiechert-Potentiale*:

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')| - \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}} \right]_{t'=t'(\mathbf{r}, t)} \\ a &\in \{x, y, z\} \\ A_a(\mathbf{r}, t) &= \frac{\kappa\mu_0 q^{(0)}}{4\pi} \left[\frac{v_a^{(0)}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')| - \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}} \right]_{t'=t'(\mathbf{r}, t)}. \end{aligned}} \quad (7.127)$$

Die hier auftretende orts- und zeitabhängige Funktion $t' = t'(\mathbf{r}, t)$ ist aus der Forderung

$$\boxed{t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|}{c} \stackrel{!}{=} t} \quad (7.128)$$

zu bestimmen. Für eine allgemeine Trajektorie $\mathbf{r}^{(0)}(t')$ ist t' nur mit numerischen Methoden berechenbar. Für ein ruhendes Teilchen ist die Geschwindigkeit $\mathbf{v}^{(0)}(t') \equiv \mathbf{0}$ und man erhält, wie zu erwarten war, das Coulomb-Potential einer Punktladung.

Aus den Liénard-Wiechert-Potentialen können wir nun die Felder einer bewegten Punktladung berechnen, siehe Anhang E. Das Ergebnis lautet dann

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|^2} \frac{1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}(t')]^2}{c^2}}{\left[1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}\right]^3} \left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{c} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|} \frac{1}{\left[1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}\right]^3} \\ &\quad \left. \times \mathbf{n}^{(0)}(t') \wedge \left[\left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right) \wedge \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right] \right\}_{t'=t'(\mathbf{r}, t)} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \mathbf{n}^{(0)}[t'(\mathbf{r}, t)] \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (7.129)$$

Die elektromagnetischen Felder, die von einer bewegten Punktladung erzeugt werden, sind demnach eine Superposition von sog. *Geschwindigkeitsfeldern* und *Beschleunigungsfeldern*.

7.6 Strahlung beschleunigter Punktladungen

Aus dem Resultat (7.129) für die elektromagnetischen Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ einer beliebig bewegten Punktladung ist ersichtlich, dass der Beitrag des Geschwindigkeitsterms wie $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|^2$ abfällt, während der Beitrag des Beschleunigungsterms wesentlich langsamer, nämlich proportional zum inversen Abstand $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|$ abfällt. Für die in den freien Raum abgestrahlte Leistung in großem Abstand $|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')| \gg \lambda$ zur Position der Strahlungsquelle ist somit nur der Beschleunigungsterm relevant, sofern $\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \neq \mathbf{0}$ gilt. In großem Abstand $|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|$ zur Strahlungsquelle am Ort $\mathbf{r}^{(0)}(t')$ kommt pro Zeiteinheit dt und pro Flächenelement df der Oberfläche eines Detektors am Ort \mathbf{r} die folgende Energiemenge an

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \mathcal{E}}{df dt} df dt &= \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} \right]_{t'=t'(\mathbf{r}, t)} \cdot (-\mathbf{n}) df dt & (7.130) \\
 &= \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \left[\frac{1}{c\mu_0} \mathbf{n}^{(0)} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right] \right)_{t'=t'(\mathbf{r}, t)} \cdot (-\mathbf{n}) df dt \\
 &= \left(|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{n}^{(0)} - [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}^{(0)}] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right)_{t'=t'(\mathbf{r}, t)} \cdot (-\mathbf{n}) df dt \\
 &= \left[|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{n}^{(0)} \cdot (-\mathbf{n}) \right]_{t'=t'(\mathbf{r}, t)} df dt,
 \end{aligned}$$

wobei das Flächenelement df einen zur Strahlungsquelle hin orientierten Normalenvektor \mathbf{n} besitzt. In der zweiten Zeile wurde verwendet, dass der Geschwindigkeitsterm in großem Abstand zur Strahlungsquelle nur subdominant beiträgt, d.h. $[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}^{(0)}] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{O}(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|^3)$. Je nach Orientierung von $\mathbf{v}^{(0)}$ relativ zu $\frac{d\mathbf{v}^{(0)}}{dt}$ ergibt sich eine sehr unterschiedliche Strahlungsleistung. Die folgenden drei Spezialfälle sind repräsentativ:

1. *nicht relativistische* Geschwindigkeit $|\mathbf{v}^{(0)}|/c \ll 1$, beliebiger Winkel zwischen $\mathbf{v}^{(0)}$ und $\frac{d\mathbf{v}^{(0)}}{dt}$,

7 Elektromagnetische Strahlung

2. $\mathbf{v}^{(0)} \wedge \frac{d\mathbf{v}^{(0)}}{dt} = \mathbf{0}$, d.h. $\mathbf{v}^{(0)}$ ist parallel oder antiparallel zur Beschleunigung $\frac{d\mathbf{v}^{(0)}}{dt}$ orientiert, beliebige Geschwindigkeit $0 \leq |\mathbf{v}^{(0)}|/c \leq 1$,
3. $\mathbf{v}^{(0)} \cdot \frac{d\mathbf{v}^{(0)}}{dt} = 0$, d.h. $\mathbf{v}^{(0)}$ ist orthogonal zur Beschleunigung $\frac{d\mathbf{v}^{(0)}}{dt}$ orientiert, beliebige Geschwindigkeit $0 \leq |\mathbf{v}^{(0)}|/c \leq 1$.

Im *ersten* Fall $|\mathbf{v}^{(0)}|/c \ll 1$ gilt für die retardierte Zeitfunktion $t' = t'(\mathbf{r}, t) \simeq t$. Wir schreiben dann

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{v}^{(0)}|}{c} &\ll 1 && (7.131) \\ \frac{d^2\mathcal{E}}{dfdt} dfdt &= \left[|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{n}^{(0)} \cdot (-\mathbf{n}) df \right]_{t'=t'(\mathbf{r}, t)} dt \\ &= \left(\frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t)|} \frac{\mathbf{n}^{(0)} \wedge \left[\mathbf{n}^{(0)} \wedge \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t)}{\partial t} \right]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t)|} \right)^2 \frac{1}{c\mu_0} \left[\mathbf{n}^{(0)} \cdot (-\mathbf{n}) \right] dfdt \\ &= \left[\frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \right]^2 \frac{1}{c^4} \left[\left(\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right) \mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right]^2 \frac{1}{c\mu_0} \frac{\left[\mathbf{n}^{(0)} \cdot (-\mathbf{n}) \right] dfdt}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|^2} \\ &= \frac{\left[q^{(0)} \right]^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0\mu_0} \frac{1}{c^5} \left[\left(\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right)^2 - 2 \left(\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right)^2 \right] \frac{\left[\mathbf{n}^{(0)} \cdot (-\mathbf{n}) \right] dfdt}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|^2} \\ &= \frac{\left[q^{(0)} \right]^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi c^3} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right)^2 - \left(\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right)^2 \right] \frac{\left[\mathbf{n}^{(0)} \cdot (-\mathbf{n}) \right] dfdt}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|^2}. \end{aligned}$$

7.6 Strahlung beschleunigter Punktladungen

Wegen $|\mathbf{v}^{(0)}| \ll c$ ist $t' = t$. Bezeichnet $\vartheta(t)$ den Winkel zwischen $\mathbf{n}^{(0)}(t)$ und $\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t)}{\partial t}$, so folgt jetzt

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{v}^{(0)}| \ll c \\
 \frac{d^2 \mathcal{E}}{df dt} df dt &= \frac{[q^{(0)}]^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{c^3} \left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t)}{\partial t} \right)^2 (1 - \cos^2 [\vartheta(t)]) \frac{[\mathbf{n}^{(0)}(t) \cdot (-\mathbf{n})] df dt}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t)|^2} \\
 &= \frac{[q^{(0)}]^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t)}{\partial t} \right)^2 \sin^2 [\vartheta(t)] [\mathbf{n}^{(0)}(t) \cdot (-\mathbf{n})]}{c^3 4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t)|^2} df dt \\
 &= \frac{[q^{(0)}]^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t)}{\partial t} \right)^2 \sin^2 [\vartheta(0)]}{c^3} \\
 &\quad \times \underbrace{\left(\frac{\sin^2 [\vartheta(t)] |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(0)|^2}{\sin^2 [\vartheta(0)] |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t)|^2} [\mathbf{n}^{(0)}(t) \cdot (-\mathbf{n})] \right)}_{\simeq 1} \frac{df dt}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(0)|^2}. \tag{7.132}
 \end{aligned}$$

Angenommen, die Bahnkurve $\mathbf{r}^{(0)}(t)$ liegt (während des Beobachtungszeitraums) im Inneren einer Kugel mit Radius $R^{(0)}$ um den Mittelpunkt $\mathbf{r}^{(0)}(0)$, deren Polachse in Richtung von $\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t)}{\partial t}$ orientiert ist. Dann ist mit $\vartheta(0) \equiv \vartheta$ die abgestrahlte Leistung, die ein *weit entferntes* Flächenelement $df = |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(0)|^2 d\Omega$ auf einer Kugel mit Radius $|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(0)| \gg R^{(0)}$ um den Mittelpunkt $\mathbf{r}^{(0)}(0)$ unter einem Raumwinkel $d\Omega = d\varphi d\vartheta \sin \vartheta$ detektiert, gegeben zu

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{dt df} df dt = \frac{[q^{(0)}]^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t)}{\partial t} \right)^2 \sin^2 \vartheta \overbrace{d\varphi d\vartheta \sin \vartheta}^{\equiv d\Omega}}{4\pi} dt. \tag{7.133}$$

Für die differentielle Strahlungsleistung unter dem Raumwinkel $d\Omega$ folgt somit

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 & |\mathbf{v}^{(0)}| \ll c \\
 \frac{d^2 \mathcal{E}}{dt d\Omega} &= \frac{1}{4\pi} \frac{[q^{(0)}]^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t)}{\partial t} \right)^2 \sin^2 \vartheta}{c^3}.
 \end{aligned}
 } \tag{7.134}$$

Die Winkelabhängigkeit $\propto \sin^2 \vartheta$ der detektierten Strahlungsleistung pro Flächenelement $df = |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(0)|^2 d\Omega$ stimmt mit derjenigen für den Hertzschen Dipol

7 Elektromagnetische Strahlung

(7.100) überein. Entsprechend folgt jetzt für die *pro Zeiteinheit* insgesamt *in alle Richtungen* abgestrahlte Energie wieder die *Larmor-Formel*

$$|\mathbf{v}^{(0)}| \ll c \quad (7.135)$$

$$\begin{aligned} P &= \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{[q^{(0)}]^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t)}{\partial t}\right)^2 \sin^2 \vartheta}{c^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \left(q^{(0)} \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t)}{\partial t} \right)^2. \end{aligned}$$

Im *zweiten* Fall sind Geschwindigkeit $\mathbf{v}^{(0)}(t')$ und Beschleunigung $\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}$ *parallel* bzw. *anti-parallel* orientiert, wobei jetzt die Geschwindigkeit $|\mathbf{v}^{(0)}(t')|$ auch relativistisch sein darf. Wegen

$$\frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \wedge \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} = \mathbf{0}$$

erhalten wir für die abgestrahlte differentielle Leistung in ein entferntes Flächenelement df den Beitrag

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{E}}{dt df} df dt &= \left[|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot (-\mathbf{n}) \right]_{t'=t'(\mathbf{r}, t)} \\ &= \left[\left(\frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|} \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \wedge \left[\mathbf{n}^{(0)}(t') \wedge \left[\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right] \right]}{\left[1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right]^3} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{c\mu_0} \left[\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot (-\mathbf{n}) \right] df dt \right]_{t'=t'(\mathbf{r}, t)}. \end{aligned}$$

Wie im vorherigen Fall legen wir die Polarachse in Richtung der Beschleunigung $\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}$ und bezeichnen mit $\vartheta = \vartheta(t')$ den Winkel zwischen $\mathbf{n}^{(0)}(t')$ und $\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}$. Da $\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}$ und $\mathbf{v}^{(0)}(t')$ parallel bzw. anti-parallel orientiert sind, gilt natürlich auch

$$1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} = \begin{cases} 1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos[\vartheta(t')] & \text{für } \mathbf{v}^{(0)}(t') \parallel \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}, \\ 1 + \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos[\vartheta(t')] & \text{für } \mathbf{v}^{(0)}(t') \parallel \left(-\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right). \end{cases} \quad (7.136)$$

7.6 Strahlung beschleunigter Punktladungen

Dann erhalten wir

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dt df} df dt = \frac{[q^{(0)}]^2 \left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}\right)^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2[\vartheta(t')]}{\left(1 \mp \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos[\vartheta(t')]\right)^6} \frac{[\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot (-\mathbf{n})]}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t)|^2} df dt$$

$$t' = t'(\mathbf{r}, t). \quad (7.137)$$

Wir stellen uns wieder vor, die betreffende Punktladung bewegt sich geradlinig während der Beobachtungszeit $t \in [t^{(0)}, t^{(1)}]$ im Inneren einer Kugel mit Radius $R^{(0)}$ um den Mittelpunkt $\mathbf{r}^{(0)}(0)$, wobei die Polarachse der Kugel entlang der Richtung von $\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t)}{\partial t}$ orientiert ist. Dann ist die abgestrahlte Energiemenge, die ein *weit entferntes* Flächenelement $df = d^2r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(0)|^2 d\Omega$ auf einer *Kugel* mit Radius $|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(0)| \gg R^{(0)}$ um den Mittelpunkt $\mathbf{r}^{(0)}(0)$ unter einem Raumwinkel $d\Omega = d\varphi d\vartheta \sin \vartheta$ im Zeitintervall $[t^{(0)}, t^{(1)}]$ detektiert, gegeben zu

$$\int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} dt \frac{d^2\mathcal{E}}{dt df} df = \int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} dt \frac{[q^{(0)}]^2 \left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}\right)^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \vartheta}{\left(1 \mp \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta\right)^6} \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (7.138)$$

Wie schon vorher wurde verwendet

$$\vartheta(t') \simeq \vartheta(0) \equiv \vartheta \quad (7.139)$$

$$\frac{[\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot (-\mathbf{n})]}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t)|^2} df \simeq d\Omega,$$

was richtig ist, wenn sich das betreffenden Segment der Bahnkurve $\mathbf{r}^{(0)}(t')$ der beschleunigten Punktladung im Zeitintervall $[t^{(0)}, t^{(1)}]$ ganz im Inneren der Kugel mit Radius $R^{(0)} \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(0)|$ befindet.

Ein subtiler Punkt ist hier, dass der Integrand von der Variablen t nur implizit über die Variable $t' = t'(\mathbf{r}, t)$ abhängt. Unter Verwendung der Relation (7.125) erhalten wir nun durch Übergang zur Variablen t'

$$\int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} dt \frac{d^2\mathcal{E}}{dt df} df = \int_{t'^{(0)}}^{t'^{(1)}} dt' \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{[q^{(0)}]^2 \left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}\right)^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \vartheta}{\left(1 \mp \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta\right)^6} \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (7.140)$$

7 Elektromagnetische Strahlung

$$\begin{aligned}
 &= \int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} dt' \left[1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right] \frac{[q^{(0)}]^2 \left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right)^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \vartheta}{\left(1 \mp \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta \right)^6} \frac{d\Omega}{4\pi} \\
 &= \int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} dt' \frac{[q^{(0)}]^2 \left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right)^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \vartheta}{\left(1 \mp \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta \right)^5} \frac{d\Omega}{4\pi} \\
 &= \int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} dt' \frac{d^2 \mathcal{E}}{dt' d\Omega} d\Omega.
 \end{aligned}$$

Die differentielle Strahlungsleistung, d.h. die Energie, die von der beschleunigten Ladung pro Zeit dt' unter dem Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlt wird, ist demnach für parallele bzw. anti-parallele Orientierung von Geschwindigkeit und Beschleunigung gegeben zu

Orientierung $\pm \mathbf{v}^{(0)}(t') \parallel \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}$

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{dt' d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \frac{[q^{(0)}]^2 \left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right)^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \vartheta}{\left(1 \mp \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta \right)^5}.$$

(7.141)

Für anti-parallele Orientierung $-\mathbf{v}^{(0)}(t') \parallel \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}$ spricht man von *Bremsstrahlung*. In Abbildung 7.1 werden die Anisotropie und die Zunahme der Strahlungsleistung bei konstanter Beschleunigung $|\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}|$ für verschiedene Werte des relativistischen Geschwindigkeitsparameters $|\mathbf{v}^{(0)}(t')|/c$ dargestellt. In der Zeichnung ist ϑ jetzt sowohl für den Fall $\mathbf{v}^{(0)}(t') \parallel \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}$ als auch für den Fall $-\mathbf{v}^{(0)}(t') \parallel \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}$ definiert als der Winkel zwischen der Geschwindigkeit $\mathbf{v}^{(0)}(t')$ und dem Einheitsvektor $\mathbf{n}^{(0)} = -\mathbf{n}$. Für $|\mathbf{v}^{(0)}(t')|$ nahe der Lichtgeschwindigkeit c ist die Strahlungskeule in *Vorwärtsrichtung* extrem ausgeprägt.

7.6 Strahlung beschleunigter Punktladungen

Die insgesamt in alle Richtungen emittierte Strahlungsleistung P' ist

$$\begin{aligned}
 \pm \mathbf{v}^{(0)}(t') &\parallel \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} & (7.142) \\
 P' &= \frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{d^2\mathcal{E}}{dt' d\Omega} \\
 &= \frac{[q^{(0)}]^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}\right)^2}{c^3} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \frac{\sin^2\vartheta}{\left(1 \mp \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos\vartheta\right)^5} \\
 &\stackrel{u=\cos\vartheta}{=} \frac{[q^{(0)}]^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}\right)^2}{c^3} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du \underbrace{\frac{1-u^2}{\left(1 \mp \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} u\right)^5}}_{=\frac{2}{3} \frac{1}{\left(1 - [\mathbf{v}^{(0)}(t')]^2/c^2\right)^3}}.
 \end{aligned}$$

Mit

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}(t')]^2}{c^2}}} \quad (7.143)$$

folgt dann

$$P' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \left(q^{(0)} \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right)^2 (\gamma')^6. \quad (7.144)$$

Die Strahlungsleistung ist demnach für ein bewegtes geladenes Teilchen mit relativistischer Geschwindigkeit erheblich größer als im nicht relativistischen Fall, z.B. für $|\mathbf{v}^{(0)}(t')|/c = 0.99$ ist $(\gamma')^6 \simeq 126894$. Man benötigt sehr dicke Bleiplatten zur Abschirmung hochenergetischer *Bremsstrahlung*!

Der *dritte* Fall handelt von einer bewegten Punktladung, bei der die Beschleunigung $\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}$ *orthogonal* zur Geschwindigkeit $\mathbf{v}^{(0)}(t')$ ist, also

$$\mathbf{v}^{(0)}(t') \cdot \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} = 0, \quad (7.145)$$

7 Elektromagnetische Strahlung

wie z.B. bei der Bewegung auf einer Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. In dem Fall spannen die Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}, \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}}{\left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right|}.$$

ein *rechtwinkliges* Koordinatensystem in einer Ebene auf. In Bezug auf diese Ebene gilt jetzt für den Einheitsvektor $\mathbf{n}^{(0)}(t')$ die Darstellung

$$\mathbf{n}^{(0)}(t') = \mathbf{e}_1 \cos \varphi \sin \vartheta + \mathbf{e}_2 \sin \varphi \sin \vartheta + \mathbf{e}_3 \cos \vartheta. \quad (7.146)$$

Somit

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t') &= |\mathbf{v}^{(0)}(t')| \cos \vartheta \\ \mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} &= \left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right| \cos \varphi \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (7.147)$$

Für einen Beobachter, der sich in großer Entfernung zur Bahn des Teilchens befindet, ist wieder gemäß (7.129) der Beitrag des Geschwindigkeitsterms zum elektromagnetischen Feld als klein gegenüber dem Beschleunigungsterm anzusehen. Dann folgt für die differentielle Strahlungsleistung, die ein Detektorflächenelement $(-\mathbf{n}) df$ im großen Abstand zur Bahn des Teilchens registriert:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{E}}{df dt} df dt &= \left[|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \frac{1}{c \mu_0} \mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot (-\mathbf{n}) df \right]_{t'=t'(\mathbf{r}, t)} dt \\ &= dt \left\{ \left(\frac{q^{(0)}}{4\pi \varepsilon_0 c} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|} \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \wedge \left[\left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right) \wedge \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right]}{\left[1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right]^3} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{c \mu_0} \mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot (-\mathbf{n}) df \right\}_{t'=t'(\mathbf{r}, t)} \\ &= dt \left(\frac{q^{(0)}}{4\pi \varepsilon_0} \right)^2 \frac{1}{c^5 \mu_0} \left\{ \frac{1}{\left[1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right]^6} \left[\left[\left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right) \wedge \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right]^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \left[\left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right) \wedge \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right] \right)^2 \right] \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot (-\mathbf{n}) df}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|^2} \right\}_{t'=t'(\mathbf{r}, t)}. \end{aligned} \quad (7.148)$$

7.6 Strahlung beschleunigter Punktladungen

Wir stellen uns nun vor, die betreffende Punktladung $q^{(0)}$ bewegt sich während der Beobachtungszeit $t \in [t^{(0)}, t^{(1)}]$ im Inneren einer Kugel mit Radius $R^{(0)}$ auf einer Kreisbahn um den Ursprung des Koordinatensystems, wobei die Polarachse der Kugel entlang der Richtung \mathbf{e}_3 orientiert ist. Dann ist die abgestrahlte Energiemenge, die ein *weit entferntes* Flächenelement $df = d^2r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(0)|^2 d\Omega$ auf einer Kugel mit Radius $|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(0)| \gg R^{(0)}$ um den Mittelpunkt $\mathbf{r}^{(0)}(0)$ unter einem Raumwinkel $d\Omega = d\varphi d\vartheta \sin\vartheta$ im Zeitintervall $[t^{(0)}, t^{(1)}]$ detektiert, gegeben zu

$$\begin{aligned} & \int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} dt \frac{d^2\mathcal{E}}{dt df} df & (7.149) \\ &= \int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} dt \frac{[q^{(0)}]^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3} \left\{ \frac{1}{\left[1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}\right]^6} \left[\left[\left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right) \wedge \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right]^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \left(\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \left[\left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right) \wedge \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right] \right)^2 \right] \frac{d\Omega}{4\pi} \right\}_{t'=t'(\mathbf{r},t)}. \end{aligned}$$

Wie schon bei der Diskussion der Bremsstrahlung schreiben wir hier

$$\begin{aligned} \vartheta(t') &\simeq \vartheta(0) \equiv \vartheta & (7.150) \\ \frac{[\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot (-\mathbf{n})]}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t)|^2} df &\simeq d\Omega \\ \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} &= c^2, \end{aligned}$$

was richtig ist, wenn sich das betreffende Segment der Bahnkurve $\mathbf{r}^{(0)}(t')$ der beschleunigten Punktladung im Zeitintervall $[t^{(0)}, t^{(1)}]$ ganz im Inneren der Kugel mit Radius $R^{(0)} \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(0)|$ befindet.

Nun gilt

$$\begin{aligned} & \mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \left[\left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right) \wedge \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right] & (7.151) \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \cdot \left[\mathbf{n}^{(0)}(t') \wedge \left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right) \right] \end{aligned}$$

7 Elektromagnetische Strahlung

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \cdot \left[\mathbf{n}^{(0)}(t') \wedge \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right] \\
 &= -\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \left[\frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \wedge \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right] \\
 &= -\frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right| \mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \underbrace{\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1}_{=\mathbf{e}_2} \\
 &= -\frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right| \sin \varphi \sin \vartheta.
 \end{aligned}$$

Ebenso folgt unter Berücksichtigung der vorausgesetzten Orthogonalität (7.145) von Geschwindigkeit und Beschleunigung jetzt

$$\begin{aligned}
 &\left[\left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right) \wedge \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right]^2 && (7.152) \\
 &= \left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right)^2 \left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right|^2 - \left[\left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right]^2 \\
 &= \left(1 - 2\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} + \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2} \right) \left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right|^2 - \left[\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right]^2 \\
 &= \left(1 - 2\frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta + \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2} \right) \left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right|^2 - \left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right|^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta \\
 &= \left(1 - 2\frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta + \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2} - \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta \right) \left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right|^2.
 \end{aligned}$$

Insgesamt finden wir

$$\begin{aligned}
 &\left(\mathbf{n}^{(0)}(t') \wedge \left[\left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right) \wedge \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right] \right)^2 && (7.153) \\
 &= \left[\left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right) \wedge \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right]^2 \\
 &\quad - \left(\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \left[\left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right) \wedge \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right] \right)^2
 \end{aligned}$$

7.6 Strahlung beschleunigter Punktladungen

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 - 2 \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta + \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2} - \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta \right. \\
 &\quad \left. - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2} \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta \right) \left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right|^2 \\
 &= \left(1 - 2 \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta + \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2} \cos^2 \vartheta + \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2} \sin^2 \vartheta - \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta \right. \\
 &\quad \left. - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2} \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta \right) \left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right|^2 \\
 &= \left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right|^2 \\
 &\quad \times \left[\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta \right)^2 + (1 - \sin^2 \varphi) \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2} \sin^2 \vartheta - \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta \right] \\
 &= \left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right|^2 \left[\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta \right)^2 - \left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2} \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta \right].
 \end{aligned}$$

7 Elektromagnetische Strahlung

Damit ist

$$\begin{aligned}
 & \int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} dt \frac{d^2 \mathcal{E}}{dt df} df & (7.154) \\
 &= \frac{[q^{(0)}]^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3} \int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} dt \left\{ \left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right|^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta\right)^6} \right. \\
 & \quad \times \left. \left[\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta\right)^2 - \left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2}\right) \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta \right] \frac{d\Omega}{4\pi} \right\}_{t'=t'(\mathbf{r},t)} \\
 &= \frac{[q^{(0)}]^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3} \int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} dt \left\{ \left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right|^2 \right. \\
 & \quad \times \left. \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta\right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2}\right) \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta}{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta\right)^6} \right] \frac{d\Omega}{4\pi} \right\}_{t'=t'(\mathbf{r},t)}.
 \end{aligned}$$

7.6 Strahlung beschleunigter Punktladungen

Durch Übergang von der Integrationsvariablen t zur Integrationsvariablen t' erhalten wir wieder mit (7.125) den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 & \int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} dt \frac{d^2 \mathcal{E}}{dt df} df & (7.155) \\
 &= \frac{[q^{(0)}]^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3} \int_{t^{(0)}}^{t'^{(1)}} dt' \left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta \right) \left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right|^2 \\
 & \quad \times \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta \right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2} \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta}{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta \right)^6} \right] \frac{d\Omega}{4\pi} \\
 &= \frac{[q^{(0)}]^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^3} \int_{t^{(0)}}^{t'^{(1)}} dt' \left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right|^2 \\
 & \quad \times \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta \right)^3} - \frac{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2} \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta}{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta \right)^5} \right] \frac{d\Omega}{4\pi} \\
 &= \int_{t^{(0)}}^{t'^{(1)}} dt' \frac{d^2 \mathcal{E}}{dt' d\Omega}.
 \end{aligned}$$

Der Integrand

$$\boxed{ \frac{d^2 \mathcal{E}}{dt' d\Omega} = \left| \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right|^2 \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta \right)^3} - \frac{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2} \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta}{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos \vartheta \right)^5} \right] }$$

besitzt für relativistische Geschwindigkeit $|\mathbf{v}^{(0)}(t')|/c \rightarrow 1$ in seiner Abhängigkeit bezüglich des Winkels ϑ ein *extrem* ausgeprägtes Maximum in *Vorwärtsrichtung* $\vartheta = 0$, ähnlich wie der Scheinwerfer eines Autos, welches bei Nacht im Kreisverkehr fährt. Das ist ein typischer relativistischer Effekt (sog. *Beaming*). In der Ebene $\varphi = 0$ besitzt der Integrand zwei Nullstellen für $\vartheta = \pm \vartheta^{(0)}$, wobei $\cos \vartheta^{(0)} = |\mathbf{v}^{(0)}(t')|/c$. Da der Integrand keine negativen Werte annehmen kann, ist für jeden Wert von ϑ eine obere Schranke für $\frac{d^2 \mathcal{E}}{dt' d\Omega}$ durch den Beitrag für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ gegeben. In den Abbildungen 7.2 und 7.3 ist die differentielle Strahlungsleistung als Polardiagramm für $\varphi = 0$ und für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ für verschiedene Geschwindigkeitsverhältnisse $|\mathbf{v}^{(0)}|/c$ dargestellt.

7 Elektromagnetische Strahlung

Die insgesamt in alle Richtungen emittierte Strahlungsleistung P' zum Zeitpunkt t' ist demnach im Fall $\mathbf{v}^{(0)}(t') \perp \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}$ gegeben zu

$$\begin{aligned}
 P' &= \frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{d^2\mathcal{E}}{dt' d\Omega} \\
 &= \frac{[q^{(0)}]^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}\right)^2}{c^3} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos\vartheta\right)^3} - \frac{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2}\right) \cos^2\varphi \sin^2\vartheta}{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos\vartheta\right)^5} \right] \\
 &= \frac{[q^{(0)}]^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}\right)^2}{c^3} \frac{1}{2} \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos\vartheta\right)^3} - \frac{1}{2} \frac{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2}\right) \sin^2\vartheta}{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} \cos\vartheta\right)^5} \right] \\
 &\stackrel{u=\cos\vartheta}{=} \frac{[q^{(0)}]^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}\right)^2}{c^3} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} u\right)^3} - \frac{1}{2} \frac{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2}\right) (1-u^2)}{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|}{c} u\right)^5} \right] \\
 &= \frac{[q^{(0)}]^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}\right)^2}{c^3} \frac{2}{3} \frac{1}{\left(1 - \frac{|\mathbf{v}^{(0)}(t')|^2}{c^2}\right)^2}.
 \end{aligned} \tag{7.156}$$

Mit

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}(t')]^2}{c^2}}} \tag{7.157}$$

folgt dann

$$P' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \left(q^{(0)} \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right)^2 (\gamma')^4. \tag{7.158}$$

Die Strahlungsleistung ist demnach für geladene Teilchen, die sich auf einer Kreisbahn mit relativistischer Geschwindigkeit bewegen, erheblich größer als im nicht

7.6 Strahlung beschleunigter Punktladungen

relativistischen Fall, z.B. findet man für $|\mathbf{v}^{(0)}(t')|/c = 0.99$ den Wert $(\gamma')^4 \simeq 2525$. Allerdings ist die Strahlungsleistung bei gleicher Geschwindigkeit für Synchrotronstrahlung um einen Faktor $(\gamma')^2$ kleiner als für Bremsstrahlung. Für nicht relativistische Geschwindigkeit $|\mathbf{v}^{(0)}(t')|/c \ll 1$ folgt wieder die Larmor-Formel.

Bemerkung

Ringbeschleuniger für Elektronen sind typische Quellen für Synchrotronstrahlung. Um höhere Strahlungsintensität zu erzielen, werden heutzutage Elektronen über Wegstrecken mit alternierender Polarität (Nord/Süd-Ausrichtung) von vielen Dipolmagneten, sog. Wiggler bzw. Undulatoren, geschickt, wodurch die Elektronen auf einen Schlingerkurs geraten. Bei diesen vielen abrupten transversalen Richtungswechseln strahlen die Elektronen noch um ein Vielfaches intensiver als in Ringbeschleunigern. Wird nun der Abstand der Magnete und die Geschwindigkeit der Elektronen so aufeinander abgestimmt, dass die elektromagnetischen Felder der Strahlungskeulen, die an jedem einzelnen Magneten von den Elektronen abgegeben werden, *konstruktiv* interferieren, so spricht man von einem sog. Freielektronen Laser (FEL). Durch das phasenrichtige Addieren der Amplituden der einzeln erzeugten Wellen steigt die Intensität der emittierten Strahlung beim FEL proportional zum *Quadrat* der Anzahl der emittierenden Elektronen, und nicht einfach nur linear, wie es bei zufälliger Anordnung der Phasen der Fall ist. Ein FEL ist demnach eine kohärente Strahlungsquelle mit extrem hoher Brillanz.

Auch im Weltall existiert Synchrotronstrahlung, z.B. immer dann, wenn sich Elektronen oder Positronen mit relativistischer Geschwindigkeit in den Magnetfeldern der Überreste von Sternexplosionen (Supernova) bewegen.

Elektromagnetische Felder, wie sie von einer mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Punktladung generiert werden

Für eine gleichförmig bewegte Ladung gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{(0)}(t') &= \mathbf{v}^{(0)} = \text{const} & (7.159) \\ \mathbf{r}^{(0)}(t') &= \mathbf{v}^{(0)}t' \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} &\equiv \mathbf{0}.\end{aligned}$$

7 Elektromagnetische Strahlung

Dann fällt der Beschleunigungsterm in (7.129) weg und wir erhalten für das elektromagnetische Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|^2} \frac{1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2}}{\left[1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}}{c}\right]^3} \left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \right) \right\}_{t'=t'(\mathbf{r}, t)} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \mathbf{n}^{(0)}[t'(\mathbf{r}, t)] \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\quad (7.160)$$

Für konstante Geschwindigkeit $\mathbf{v}^{(0)}(t') = \mathbf{v}^{(0)} = \text{const}$ kann die Funktion $t' = t'(\mathbf{r}, t)$ aus (7.128) exakt berechnet werden. Aus der Forderung

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')| \stackrel{!}{=} c(t - t') > 0 \quad (7.161)$$

folgt sofort

$$\begin{aligned}|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|^2 &= |\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t'|^2 \\ &= \left| \underbrace{\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)} \cdot t}_{=\mathbf{r}^{(0)}(t)} + \mathbf{v}^{(0)}(t - t') \right|^2 \\ &\stackrel{!}{=} c^2(t - t')^2.\end{aligned}\quad (7.162)$$

Dies ist äquivalent zu einer quadratischen Gleichung

$$(t - t')^2 - 2 \frac{\mathbf{r}^{(0)}(t) \cdot \mathbf{v}^{(0)}}{c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2} (t - t') - \frac{[\mathbf{r}^{(0)}(t)]^2}{c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2} = 0. \quad (7.163)$$

Somit

$$t - t' = \frac{\mathbf{r}^{(0)}(t) \cdot \mathbf{v}^{(0)}}{c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2} + \sqrt{\frac{[\mathbf{r}^{(0)}(t) \cdot \mathbf{v}^{(0)}]^2}{(c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2)^2} + \frac{[\mathbf{r}^{(0)}(t)]^2}{c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2}}. \quad (7.164)$$

7.6 Strahlung beschleunigter Punktladungen

Die Quadratwurzel hat hier das positive Vorzeichen, da $t - t' > 0$ verlangt war. Für die Diskriminante schreiben wir

$$\begin{aligned}
 & \frac{[\mathbf{r}^{(0)}(t) \cdot \mathbf{v}^{(0)}]^2}{(c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2)^2} + \frac{[\mathbf{r}^{(0)}(t)]^2}{c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2} \\
 &= \frac{[\mathbf{r}^{(0)}(t) \cdot \mathbf{v}^{(0)}]^2 + [\mathbf{r}^{(0)}(t)]^2 (c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2)}{(c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2)^2} \\
 &= \frac{[\mathbf{r}^{(0)}(t)]^2 c^2 - ([\mathbf{r}^{(0)}(t)]^2 [\mathbf{v}^{(0)}]^2 - [\mathbf{r}^{(0)}(t) \cdot \mathbf{v}^{(0)}]^2)}{(c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2)^2} \\
 &= \frac{[\mathbf{r}^{(0)}(t)]^2 c^2 - [\mathbf{r}^{(0)}(t) \wedge \mathbf{v}^{(0)}] \cdot [\mathbf{r}^{(0)}(t) \wedge \mathbf{v}^{(0)}]}{(c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{7.165}$$

Nun gilt

$$\mathbf{r}^{(0)}(t) \wedge \mathbf{v}^{(0)} = (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)} \cdot t) \wedge \mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)}. \tag{7.166}$$

Also

$$\frac{[\mathbf{r}^{(0)}(t) \cdot \mathbf{v}^{(0)}]^2}{(c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2)^2} + \frac{[\mathbf{r}^{(0)}(t)]^2}{c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2} = \frac{[\mathbf{r}^{(0)}(t)]^2 c^2 - [\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)}]^2}{(c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2)^2}. \tag{7.167}$$

Damit

$$\begin{aligned}
 t - t' &= \frac{\mathbf{r}^{(0)}(t) \cdot \mathbf{v}^{(0)} + \sqrt{[\mathbf{r}^{(0)}(t)]^2 c^2 - [\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)}]^2}}{c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2} \\
 &= \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)} t) \cdot \mathbf{v}^{(0)} + \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)} t)^2 c^2 - [\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)}]^2}}{c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2}.
 \end{aligned} \tag{7.168}$$

Wir schreiben jetzt

$$\mathbf{n}^{(0)}(t') = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)} t'}{c(t - t')} \tag{7.169}$$

7 Elektromagnetische Strahlung

und formen (7.160) um zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|^2} \frac{1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2}}{\left[1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}}{c}\right]^3} \left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \right) \right\}_{t'=t'(\mathbf{r},t)} \\
 &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{c^2(t-t')^2} \frac{1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2}}{\left[1 - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t'}{c^2(t-t')} \cdot \mathbf{v}^{(0)}\right]^3} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t'}{c(t-t')} - \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \right) \right\}_{t'=t'(\mathbf{r},t)} \\
 &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2}}{\left[c^2(t-t') - (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}\right]^3} \left[\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t' - c(t-t') \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \right] \right\}_{t'=t'(\mathbf{r},t)} \\
 &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2}}{\left[\left(c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2\right)(t-t') - (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t) \cdot \mathbf{v}^{(0)}\right]^3} (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t) \right\}_{t'=t'(\mathbf{r},t)}.
 \end{aligned}$$

Nun gilt, wenn wir die Lösung (7.168) der quadratischen Gleichung für $t - t'$ einsetzen

$$\begin{aligned}
 &\left(c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2\right)(t-t') - (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t) \cdot \mathbf{v}^{(0)} && (7.170) \\
 &= \left(c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2\right) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t) \cdot \mathbf{v}^{(0)} + \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t)^2 c^2 - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)})^2}}{c^2 - [\mathbf{v}^{(0)}]^2} \\
 &\quad - (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t) \cdot \mathbf{v}^{(0)} \\
 &= \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t)^2 c^2 - [\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)}]^2}.
 \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir für das elektrische Feld einer Punktladung, die sich relativ zum Laborkoordinatensystem mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}^{(0)}$ bewegt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2}}{\left[(\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t)^2 c^2 - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)})^2\right]^{\frac{3}{2}}} (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t) \quad (7.171)$$

7.6 Strahlung beschleunigter Punktladungen

Für das entsprechende magnetische Induktionsfeld gilt nach dem Gesagten

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \mathbf{n}^{(0)} [t'(\mathbf{r}, t)] \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)} t'}{t - t'} \wedge \left[\frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2}}{[(\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)} t)^2 c^2 - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)})^2]^{\frac{3}{2}}} (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)} t) \right]. \end{aligned} \quad (7.172)$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)} t'}{t - t'} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)} t) &= \frac{1}{t - t'} (t' - t) \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)} \\ &= \mathbf{v}^{(0)} \wedge \mathbf{r} \\ &= \mathbf{v}^{(0)} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)} t) \\ \mathbf{v}^{(0)} \wedge \mathbf{v}^{(0)} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.173)$$

folgt schließlich

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2}}{[(\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)} t)^2 c^2 - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)})^2]^{\frac{3}{2}}} \mathbf{v}^{(0)} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)} t) \\ &= \frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (7.174)$$

Bestimmung der Transformation der elektromagnetischen Felder einer Punktladung, die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ins Ruhesystem

Wir betrachten eine Punktladung, die sich relativ zum Laborkoordinatensystem mit *konstanter* Geschwindigkeit $\mathbf{v}^{(0)}$ bewegen soll. Die elektromagnetischen Felder $\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t')$ und $\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t')$ im *Ruhesystem* S' der betrachteten Punktladung ergeben sich dann, wie wir später noch im Rahmen der relativistischen Elektrodynamik zeigen werden, aus den Feldern $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, wie sie in S gemessen werden,

7 Elektromagnetische Strahlung

zu

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') &= \gamma \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}^{(0)} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \left(\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right) \quad (7.175) \\ \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t') &= \gamma \left[\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right] - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \left(\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right),\end{aligned}$$

wobei

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{v}^{(0)}}{c^2}}}. \quad (7.176)$$

Wir überprüfen diese Aussage mit den oben gefundenen Lösungen (7.171) für $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (7.174) aus den Ljüüard-Wiechert-Potentialen. Einsetzen von (7.174) liefert sofort

$$\begin{aligned}\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t') &= \gamma \left[\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right] - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \left(\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right) \\ &= \mathbf{0},\end{aligned} \quad (7.177)$$

was anschaulich ist, da wir im Ruhesystem einer Punktladung selbstverständlich nur ein statisches elektrisches Coulomb-Feld erwarten. Aus dieser Forderung den Zusammenhang zwischen den Koordinaten (\mathbf{r}', t') und (\mathbf{r}, t) aufzuspüren, bedarf allerdings einer gewissen Anstrengung, wie die folgende Rechnung zeigt. Einsetzen von (7.174) ergibt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') &= \gamma \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}^{(0)} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \left(\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right) \quad (7.178) \\ &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2}}{\left[(\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t)^2 c^2 - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)})^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \left[\gamma (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t) \right. \\ &\quad \left. + \gamma \mathbf{v}^{(0)} \wedge \left[\frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t) \right] - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \left[\mathbf{v}^{(0)} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t) \right] \right] \\ &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2}}{\left[(\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t)^2 c^2 - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)})^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \left[\gamma (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t) + \gamma \mathbf{v}^{(0)} \wedge \left(\frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \wedge \mathbf{r} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \left[\mathbf{v}^{(0)} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t) \right] \right]\end{aligned}$$

7.6 Strahlung beschleunigter Punktladungen

$$\begin{aligned}
 &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2}}{\left[(\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t)^2 c^2 - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)})^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \left[\gamma (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t) + \gamma \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \right. \\
 &\quad \left. - \gamma \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2} \mathbf{r} - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2} \mathbf{v}^{(0)}t \right] \\
 &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2}}{\left[(\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t)^2 c^2 - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)})^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \left[\gamma \left(1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2} \right) \mathbf{r} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\gamma - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \right) \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} + \left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2} - \gamma \right) \mathbf{v}^{(0)}t \right] \\
 &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{1}{\gamma^2}}{\left[(\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t)^2 c^2 - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)})^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{1}{\gamma} \mathbf{r} + \frac{\gamma}{\gamma+1} \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) - \gamma \right) \mathbf{v}^{(0)}t \right].
 \end{aligned}$$

Nun gilt, wie man leicht einsieht

$$\begin{aligned}
 &\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) - \gamma && (7.179) \\
 &= \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma+1} - \gamma \\
 &= \gamma - 1 - \gamma \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

7 Elektromagnetische Strahlung

Somit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') & \quad (7.180) \\
 &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{1}{\gamma^2}}{\left[(\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t)^2 c^2 - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)})^2\right]^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{1}{\gamma} \mathbf{r} + \frac{\gamma}{\gamma+1} \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} - \mathbf{v}^{(0)}t \right] \\
 &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left[(\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t)^2 c^2 - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)})^2\right]^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\gamma^3} \left[\mathbf{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} - \gamma \mathbf{v}^{(0)}t \right] \\
 &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left[\gamma^2 (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)}t)^2 c^2 - \gamma^2 (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)})^2\right]^{\frac{3}{2}}} \left[\mathbf{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} - \gamma \mathbf{v}^{(0)}t \right].
 \end{aligned}$$

Wir setzen jetzt

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} - \gamma \mathbf{v}^{(0)}t \quad (7.181)$$

und beobachten

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' &= \left[\mathbf{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} - \gamma \mathbf{v}^{(0)}t \right]^2 \quad (7.182) \\
 &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \right)^2 \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right)^2 \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2} + \gamma^2 [\mathbf{v}^{(0)}]^2 t^2 + 2 \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right) \\
 &\quad - 2\gamma (\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{r}) t - 2\gamma \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right) \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2} t \\
 &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \left[\left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \right)^2 \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2} + 2 \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \right] \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right)^2 + \gamma^2 [\mathbf{v}^{(0)}]^2 t^2 \\
 &\quad - \left[1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2} \right] 2\gamma (\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{r}) t \\
 &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \left[\left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) + 2 \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \right] \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right)^2 + \gamma^2 [\mathbf{v}^{(0)}]^2 t^2 \\
 &\quad - \left[1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \right] 2\gamma (\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{r}) t.
 \end{aligned}$$

7.6 Strahlung beschleunigter Punktladungen

Weitere Vereinfachungen folgen aus den Identitäten

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) + \frac{2\gamma^2}{\gamma+1} & (7.183) \\
 &= \frac{\gamma^2(\gamma^2-1)}{(\gamma+1)^2} + \frac{2\gamma^2}{\gamma+1} = \frac{\gamma^2(\gamma-1)(\gamma+1)}{(\gamma+1)^2} + \frac{2\gamma^2}{\gamma+1} \\
 &= \frac{\gamma^2(\gamma-1) + 2\gamma^2}{\gamma+1} = \frac{\gamma^2(\gamma+1)}{\gamma+1} = \gamma^2
 \end{aligned}$$

und

$$1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) = 1 + \frac{\gamma^2-1}{\gamma+1} = 1 + \frac{(\gamma-1)(\gamma+1)}{\gamma+1} = 1 + (\gamma-1) = \gamma. \quad (7.184)$$

Damit schreiben wir jetzt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \gamma^2 \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right)^2 + \gamma^2 [\mathbf{v}^{(0)}]^2 t^2 - 2\gamma^2 (\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{r}) t & (7.185) \\
 &= \gamma^2 \left[\frac{1}{\gamma^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right)^2 + [\mathbf{v}^{(0)}]^2 t^2 - 2(\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{r}) t \right] \\
 &= \gamma^2 \left[\left(1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2} \right) \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right)^2 + [\mathbf{v}^{(0)}]^2 t^2 - 2(\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{r}) t \right] \\
 &= \gamma^2 \left[\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - 2(\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{r}) t + [\mathbf{v}^{(0)}]^2 t^2 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right)^2 \right] \\
 &= \gamma^2 \left[(\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)} t)^2 c^2 - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)})^2 \right].
 \end{aligned}$$

Somit ist gezeigt

$$|\mathbf{r}'| = \gamma \cdot \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)} t)^2 c^2 - (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)})^2}. \quad (7.186)$$

Das elektrische Feld im Ruhesystem einer mit konstanter Geschwindigkeit beweg-

7 Elektromagnetische Strahlung

ten Punktladung ist ein *statisches* Coulomb-Feld, wie eingangs behauptet!

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} - \gamma \mathbf{v}^{(0)} t}{\left[\gamma^2 (\mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)} t)^2 c^2 - \gamma^2 (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}^{(0)})^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|^3}.\end{aligned}\quad (7.187)$$

Die Transformation (7.181) ist eine Lorentz-Transformation, die die Koordinaten (\mathbf{r}', t') im Ruhesystem S' durch die Koordinaten (\mathbf{r}, t) des Laborsystems S ausdrückt.

Bemerkung

Wird zur Zeit $t = 0$ eine elektromagnetische Kugelwelle (Lichtblitz) am Ort $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{0}$ im Laborkoordinatensystem S erzeugt, so gilt für die sich ausbreitende Wellenfront

$$|\mathbf{r}| = |ct|. \quad (7.188)$$

Da die Lichtgeschwindigkeit in einem mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}^{(0)}$ bewegten Bezugssystem S' den gleichen Wert c besitzt wie in S , ist diese Aussage auch richtig, wenn die Beschreibung der Wellenfront dieser Kugelwelle vom System S' her erfolgt

$$|\mathbf{r}'| = |ct'|. \quad (7.189)$$

Allerdings muss dazu die Vorstellung einer für die Bezugssysteme S und S' gültigen *universellen* Zeit aufgegeben werden. Es gilt für die Transformation der Zeit vom Bezugssystem S zum Bezugssystem S' , wenn sich S' relativ zu S mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}^{(0)}$ bewegt

$$t' = \pm \gamma \left(t - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{r} \right). \quad (7.190)$$

7.6 Strahlung beschleunigter Punktladungen

Einsetzen von (7.181) und (7.190) ergibt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' - (ct')^2 &= \gamma^2 \left[\frac{1}{\gamma^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right)^2 + [\mathbf{v}^{(0)}]^2 t^2 - 2 \left(\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{r} \right) t - c^2 t^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{r} \right) t - \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{r} \right)^2 \right] \\
 &= \gamma^2 \left[\frac{1}{\gamma^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \left([\mathbf{v}^{(0)}]^2 - c^2 \right) t^2 \right] \\
 &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \gamma^2 \left(\left[\mathbf{v}^{(0)} \right]^2 - c^2 \right) t^2 \\
 &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2}} \left(\frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2} - 1 \right) c^2 t^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - (ct)^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{7.191}$$

Die Gesamtheit aller Koordinatensysteme, die durch alle möglichen Lorentz-Transformationen auseinander hervorgehen, sind die Inertial-Systeme der modernen Physik. Ihre Bedeutung beruht darauf, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen den selben konstanten Wert $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ besitzt. Im Grenzfall kleiner Relativgeschwindigkeit $|\mathbf{v}^{(0)}| \ll c$ gehen die Lorentz-Transformationen (7.181) und (7.190) in Galilei-Transformationen über

$$\begin{aligned}
 \frac{|\mathbf{v}^{(0)}|}{c} \ll 1, \quad \gamma &= 1 + \mathcal{O} \left(\frac{|\mathbf{v}^{(0)}|^2}{c^2} \right) \\
 t' &= t \\
 \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{v}^{(0)} t.
 \end{aligned} \tag{7.192}$$

Die bekannten Gesetze der klassischen Newtonschen Physik, der Statistischen Physik und Thermodynamik sowie der Quantenmechanik sind demnach gültig für kleine (nicht relativistische) Geschwindigkeiten, und bedürfen einer Revision, wenn relativistische Geschwindigkeiten eine Rolle spielen.

Relativistische Geschwindigkeiten

Den angegebenen Transformationsgesetzen für Zeit und Ort entnehmen wir ein entsprechendes Transformationsgesetz für Geschwindigkeiten. Bewegt sich eine

7 Elektromagnetische Strahlung

Punktladung mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ im Bezugssystem S , so ist deren Geschwindigkeit im Bezugssystem S' gegeben zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}' &= \frac{d\mathbf{r}'(t')}{dt'} = \frac{d\mathbf{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot d\mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} - \gamma \mathbf{v}^{(0)} dt}{\gamma \left(dt - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \cdot d\mathbf{r} \right)} & (7.193) \\
 &= \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} - \gamma \mathbf{v}^{(0)}}{\gamma \left(1 - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)} \\
 &= \frac{\mathbf{v} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \mathbf{v} \right) \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} - \gamma \mathbf{v}^{(0)}}{\gamma \left(1 - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{v} \right)}.
 \end{aligned}$$

Für den Spezialfall, dass die Geschwindigkeiten \mathbf{v} und $\mathbf{v}^{(0)}$ im Koordinatensystem S *parallel* orientiert sind, folgt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &\parallel \mathbf{v}^{(0)} & (7.194) \\
 \mathbf{v}' &= \frac{\left(1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{[\mathbf{v}^{(0)}]^2}{c^2} \right) \mathbf{v} - \gamma \mathbf{v}^{(0)}}{\gamma \left(1 - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{v} \right)} \\
 &= \frac{\overbrace{\left[1 + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \right]}^{=\gamma} \mathbf{v} - \gamma \mathbf{v}^{(0)}}{\gamma \left(1 - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{v} \right)} \\
 &= \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}^{(0)}}{1 - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{v}}.
 \end{aligned}$$

Sind \mathbf{v} und $\mathbf{v}^{(0)}$ im Koordinatensystem S dagegen *orthogonal* orientiert, d.h. $\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{v} = 0$, so gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &\perp \mathbf{v}^{(0)} & (7.195) \\
 \mathbf{v}' &= \frac{\mathbf{v}}{\gamma} - \mathbf{v}^{(0)}.
 \end{aligned}$$

Dass $\mathbf{v}^{(0)}$ und \mathbf{v} hier nicht symmetrisch auftreten, rührt davon her, dass Lorentz-Transformationen nicht kommutativ sind. Das Ergebnis der Hintereinanderausfüh-

7.6 Strahlung beschleunigter Punktladungen

Die Komposition verschiedener Lorentz-Transformationen ist offensichtlich von deren Reihenfolge abhängig.

7 Elektromagnetische Strahlung

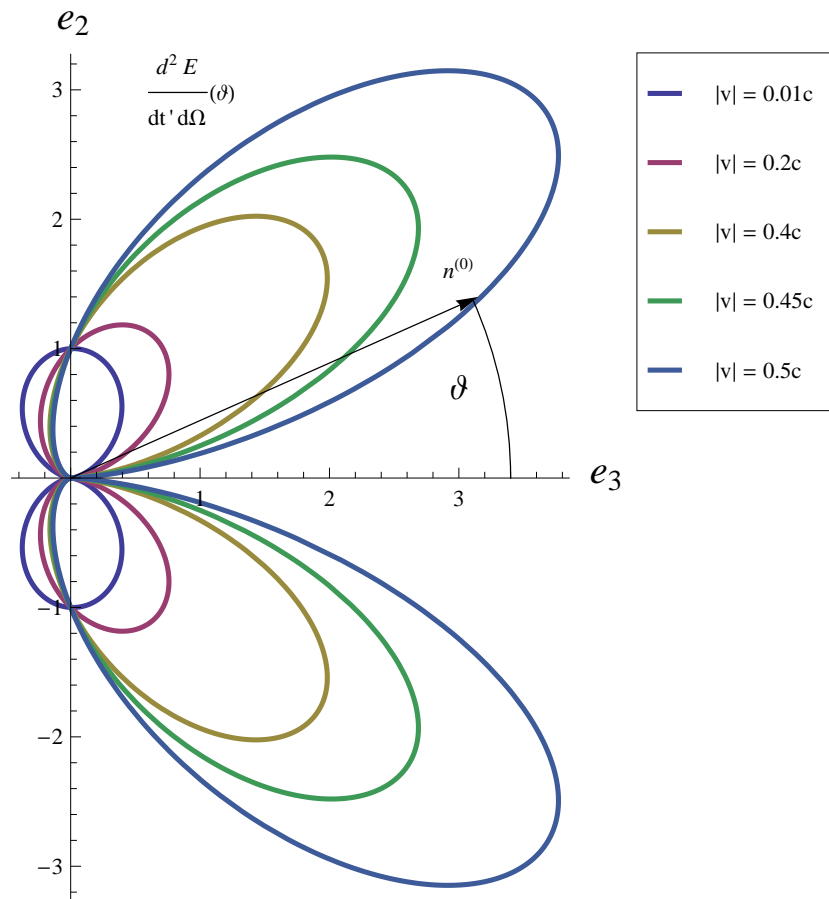


Abbildung 7.1: Die Strahlungsleistung bei konstanter Beschleunigung. Dabei sind sowohl die Geschwindigkeit als auch die Beschleunigung parallel zum Einheitsvektor e_3 des Koordinatensystems, d.h. $\mathbf{v}^{(0)}(t') \parallel \pm \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \parallel e_3$.

7.6 Strahlung beschleunigter Punktladungen

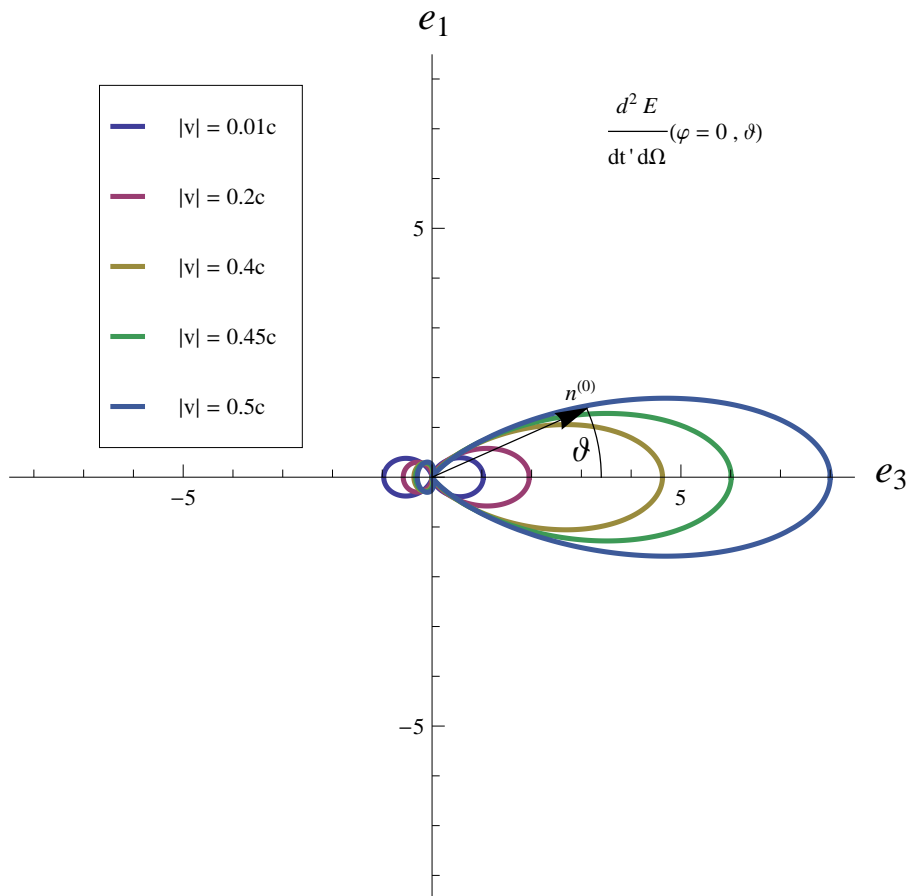


Abbildung 7.2: Die Winkelabhängigkeit der Strahlungsleistung bei zur Geschwindigkeit senkrechter Beschleunigung für $\varphi = 0$.

7 Elektromagnetische Strahlung

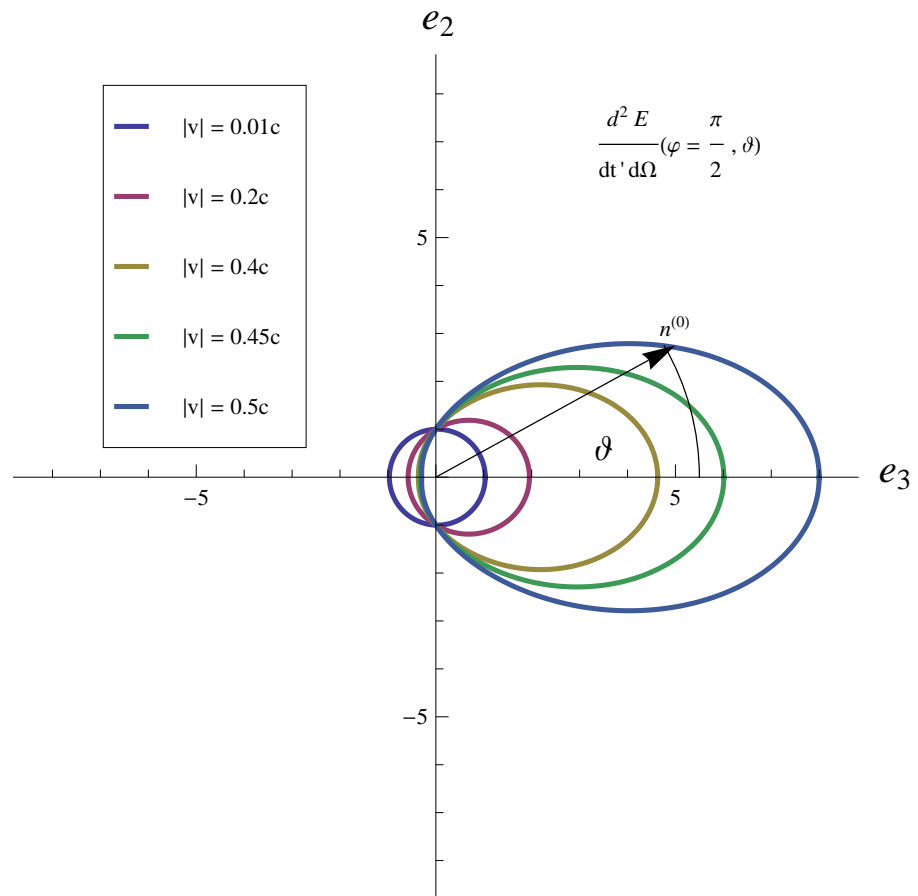


Abbildung 7.3: Die Winkelabhängigkeit der Strahlungsleistung bei zur Geschwindigkeit senkrechter Beschleunigung für $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

8 Elektromagnetische Wellen

Spezielle Lösungen der homogenen Wellengleichung

$$\left(-\nabla_r^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (8.1)$$

im freien Raum sind die monochromatischen *ebenen Wellen*

$$u(\mathbf{r}, t) = u_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t). \quad (8.2)$$

Diese Lösungen sind dadurch charakterisiert, dass sie zu einer festen Zeit $t = t_0$ für $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = 0$, also auf allen Ebenen senkrecht zum Vektor \mathbf{k} , einen von t_0 abhängigen konstanten Wert annehmen:

$$[u(\mathbf{r}, t = t_0)]_{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = 0} = u_0 e^{-i\omega t_0}. \quad (8.3)$$

Bei ebenen Wellen sind die Ebenen konstanter *Amplitude* identisch mit den Ebenen konstanter *Phase*. Diese bewegen sich mit Phasengeschwindigkeit $c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}$ in Richtung des Wellenzahlvektors \mathbf{k} . Einsetzen in (8.1) ergibt dann im freien Raum (Vakuum) die Dispersionsrelation

$$\omega = c |\mathbf{k}|. \quad (8.4)$$

Die Wellenlänge λ und die Frequenz f einer monochromatischen ebenen Welle sind über den Wellenzahlvektor \mathbf{k} und die Kreisfrequenz ω miteinander verknüpft

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}| &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ \omega &= 2\pi f. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Ebene monochromatische elektromagnetische Wellen besitzen demnach die Gestalt

$$\begin{aligned} a &\in \{x, y, z\} \\ E_a(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[E_a^{(0)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \right] \\ B_a(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[B_a^{(0)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \right]. \end{aligned} \quad (8.6)$$

8 Elektromagnetische Wellen

Damit dies auch Lösungen der Maxwell-Gleichungen (1.21) und (1.22) im freien Raum sind, müssen die im allgemeinen komplexen Feldamplituden $E_a^{(0)}$ und $B_a^{(0)}$ noch die folgenden Nebenbedingungen erfüllen (SI-Einheiten, $\kappa = 1$):

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^{(0)} &= 0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^{(0)} \\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}^{(0)} &= \omega \mathbf{B}^{(0)} \\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{B}^{(0)} &= -\mu_0 \varepsilon_0 \omega \mathbf{E}^{(0)}.\end{aligned}\tag{8.7}$$

Es handelt sich offensichtlich um *Transversalwellen*, denn die Amplituden $\mathbf{E}^{(0)}$ und $\mathbf{B}^{(0)}$ sind orthogonal zur Ausbreitungsrichtung $\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$. Desweiteren sind $\mathbf{E}^{(0)}$ und $\mathbf{B}^{(0)}$ orthogonal, d.h. $\mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{B}^{(0)} = 0$.

8.1 Elliptische, zirkulare und lineare Polarisierung

Die zeitliche Abhängigkeit des elektrischen Feldvektors $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ einer transversalen ebenen Welle wird durch den komplexen Amplitudenvektor $\mathbf{E}^{(0)}$ charakterisiert. Im allgemeinen Fall beschreibt der Endpunkt des Vektors $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ am Ort \mathbf{r} als Funktion der Zeit t eine *Ellipse*. Um dies zu zeigen, führen wir einen Phasenwinkel χ mit der Eigenschaft

$$\mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{E}^{(0)} e^{-2i\chi} \geq 0\tag{8.8}$$

ein. Sei nun

$$\mathbf{E}^{(\chi)} = \mathbf{E}^{(0)} e^{-i\chi}.\tag{8.9}$$

Dann gilt per definitionem

$$\mathbf{E}^{(\chi)} \cdot \mathbf{E}^{(\chi)} \geq 0.\tag{8.10}$$

Wir schreiben

$$\mathbf{E}^{(\chi)} = \mathbf{e}^{(I,\chi)} + i\mathbf{e}^{(II,\chi)},\tag{8.11}$$

wobei jetzt die kartesischen Komponenten $e_a^{(I,\chi)}$ und $e_a^{(II,\chi)}$ der Vektoren $\mathbf{e}^{(I,\chi)}$ und $\mathbf{e}^{(II,\chi)}$ reellwertig sind. Aufgrund der Eigenschaft (8.10) gilt

$$0 \leq \mathbf{E}^{(\chi)} \cdot \mathbf{E}^{(\chi)} = \mathbf{e}^{(I,\chi)} \cdot \mathbf{e}^{(I,\chi)} - \mathbf{e}^{(II,\chi)} \cdot \mathbf{e}^{(II,\chi)} + 2i\mathbf{e}^{(I,\chi)} \cdot \mathbf{e}^{(II,\chi)}\tag{8.12}$$

Da $\mathbf{E}^{(\chi)} \cdot \mathbf{E}^{(\chi)}$ reellwertig ist, müssen $\mathbf{e}^{(I,\chi)}$ und $\mathbf{e}^{(II,\chi)}$ orthogonal orientiert sein, also

$$\mathbf{e}^{(I,\chi)} \cdot \mathbf{e}^{(II,\chi)} = 0.\tag{8.13}$$

8.2 Energiedichte und Poynting-Vektor für ebene Wellen

Folglich gilt

$$|\mathbf{e}^{(II,\chi)}| \leq |\mathbf{e}^{(I,\chi)}|. \quad (8.14)$$

Also ist

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}^{(0)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}^{(\chi)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t + i\chi) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \left(\mathbf{e}^{(I,\chi)} + i\mathbf{e}^{(II,\chi)} \right) [\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \chi) + i \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \chi)] \right\} \\ &= \mathbf{e}^{(I,\chi)} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \chi) - \mathbf{e}^{(II,\chi)} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \chi). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Der elektromagnetische Feldvektor $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ einer ebenen monochromatischen (!) transversalen elektromagnetischen Welle beschreibt demnach in der Ebene *senkrecht* zur Ausbreitungsrichtung \mathbf{k} eine *Ellipse* mit Halbachsen $\mathbf{e}^{(I,\chi)}$ und $\mathbf{e}^{(II,\chi)}$. Im Fall $\mathbf{e}^{(II,\chi)} = \mathbf{0}$ zeigt $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ immer in dieselbe Richtung, die elektromagnetische Welle ist *linear polarisiert*. Im speziellen Fall $|\mathbf{e}^{(I,\chi)}| = |\mathbf{e}^{(II,\chi)}|$ beschreibt $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ am Ort \mathbf{r} einen *Kreis* mit Radius $|\mathbf{e}^{(I,\chi)}|$, man spricht von *zirkularer Polarisierung*, genauer liegt für $(\mathbf{e}^{(I,\chi)} \wedge \mathbf{e}^{(II,\chi)}) \cdot \mathbf{k} > 0$ eine *linkszirkular* polarisierte Welle vor, für $(\mathbf{e}^{(I,\chi)} \wedge \mathbf{e}^{(II,\chi)}) \cdot \mathbf{k} < 0$ ist es eine *rechtszirkular* polarisierte Welle.

8.2 Energiedichte und Poynting-Vektor für ebene Wellen

Die Energiedichte einer im freien Raum ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) propagierenden monochromatischen elektromagnetischen Welle ist gemäß (6.24) gegeben zu

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \left[\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a \in \{x, y, z\}} \left[\varepsilon_0 \operatorname{Re} \left[E_a^{(0)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \right] \operatorname{Re} \left[E_a^{(0)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_0} \operatorname{Re} \left[B_a^{(0)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \right] \operatorname{Re} \left[B_a^{(0)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \right] \right] \end{aligned} \quad (8.16)$$

8 Elektromagnetische Wellen

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{a \in \{x,y,z\}} \left[\frac{\varepsilon_0}{4} \left[E_a^{(0)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) + (E_a^{(0)})^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \right] \right. \\
&\quad \times \left[E_a^{(0)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) + (E_a^{(0)})^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4\mu_0} \left[B_a^{(0)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) + (B_a^{(0)})^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \right] \\
&\quad \times \left[B_a^{(0)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) + (B_a^{(0)})^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \right] \Big] \\
&= \frac{1}{4} \sum_{a \in \{x,y,z\}} \left[\varepsilon_0 E_a^{(0)} (E_a^{(0)})^\dagger + \frac{1}{\mu_0} B_a^{(0)} (B_a^{(0)})^\dagger \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left[\sum_{a \in \{x,y,z\}} \left(\varepsilon_0 E_a^{(0)} E_a^{(0)} + \frac{1}{\mu_0} B_a^{(0)} B_a^{(0)} \right) \exp(2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - 2i\omega t) \right].
\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in \{x,y,z\}} E_a^{(0)} (E_a^{(0)})^\dagger &= \mathbf{E}^{(0)} \cdot (\mathbf{E}^{(0)})^\dagger & (8.17) \\
\sum_{a \in \{x,y,z\}} B_a^{(0)} (B_a^{(0)})^\dagger &= \left(\frac{\mathbf{k}}{\kappa\omega} \wedge \mathbf{E}^{(0)} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{k}}{\kappa\omega} \wedge \mathbf{E}^{(0)} \right)^\dagger \\
&= \frac{|\mathbf{k}|^2}{\kappa^2\omega^2} \mathbf{E}^{(0)} \cdot (\mathbf{E}^{(0)})^\dagger - \frac{1}{\kappa^2\omega^2} \underbrace{\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^{(0)}}_{=0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^{(0)})^\dagger \\
&= \frac{1}{\kappa^2 c^2} \mathbf{E}^{(0)} \cdot (\mathbf{E}^{(0)})^\dagger \\
&= \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}^{(0)} \cdot (\mathbf{E}^{(0)})^\dagger \\
\sum_{a \in \{x,y,z\}} B_a^{(0)} B_a^{(0)} &= \left(\frac{\mathbf{k}}{\kappa\omega} \wedge \mathbf{E}^{(0)} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{k}}{\kappa\omega} \wedge \mathbf{E}^{(0)} \right) \\
&= \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{E}^{(0)}.
\end{aligned}$$

Das Ergebnis für die Energiedichte einer im freien Raum propagierenden ebenen monochromatischen elektromagnetischen Welle ist

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^{(0)} \cdot (\mathbf{E}^{(0)})^\dagger + \frac{\varepsilon_0}{2} \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{E}^{(0)} \exp(2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - 2i\omega t) \right]. \quad (8.18)$$

8.2 Energiedichte und Poynting-Vektor für ebene Wellen

Die entsprechende Energiestromdichte für monochromatische ebene elektromagnetische Wellen ist durch den Poynting-Vektor \mathbf{S} gegeben zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) &\equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\kappa\mu_0} & (8.19) \\
 &= \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}^{(0)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \right] \wedge \operatorname{Re} \left[\frac{\mathbf{B}^{(0)}}{\kappa\mu_0} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[\mathbf{E}^{(0)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) + (\mathbf{E}^{(0)})^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \right] \\
 &\quad \wedge \left[\frac{\mathbf{B}^{(0)}}{\kappa\mu_0} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) + \frac{(\mathbf{B}^{(0)})^\dagger}{\kappa\mu_0} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[\mathbf{E}^{(0)} \wedge \frac{(\mathbf{B}^{(0)})^\dagger}{\kappa\mu_0} + (\mathbf{E}^{(0)})^\dagger \wedge \frac{\mathbf{B}^{(0)}}{\kappa\mu_0} \right] + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}^{(0)} \wedge \frac{\mathbf{B}^{(0)}}{\kappa\mu_0} \exp(2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - 2i\omega t) \right].
 \end{aligned}$$

Im zeitlichen Mittel gilt demnach für die Energiestromdichte einer monochromatischen ebenen Welle

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}^{(0)} \wedge \frac{(\mathbf{B}^{(0)})^\dagger}{\kappa\mu_0} \right]. \quad (8.20)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}^{(0)} \wedge \frac{(\mathbf{B}^{(0)})^\dagger}{\kappa\mu_0} &= \mathbf{E}^{(0)} \wedge \left(\frac{\mathbf{k}}{\kappa^2\mu_0\omega} \wedge \mathbf{E}^{(0)} \right)^\dagger & (8.21) \\
 &= \frac{1}{\kappa^2\mu_0\omega} \left[\mathbf{E}^{(0)} \cdot (\mathbf{E}^{(0)})^\dagger \right] \mathbf{k} - \frac{1}{\kappa^2\mu_0\omega} \underbrace{\mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{k}}_{=0} (\mathbf{E}^{(0)})^\dagger \\
 &= \frac{1}{\kappa^2\mu_0\omega} \left[\mathbf{E}^{(0)} \cdot (\mathbf{E}^{(0)})^\dagger \right] \mathbf{k} \\
 \mathbf{E}^{(0)} \wedge \frac{\mathbf{B}^{(0)}}{\kappa\mu_0} &= \mathbf{E}^{(0)} \wedge \left(\frac{\mathbf{k}}{\kappa^2\mu_0\omega} \wedge \mathbf{E}^{(0)} \right) \\
 &= \frac{1}{\kappa^2\mu_0\omega} (\mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{E}^{(0)}) \mathbf{k}.
 \end{aligned}$$

8 Elektromagnetische Wellen

Einsetzen zeigt, dass die Energiestromdichte \mathbf{S} einer im Vakuum propagierenden ebenen monochromatischen elektromagnetischen Welle in der Tat proportional zu deren Energiedichte u ist:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\kappa\mu_0} & (8.22) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\kappa^2 \mu_0 \omega} \left[\mathbf{E}^{(0)} \cdot (\mathbf{E}^{(0)})^\dagger \right] \mathbf{k} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\kappa^2 \mu_0 \omega} (\mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{E}^{(0)}) \mathbf{k} \exp(2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - 2i\omega t) \right] \\
 &= \frac{1}{\kappa^2 \mu_0 \varepsilon_0} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^{(0)} \cdot (\mathbf{E}^{(0)})^\dagger + \frac{\varepsilon_0}{2} \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}^{(0)} \cdot \mathbf{E}^{(0)} \exp(2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - 2i\omega t) \right] \right)}_{\equiv u} \frac{\mathbf{k}}{\omega} \\
 &= c^2 u(\mathbf{r}, t) \frac{\mathbf{k}}{\omega} = c^2 u(\mathbf{r}, t) \frac{\mathbf{k}}{c|\mathbf{k}|}
 \end{aligned}$$

Die Energiestromdichte \mathbf{S} (Poynting-Vektor) ist demnach

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = c \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} u(\mathbf{r}, t) = c \hat{\mathbf{k}} u(\mathbf{r}, t) \quad (8.23)$$

Die Energie strömt entlang der Ausbreitungsrichtung $\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$ der Welle, und zwar (im Vakuum) mit Lichtgeschwindigkeit c . Die Impulsstromdichte der elektromagnetischen Welle ist gemäß (6.39) gegeben zu

$$\boxed{\mathbf{p}^{(S)} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \hat{\mathbf{k}} \frac{u}{c}} \quad (8.24)$$

8.3 Materialgleichungen für Ohmsche Leiter und transparente Dielektrika

Beschränken wir die Diskussion zunächst auf den Fall, dass die Materie relativ zu einem Inertialsystem *ruht*. Auch wollen wir hier nur *isotrope* Materialien betrachten (keine uniaxiale oder biaxiale Symmetrie). Im Rahmen der *Linearen Antworttheorie* sind die sog. Materialgleichungen für ruhende polarisierbare bzw. magnetisierbare Materialien über *materialspezifische* Integralkerne $\chi^{(\text{el})}$ und $\chi^{(\text{mag})}$ gegeben

8.3 Materialgleichungen für Ohmsche Leiter und transparente Dielektrika

zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) &= \int d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') = [\sigma \circ \mathbf{E}](\mathbf{r}, t) \\
 \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \int d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi^{(\text{el})}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') = [\chi^{(\text{el})} \circ \varepsilon_0 \mathbf{E}](\mathbf{r}, t) \\
 \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) &= \int d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi^{(\text{mag})}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t') = \left[\chi^{(\text{mag})} \circ \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \right](\mathbf{r}, t).
 \end{aligned} \tag{8.25}$$

Polarisierung und Magnetisierung im betrachteten isotropen linearen Medium sind proportional zum lokalen elektrischen Feld \mathbf{E} und zum lokalen magnetischen Induktionsfeld \mathbf{B} . Dabei ist für die betreffenden Integralkerne die *Kausalitätsbedingung* zu beachten

$$\begin{aligned}
 \sigma(\mathbf{r}, t) &= 0 \text{ für } t < 0 \\
 \chi^{(\text{el})}(\mathbf{r}, t) &= 0 \text{ für } t < 0 \\
 \chi^{(\text{mag})}(\mathbf{r}, t) &= 0 \text{ für } t < 0,
 \end{aligned} \tag{8.26}$$

denn die induzierte Antwort des Materials (z.B. Stromfluss, elektrische Polarisierung, Magnetisierung) kann ja nur durch elektromagnetische Felder verursacht sein, die zu einer früheren Zeit $t' < t$ gewirkt haben!

Mit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \left[(1 + \chi^{(\text{el})}) \circ \varepsilon_0 \mathbf{E} \right](\mathbf{r}, t) \\
 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \left[(1 - \chi^{(\text{mag})}) \circ \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \right](\mathbf{r}, t)
 \end{aligned} \tag{8.27}$$

erhalten wir dann zur Berechnung der elektromagnetischen Felder im Inneren der ruhenden Materie den folgenden Satz von Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 \text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \rho^{(f)}(\mathbf{r}, t) \\
 \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \\
 \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{0} \\
 \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0.
 \end{aligned} \tag{8.28}$$

8 Elektromagnetische Wellen

Selbstverständlich ist die Ladungserhaltung gewährleistet, denn

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{div} \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \\ &= \operatorname{div} \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho^{(f)}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (8.29)$$

Da der Zusammenhang (8.27) zwischen den Feldern $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ mit den elektromagnetischen Feldern $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ im allgemeinen weder *lokal* noch *instantan* ist, handelt es sich bei diesem Gleichungssystem (anders als bei den Maxwell-Gleichungen im Vakuum) nicht um ein System von gekoppelten partiellen Differentialgleichungen, sondern um ein System von gekoppelten *Integro-Differentialgleichungen!* Für *niederfrequente* elektromagnetische Signale, deren Wellenlänge λ erheblich größer ist als der Abstand a nächster Nachbaratome im Festkörper, darf die *Ortsabhängigkeit* der Integralkerne vernachlässigt werden. In dem Fall schreiben wir

$$\begin{aligned} \lambda &\gg a & (8.30) \\ \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \sigma(t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') = [\sigma \circ \mathbf{E}](\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi^{(\text{el})}(t-t') \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = [\chi^{(\text{el})} \circ \varepsilon_0 \mathbf{E}](\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi^{(\text{mag})}(t-t') \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t') = \left[\chi^{(\text{mag})} \circ \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \right](\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Die *Faltungsstruktur* der Ausdrücke (8.30) legt es nahe, anstelle von zeitlich veränderlichen Funktionen $F(\mathbf{r}, t)$ mit

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}, t) \in \{ &E_a(\mathbf{r}, t), B_a(\mathbf{r}, t), D_a(\mathbf{r}, t), H_a(\mathbf{r}, t), \\ &P_a(\mathbf{r}, t), M_a(\mathbf{r}, t), j_a^{(f)}(\mathbf{r}, t), \rho^{(f)}(\mathbf{r}, t) \} \end{aligned} \quad (8.31)$$

die *Amplitudenfunktionen* $\hat{F}(\mathbf{r}, \omega)$ dieser Funktionen zu betrachten:

$$\begin{aligned} \hat{F}(\mathbf{r}, \omega) \in \{ &\hat{E}_a(\mathbf{r}, \omega), \hat{B}_a(\mathbf{r}, \omega), \hat{D}_a(\mathbf{r}, \omega), \hat{H}_a(\mathbf{r}, \omega), \\ &\hat{P}_a(\mathbf{r}, \omega), \hat{M}_a(\mathbf{r}, \omega), \hat{j}_a^{(f)}(\mathbf{r}, \omega), \hat{\rho}^{(f)}(\mathbf{r}, \omega) \}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

8.3 Materialgleichungen für Ohmsche Leiter und transparente Dielektrika

Diese hängen mit den ursprünglichen zeitlich veränderlichen Funktionen $F(\mathbf{r}, t)$ über eine *Fourier-Transformation* bezüglich der Zeit t zusammen

$$F(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \hat{F}(\mathbf{r}, \omega). \quad (8.33)$$

Die inverse Fourier-Transformation liefert

$$\hat{F}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega t'} F(\mathbf{r}, t'). \quad (8.34)$$

Allgemein ist $\hat{F}(\mathbf{r}, \omega)$ eine komplexwertige Größe, wobei notwendig gilt

$$\hat{F}(\mathbf{r}, -\omega) = [\hat{F}(\mathbf{r}, \omega)]^\dagger, \quad (8.35)$$

damit $F(\mathbf{r}, t)$ reellwertig ist, d.h.

$$F(\mathbf{r}, t) = [F(\mathbf{r}, t)]^\dagger. \quad (8.36)$$

Mit dem *Faltungssatz* für Fourier-Transformierte (siehe Anhang F) erhalten wir jetzt für die *monochromatische Amplitude* der kartesischen Komponenten der elektrischen Polarisierung

$$\begin{aligned} \hat{P}_a(\mathbf{r}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} P_a(\mathbf{r}, t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi^{(\text{el})}(t-t') \varepsilon_0 E_a(\mathbf{r}, t') \\ &= \hat{\chi}^{(\text{el})}(\omega) \varepsilon_0 \hat{E}_a(\mathbf{r}, \omega). \end{aligned} \quad (8.37)$$

Eine entsprechende Überlegung gilt für die Magnetisierung und die Stromdichte. Die Amplituden der Stromdichte, der elektrischen Polarisierung bzw. Magnetisierung sind somit gegeben zu

$$\begin{aligned} \hat{j}_a^{(f)}(\mathbf{r}, \omega) &= \hat{\sigma}(\omega) \hat{E}_a(\mathbf{r}, \omega) \\ \hat{P}_a(\mathbf{r}, \omega) &= \hat{\chi}^{(\text{el})}(\omega) \varepsilon_0 \hat{E}_a(\mathbf{r}, \omega) \\ \hat{M}_a(\mathbf{r}, \omega) &= \hat{\chi}^{(\text{mag})}(\omega) \frac{1}{\mu_0} \hat{B}_a(\mathbf{r}, \omega). \end{aligned}$$

8 Elektromagnetische Wellen

Hier bezeichnet $\hat{\sigma}(\omega)$

$$\hat{\sigma}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \sigma(t) \quad (8.38)$$

die (lineare) Wechselstromleitfähigkeit und $\hat{\chi}(\omega) \in \{\hat{\chi}^{(\text{el})}(\omega), \hat{\chi}^{(\text{mag})}(\omega)\}$ ist dann die Fouriertransformierte der entsprechenden materialspezifischen Integralkerne $\chi(t) \in \{\chi^{(\text{el})}(t), \chi^{(\text{mag})}(t)\}$ zur Beschreibung der Polarisierung bzw. Magnetisierung des Materials im Rahmen der Linear-Response-Theorie

$$\hat{\chi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \chi(t). \quad (8.39)$$

Demnach ist jetzt

$$\begin{aligned} \widehat{D}_a(\mathbf{r}, \omega) &= [1 + \hat{\chi}^{(\text{el})}(\omega)] \varepsilon_0 \widehat{E}_a(\mathbf{r}, \omega) \\ \widehat{H}_a(\mathbf{r}, \omega) &= [1 - \chi^{(\text{mag})}(\omega)] \circ \frac{1}{\mu_0} \widehat{B}_a(\mathbf{r}, \omega). \end{aligned} \quad (8.40)$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \widehat{\varepsilon}(\omega) &= [1 + \hat{\chi}^{(\text{el})}(\omega)] \varepsilon_0 \\ \frac{1}{\widehat{\mu}(\omega)} &= [1 - \chi^{(\text{mag})}(\omega)] \circ \frac{1}{\mu_0}. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \widehat{D}_a(\mathbf{r}, \omega) &= \widehat{\varepsilon}(\omega) \widehat{E}_a(\mathbf{r}, \omega) \\ \widehat{B}_a(\mathbf{r}, \omega) &= \widehat{\mu}(\omega) \widehat{H}_a(\mathbf{r}, \omega). \end{aligned} \quad (8.42)$$

Die Bestimmungsgleichungen (8.28) reduzieren sich nach dem Gesagten jetzt auf Bestimmungsgleichungen für die entsprechenden Feldamplituden

$$\begin{aligned} \text{div } \widehat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) &= \widehat{\rho}^{(f)}(\mathbf{r}, \omega) \\ \text{rot } \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) &= [\hat{\sigma}(\omega) - i\omega \widehat{\varepsilon}(\omega)] \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \text{rot } \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= i\omega \widehat{\mu}(\omega) \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \text{div } \widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) &= 0. \end{aligned} \quad (8.43)$$

8.3 Materialgleichungen für Ohmsche Leiter und transparente Dielektrika

Wir beobachten

$$\begin{aligned}
 0 &= \operatorname{div} \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \\
 &= \operatorname{div} \left([\widehat{\sigma}(\omega) - i\omega\widehat{\varepsilon}(\omega)] \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \right) \\
 &= \operatorname{div} \left[\widehat{\sigma}(\omega) \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \right] - i\omega \operatorname{div} \left[\widehat{\varepsilon}(\omega) \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \right] \\
 &= \operatorname{div} \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \operatorname{div} \left[\widehat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) \right] \\
 &= \operatorname{div} \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \widehat{\rho}^{(f)}(\mathbf{r}, \omega). \tag{8.44}
 \end{aligned}$$

Dies ist die Fouriertransformierte der Kontinuitätsgleichung (8.29).

Die zweite Zeile in (8.44) impliziert

$$\begin{aligned}
 0 &= \operatorname{div} \left([\widehat{\sigma}(\omega) - i\omega\widehat{\varepsilon}(\omega)] \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \right) \\
 &= \operatorname{div} \left(\left[\frac{\widehat{\sigma}(\omega)}{\widehat{\varepsilon}(\omega)} - i\omega \right] \widehat{\varepsilon}(\omega) \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \right) \\
 &= \left[\frac{\widehat{\sigma}(\omega)}{\widehat{\varepsilon}(\omega)} - i\omega \right] \operatorname{div} \left(\widehat{\varepsilon}(\omega) \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \right) \\
 &= \left[\frac{\widehat{\sigma}(\omega)}{\widehat{\varepsilon}(\omega)} - i\omega \right] \operatorname{div} \widehat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) \\
 &= \left[\frac{\widehat{\sigma}(\omega)}{\widehat{\varepsilon}(\omega)} - i\omega \right] \widehat{\rho}^{(f)}(\mathbf{r}, \omega).
 \end{aligned}$$

Für Frequenzen ω mit $\widehat{\sigma}(\omega) / \widehat{\varepsilon}(\omega) - i\omega \neq 0$ bleibt nur die Möglichkeit $\widehat{\rho}^{(f)}(\mathbf{r}, \omega) \equiv 0$.

Für dielektrische Isolatoren ist natürlich $\widehat{\sigma}(\omega) \equiv 0$, und folglich ist $\widehat{\rho}^{(f)}(\mathbf{r}, \omega) \equiv 0$ für $\omega \neq 0$. Aber auch für Ohmsche Leiter (dotierte Halbleiter, Metalle, Elektrolyte) dürfen wir, solange wir nicht an zeitlich sehr rasch verlaufenden transienten Einschaltvorgängen auf der Zeitskala der inversen Plasmafrequenz interessiert sind, siehe (4.6), zur Beschreibung monochromatischer elektromagnetischer Signale die Fouriertransformierte der freien Ladungen $\widehat{\rho}^{(f)}(\mathbf{r}, \omega)$ im Inneren des Materials gleich Null setzen.

Es folgt, wenn wir nun $\widehat{\rho}^{(f)}(\mathbf{r}, \omega) \equiv 0$ im Inneren der leitenden, elektrisch polarisierbaren oder magnetisierbaren Materie setzen, mit der Definition der *komplexen Dielektrizitätsfunktion*

$$\widetilde{\varepsilon}(\omega) \equiv \widehat{\varepsilon}(\omega) + i \frac{\widehat{\sigma}(\omega)}{\omega} \tag{8.45}$$

8 Elektromagnetische Wellen

der folgende Satz von homogenen Bestimmungsgleichungen für die elektromagnetischen Felder

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \widehat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) &= 0 \\
 \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) &= -i\omega \tilde{\varepsilon}(\omega) \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \\
 \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= i\omega \tilde{\mu}(\omega) \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \\
 \operatorname{div} \widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) &= 0.
 \end{aligned} \tag{8.46}$$

Bemerkung

In vielen organischen Substanzen, z.B. Aminosäuren, DNA, Zuckerlösungen, ..., sind die Materialgleichungen (8.27) aufgrund der chiralen Symmetrie unzureichend. In dem Fall gibt es neben $\chi^{(\text{el})}$ und $\chi^{(\text{mag})}$ noch eine dritte Responsefunktion $\chi^{(\text{chiral})}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \left[(1 + \chi^{(\text{el})}) \circ \varepsilon_0 \mathbf{E} \right](\mathbf{r}, t) - \left[\chi^{(\text{chiral})} \circ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right](\mathbf{r}, t) \\
 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \left[\frac{\mu_0}{1 - \chi^{(\text{mag})}} \circ \mathbf{H} \right](\mathbf{r}, t) + \left[\chi^{(\text{chiral})} \circ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right](\mathbf{r}, t).
 \end{aligned} \tag{8.47}$$

8.4 Absorption von Strahlungsenergie und Joulesche Verluste

In Gegenwart *monochromatischer* (!) elektromagnetischer Felder

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right] \\
 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right]
 \end{aligned} \tag{8.48}$$

wird ein materieller Körper Ω mit Oberfläche $\partial\Omega$ einem Energiefluss $\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \wedge \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t)$ ausgesetzt (Poynting-Vektor). Bezeichnet jetzt $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ den nach *außen* orientierten Normalenvektor der Oberfläche $\partial\Omega$ des Körpers, so *absorbiert* der Körper Ω insgesamt Energie mit der Rate

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \int_{\partial\Omega} d^2 r' (-\mathbf{n}'_{\partial\Omega}) \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{r}', t) \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r}', t)] \\
 &= - \int_{\Omega} d^3 r \operatorname{div} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)].
 \end{aligned}$$

8.4 Absorption von Strahlungsenergie und Joulesche Verluste

Pro *Einheitsvolumen* des materiellen Körpers ist demnach die *Absorptionsrate* für Strahlungsenergie

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{E}(\mathbf{r})}{dt} &= -\operatorname{div} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] \\
 &= -\operatorname{div} \left\{ \frac{1}{2} [\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} + \widehat{\mathbf{E}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t}] \wedge \frac{1}{2} [\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} + \widehat{\mathbf{H}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t}] \right\} \\
 &= -\frac{1}{4} \operatorname{div} \left\{ \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \wedge \widehat{\mathbf{H}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) + \widehat{\mathbf{E}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) \wedge \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{4} \operatorname{div} \left\{ \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \wedge \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-2i\omega t} + \widehat{\mathbf{E}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) \wedge \widehat{\mathbf{H}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) e^{2i\omega t} \right\}.
 \end{aligned} \tag{8.49}$$

Im *zeitlichen Mittel* fallen die Terme proportional zu $e^{\pm 2i\omega t}$ weg. Es folgt somit für die zeitlich gemittelte Absorbptionsrate für Strahlungsenergie pro Einheitsvolumen des Körpers Ω der Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{d\mathcal{E}(\mathbf{r})}{dt} \right\rangle &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \operatorname{div} [\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \wedge \widehat{\mathbf{H}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega)] \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{H}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) - \widehat{\mathbf{H}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) \cdot \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)] \\
 &= \operatorname{Re} \left[\frac{i\omega}{2} [\tilde{\varepsilon}(\omega)]^\dagger \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \widehat{\mathbf{E}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) + \frac{i\omega}{2} [\tilde{\mu}(\omega)]^\dagger \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \widehat{\mathbf{H}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) \right] \\
 &= \frac{\omega \operatorname{Im} \tilde{\varepsilon}(\omega)}{2} \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \widehat{\mathbf{E}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega \operatorname{Im} \tilde{\mu}(\omega)}{2} \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \widehat{\mathbf{H}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega).
 \end{aligned} \tag{8.50}$$

Hierbei wurde verwendet

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{H}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) &= -[i\omega \tilde{\varepsilon}(\omega)]^\dagger \widehat{\mathbf{E}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) \\
 \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{E}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) &= [i\omega \tilde{\mu}(\omega)]^\dagger \widehat{\mathbf{H}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega).
 \end{aligned} \tag{8.51}$$

Absorption von Strahlung der Frequenz ω findet demnach in einem Material statt, wenn gilt

$$\begin{aligned}
 \omega \operatorname{Im} \tilde{\varepsilon}(\omega) &> 0 \\
 \omega \operatorname{Im} \tilde{\mu}(\omega) &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{8.52}$$

In Metallen ist $\operatorname{Im} \tilde{\varepsilon}(\omega)$ durch die Wechselstromleitfähigkeit $\hat{\sigma}(\omega)$ bestimmt, die obige Formel beschreibt dann die Jouleschen Verluste.

Bemerkung

Bei der Beschreibung von Materialien mit kleiner Leitfähigkeit $\hat{\sigma}(\omega)$ ist es üblich, anstelle von $\hat{\sigma}(\omega)$ den *Verlustwinkel*

$$\tan \delta(\omega) = \frac{\text{Im } \tilde{\varepsilon}(\omega)}{\text{Re } \tilde{\varepsilon}(\omega)} \quad (8.53)$$

zu spezifizieren.

8.5 Ebene Wellen in transparenten und in leitenden Materialien

Wir betrachten jetzt die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in der polarisierbaren und magnetisierbaren (stabilen) Materie. Dazu suchen wir Lösungen der Form

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= \text{Re} \left[\hat{\mathbf{E}}^{(0)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \\ \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) &= \text{Re} \left[\hat{\mathbf{H}}^{(0)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right]. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Dann gilt notwendig

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \wedge \hat{\mathbf{H}}^{(0)} &= -\omega \tilde{\varepsilon}(\omega) \hat{\mathbf{E}}^{(0)} \\ \mathbf{k} \wedge \hat{\mathbf{E}}^{(0)} &= \omega \tilde{\mu}(\omega) \hat{\mathbf{H}}^{(0)} \\ \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) &= \tilde{\varepsilon}(\omega) \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) &= \tilde{\mu}(\omega) \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = 0. \end{aligned} \quad (8.55)$$

Folglich

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \hat{\mathbf{E}}^{(0)}) = \omega \tilde{\mu}(\omega) \mathbf{k} \wedge \hat{\mathbf{H}}^{(0)} = -\omega^2 \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega) \hat{\mathbf{E}}^{(0)}, \quad (8.56)$$

was äquivalent ist zu

$$\left[\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} - \omega^2 \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega) \right] \hat{\mathbf{E}}^{(0)} = \mathbf{0}. \quad (8.57)$$

Es folgt somit die Lösbarkeitsbedingung

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \omega^2 \tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega). \quad (8.58)$$

8.5 Ebene Wellen in transparenten und in leitenden Materialien

Im Unterschied zum freien Raum (Vakuum) kann der gesuchte Wellenzahlvektor \mathbf{k} in einem dielektrischen Material *komplexe* Werte annehmen

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}^{(I)} + i\mathbf{k}^{(II)}. \quad (8.59)$$

Dann folgt mit

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}^{(I)} \cdot \mathbf{k}^{(I)} - \mathbf{k}^{(II)} \cdot \mathbf{k}^{(II)} + 2i\mathbf{k}^{(I)} \cdot \mathbf{k}^{(II)} \quad (8.60)$$

aus der Lösbarkeitsbedingung (8.58) nun

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{(I)} \cdot \mathbf{k}^{(I)} - \mathbf{k}^{(II)} \cdot \mathbf{k}^{(II)} &= \omega^2 \operatorname{Re} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)] \\ 2\mathbf{k}^{(I)} \cdot \mathbf{k}^{(II)} &= \omega^2 \operatorname{Im} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)]. \end{aligned} \quad (8.61)$$

Ist aber in einem Material $\operatorname{Im} [\varepsilon(\omega) \mu(\omega)] \neq 0$, so ist $\mathbf{k}^{(II)} \neq \mathbf{0}$, d.h.

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \operatorname{Re} [\hat{\mathbf{E}}^{(0)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}] = \operatorname{Re} [\hat{\mathbf{E}}^{(0)} e^{i\mathbf{k}^{(I)} \cdot \mathbf{r}} e^{-\mathbf{k}^{(II)} \cdot \mathbf{r}}]. \quad (8.62)$$

Für den Fall, dass $\mathbf{k}^{(II)}$ *nicht* kollinear mit $\mathbf{k}^{(I)}$ ist, handelt es sich um eine sog. *inhomogene* ebene Welle. Bei solchen inhomogenen ebenen Wellen sind die Ebenen konstanter Phase $\mathbf{k}^{(I)} \cdot \mathbf{r} = 0$ verschieden von den Ebenen konstanter Amplitude $\mathbf{k}^{(II)} \cdot \mathbf{r} = 0$. Die elektrische bzw. magnetische Feldstärke ist allerdings bei einer inhomogenen Welle im allgemeinen weder auf den Ebenen konstanter Phase noch auf den Ebenen konstanter Amplitude konstant. Inhomogene ebene Wellen spielen in der optischen Nahfeldmikroskopie eine Rolle.

Im speziellen Fall, dass $\mathbf{k}^{(I)}$ und $\mathbf{k}^{(II)}$ parallel orientiert sind, handelt es sich um eine *gedämpfte* ebene Welle. Die elektrische bzw. magnetische Feldstärke ist dann auf den Ebenen konstanter Phase, die ja bei einer *gedämpften* ebenen Welle identisch mit den Ebenen konstanter Amplitude sind, ebenfalls wieder konstant.

Für $\operatorname{Im} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)] = 0$ ist das Medium *transparent*, d.h. $\mathbf{k}^{(II)} = \mathbf{0}$, die ebene Welle propagiert ohne Dämpfung. In dem Fall schreiben wir

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{k}^{(I)} \\ \operatorname{Re} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)] &= \varepsilon\mu. \end{aligned} \quad (8.63)$$

Also

$$|\mathbf{k}| = \omega \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (8.64)$$

8 Elektromagnetische Wellen

Die Größe

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = c\sqrt{\varepsilon\mu} \geq 1 \quad (8.65)$$

spezifiziert für *transparente* Materialien den sog. *Brechungsindex*. Die Lichtgeschwindigkeit c' in transparenten Medien ist *kleiner* als im Vakuum

$$c' = \frac{c}{n} < c. \quad (8.66)$$

Für $\text{Im} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)] \neq 0$, jedoch $\mathbf{k}^{(I)}$ und $\mathbf{k}^{(II)}$ kollinear orientiert, existiert ein *reeller* Einheitsvektor $\hat{\mathbf{k}}$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{k}^{(I)} + i\mathbf{k}^{(II)} \equiv k\hat{\mathbf{k}} \\ k &= k^{(I)} + ik^{(II)} \equiv (n + i\kappa) \frac{\omega}{c}. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet jetzt n den Realteil und κ den Imaginärteil des (dimensionslosen) komplexen Wellenvektors $\frac{ck}{\omega}$ in einem *absorbierenden* Medium. Aus der Lösbarkeitsbedingung (8.61) folgt sofort

$$\begin{aligned} n^2 - \kappa^2 &= c^2 \text{Re} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)] \\ 2n\kappa &= c^2 \text{Im} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)] \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann ohne weiteres nach den Unbekannten n und κ aufgelöst werden

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{c^2}{2} \left[\text{Re} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)] + \sqrt{(\text{Re} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)])^2 + (\text{Im} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)])^2} \right] \\ \kappa^2 &= \frac{c^2}{2} \left[-\text{Re} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)] + \sqrt{(\text{Re} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)])^2 + (\text{Im} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)])^2} \right]. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Die entsprechende ebene Welle ist jetzt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left[\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right] \\ &= \text{Re} \left[\hat{\mathbf{E}}^{(0)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t} \right] \\ &= \text{Re} \left[\hat{\mathbf{E}}^{(0)} e^{i(n+i\kappa)\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t} \right] \\ &= e^{-\kappa\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}} \text{Re} \left[\hat{\mathbf{E}}^{(0)} e^{i(n\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - ct)\frac{\omega}{c}} \right]. \end{aligned} \quad (8.68)$$

8.6 Kramers-Kronig-Relationen

In einem *absorbierenden* Medium ist $\varkappa > 0$, d.h. eine in Richtung von $\hat{\mathbf{k}}$ propagierende ebene Welle ist gedämpft. Deshalb bezeichnet man die Größe $\alpha = 2\varkappa$ auch als den *Absorptionskoeffizienten* des Materials, denn offensichtlich nimmt der Energiefluss proportional zu $e^{-2\varkappa \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}}$ ab. Die Größe n kann für *schwache* Dämpfung $\varkappa \ll 1$ als Brechungsindex gedeutet werden.

Für Metalle (d.h. sehr hohe Leitfähigkeit, also starke Dämpfung) ist für nicht zu hohe Frequenzen ($\omega \ll \omega_{\text{pl}}$)

$$|\operatorname{Re} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)]| \ll \operatorname{Im} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)] \simeq \frac{\operatorname{Re} [\tilde{\mu}(\omega) \hat{\sigma}(\omega)]}{\omega}. \quad (8.69)$$

In dem Fall gilt

$$\begin{aligned} n &= \varkappa \simeq c \sqrt{\frac{\operatorname{Im} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)]}{2}} = \frac{c}{\omega \lambda_\omega} \\ \lambda_\omega &= \sqrt{\frac{2}{\omega \operatorname{Re} [\tilde{\mu}(\omega) \hat{\sigma}(\omega)]}} \\ k &= k^{(I)} + ik^{(II)} \equiv (n + i\varkappa) \frac{\omega}{c} = \frac{1 + i}{\lambda_\omega}. \end{aligned} \quad (8.70)$$

Die Länge λ_ω ist gerade die *Skin-Eindringtiefe*, siehe auch (4.58).

Bemerkung

Interessanterweise kann eine in Richtung von $\hat{\mathbf{k}}$ propagierende ebene Welle auch dann gedämpft sein, wenn gilt $\operatorname{Im} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)] = 0$ und $\operatorname{Re} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)] < 0$. In dem Fall ist das Medium zwar transparent, aber es ist $n = 0$ und damit $\varkappa = c\sqrt{-\operatorname{Re} [\tilde{\varepsilon}(\omega) \tilde{\mu}(\omega)]}$.

8.6 Kramers-Kronig-Relationen

Das Fourier-Integral

$$\hat{\chi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \chi(t) \quad (8.71)$$

8 Elektromagnetische Wellen

mit den Größen $\chi(t) \in \{\sigma(t), \chi^{(\text{el})}(t), \chi^{(\text{mag})}(t)\}$ und den entsprechenden Fouriertransformierten $\hat{\chi}(\omega) \in \{\hat{\sigma}(\omega), \hat{\chi}^{(\text{el})}(\omega), \hat{\chi}^{(\text{mag})}(\omega)\}$ ist wegen der Kausalitätsbedingung $\chi(t) \equiv 0$ für $t < 0$, siehe (8.26), vollständig ohne irgendwelche Beiträge von negativen Werten von t gegeben zu

$$\hat{\chi}(\omega) = \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \chi(t). \quad (8.72)$$

Offensichtlich kann wegen $t > 0$ die Suszeptibilität $\hat{\chi}(\omega)$ als Funktion der komplexen Variablen $z = \omega + i\eta$ in die obere Halbebene $\eta > 0$ der komplexen z -Ebene *analytisch* fortgesetzt werden, d.h. $\hat{\chi}(z)$ ist für $\text{Im } z > 0$ eine analytische Funktion. Nach dem Integralsatz von Cauchy gilt dann

$$\hat{\chi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_R} d\zeta \frac{\hat{\chi}(\zeta)}{\zeta - z}, \quad (8.73)$$

wobei z.B. \mathcal{C}_R einen Integrationsweg bezeichnet, der auf der reellen Achse von $z = -R$ bis $z = R$ geht, und dann auf einem Halbkreisbogen mit Radius R zurück zum Punkt $z = -R$ läuft, und z ist ein Punkt im Inneren des von \mathcal{C}_R eingeschlossenen Gebietes. Im Limes $R \rightarrow \infty$ ergibt das Integral über den Halbkreisbogen einen Beitrag identisch Null, falls $\hat{\chi}(\zeta)$ für $|\zeta| \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Es folgt dann für $z = \omega + i\eta$ die Darstellung

$$\hat{\chi}(\omega + i\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty d\omega' \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega - i\eta} \quad (8.74)$$

Für infinitesimales $\eta \rightarrow 0^+$ bekommt man unter Verwendung der Identität

$$\frac{1}{\omega' - \omega - i\eta} = \mathbb{P} \frac{1}{\omega' - \omega} + i\pi\delta(\omega' - \omega) \quad (8.75)$$

die Darstellung

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \left[\mathbb{P} \int_{-\infty}^\infty d\omega' \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} + i\pi\hat{\chi}(\omega) \right]. \quad (8.76)$$

Es bedeutet dabei ein Zeichen \mathbb{P} vor dem Integral, dass die Singularität im Integranden bei $\omega' = \omega$ im Sinn eines *Hauptwertes* (principal value) zu beheben ist:

$$\mathbb{P} \int_{-\infty}^\infty d\omega' \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{\omega-\delta} + \int_{\omega+\delta}^\infty \right) d\omega' \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega}. \quad (8.77)$$

8.6 Kramers-Kronig-Relationen

Demnach

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\pi i} \mathbb{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega}. \quad (8.78)$$

Dies ist äquivalent zu

$$\operatorname{Re} \hat{\chi}(\omega) + i \operatorname{Im} \hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\pi i} \mathbb{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Re} \hat{\chi}(\omega') + i \operatorname{Im} \hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega}. \quad (8.79)$$

Es folgen die sog. *Kramers-Kronig-Relationen*, die den Realteil und den Imaginärteil der Fouriertransformierten eines zeitabhängigen *kausalen* Integralkerns $\chi(t - t')$ miteinander verknüpfen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \hat{\chi}(\omega) &= \frac{1}{\pi} \mathbb{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} \hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} \\ \operatorname{Im} \hat{\chi}(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \mathbb{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Re} \hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega}. \end{aligned} \quad (8.80)$$

Als Fouriertransformierte einer reellen Funktion $\chi(t)$ besitzt $\hat{\chi}(\omega)$ die Eigenschaft

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(-\omega) &= [\hat{\chi}(\omega)]^\dagger \\ \operatorname{Re} \hat{\chi}(-\omega) &= \operatorname{Re} \hat{\chi}(\omega) \\ \operatorname{Im} \hat{\chi}(-\omega) &= -\operatorname{Im} \hat{\chi}(\omega). \end{aligned} \quad (8.81)$$

Ist der Imaginärteil der Suszeptibilität (d.h. das Absorptionsverhalten) bekannt, so kann der Realteil der Suszeptibilität als Integral über deren Imaginärteil berechnet werden:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \hat{\chi}(\omega) &= \frac{1}{\pi} \mathbb{P} \int_0^{\infty} d\omega' \left[\frac{\operatorname{Im} \hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} - \frac{\operatorname{Im} \hat{\chi}(-\omega')}{\omega' + \omega} \right] = \frac{2}{\pi} \mathbb{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\omega' \operatorname{Im} \hat{\chi}(\omega')}{(\omega')^2 - \omega^2} \\ \operatorname{Im} \hat{\chi}(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \mathbb{P} \int_0^{\infty} d\omega' \left[\frac{\operatorname{Re} \hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} - \frac{\operatorname{Re} \hat{\chi}(-\omega')}{\omega' + \omega} \right] = -\frac{2\omega}{\pi} \mathbb{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Re} \hat{\chi}(\omega')}{(\omega')^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (8.82)$$

8.7 Reflektion und Transmission

Ausgangspunkt sind monochromatische ebene elektromagnetische Wellen. Mit

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} = n \frac{\omega}{c} \quad (8.83)$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$

folgt dann als Lösung von (8.46)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left[\hat{\mathbf{E}}^{(0)} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right] \quad (8.84)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left[\hat{\mathbf{H}}^{(0)} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{k}{\omega \tilde{\mu}(\omega)} \hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{E}}^{(0)} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

Der reziproke Vorfaktor $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ hat die physikalische Dimension eines Ohmschen Widerstands. Im Vakuum ist

$$\boxed{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \simeq 377 \text{ } [\Omega]}. \quad (8.85)$$

Wir betrachten eine (ruhende!) ebene (homogene) Grenzfläche $r_z = 0$, die einen mit einem transparenten Medium A (mit Materialkonstanten ε_A, μ_A) homogen gefüllten Halbraum $r_z < 0$ von einem mit einem anderen Medium B (mit Materialkonstanten ε_B, μ_B) homogen gefüllten Halbraum $r_z > 0$ separiert. Ebene Wellen, die von A kommend auf die Grenzfläche $r_z = 0$ auftreffen, werden dann zum Teil in das Medium B transmittiert und zum anderen Teil in das Medium A reflektiert. Dementsprechend lautet die Lösung der homogenen Maxwell-Gleichungen (8.46)

in Materie jetzt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right] \\
 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right] \\
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= \begin{cases} \widehat{\mathbf{E}}^{(0,in)} e^{i\mathbf{k}^{(in)} \cdot \mathbf{r}} + \widehat{\mathbf{E}}^{(0,r)} e^{i\mathbf{k}^{(r)} \cdot \mathbf{r}} & \text{für } r_z < 0, \\ \widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} e^{i\mathbf{k}^{(t)} \cdot \mathbf{r}} & \text{für } r_z > 0 \end{cases} \\
 \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) &= \begin{cases} \widehat{\mathbf{H}}^{(0,in)} e^{i\mathbf{k}^{(in)} \cdot \mathbf{r}} + \widehat{\mathbf{H}}^{(0,r)} e^{i\mathbf{k}^{(r)} \cdot \mathbf{r}} & \text{für } r_z < 0, \\ \widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} e^{i\mathbf{k}^{(t)} \cdot \mathbf{r}} & \text{für } r_z > 0. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{8.86}$$

Damit dieser Ansatz die homogenen Maxwell-Gleichungen in Materie löst, gilt notwendig

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{k}^{(in)}| &= |\mathbf{k}^{(r)}| = k_A = \omega \sqrt{\varepsilon_A \mu_A} = n_A \frac{\omega}{c} \\
 |\mathbf{k}^{(t)}| &= k_B = \omega \sqrt{\varepsilon_B \mu_B} = n_B \frac{\omega}{c},
 \end{aligned} \tag{8.87}$$

und insbesondere

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbf{H}}^{(0,in)} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_A}{\mu_A}} \frac{\mathbf{k}^{(in)}}{|\mathbf{k}^{(in)}|} \wedge \widehat{\mathbf{E}}^{(0,in)} \\
 \widehat{\mathbf{H}}^{(0,r)} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_A}{\mu_A}} \frac{\mathbf{k}^{(r)}}{|\mathbf{k}^{(r)}|} \wedge \widehat{\mathbf{E}}^{(0,r)} \\
 \widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_B}{\mu_B}} \frac{\mathbf{k}^{(t)}}{|\mathbf{k}^{(t)}|} \wedge \widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)}.
 \end{aligned} \tag{8.88}$$

Die Forderung, dass die Tangentialkomponenten von $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ überall beim Durchgang der ebenen Welle durch die Grenzfläche $r_z = 0$ mit Normalenvektor $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ stetig sein müssen, führt auf

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)]_{r_z=0^-} &= [\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)]_{r_z=0^+} \\
 [\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)]_{r_z=0^-} &= [\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)]_{r_z=0^+}.
 \end{aligned} \tag{8.89}$$

Dazu ist es notwendig, dass auf der Grenzfläche gilt

$$\left[e^{i\mathbf{k}^{(in)} \cdot \mathbf{r}} \right]_{r_z=0} = \left[e^{i\mathbf{k}^{(r)} \cdot \mathbf{r}} \right]_{r_z=0} = \left[e^{i\mathbf{k}^{(t)} \cdot \mathbf{r}} \right]_{r_z=0}. \tag{8.90}$$

8 Elektromagnetische Wellen

Somit

$$\begin{aligned} k_x^{(in)} r_x + k_y^{(in)} r_y &= k_x^{(t)} r_x + k_y^{(t)} r_y \\ k_x^{(in)} r_x + k_y^{(in)} r_y &= k_x^{(r)} r_x + k_y^{(r)} r_y. \end{aligned} \quad (8.91)$$

Damit dies für jeden Punkt der Grenzfläche gilt, ist zu fordern

$$\begin{aligned} k_x^{(in)} &= k_x^{(r)} = k_x^{(t)} \\ k_y^{(in)} &= k_y^{(r)} = k_y^{(t)}. \end{aligned} \quad (8.92)$$

Wir definieren als *Einfallebene* die vom Wellenvektor $\mathbf{k}^{(in)}$ und dem Normalenvektor \mathbf{e}_z der Grenzfläche aufgespannte Ebene. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir jetzt ein Koordinatensystem, so dass die Einfallsebene der Ebene $r_y = 0$ entspricht. In dem Fall gilt

$$k_y^{(in)} = k_y^{(r)} = k_y^{(t)} = 0. \quad (8.93)$$

Folglich liegen die Wellenvektoren $\mathbf{k}^{(in)}$, $\mathbf{k}^{(r)}$ und $\mathbf{k}^{(t)}$ alle drei in der Einfallsebene $r_y = 0$. Wir schreiben jetzt, siehe Abbildung 8.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{(in)} &= k_x^{(in)} \mathbf{e}_x + k_z^{(in)} \mathbf{e}_z = |\mathbf{k}^{(in)}| \sin \vartheta^{(in)} \mathbf{e}_x + |\mathbf{k}^{(in)}| \cos \vartheta^{(in)} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{k}^{(r)} &= k_x^{(r)} \mathbf{e}_x + k_z^{(r)} \mathbf{e}_z = |\mathbf{k}^{(r)}| \sin \vartheta^{(r)} \mathbf{e}_x + |\mathbf{k}^{(r)}| \cos \vartheta^{(r)} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{k}^{(t)} &= k_x^{(t)} \mathbf{e}_x + k_z^{(t)} \mathbf{e}_z = |\mathbf{k}^{(t)}| \sin \vartheta^{(t)} \mathbf{e}_x + |\mathbf{k}^{(t)}| \cos \vartheta^{(t)} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (8.94)$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} k_x^{(in)} &= k_A \sin \vartheta^{(in)} = n_A \frac{\omega}{c} \sin \vartheta^{(in)} \\ k_x^{(r)} &= k_A \sin \vartheta^{(r)} = n_A \frac{\omega}{c} \sin \vartheta^{(r)} \\ k_x^{(t)} &= k_B \sin \vartheta^{(t)} = n_B \frac{\omega}{c} \sin \vartheta^{(t)}. \end{aligned} \quad (8.95)$$

Aus (8.92) folgt dann

$$\begin{aligned} \sin \vartheta^{(in)} &= \sin \vartheta^{(r)} \\ n_A \sin \vartheta^{(in)} &= n_B \sin \vartheta^{(t)}. \end{aligned} \quad (8.96)$$

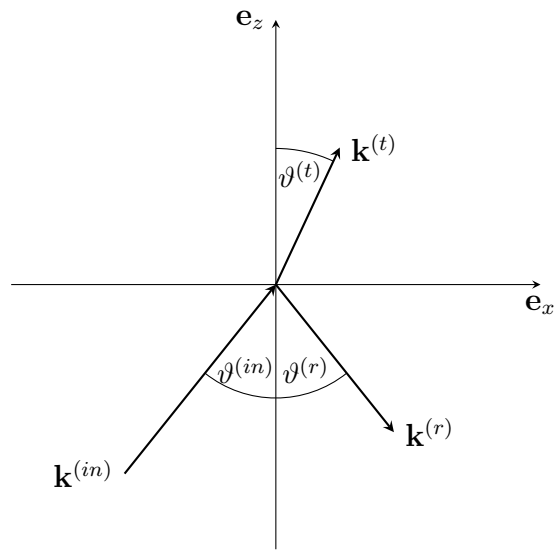


Abbildung 8.1: Skizze zur Illustration des Zusammenhangs zwischen den Wellenvektoren $\mathbf{k}^{(in)}$, $\mathbf{k}^{(r)}$ und $\mathbf{k}^{(t)}$.

Die erste Gleichung ist das *Reflektionsgesetz*, die zweite Gleichung beschreibt das *Brechungsgesetz* der Optik für transparente Medien.

In der vorliegenden Geometrie verknüpfen die Stetigkeitsbedingungen (8.89) die Amplituden der elektromagnetischen Felder auf beiden Seiten der Grenzfläche gemäß

$$\begin{aligned}
 \widehat{E}_x^{(0,in)} + \widehat{E}_x^{(0,r)} &= \widehat{E}_x^{(0,t)} \\
 \widehat{E}_y^{(0,in)} + \widehat{E}_y^{(0,r)} &= \widehat{E}_y^{(0,t)} \\
 \widehat{H}_x^{(0,in)} + \widehat{H}_x^{(0,r)} &= \widehat{H}_x^{(0,t)} \\
 \widehat{H}_y^{(0,in)} + \widehat{H}_y^{(0,r)} &= \widehat{H}_y^{(0,t)}.
 \end{aligned}
 \tag{8.97}$$

8 Elektromagnetische Wellen

Mit den Relationen

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbf{H}}^{(0)} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \wedge \widehat{\mathbf{E}}^{(0)} = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \wedge \widehat{\mathbf{E}}^{(0)} & (8.98) \\
 \widehat{H}_x^{(0)} &= \frac{1}{\omega\mu} (k_y \widehat{E}_z^{(0)} - k_z \widehat{E}_y^{(0)}) \\
 \widehat{H}_y^{(0)} &= \frac{1}{\omega\mu} (k_z \widehat{E}_x^{(0)} - k_x \widehat{E}_z^{(0)}) \\
 \widehat{H}_z^{(0)} &= \frac{1}{\omega\mu} (k_x \widehat{E}_y^{(0)} - k_y \widehat{E}_x^{(0)}) \\
 \omega\mu \mathbf{k} \wedge \widehat{\mathbf{H}}^{(0)} &= \mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \widehat{\mathbf{E}}^{(0)}) = (\mathbf{k} \cdot \widehat{\mathbf{E}}^{(0)}) \mathbf{k} - |\mathbf{k}|^2 \widehat{\mathbf{E}}^{(0)} \\
 \widehat{\mathbf{E}}^{(0)} &= -\frac{\omega\mu}{|\mathbf{k}|^2} \mathbf{k} \wedge \widehat{\mathbf{H}}^{(0)} = -\frac{1}{\omega\varepsilon} \mathbf{k} \wedge \widehat{\mathbf{H}}^{(0)} \\
 \widehat{E}_x^{(0)} &= -\frac{1}{\omega\varepsilon} (k_y \widehat{H}_z^{(0)} - k_z \widehat{H}_y^{(0)}) \\
 \widehat{E}_y^{(0)} &= -\frac{1}{\omega\varepsilon} (k_z \widehat{H}_x^{(0)} - k_x \widehat{H}_z^{(0)}) \\
 \widehat{E}_z^{(0)} &= -\frac{1}{\omega\varepsilon} (k_x \widehat{H}_y^{(0)} - k_y \widehat{H}_x^{(0)}).
 \end{aligned}$$

folgen jetzt an der Grenzfläche $r_z = 0$, da ja im gewählten Koordinatensystem gilt $k_y^{(in)} = k_y^{(r)} = k_y^{(t)} = 0$, die folgenden Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 \widehat{E}_y^{(0,in)} + \widehat{E}_y^{(0,r)} &= \widehat{E}_y^{(0,t)} \\
 \widehat{H}_x^{(0,in)} + \widehat{H}_x^{(0,r)} &= \frac{1}{\omega\mu_A} (-k_z^{(in)} \widehat{E}_y^{(0,in)} - k_z^{(r)} \widehat{E}_y^{(0,r)}) \\
 &= \frac{1}{\omega\mu_B} (-k_z^{(t)} \widehat{E}_y^{(0,t)}) = \widehat{H}_x^{(0,t)} \\
 \widehat{H}_y^{(0,in)} + \widehat{H}_y^{(0,r)} &= \widehat{H}_y^{(0,t)} \\
 \widehat{E}_x^{(0,in)} + \widehat{E}_x^{(0,r)} &= -\frac{1}{\omega\varepsilon_A} (-k_z^{(in)} \widehat{H}_y^{(0,in)} - k_z^{(r)} \widehat{H}_y^{(0,r)}) \\
 &= -\frac{1}{\omega\varepsilon_B} (-k_z^{(t)} \widehat{H}_y^{(0,t)}) = \widehat{E}_x^{(0,t)}.
 \end{aligned}$$

Dies sind zwei entkoppelte Blöcke von linearen Gleichungen für unterschiedliche

8.7 Reflektion und Transmission

Polarisation der elektrischen Feldstärke:

$$\begin{aligned}
 & \text{s-polarisiert} & (8.99) \\
 & \widehat{E}_y^{(0,in)} + \widehat{E}_y^{(0,r)} = \widehat{E}_y^{(0,t)} \\
 & k_z^{(in)} \widehat{E}_y^{(0,in)} + k_z^{(r)} \widehat{E}_y^{(0,r)} = \frac{\mu_A}{\mu_B} k_z^{(t)} \widehat{E}_y^{(0,t)} \\
 & \text{p-polarisiert} & (8.100) \\
 & \widehat{H}_y^{(0,in)} + \widehat{H}_y^{(0,r)} = \widehat{H}_y^{(0,t)} \\
 & k_z^{(in)} \widehat{H}_y^{(0,in)} + k_z^{(r)} \widehat{H}_y^{(0,r)} = \frac{\varepsilon_A}{\varepsilon_B} k_z^{(t)} \widehat{H}_y^{(0,t)}.
 \end{aligned}$$

Die Buchstaben *s* bzw. *p* deuten an, dass der Vektor der elektrischen Feldstärke *senkrecht* bzw. *parallel* zur Einfallsebene orientiert ist. Auflösen der beiden 2×2 -Gleichungssysteme ergibt

$$\begin{aligned}
 & \text{s-polarisiert} & (8.101) \\
 & \widehat{E}_y^{(0,t)} = \frac{k_z^{(r)} - k_z^{(in)}}{k_z^{(r)} - \frac{\mu_A}{\mu_B} k_z^{(t)}} \widehat{E}_y^{(0,in)} \\
 & \widehat{E}_y^{(0,r)} = \left(\frac{k_z^{(r)} - k_z^{(in)}}{k_z^{(r)} - \frac{\mu_A}{\mu_B} k_z^{(t)}} - 1 \right) \widehat{E}_y^{(0,in)} = - \frac{k_z^{(in)} - \frac{\mu_A}{\mu_B} k_z^{(t)}}{k_z^{(r)} - \frac{\mu_A}{\mu_B} k_z^{(t)}} \widehat{E}_y^{(0,in)} \\
 & \text{p-polarisiert} & (8.102) \\
 & \widehat{H}_y^{(0,t)} = \frac{k_z^{(r)} - k_z^{(in)}}{k_z^{(r)} - \frac{\varepsilon_A}{\varepsilon_B} k_z^{(t)}} \widehat{H}_y^{(0,in)} \\
 & \widehat{H}_y^{(0,r)} = \left(\frac{k_z^{(r)} - k_z^{(in)}}{k_z^{(r)} - \frac{\varepsilon_A}{\varepsilon_B} k_z^{(t)}} - 1 \right) \widehat{H}_y^{(0,in)} = - \frac{k_z^{(in)} - \frac{\varepsilon_A}{\varepsilon_B} k_z^{(t)}}{k_z^{(r)} - \frac{\varepsilon_A}{\varepsilon_B} k_z^{(t)}} \widehat{H}_y^{(0,in)}.
 \end{aligned}$$

Da im gewählten Koordinatensystem gilt $k_y = 0$, folgen jetzt aus (8.98) die restlichen Komponenten der elektromagnetischen Feldstärke zu

$$\begin{aligned}
 \widehat{H}_x^{(0,t)} &= - \frac{k_z^{(t)}}{\omega \mu_B} \widehat{E}_y^{(0,t)} & (8.103) \\
 \widehat{H}_z^{(0,t)} &= \frac{k_x^{(t)}}{\omega \mu_B} \widehat{E}_y^{(0,t)}
 \end{aligned}$$

8 Elektromagnetische Wellen

$$\begin{aligned}
 \widehat{H}_x^{(0,r)} &= -\frac{k_z^{(r)}}{\omega\mu_A}\widehat{E}_y^{(0,r)} \\
 \widehat{H}_z^{(0,r)} &= \frac{k_x^{(r)}}{\omega\mu_A}\widehat{E}_y^{(0,r)} \\
 \widehat{E}_x^{(0,t)} &= \frac{k_z^{(t)}}{\omega\varepsilon_B}\widehat{H}_y^{(0,t)} \\
 \widehat{E}_z^{(0,t)} &= -\frac{k_x^{(t)}}{\omega\varepsilon_B}\widehat{H}_y^{(0,t)} \\
 \widehat{E}_x^{(0,r)} &= \frac{k_z^{(r)}}{\omega\varepsilon_A}\widehat{H}_y^{(0,r)} \\
 \widehat{E}_z^{(0,r)} &= -\frac{k_x^{(r)}}{\omega\varepsilon_B}\widehat{H}_y^{(0,r)}.
 \end{aligned}$$

Was noch fehlt, ist die Bestimmung der Wellenzahlkomponenten $k_z^{(in)}$, $k_z^{(r)}$ und $k_z^{(t)}$. Diese Größen sind wegen $k_y^{(in)} = k_y^{(r)} = k_y^{(t)} = 0$ gegeben zu

$$\begin{aligned}
 k_z^{(in)} &= \sqrt{[k^{(in)}]^2 - [k_x^{(in)}]^2} = \frac{\omega}{c}n_A \cos(\vartheta^{(in)}) \\
 k_z^{(r)} &= -\sqrt{[k^{(r)}]^2 - [k_x^{(r)}]^2} = -\frac{\omega}{c}n_A \cos(\vartheta^{(r)}) \\
 k_z^{(t)} &= \sqrt{[k^{(t)}]^2 - [k_x^{(t)}]^2} = \sqrt{[k^{(t)}]^2 - [k_x^{(in)}]^2} \\
 &= \frac{\omega}{c}\sqrt{n_B^2 - n_A^2 \sin^2(\vartheta^{(in)})} = \frac{\omega}{c}\sqrt{n_B^2 - n_B^2 \sin^2(\vartheta^{(t)})} = \frac{\omega}{c}n_B \cos(\vartheta^{(t)}).
 \end{aligned} \tag{8.104}$$

Das negative Vorzeichen von $k_z^{(r)}$ berücksichtigt, dass die Propagationsrichtung der reflektierten Welle *entgegengesetzt* zur einlaufenden Welle ist.

Einsetzen dieser Ausdrücke für die Wellenzahlen $k_z^{(in)}$, $k_z^{(r)}$ und $k_z^{(t)}$ liefert unter

Beachtung von (8.96) jetzt für transparente Medien

s-polarisiert (8.105)

$$\begin{aligned}\widehat{E}_y^{(0,t)} &= \frac{2 \sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(in)})}{\sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(in)}) + \frac{\mu_A}{\mu_B} \sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(t)})} \widehat{E}_y^{(0,in)} \\ \widehat{E}_y^{(0,r)} &= \frac{\sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(in)}) - \frac{\mu_A}{\mu_B} \sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(t)})}{\sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(in)}) + \frac{\mu_A}{\mu_B} \sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(t)})} \widehat{E}_y^{(0,in)}\end{aligned}$$

p-polarisiert (8.106)

$$\begin{aligned}\widehat{H}_y^{(0,t)} &= \frac{\sin(2\vartheta^{(in)})}{\frac{1}{2} \sin(2\vartheta^{(in)}) + \frac{\mu_B}{\mu_A} \frac{1}{2} \sin(2\vartheta^{(t)})} \widehat{H}_y^{(0,in)} \\ \widehat{H}_y^{(0,r)} &= \frac{\sin(2\vartheta^{(in)}) - \frac{\mu_B}{\mu_A} \sin(2\vartheta^{(t)})}{\sin(2\vartheta^{(in)}) + \frac{\mu_B}{\mu_A} \sin(2\vartheta^{(t)})} \widehat{H}_y^{(0,in)}.\end{aligned}$$

Für die Zwischenschritte verweisen wir auf (G.1) und (G.2) im Anhang G. In vielen transparenten Materialien gilt

$$\mu_A = \mu_B = \mu_0. \tag{8.107}$$

8 Elektromagnetische Wellen

Man erhält dann die sog. *Fresnelschen Formeln*:

$$\begin{aligned} & \text{s-polarisiert} & (8.108) \\ \widehat{E}_y^{(0,t)} &= \frac{2 \sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(in)})}{\sin(\vartheta^{(t)} + \vartheta^{(in)})} \widehat{E}_y^{(0,in)} \\ \widehat{E}_y^{(0,r)} &= \frac{\sin(\vartheta^{(t)} - \vartheta^{(in)})}{\sin(\vartheta^{(t)} + \vartheta^{(in)})} \widehat{E}_y^{(0,in)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{p-polarisiert} & (8.109) \\ \widehat{H}_y^{(0,t)} &= \frac{\sin(2\vartheta^{(in)})}{\frac{1}{2} \sin(2\vartheta^{(in)}) + \frac{1}{2} \sin(2\vartheta^{(t)})} \widehat{H}_y^{(0,in)} \\ &= \frac{\sin(2\vartheta^{(in)})}{\sin(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)})} \widehat{H}_y^{(0,in)} \\ \widehat{H}_y^{(0,r)} &= \frac{\sin(2\vartheta^{(in)}) - \sin(2\vartheta^{(t)})}{\sin(2\vartheta^{(in)}) + \sin(2\vartheta^{(t)})} \widehat{H}_y^{(0,in)} = \frac{\tan(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)})}{\tan(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)})} \widehat{H}_y^{(0,in)}. \end{aligned}$$

Mit den einfallenden, reflektierten und transmittierten elektromagnetischen Wellen einher gehen entsprechende Energiestromdichten

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(j)}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}^{(j)}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{H}^{(j)}(\mathbf{r}, t) & (8.110) \\ & j \in \{in, r, t\}. \end{aligned}$$

Im zeitlichen Mittel gilt für monochromatische Wellen

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}^{(j)}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}^{(j)}(\mathbf{r}, \omega) \wedge [\mathbf{H}^{(j)}(\mathbf{r}, \omega)]^\dagger \right\} & (8.111) \\ & j \in \{in, r, t\}. \end{aligned}$$

Der auf die ebene Grenzfläche mit Normalenvektor \mathbf{n} auftreffende (zeitlich gemittelte) Energiestromdichte ist demnach $\langle \mathbf{S}^{(in)} \cdot \mathbf{n} \rangle$. Entsprechend ist $\langle \mathbf{S}^{(t)} \cdot \mathbf{n} \rangle$ der (zeitlich gemittelte) transmittierte Energiefluss und $\langle \mathbf{S}^{(r)} \cdot \mathbf{n} \rangle$ ist der (zeitlich gemittelte) reflektierte Energiefluss. Als Reflektivität R bzw. als Transmissionsko-

effizienten T der Grenzfläche bezeichnet man den Quotienten

$$R = \frac{\langle \mathbf{S}^{(r)} \cdot \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{S}^{(in)} \cdot \mathbf{n} \rangle} \quad (8.112)$$

$$T = \frac{\langle \mathbf{S}^{(t)} \cdot \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{S}^{(in)} \cdot \mathbf{n} \rangle}.$$

Für die hier betrachtete Grenzfläche $r_z = 0$ ist die Flächennormale $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$, d.h. es gilt

$$R = \frac{\langle \mathbf{S}^{(r)} \cdot \mathbf{e}_z \rangle}{\langle \mathbf{S}^{(in)} \cdot \mathbf{e}_z \rangle} = \frac{\operatorname{Re} \left(E_x^{(0,r)} H_y^{(0,r)\dagger} - E_y^{(0,r)} H_x^{(0,r)\dagger} \right)}{\operatorname{Re} \left(E_x^{(0,in)} H_y^{(0,in)\dagger} - E_y^{(0,in)} H_x^{(0,in)\dagger} \right)} \quad (8.113)$$

$$T = \frac{\langle \mathbf{S}^{(t)} \cdot \mathbf{e}_z \rangle}{\langle \mathbf{S}^{(in)} \cdot \mathbf{e}_z \rangle} = \frac{\operatorname{Re} \left(E_x^{(0,t)} H_y^{(0,t)\dagger} - E_y^{(0,t)} H_x^{(0,t)\dagger} \right)}{\operatorname{Re} \left(E_x^{(0,in)} H_y^{(0,in)\dagger} - E_y^{(0,in)} H_x^{(0,in)\dagger} \right)}.$$

Die Koeffizienten R und T hängen noch von der Polarisation der einfallenden ebenen Welle ab.

Ist der elektrische Feldvektor der einfallenden Welle zu 100% senkrecht zur Einfallsebene orientiert (s -Polarisation), so gilt $E_x^{(0,in)} = 0$, $E_x^{(0,r)} = 0$ und $E_x^{(0,t)} = 0$. Demnach

$$s\text{-Polarisation} \quad (8.114)$$

$$R^{(s)} = \frac{\operatorname{Re} \left(E_y^{(0,r)} H_x^{(0,r)\dagger} \right)}{\operatorname{Re} \left(E_y^{(0,in)} H_x^{(0,in)\dagger} \right)} = \frac{|E_y^{(0,r)}|^2}{|E_y^{(0,in)}|^2} = \frac{\sin^2 \left(\vartheta^{(t)} - \vartheta^{(in)} \right)}{\sin^2 \left(\vartheta^{(t)} + \vartheta^{(in)} \right)}$$

$$T^{(s)} = \frac{\operatorname{Re} \left(E_y^{(0,t)} H_x^{(0,t)\dagger} \right)}{\operatorname{Re} \left(E_y^{(0,in)} H_x^{(0,in)\dagger} \right)} = \frac{k_z^{(t)} |E_y^{(0,t)}|^2}{k_z^{(in)} |E_y^{(0,in)}|^2}$$

$$= \frac{\sin \left(2\vartheta^{(in)} \right) \sin \left(2\vartheta^{(t)} \right)}{\sin^2 \left(\vartheta^{(t)} + \vartheta^{(in)} \right)}.$$

Eine elementare Rechnung ergibt

$$R^{(s)} + T^{(s)} = 1, \quad (8.115)$$

8 Elektromagnetische Wellen

was ja aufgrund der Energieerhaltung zu erwarten war. Für eine ausführliche Rechnung siehe (G.3) und (G.4).

Ist der elektrische Feldvektor der einfallenden Welle zu 100% parallel zur Einfallsebene orientiert (p -Polarisation), so gilt $E_y^{(0,in)} = 0$, $E_y^{(0,r)} = 0$ und $E_y^{(0,t)} = 0$. Demnach

$$\begin{aligned}
 & p\text{-Polarisation} \tag{8.116} \\
 R^{(p)} &= \frac{\operatorname{Re} \left(E_x^{(0,r)} H_y^{(0,r)\dagger} \right)}{\operatorname{Re} \left(E_x^{(0,in)} H_y^{(0,in)\dagger} \right)} = \frac{\left| \widehat{H}_y^{(0,r)} \right|^2}{\left| \widehat{H}_y^{(0,in)} \right|^2} = \frac{\tan^2 \left(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)} \right)}{\tan^2 \left(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)} \right)} \\
 T^{(p)} &= \frac{\operatorname{Re} \left(E_x^{(0,t)} H_y^{(0,t)\dagger} \right)}{\operatorname{Re} \left(E_x^{(0,in)} H_y^{(0,in)\dagger} \right)} = \frac{\frac{k_z^{(t)}}{\varepsilon_B} \left| \widehat{H}_y^{(0,t)} \right|^2}{\frac{k_z^{(in)}}{\varepsilon_A} \left| \widehat{H}_y^{(0,in)} \right|^2} \\
 &= \frac{\sin \left(2\vartheta^{(in)} \right) \sin \left(2\vartheta^{(t)} \right)}{\sin^2 \left(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)} \right) \cos^2 \left(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)} \right)}.
 \end{aligned}$$

Eine elementare Rechnung ergibt

$$R^{(p)} + T^{(p)} = 1, \tag{8.117}$$

in Übereinstimmung mit der Energieerhaltung. Die fehlenden Zwischenschritte finden sich in (G.5) und (G.6).

Es sei bemerkt, dass für $0 < \vartheta^{(in)} < \frac{\pi}{2}$ gilt $R^{(p)} < R^{(s)}$. Natürliches Licht, bei dem s - und p -Polarisation mit gleichem Gewicht auftritt, wird somit bei Reflektion an einer Grenzfläche zu einem transparenten Medium stets partiell polarisiert, so dass der Vektor der elektrischen Feldstärke bevorzugt senkrecht zur Einfallsebene orientiert ist, d.h. das Gewicht der s -Polarisation wird gegenüber der p -Polarisation vergrößert.

Brewster-Winkel

Sehr interessant ist der Spezialfall, wenn die Wellenzahlvektoren der reflektierten und der transmittierten Welle *orthogonal* sind:

$$\vartheta^{(r)} + \vartheta^{(t)} = \frac{\pi}{2}. \tag{8.118}$$

Der zugehörige Einfallswinkel $\vartheta^{(in)} = \vartheta_B^{(in)}$ kann dann aus den Brechungsgesetzen (8.96) bestimmt werden zu

$$n_A \sin \vartheta_B^{(in)} = n_B \sin \vartheta^{(t)} = n_B \sin \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta^{(r)} \right) = n_B \cos \vartheta^{(r)} = n_B \cos \vartheta_B^{(i)}$$

$$\tan \vartheta_B^{(in)} = \frac{n_B}{n_A}.$$

Eine elektromagnetische Welle, die unter diesem sog. *Brewster-Winkel* $\vartheta_B^{(in)}$ auf eine Grenzfläche auftrifft, hat im *reflektierten* Strahl keinen Anteil, der *p*-polarisiert ist:

$$\lim_{\vartheta^{(in)} \rightarrow \vartheta_B^{(in)}} R^{(p)} = \lim_{\vartheta^{(r)} + \vartheta^{(t)} \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 (\vartheta^{(r)} - \vartheta^{(t)})}{\tan^2 (\vartheta^{(r)} + \vartheta^{(t)})} = 0. \quad (8.119)$$

Der reflektierte Strahl ist für $\vartheta^{(in)} = \vartheta_B^{(in)}$ somit vollständig *s*-polarisiert!

Totalreflektion

Für $n_B > n_A$ ist der Einfallswinkel $\vartheta^{(in)}$ größer als der Ausfallswinkel $\vartheta^{(t)}$, für $n_B < n_A$ ist es umgekehrt. Diese Eigenschaft folgt unmittelbar aus dem Brechungsgesetz (8.96)

$$\sin \vartheta^{(in)} = \begin{cases} \frac{n_B}{n_A} \sin \vartheta^{(t)} > \sin \vartheta^{(t)} & \text{für } n_B > n_A, \\ \frac{n_B}{n_A} \sin \vartheta^{(t)} < \sin \vartheta^{(t)} & \text{für } n_B < n_A. \end{cases}$$

Erreicht der Einfallswinkel den speziellen Wert

$$\sin \vartheta_T^{(in)} = \frac{n_B}{n_A} < 1,$$

so ist die Ausbreitungsrichtung der transmittierten Welle parallel zur Grenzfläche orientiert,

$$\sin \vartheta^{(t)} = 1$$

$$\vartheta^{(t)} = \frac{\pi}{2}.$$

8 Elektromagnetische Wellen

Man nennt $\vartheta_T^{(in)}$ den Winkel der Totalreflektion. Es gilt in der Tat für $\vartheta^{(in)} = \vartheta_T^{(in)}$, dass der Reflektionskoeffizient gleich Eins ist:

$$\begin{aligned} R^{(s)} &= \frac{\sin^2\left(\vartheta_T^{(in)} - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(\vartheta_T^{(in)} + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\vartheta_T^{(in)}\right)}{\cos^2\left(\vartheta_T^{(in)}\right)} = 1 \\ R^{(p)} &= \frac{\tan^2\left(\vartheta_T^{(in)} - \frac{\pi}{2}\right)}{\tan^2\left(\vartheta_T^{(in)} + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(\vartheta_T^{(in)} - \frac{\pi}{2}\right) \cos^2\left(\vartheta_T^{(in)} + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2\left(\vartheta_T^{(in)} - \frac{\pi}{2}\right) \sin^2\left(\vartheta_T^{(in)} + \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos^2\left(\vartheta_T^{(in)}\right) \sin^2\left(\vartheta_T^{(in)}\right)}{\sin^2\left(\vartheta_T^{(in)}\right) \cos^2\left(\vartheta_T^{(in)}\right)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Für $\vartheta_T^{(in)} < \vartheta^{(in)} \leq \frac{\pi}{2}$ wird die Komponente $k_z^{(t)}$ des transmittierten Wellenzahlvektors imaginär, d.h. die transmittierte elektromagnetische Welle wird evaneszent (exponentiell abklingend). Da aber im vorliegenden Fall beide Materialien A und B als optisch transparent angenommen sind, beruht diese Dämpfung nicht auf Energieabsorption! Dementsprechend ist der (zeitlich gemittelte!) Poynting-Vektor der transmittierten Welle gleich Null.

Der Effekt wird in *Glasfasern* (sehr langer dünner und flexibler Zylinderfaden mit Radius r aus Glas oder Kunststoff mit Brechungsindex $n_A > n_B$) zum Transport von Licht der Wellenlänge $\lambda \ll r$ technisch genutzt. Glasfasern bestehen aus transparentem Material A , das optisch dichter ist als der umgebende Raum (im Vakuum $n_B = 1$). In Faserrichtung kann sich eine elektromagnetische Welle nahezu ungehindert ausbreiten, solange der Wellenzahlvektor nur einen kleinen Winkel mit der Achse der Glasfaser einschließt.

Senkrechter Einfall

Bei senkrechtem Einfall auf die Grenzfläche, also für $\vartheta^{(in)} = \vartheta^{(r)} = \vartheta^{(t)} = 0$, erhalten wir aus (8.105)

$$\begin{aligned} & \text{s-polarisiert} & (8.120) \\ \widehat{E}_y^{(0,t)} &= \frac{2}{1 + \frac{n_B}{n_A}} \widehat{E}_y^{(0,in)} \\ \widehat{E}_y^{(0,r)} &= \frac{1 - \frac{n_B}{n_A}}{1 + \frac{n_B}{n_A}} \widehat{E}_y^{(0,in)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{p-polarisiert} & (8.121) \\ \widehat{H}_y^{(0,t)} &= \frac{2}{1 + \frac{\varepsilon_A n_B}{\varepsilon_B n_A}} \widehat{H}_y^{(0,in)} \\ \widehat{H}_y^{(0,r)} &= \frac{1 - \frac{\varepsilon_A n_B}{\varepsilon_B n_A}}{1 + \frac{\varepsilon_A n_B}{\varepsilon_B n_A}} \widehat{H}_y^{(0,in)}. \end{aligned}$$

Für die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten folgt somit bei *senkrechtem* Einfall auf die Grenzfläche

$$\begin{aligned} & \text{s-Polarisation} & (8.122) \\ R_{\perp}^{(s)} &= \frac{\operatorname{Re} \left(E_y^{(0,r)} H_x^{(0,r)\dagger} \right)}{\operatorname{Re} \left(E_y^{(0,in)} H_x^{(0,in)\dagger} \right)} = \frac{\left| E_y^{(0,r)} \right|^2}{\left| E_y^{(0,in)} \right|^2} = \left| \frac{1 - \frac{n_B}{n_A}}{1 + \frac{n_B}{n_A}} \right|^2 \\ T_{\perp}^{(s)} &= \frac{\operatorname{Re} \left(E_y^{(0,t)} H_x^{(0,t)\dagger} \right)}{\operatorname{Re} \left(E_y^{(0,in)} H_x^{(0,in)\dagger} \right)} = \frac{k_z^{(t)}}{k_z^{(in)}} \frac{4}{\left| 1 + \frac{n_B}{n_A} \right|^2} = \frac{4 \frac{n_B}{n_A}}{\left| 1 + \frac{n_B}{n_A} \right|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{p-Polarisation} & (8.123) \\ R_{\perp}^{(p)} &= \frac{\operatorname{Re} \left(E_x^{(0,r)} H_y^{(0,r)\dagger} \right)}{\operatorname{Re} \left(E_x^{(0,in)} H_y^{(0,in)\dagger} \right)} = \frac{\left| \widehat{H}_y^{(0,r)} \right|^2}{\left| \widehat{H}_y^{(0,in)} \right|^2} = \left| \frac{1 - \frac{\varepsilon_A n_B}{\varepsilon_B n_A}}{1 + \frac{\varepsilon_A n_B}{\varepsilon_B n_A}} \right|^2 = \left| \frac{\frac{\varepsilon_B n_A}{\varepsilon_A n_B} - 1}{\frac{\varepsilon_B n_A}{\varepsilon_A n_B} + 1} \right|^2 \\ T_{\perp}^{(p)} &= \frac{\operatorname{Re} \left(E_x^{(0,t)} H_y^{(0,t)\dagger} \right)}{\operatorname{Re} \left(E_x^{(0,in)} H_y^{(0,in)\dagger} \right)} = \frac{\frac{k_z^{(t)}}{\varepsilon_B} \left| \widehat{H}_y^{(0,t)} \right|^2}{\frac{k_z^{(in)}}{\varepsilon_A} \left| \widehat{H}_y^{(0,in)} \right|^2} = \frac{4 \frac{\varepsilon_A n_B}{\varepsilon_B n_A}}{\left| 1 + \frac{\varepsilon_A n_B}{\varepsilon_B n_A} \right|^2} = \frac{4 \frac{\varepsilon_B n_A}{\varepsilon_A n_B}}{\left| \frac{\varepsilon_B n_A}{\varepsilon_A n_B} + 1 \right|^2}. \end{aligned}$$

8 Elektromagnetische Wellen

Nun gilt (wir setzen $\mu_A = \mu_B = \mu_0$):

$$\frac{\varepsilon_B n_A}{\varepsilon_A n_B} = \frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_A} \sqrt{\frac{\varepsilon_A}{\varepsilon_B}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_A}} = \frac{n_B}{n_A}. \quad (8.124)$$

Dies bedeutet

$$R_{\perp}^{(p)} = \left| \frac{\frac{\varepsilon_B n_A}{\varepsilon_A n_B} - 1}{\frac{\varepsilon_B n_A}{\varepsilon_A n_B} + 1} \right|^2 = \left| \frac{\frac{n_B}{n_A} - 1}{\frac{n_B}{n_A} + 1} \right|^2 = R_{\perp}^{(s)} \equiv R_{\perp} \quad (8.125)$$

$$T_{\perp}^{(p)} = \frac{4 \frac{\varepsilon_B n_A}{\varepsilon_A n_B}}{\left| \frac{\varepsilon_B n_A}{\varepsilon_A n_B} + 1 \right|^2} = \frac{4 \frac{n_B}{n_A}}{\left| \frac{n_B}{n_A} + 1 \right|^2} = T_{\perp}^{(s)} \equiv T_{\perp}.$$

Bei senkrechtem Einfall der elektromagnetischen Welle auf eine Grenzfläche zwischen zwei transparenten Medien mit der Eigenschaft (8.107) existiert kein Unterschied zwischen s -Polarisation und p -Polarisation bei den Reflektions- und Transmissionskoeffizienten! Für $n_B \rightarrow n_A$ strebt natürlich $R_{\perp} \rightarrow 0$, $T_{\perp} \rightarrow 1$.

Wir betrachten jetzt eine optisch transparente Schicht der Dicke d , die aus einem optisch transparenten Material B mit Brechungsindex n_B besteht (z.B. eine Glasplatte). Die beiden Grenzflächen von B zum optisch transparenten Medium A mit Brechungsindex n_A (z.B. Luft), beschreiben wir als $r_z = 0$ und $r_z = d$. Wie viel Energie wird nun reflektiert bzw. transmittiert, wenn eine monochromatische ebene Welle senkrecht von A aus dem Halbraum $r_z < 0$ kommend auf die Grenzflächen bei $r_z = 0$ auftrifft? Offenbar wird ein Teil der Energie, die in B hinein transmittiert wurde, an der Grenzfläche $r_z = c$ reflektiert usw., d.h. es sind *alle* vielfachen Reflektionen an beiden Grenzflächen zu berücksichtigen.

Im vorliegenden Fall ist der Reflektionskoeffizient an der Grenzfläche $r_z = 0$ gleich dem Reflektionskoeffizienten an der Grenzfläche $r_z = d$:

$$R_{\perp}(r_z = 0) = \left(\frac{\frac{n_B}{n_A} - 1}{\frac{n_B}{n_A} + 1} \right)^2 = \left(\frac{\frac{n_A}{n_B} - 1}{\frac{n_A}{n_B} + 1} \right)^2 = R_{\perp}(r_z = d). \quad (8.126)$$

Entsprechendes gilt für den Transmissionskoeffizienten:

$$T_{\perp}(r_z = 0) = \frac{4 \frac{n_B}{n_A}}{\left(\frac{n_B}{n_A} + 1 \right)^2} = \frac{4 \frac{n_A}{n_B}}{\left(\frac{n_A}{n_B} + 1 \right)^2} = T_{\perp}(r_z = d). \quad (8.127)$$

8.7 Reflektion und Transmission

Wir schreiben jetzt für den Bruchteil der insgesamt reflektierten Energie einer einfallenden (stationären) ebenen Welle, deren Wellenzahlvektor parallel zum Normalenvektor \mathbf{e}_z der beiden parallelen Grenzflächen orientiert ist:

$$\begin{aligned}
 R_{\perp}^{(\text{eff})} &= R_{\perp}(r_z = 0) + T_{\perp}(r_z = 0) R_{\perp}(r_z = d) T_{\perp}(r_z = 0) & (8.128) \\
 &\quad + T_{\perp}(r_z = 0) R_{\perp}(r_z = d) R_{\perp}(r_z = 0) R_{\perp}(r_z = d) T_{\perp}(r_z = 0) \\
 &\quad + T_{\perp}(r_z = 0) R_{\perp}(r_z = d) R_{\perp}(r_z = 0) R_{\perp}(r_z = d) R_{\perp}(r_z = 0) \\
 &\quad \quad \times R_{\perp}(r_z = d) T_{\perp}(r_z = 0) + \dots \\
 &= R_{\perp} + T_{\perp} \left(R_{\perp} + R_{\perp}^3 + R_{\perp}^5 + R_{\perp}^7 + \dots \right) T_{\perp} \\
 &= R_{\perp} + T_{\perp} R_{\perp} \left(1 + R_{\perp}^2 + R_{\perp}^4 + R_{\perp}^6 + \dots \right) T_{\perp} \\
 &= R_{\perp} + T_{\perp} \frac{R_{\perp}}{1 - R_{\perp}^2} T_{\perp} \\
 &= R_{\perp} + T_{\perp} \frac{R_{\perp}}{(1 + R_{\perp})(1 - R_{\perp})} T_{\perp}.
 \end{aligned}$$

Mit

$$T_{\perp} = 1 - R_{\perp} \quad (8.129)$$

folgt der effektive Reflektionskoeffizient der Schicht zu

$$\begin{aligned}
 R_{\perp}^{(\text{eff})} &= R_{\perp} + \frac{(1 - R_{\perp}) R_{\perp}}{1 + R_{\perp}} = \frac{2R_{\perp}}{1 + R_{\perp}} & (8.130) \\
 &= \frac{2 \left(\frac{\frac{n_A - 1}{n_B}}{\frac{n_A + 1}{n_B}} \right)^2}{1 + \left(\frac{\frac{n_A - 1}{n_B}}{\frac{n_A + 1}{n_B}} \right)^2} = \frac{2 \left(\frac{n_A - 1}{n_B} \right)^2}{\left(\frac{n_A}{n_B} + 1 \right)^2 + \left(\frac{n_A}{n_B} - 1 \right)^2} \\
 &= \frac{\left(\frac{n_A}{n_B} - 1 \right)^2}{\left(\frac{n_A}{n_B} \right)^2 + 1}.
 \end{aligned}$$

Eine entsprechende Überlegung ergibt für den effektiven Transmissionskoeffizienten der Schicht

$$\begin{aligned}
 T_{\perp}^{(\text{eff})} &= T_{\perp}(r_z = 0) T_{\perp}(r_z = d) & (8.131) \\
 &\quad + T_{\perp}(r_z = 0) R_{\perp}(r_z = d) R_{\perp}(r_z = 0) T_{\perp}(r_z = d)
 \end{aligned}$$

8 Elektromagnetische Wellen

$$\begin{aligned}
 & + T_{\perp}(r_z = 0) R_{\perp}(r_z = d) R_{\perp}(r_z = 0) R_{\perp}(r_z = d) \\
 & \quad \times R_{\perp}(r_z = 0) T_{\perp}(r_z = d) + \dots \\
 = & T_{\perp}(1 + R_{\perp}^2 + R_{\perp}^4 + R_{\perp}^6 + \dots) T_{\perp} \\
 = & T_{\perp} \frac{1}{1 - R_{\perp}^2} T_{\perp} \\
 = & (1 - R_{\perp}) \frac{1}{(1 + R_{\perp})(1 - R_{\perp})} (1 - R_{\perp}).
 \end{aligned}$$

Somit ist der effektive Transmissionskoeffizient der Schicht gegeben zu

$$\begin{aligned}
 T_{\perp}^{(\text{eff})} &= \frac{1 - R_{\perp}}{1 + R_{\perp}} = \frac{1 - \left(\frac{\frac{n_A}{n_B} - 1}{\frac{n_B}{n_A} + 1}\right)^2}{1 + \left(\frac{\frac{n_A}{n_B} - 1}{\frac{n_B}{n_A} + 1}\right)^2} \quad (8.132) \\
 &= \frac{\left(\frac{n_A}{n_B} + 1\right)^2 - \left(\frac{n_A}{n_B} - 1\right)^2}{\left(\frac{n_A}{n_B} + 1\right)^2 + \left(\frac{n_A}{n_B} - 1\right)^2} = \frac{2\frac{n_A}{n_B}}{\left(\frac{n_A}{n_B}\right)^2 + 1}.
 \end{aligned}$$

Natürlich ist

$$R_{\perp}^{(\text{eff})} + T_{\perp}^{(\text{eff})} = \frac{\left(\frac{n_A}{n_B} - 1\right)^2 + 2\frac{n_A}{n_B}}{\left(\frac{n_A}{n_B}\right)^2 + 1} = 1, \quad (8.133)$$

da weder im Material B noch im Material A Energie absorbiert wird.

Für eine Fensterscheibe in Luft gilt $\frac{n_A}{n_B} \simeq \frac{2}{3}$, somit $R_{\perp} = \left(\frac{\frac{2}{3} - 1}{\frac{2}{3} + 1}\right)^2 = \frac{1}{25}$, also $T_{\perp}^{(\text{eff})} = \frac{12}{13}$ und $R_{\perp}^{(\text{eff})} = \frac{1}{13}$. Das erklärt, weshalb eine Person, die z.B. auf eine durchsichtige Glastür blickt, das eigene Spiegelbild (schwach) zu erkennen vermag.

Bemerkung

Die Formeln (8.130) und (8.132) für den reflektierten bzw. transmittierten Energiestrom bei senkrechtem Einfall sind (im Rahmen der hier angestellten Überlegung) offensichtlich unabhängig von der Schichtdicke d . Das stimmt natürlich nur dann, wenn die Dicke d der Schicht groß gegenüber der Wellenlänge λ des Lichtes ist, also für $d \gg \lambda$. Für dünne Filme der Dicke $d \simeq \frac{\lambda}{4}$ muss man in die Überlegung die Interferenzeffekte bei der Transmission und der Reflektion der elektromagnetischen

Wellen an beiden Grenzflächen der Schicht einbeziehen, d.h. man muss zuerst die elektromagnetischen Feldamplituden $\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ und $\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)$ durch Lösen von (8.46) für die vorliegende Schichtgeometrie bestimmen, und erst dann den zeitlich gemittelten Energiefluss gemäß (8.111) berechnen. Man erhält dann charakteristische Transmissionsresonanzen, siehe [LLP84, S. 299]. Andererseits ist für extrem dicke Schichten zu berücksichtigen, dass es infolge von Jouleschen Verlusten (die es in realen Materialien immer gibt) durch Absorption nicht zu Mehrfachreflektionen kommt, d.h. $R_{\perp}^{(\text{eff})} \rightarrow R_{\perp}$ und $T_{\perp}^{(\text{eff})} \rightarrow 0$.

8.8 Metallische Grenzflächen

Wir betrachten eine ebene monochromatische elektromagnetische Welle, die aus dem freien Raum $r_z < 0$ kommend auf die ebene Oberfläche $r_z = 0$ eines Metalls trifft. Für die in das Innere des Metalls (Halbraum $r_z > 0$) *transmittierte* Welle gilt dann, siehe (8.86):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(t)}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left[\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} e^{i(\mathbf{k}^{(t)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right] \\ \mathbf{H}^{(t)}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left[\widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} e^{i(\mathbf{k}^{(t)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right] \\ \widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} &= \frac{1}{\omega \tilde{\mu}(\omega)} \mathbf{k}^{(t)} \wedge \widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} \\ \mathbf{k}^{(t)} \wedge \widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} &= -\omega \tilde{\epsilon}(\omega) \widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)}, \end{aligned} \tag{8.134}$$

wobei der Wellenzahlvektor $\mathbf{k}^{(t)}$ durch die Lösbarkeitsbedingung (8.58) bestimmt ist

$$\mathbf{k}^{(t)} \cdot \mathbf{k}^{(t)} = \omega^2 \epsilon(\omega) \mu(\omega). \tag{8.135}$$

Die in (8.101), (8.102) und (8.103) angegebenen Lösungen für das elektromagnetische Feld an einer ebenen Grenzfläche können wir sofort übernehmen. Allerdings ist der transmittierte Wellenzahlvektor $\mathbf{k}^{(t)}$ jetzt komplex, da im Metall aufgrund des Ohmschen Widerstands gilt $\text{Im}[\epsilon(\omega) \mu(\omega)] \neq 0$. Somit

$$\mathbf{k}^{(t)} = \mathbf{k}^{(I)} + i\mathbf{k}^{(II)}, \tag{8.136}$$

8 Elektromagnetische Wellen

d.h. die transmittierte Welle ist infolge der Jouleschen Verluste im Metall gedämpft

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{(t)}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} e^{i(\mathbf{k}^{(t)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right] = \operatorname{Re} \left[\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} e^{-\mathbf{k}^{(II)} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k}^{(I)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right] \\ \mathbf{H}^{(t)}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[\widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} e^{i(\mathbf{k}^{(t)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right] = \operatorname{Re} \left[\widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} e^{-\mathbf{k}^{(II)} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k}^{(I)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right].\end{aligned}\quad (8.137)$$

Bei nicht zu hohen Frequenzen dürfen wir für ein Material mit großer Leitfähigkeit (Metall) annehmen:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} [\varepsilon(\omega) \mu(\omega)] &= \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \\ \operatorname{Im} [\varepsilon(\omega) \mu(\omega)] &= \mu_0 \frac{\sigma_0}{\omega}.\end{aligned}\quad (8.138)$$

Folglich

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} (\mathbf{k}^{(t)} \cdot \mathbf{k}^{(t)}) &= \mathbf{k}^{(I)} \cdot \mathbf{k}^{(I)} - \mathbf{k}^{(II)} \cdot \mathbf{k}^{(II)} = \omega^2 \operatorname{Re} [\varepsilon(\omega) \mu(\omega)] = \frac{\omega^2}{c^2} \\ \operatorname{Im} (\mathbf{k}^{(t)} \cdot \mathbf{k}^{(t)}) &= 2\mathbf{k}^{(I)} \cdot \mathbf{k}^{(II)} = \omega^2 \operatorname{Im} [\varepsilon(\omega) \mu(\omega)] = \mu_0 \omega \sigma_0 = \frac{2}{\lambda_\omega^2}.\end{aligned}\quad (8.139)$$

Hier bezeichnet

$$\lambda_\omega = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma_0}}\quad (8.140)$$

die Skin-Eindringtiefe.

Wie schon vorher in der Überlegung (8.90) gezeigt, folgt aus den Randbedingungen (8.89) für die Tangentialkomponenten der elektromagnetischen Felder am Ort der (flachen) Grenzfläche $r_z = 0$ des Metalls zum freien Raum die Eigenschaft

$$k_x^{(in)} = k_x^{(r)} = k_x^{(t)} = k_x^{(I)} + i k_x^{(II)}.\quad (8.141)$$

Im Vakuum, hier der Halbraum $r_z < 0$, gilt natürlich

$$\operatorname{Im} k_x^{(t)} = \operatorname{Im} k_x^{(r)} = 0.\quad (8.142)$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}k_x^{(II)} &= 0 \\ k_x^{(I)} &= k_x^{(r)} = k_x^{(in)} = \frac{\omega}{c} \sin \vartheta^{(in)}.\end{aligned}\quad (8.143)$$

Also

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(\mathbf{k}^{(t)} \cdot \mathbf{k}^{(t)}) &= \mathbf{k}^{(I)} \cdot \mathbf{k}^{(I)} - \mathbf{k}^{(II)} \cdot \mathbf{k}^{(II)} & (8.144) \\
 &= k_x^{(in)} k_x^{(in)} + k_z^{(I)} k_z^{(I)} - k_z^{(II)} \cdot k_z^{(II)} = \frac{\omega^2}{c^2} \\
 \operatorname{Im}(\mathbf{k}^{(t)} \cdot \mathbf{k}^{(t)}) &= 2\mathbf{k}^{(I)} \cdot \mathbf{k}^{(II)} = 2k_z^{(I)} k_z^{(II)} = \frac{2}{\lambda_\omega^2}.
 \end{aligned}$$

Da die Wellenzahlvektoren $\mathbf{k}^{(I)}$ und $\mathbf{k}^{(II)}$ nicht (exakt) parallel sind, sind die Ebenen konstanter Amplitude nicht identisch mit den Ebenen konstanter Phase, d.h. die transmittierte Welle ist eine *inhomogene* ebene Welle:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}^{(t)}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} e^{-k_z^{(II)} r_z} e^{i(k_x^{(in)} r_x + k_z^{(I)} r_z - \omega t)} \right] \\
 \mathbf{H}^{(t)}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[\widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} e^{-k_z^{(II)} r_z} e^{i(k_x^{(in)} r_x + k_z^{(I)} r_z - \omega t)} \right] \\
 \widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} &= \frac{1}{\omega \mu_0} (\mathbf{k}^{(I)} + i\mathbf{k}^{(II)}) \wedge \widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} \\
 \widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} &= -\frac{1}{\omega (\varepsilon_0 + i\frac{\sigma_0}{\omega})} (\mathbf{k}^{(I)} + i\mathbf{k}^{(II)}) \wedge \widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)}. & (8.145)
 \end{aligned}$$

Allerdings sind $\mathbf{k}^{(I)}$ und $\mathbf{k}^{(II)}$ *fast* parallel, solange die Wellenlänge $\lambda^{(in)} = c \frac{2\pi}{\omega}$ der auf die Grenzfläche einfallenden elektromagnetischen Strahlung deutlich größer ist als die Skin-Eindringtiefe λ_ω im Metall:

$$\begin{aligned}
 \lambda_\omega &\ll \lambda^{(in)} & (8.146) \\
 \mathbf{k}^{(I)} \wedge \mathbf{k}^{(II)} &\simeq \mathbf{0}.
 \end{aligned}$$

Für Metalle wie Kupfer oder Gold gilt tatsächlich bis hin zu Frequenzen des sichtbaren Lichts

$$\begin{aligned}
 k_x^{(in)} &\ll k_z^{(I)} & (8.147) \\
 \frac{\omega^2}{c^2} &\ll \frac{2}{\lambda_\omega^2}.
 \end{aligned}$$

8 Elektromagnetische Wellen

Dann folgt in sehr guter Näherung als Lösung der Bedingungen (8.144):

$$\begin{aligned} k_z^{(I)} &= k_z^{(II)} = \frac{1}{\lambda_\omega} \\ \mathbf{k}^{(t)} &= \mathbf{k}^{(I)} + i\mathbf{k}^{(II)} = \frac{1+i}{\lambda_\omega} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (8.148)$$

Wir schreiben jetzt $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$. Die in das Innere eines Metalls *transmittierten* elektromagnetischen Wellen propagieren (in sehr guter Näherung) immer in Richtung des (in das Innere weisenden) Normalenvektors \mathbf{n} der Grenzfläche, unabhängig vom Einfallswinkel!

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} &= \frac{1}{\omega\mu_0} \frac{1+i}{\lambda_\omega} \mathbf{n} \wedge \widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} \\ \widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} &= \frac{i-1}{\sigma_0\lambda_\omega} \mathbf{n} \wedge \widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)}. \end{aligned} \quad (8.149)$$

Demnach sind beide *transmittierten* Feldamplituden, $\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)}$ und $\widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)}$, (in führender Ordnung) *parallel* zur Grenzfläche mit Normalenvektor \mathbf{n} orientiert:

$$\mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} = 0 = \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)}. \quad (8.150)$$

Für die Normalkomponente der zeitlich gemittelten *transmittierten Energiestromdichte* am Ort \mathbf{r} der Grenzfläche $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0$ folgt nach dem Gesagten (der Normalenvektor \mathbf{n} der Grenzfläche zeigt in das Metall *hinein*):

$$\begin{aligned} \left\langle \left[\mathbf{S}^{(t)}(\mathbf{r}, t) \right]_{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0} \right\rangle \cdot \mathbf{n} &= \left\langle \left[\mathbf{E}^{(t)}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{H}^{(t)}(\mathbf{r}, t) \right]_{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0} \right\rangle \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{4} \left\langle \left[\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} e^{-k_z^{(II)} r_z} e^{i(k_z^{(I)} r_z - \omega t)} + \left(\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} \right)^\dagger e^{-k_z^{(II)} r_z} e^{-i(k_z^{(I)} r_z - \omega t)} \right]_{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0} \right. \\ &\quad \left. \wedge \left[\widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} e^{-k_z^{(II)} r_z} e^{i(k_z^{(I)} r_z - \omega t)} + \left[\widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} \right]^\dagger e^{-k_z^{(II)} r_z} e^{-i(k_z^{(I)} r_z - \omega t)} \right]_{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0} \right\rangle \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{4} \left\langle \left[\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} e^{-i\omega t} + \left(\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} \right)^\dagger e^{i\omega t} \right] \wedge \left[\widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} e^{-i\omega t} + \left(\widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} \right)^\dagger e^{i\omega t} \right] \right\rangle \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} \wedge \left(\widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} \right)^\dagger \right] \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{i-1}{\sigma_0\lambda_\omega} \left(\mathbf{n} \wedge \widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} \right) \wedge \left(\widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} \right)^\dagger \right] \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (8.151)$$

$$= \frac{1}{2\sigma_0\lambda_\omega} \left[\widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} \cdot \left(\widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} \right)^\dagger \right].$$

Nun gilt

$$\frac{1}{\sigma_0\lambda_\omega} = \sqrt{\frac{\mu_0\omega}{2\sigma_0}} = \frac{\mu_0\omega}{2} \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\sigma_0}} = \frac{\mu_0\omega}{2} \lambda_\omega, \quad (8.152)$$

d.h. für $\lambda_\omega \ll \lambda^{(in)} = c \frac{2\pi}{\omega}$ strömt nur ein kleiner Bruchteil der Energie einer aus dem freien Raum her einlaufenden elektromagnetischen Welle durch die Grenzfläche

$$\partial\Omega = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0 \right\} \quad (8.153)$$

in das Innere $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} > 0$ eines Metalls *hinein*. Da die Tangentialkomponente der Magnetfeldamplitude $\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)$ beim Gang durch die Grenzfläche stetig ist,

$$\left[\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \wedge \mathbf{n} \right]_{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0^-} = \left[\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \wedge \mathbf{n} \right]_{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0^+} \equiv \widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)}, \quad (8.154)$$

folgt hieraus, dass die Normalkomponente der *transmittierten* Energierstromdichte auf der Grenzfläche $\partial\Omega$ proportional zum Quadrat der Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke am selben Ort ist:

$$\left\langle \left[\mathbf{S}^{(t)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \right]_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} \right\rangle = \frac{1}{2\sigma_0\lambda_\omega} \left| \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \wedge \mathbf{n} \right|_{\mathbf{r} \in \partial\Omega}^2. \quad (8.155)$$

Die entsprechende Rate, mit der Joulesche Verluste (bezogen auf ein Flächenelement $\mathcal{F}_{\partial\Omega}$ der Grenzfläche $\partial\Omega$) im Inneren des Metalls (also im Halbraum $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} > 0$) infolge des endlich großen Ohmschen Widerstands generiert werden, siehe (4.71), ist im zeitlichen Mittel gegeben zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}^{(J)} &= \int_{\substack{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} > 0 \\ \mathbf{r}_\perp \in \mathcal{F}_{\partial\Omega}}} d^3r \left\langle \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}^{(t)}(\mathbf{r}, t) \right\rangle \\ &= \int_{\mathcal{F}_{\partial\Omega}} d^2r_\perp \int_0^\infty dr_z \left\langle \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}^{(t)}(\mathbf{r}, t) \right\rangle. \end{aligned} \quad (8.156)$$

8 Elektromagnetische Wellen

Nach dem Gesagten gilt für den Integranden

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{j}^{(J)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}^{(t)}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \langle \sigma_0 \mathbf{E}^{(t)}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}^{(t)}(\mathbf{r}, t) \rangle & (8.157) \\
&= \frac{\sigma_0}{4} \left\langle \left[\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} e^{-k_z^{(II)} r_z} e^{i(k_z^{(I)} r_z - \omega t)} + (\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)})^\dagger e^{-k_z^{(II)} r_z} e^{-i(k_z^{(I)} r_z - \omega t)} \right] \right. \\
&\quad \cdot \left. \left[\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} e^{-k_z^{(II)} r_z} e^{i(k_z^{(I)} r_z - \omega t)} + (\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)})^\dagger e^{-k_z^{(II)} r_z} e^{-i(k_z^{(I)} r_z - \omega t)} \right] \right\rangle \\
&= \frac{\sigma_0}{2} \operatorname{Re} \left[\left(\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} e^{-k_z^{(II)} r_z} e^{i(k_z^{(I)} r_z - \omega t)} \right) \cdot \left((\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)})^\dagger e^{-k_z^{(II)} r_z} e^{-i(k_z^{(I)} r_z - \omega t)} \right) \right] \\
&= \frac{\sigma_0}{2} e^{-2k_z^{(II)} r_z} \left[\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)} \cdot (\widehat{\mathbf{E}}^{(0,t)})^\dagger \right] \\
&= \frac{\sigma_0}{2} e^{-2k_z^{(II)} r_z} \left(\frac{i-1}{\sigma_0 \lambda_\omega} \mathbf{e}_z \wedge \widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} \right) \cdot \left(\frac{i-1}{\sigma_0 \lambda_\omega} \mathbf{e}_z \wedge \widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} \right)^\dagger \\
&= \frac{1}{\sigma_0 \lambda_\omega^2} e^{-2k_z^{(II)} r_z} \left| \widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} \right|^2.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Rate der Jouleschen Verluste bezogen auf ein Flächenelement $\mathcal{F}_{\partial\Omega}$ der Grenzfläche

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathcal{E}^{(J)} &= \frac{1}{\sigma_0 \lambda_\omega^2} \int_{\mathcal{F}_{\partial\Omega}} d^2 r_\perp \int_0^\infty dr_z e^{-2k_z^{(II)} r_z} \left| \widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} \right|^2 & (8.158) \\
&= \int_{\mathcal{F}_{\partial\Omega}} d^2 r_\perp \frac{1}{\sigma_0 \lambda_\omega^2} \frac{1}{2k_z^{(II)}} \left| \widehat{\mathbf{H}}^{(0,t)} \right|^2 \\
&= \int_{\mathcal{F}_{\partial\Omega}} d^2 r_\perp \frac{1}{2\sigma_0 \lambda_\omega} \left| \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \wedge \mathbf{n} \right|_{\mathbf{r}_\perp \in \mathcal{F}}^2 \\
&= \int_{\mathcal{F}_{\partial\Omega}} d^2 r_\perp \left\langle \left[\mathbf{S}^{(t)}(\mathbf{r}, t) \right]_{\mathbf{r}_\perp \in \mathcal{F}} \right\rangle \cdot \mathbf{n}.
\end{aligned}$$

Fällt eine im freien Raum $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} < 0$ propagierende elektromagnetische Welle mit Wellenlänge $\lambda^{(in)}$ auf ein Flächenelement $\mathcal{F}_{\partial\Omega}$ auf der Grenzfläche $\partial\Omega$ eines Metalls auf, so induziert die in das Innere $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} > 0$ des Metalls *transmittierte* elektromagnetische Welle dort Ströme, die wiederum *Joulesche Verluste* bewirken. Nach dem Gesagten ist für $\lambda^{(in)} \gg \lambda_\omega$ die Rate dieser Jouleschen Verluste bestimmt durch das Integral der *Normalkomponente* der *transmittierten* Energiestromdichte $[\mathbf{S}^{(t)}(\mathbf{r}, t)]_{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0}$ über das Flächenelement $\mathcal{F}_{\partial\Omega}$. Demnach fließt im zeitlichen Mittel

durch ein Flächenelement $\mathcal{F}_{\partial\Omega}$ auf der Grenzfläche $\partial\Omega$ pro Zeiteinheit dt eine Energie $\int_{\mathcal{F}_{\partial\Omega}} d^2r_{\perp} \langle [\mathbf{S}^{(t)}(\mathbf{r}, t)]_{\mathbf{r}, \mathbf{n}=0} \cdot \mathbf{n} dt$ in das Metall hinein, die dann als Joulesche Wärme dissipiert wird.

In der Realität gibt es natürlich keinen ganz mit Metall ausgefüllten Halbraum. Eine Metallschicht mit Schichtdicke d deutlich größer als die Skin-Eindringtiefe λ_{ω} dürfen wir approximativ als einen ganz aus Metall bestehenden Halbraum beschreiben. Ist aber $d \lesssim \lambda_{\omega}$, so wird nicht die gesamte transmittierte Energie in der dünnen Metallschicht dissipiert, vielmehr wird ein merklicher Bruchteil des auf $\mathcal{F}_{\partial\Omega} \subset \partial\Omega$ auftreffenden Energiestroms auf der Rückseite der Metallschicht wieder austreten.

Wir berechnen jetzt

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dr_z \hat{\mathbf{j}}^{(f)}(\mathbf{r}, \omega) &= \sigma_0 \hat{\mathbf{E}}^{(0,t)} \int_0^{\infty} dr_z e^{-k_z^{(II)} r_z} e^{ik_z^{(I)} r_z} \\ &= \frac{\sigma_0}{k_z^{(II)} - ik_z^{(I)}} \hat{\mathbf{E}}^{(0,t)} \\ &= \frac{\sigma_0 \lambda_{\omega}}{1 - i} \hat{\mathbf{E}}^{(0,t)} \\ &= \frac{\sigma_0 \lambda_{\omega}}{1 - i} \frac{i - 1}{\sigma_0 \lambda_{\omega}} \mathbf{n} \wedge \hat{\mathbf{H}}^{(0,t)} \\ &= -\mathbf{n} \wedge \hat{\mathbf{H}}^{(0,t)}. \end{aligned} \quad (8.159)$$

Für $\sigma_0 \rightarrow \infty$, also $\frac{\lambda_{\omega}}{\lambda^{(in)}} \rightarrow 0$, wird das Metall effektiv zum idealen Leiter. In dem Fall ist das Integral (8.159) äquivalent zu einer effektiven Flächenstromdichte $\mathbf{J}^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r}_{\perp}, \omega)$ auf der Grenzfläche $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_{\perp} + r_z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}_{\perp} \in \partial\Omega \\ \mathbf{J}^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r}_{\perp}, \omega) &= \int_0^{\infty} dr_z \hat{\mathbf{j}}^{(f)}(\mathbf{r}, \omega) = -\mathbf{n} \wedge \hat{\mathbf{H}}^{(0,t)}. \end{aligned} \quad (8.160)$$

Da die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke beim Gang durch die Grenzfläche stetig ist, entspricht die Relation (8.159) der Randbedingung (5.13) der Magnetostatik an der Oberfläche $\partial\Omega$ eines idealen Leiters Ω im Vakuum:

$$\mathbf{J}^{(\partial\Omega)}(\mathbf{r}_{\perp}, \omega) = \mathbf{n}_{\partial\Omega} \wedge \left[\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \right]_{\mathbf{r} \in \partial\Omega}. \quad (8.161)$$

Das Minuszeichen in (8.160) erklärt sich damit, dass in (5.13) verabredet war, dass die Flächennormale $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ aus dem Metall hinaus in den freien Raum zeigt, also

$$\mathbf{n}_{\partial\Omega} = -\mathbf{n} \quad (8.162)$$

8 Elektromagnetische Wellen

Den Relationen (8.98) entnehmen wir betreffend die Randbedingungen der elektrischen und der magnetischen Feldstärke an der Grenzfläche $r_z = 0$ zu einem idealen Leiter unter Verwendung der Ergebnisse (8.101) und (8.102):

$$\begin{aligned}\sigma_0 \rightarrow \infty, \quad \lambda_\omega &= \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma_0}} \rightarrow 0, \quad r_z = 0 \\ \widehat{E}_y^{(0)} &= \widehat{E}_y^{(0,in)} + \widehat{E}_y^{(0,r)} = \widehat{E}_y^{(0,t)} = \frac{k_z^{(r)} - k_z^{(in)}}{k_z^{(r)} - \frac{\mu_A}{\mu_B} k_z^{(t)}} \widehat{E}_y^{(0,in)} \\ &= \frac{2 \frac{\omega}{c} \cos \vartheta^{(in)}}{\frac{\omega}{c} \cos \vartheta^{(in)} + \frac{1+i}{\lambda_\omega}} \widehat{E}_y^{(0,in)} \rightarrow 0 \\ \widehat{B}_z^{(0)} &= \mu_0 \widehat{H}_z^{(0)} = \mu_0 \widehat{H}_z^{(0,in)} + \mu_0 \widehat{H}_z^{(0,r)} = \frac{1}{\omega} k_x^{(t)} \widehat{E}_y^{(0,t)} = 2 \frac{\sin \vartheta^{(in)}}{c} \widehat{E}_y^{(0,t)} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= \varepsilon_0 + i \frac{\sigma_0}{\omega} & (8.163) \\ \lambda_\omega &= \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma_0}} \\ \frac{1}{\lambda_\omega \sigma_0} &= \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2 \sigma_0}} = \frac{\mu_0 \omega}{2} \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma_0}} = \frac{\mu_0 \omega}{2} \lambda_\omega\end{aligned}$$

folgt dann

$$\begin{aligned}\sigma_0 \rightarrow \infty & & (8.164) \\ \frac{k_z^{(t)}}{\varepsilon(\omega)} &= \frac{1+i}{\lambda_\omega} \frac{1}{\varepsilon_0 + i \frac{\sigma_0}{\omega}} = \frac{\omega}{\lambda_\omega \sigma_0} \frac{1+i}{\frac{\omega}{\sigma_0} \varepsilon_0 + i} = \frac{\mu_0 \omega^2}{2} \lambda_\omega \frac{1+i}{\frac{\omega}{\sigma_0} \varepsilon_0 + i} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}\sigma_0 \rightarrow \infty & & (8.165) \\ \widehat{E}_x^{(0)} &= \widehat{E}_x^{(0,in)} + \widehat{E}_x^{(0,r)} = \widehat{E}_x^{(0,t)} = \frac{k_z^{(t)}}{\omega \varepsilon(\omega)} \widehat{H}_y^{(0,t)} = \frac{k_z^{(t)}}{\omega \varepsilon(\omega)} \frac{k_z^{(r)} - k_z^{(in)}}{k_z^{(r)} - \varepsilon_0 \frac{k_z^{(t)}}{\varepsilon(\omega)}} \widehat{H}_y^{(0,in)} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

An der Grenzfläche $\partial\Omega$ zwischen Vakuum und einem *idealen* Leiter Ω gelten somit die Randbedingungen

$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma_0 \rightarrow \infty \\ [\mathbf{n}_{\partial\Omega} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} = \mathbf{0} \\ [\mathbf{n}_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} = 0. \end{array}} \quad (8.166)$$

8.9 Plasmaschwingungen

Für die Leitungselektronen in Metallen nahe der Fermikante, mit kinetischer Energie $\frac{p^2}{2m^*} \simeq E_F$, definiert man eine inverse Stoßzeit zu $\frac{1}{\tau} \equiv \frac{v_F}{l}$, wobei $v_F = \frac{p_F}{m^*}$ die Fermigeschwindigkeit und l die mittlere freie Weglänge bezeichnet. Im einfachen Modell von Drude-Sommerfeld ist die Gleichstromleitfähigkeit σ_0 des Metalls dann gegeben zu

$$\sigma_0 = n_\Omega \frac{|e|^2 \tau}{m^*}, \quad (8.167)$$

wobei n_Ω die *Teichendichte* der Elektronen im Volumen Ω und $|e|$ die Elementarladung bezeichnet. Mit der in (4.96) hergeleiteten Formel für die Wechselstromleitfähigkeit,

$$\hat{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}, \quad (8.168)$$

8 Elektromagnetische Wellen

ergibt sich für die effektive Dielektrizitätsfunktion eines Metalls der Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varepsilon}(\omega) &\equiv \varepsilon_0 + i \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\omega} & (8.169) \\
 &= \varepsilon_0 + \frac{i \sigma_0}{\omega (1 - i\omega\tau)} \\
 &= \varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{i\omega} \frac{\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\tau}}{\frac{1}{\tau} - i\omega} \right) \\
 &= \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\tau}}{\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}} \right) \\
 &= \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\frac{n_\Omega |e|^2}{\varepsilon_0 m^*}}{\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}} \right) \\
 &= \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - \frac{i}{\omega\tau}} \right).
 \end{aligned}$$

Die Größe

$$\omega_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{n_\Omega |e|^2}{\varepsilon_0 m^*}} \quad (8.170)$$

ist die sog. *Plasmafrequenz*.

Sichtbares Licht liegt im Frequenzbereich

$$\begin{aligned}
 2.4 \times 10^{15} \text{ Hz} &\lesssim \omega_s \lesssim 5.5 \times 10^{15} \text{ Hz} & (8.171) \\
 \omega_s &= 2\pi f_s.
 \end{aligned}$$

Für Metalle liegt die Plasmafrequenz ω_{pl} *oberhalb* dieses Frequenzbereichs, z.B. ist für Gold $\omega_{\text{pl}} \simeq 1.38 \times 10^{16}$ [Hz]. Für reine Metalle (z.B. Gold, Silber, Kupfer) ist die inverse Stoßzeit infolge der Elektron-Phonon Wechselwirkung $\frac{1}{\tau} \simeq 10^{14}$ [Hz], folglich ist $\omega_{\text{pl}}\tau \simeq 100$. Dann dürfen wir $\text{Im } \tilde{\varepsilon}(\omega)$ für Frequenzen nahe der Plasmafrequenz als klein gegenüber $\text{Re } \tilde{\varepsilon}(\omega)$ ansehen und erhalten

$$\begin{aligned}
 |\omega - \omega_{\text{pl}}| &\ll \omega_{\text{pl}} & (8.172) \\
 \text{Re } \tilde{\varepsilon}(\omega) &= \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{\omega^2} \right) + \dots \\
 |\text{Im } \tilde{\varepsilon}(\omega)| &\ll |\text{Re } \tilde{\varepsilon}(\omega)|.
 \end{aligned}$$

Grob gesagt gilt für Metalle für Frequenzen ω nahe der Plasmafrequenz, dass die dielektrische Funktion $\tilde{\epsilon}(\omega)$ für $\omega < \omega_{\text{pl}}$ negativ und für $\omega > \omega_{\text{pl}}$ positiv ist. Da folglich der Wellenzahlvektor \mathbf{k} aufgrund der Lösbarkeitsbedingung (8.135) für $\omega < \omega_{\text{pl}}$ rein imaginäre Werte annimmt, können elektromagnetische Wellen mit Frequenz $\omega < \omega_{\text{pl}}$ im Inneren eines Metalls nicht propagieren, denn die Amplitude solcher Wellen ist in Propagationsrichtung exponentiell abfallend. Metalle wie Gold, Silber oder Kupfer besitzen im sichtbaren Spektrum den typischen metallischen Glanz, weil eben die Plasmafrequenz deutlich größer ist als die obere Grenzfrequenz des optisch sichtbaren Spektrums, d.h. die Reflektivität an einer metallischen Grenzschicht (für senkrechten Einfall des Lichts) ist nahe Eins. Metalle sind demnach (im sichtbaren Bereich $\omega < \omega_{\text{pl}}$) nicht optisch transparent.

Ausgehend von (8.101) erhalten wir für den Reflektionskoeffizienten R_{\perp} bei *senkrechtem* Einfall von monochromatischem Licht der Frequenz $\omega = ck_z^{(in)} = c \frac{2\pi}{\lambda^{(in)}}$ auf eine ebene Metalloberfläche $\partial\Omega$ (Grenzfläche zum Vakuum) mit

$$\vartheta^{(in)} = 0, \quad k_z^{(in)} = \frac{\omega}{c}, \quad k_z^{(r)} = -k_z^{(in)}, \quad k_z^{(t)} = \frac{1+i}{\lambda_{\omega}} \quad (8.173)$$

das Ergebnis

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= \left| \frac{k_z^{(in)} - k_z^{(t)}}{k_z^{(r)} - k_z^{(t)}} \right|^2 = \left| \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{1+i}{\lambda_{\omega}}}{\frac{\omega}{c} + \frac{1+i}{\lambda_{\omega}}} \right|^2 = \left| \frac{\left(\frac{\omega}{c}\lambda_{\omega} - 1\right) - i}{\left(\frac{\omega}{c}\lambda_{\omega} + 1\right) + i} \right|^2 \\ &= \frac{\left(\frac{\omega}{c}\lambda_{\omega} - 1\right)^2 + 1}{\left(\frac{\omega}{c}\lambda_{\omega} + 1\right)^2 + 1} \\ &= 1 - \frac{4\frac{\omega}{c}\lambda_{\omega}}{\left(\frac{\omega}{c}\lambda_{\omega} + 1\right)^2 + 1} \\ &\simeq 1 - 2\frac{\omega}{c}\lambda_{\omega} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{\omega}{c}\lambda_{\omega}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (8.174)$$

Dies ist die *Hagen-Rubens-Relation*. Offensichtlich ist die Reflektivität R_{\perp} von Metallen für $\lambda_{\omega} \ll \lambda^{(in)}$ nahezu 100%.

Physikalische Deutung der Plasmafrequenz

Wir betrachten ein (kleines) langwelliges äußeres Störpotential, an dem die Leitungselektronen im Metall streuen:

$$\delta\widehat{V}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \delta\widehat{V}_{\text{ext}}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (8.175)$$

Ein Resultat aus der Theorie der Metalle, das wir hier nicht herleiten wollen, ist das Phänomen der *Abschirmung*. Aufgrund der Coulomb-Wechselwirkung der Elektronen im Metall sehen diese nämlich nicht das äußere Potential $\delta\widehat{V}_{\text{ext}}(\mathbf{q}, \omega)$, sondern ein effektives *abgeschirmtes* Potential

$$\delta\widehat{V}_{\text{eff}}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\delta\widehat{V}_{\text{ext}}(\mathbf{q}, \omega)}{\widehat{\varepsilon}(\omega)}. \quad (8.176)$$

Für $\omega \rightarrow \omega_{\text{pl}}$ wird das System *resonant*, weil eine longitudinale Eigenschwingung der Ladungsdichte der Elektronen angeregt wird.

Zwischen der Fourieramplitude $\delta\rho^{(f)}(\mathbf{r}, \omega)$ einer Ladungsdichteschwankung im Inneren des Metalls infolge einer durch externe Einflüsse $\delta\widehat{V}_{\text{ext}}$ verursachten lokalen Schwankung $\delta\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ des elektrischen Feldes einerseits, und der entsprechenden (longitudinalen) Fourieramplitude $\delta\widehat{\mathbf{j}}^{(f)}(\mathbf{r}, \omega)$ der Stromdichteschwankung andererseits, besteht aufgrund der Kontinuitätsgleichung (8.44) der Zusammenhang

$$\text{div } \delta\widehat{\mathbf{j}}^{(f)}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega\delta\rho^{(f)}(\mathbf{r}, \omega). \quad (8.177)$$

Für Ohmsche Leiter mit Leitfähigkeit $\widehat{\sigma}(\omega)$ und Dielektrizitätskonstante ε_0 gilt dabei

$$\delta\widehat{\mathbf{j}}^{(f)}(\mathbf{r}, \omega) = \widehat{\sigma}(\omega) \delta\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega). \quad (8.178)$$

Wiederum ist die lokale Schwankung der elektrischen Feldstärke mit der Ladungsdichteschwankung verknüpft gemäß

$$\text{div } \delta\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\varepsilon_0} \delta\rho^{(f)}(\mathbf{r}, \omega). \quad (8.179)$$

Es resultiert eine Eigenwertgleichung, bei der die Eigenwerte *parametrisch* von der Frequenz ω abhängen:

$$\frac{\widehat{\sigma}(\omega)}{i\omega} \delta\rho^{(f)}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \delta\rho^{(f)}(\mathbf{r}, \omega). \quad (8.180)$$

Umstellen ergibt mit (8.169) die homogene Gleichung

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) \delta\rho^{(f)}(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (8.181)$$

Die Bedingung für eine nicht triviale Eigenmode $\delta\rho^{(f)}(\mathbf{r}, \omega) \neq 0$ der Ladungsdichteschwankungen in einem Metall lautet demnach

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) \stackrel{!}{=} 0. \quad (8.182)$$

Nach dem Gesagten kann eine kollektive Ladungsdichtemode $\delta\rho^{(f)}(\mathbf{r}, \omega)$ der Elektronen nur existieren für

$$\omega = \omega_{\text{pl}} \quad (8.183)$$

Für alle anderen Frequenzen, $\omega \neq \omega_{\text{pl}}$, ist $\delta\rho^{(f)}(\mathbf{r}, \omega) \equiv 0$.

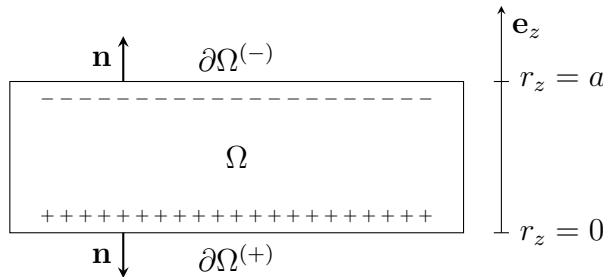


Abbildung 8.2: Seitenansicht des Metallquaders.

Physikalisch kann man sich die Existenz einer kollektiven Ladungsdichtemode an Hand eines einfachen Modells klar machen. Wir betrachten einen (flachen) Quader Ω aus Metall der Dicke a mit (sehr großer) Boden- bzw. Deckelfläche $\partial\Omega^{(\pm)}$. Der von Innen nach Außen orientierte Normalenvektor der Deckelfläche ist \mathbf{e}_z , derjenige der Bodenfläche dagegen $-\mathbf{e}_z$, siehe Abbildung 8.2. Im Gleichgewicht ist im Inneren des Quaders die gesamte Ladungsdichte (Elektronen und Ionen zusammen betrachtet) gleich Null, denn im Metall befinden sich eine Anzahl N von negativ geladenen mobilen Elektronen, die sich vor dem Hintergrund von im Kristall fixierten und Z -fach positiv geladenen Ionenrümpfe bewegen, wobei deren Anzahl aufgrund der Ladungsneutralität des Gesamtsystems zu $\frac{N}{Z}$ gegeben ist. Angenommen, wir bringen es fertig, zum Zeitpunkt $t = 0$ das gesamte Elektronensystem kollektiv um eine kleine Strecke $\Delta s_0 \ll a$ in Richtung \mathbf{e}_z relativ zu den in Ruhe

8 Elektromagnetische Wellen

befindlichen Ionen auszulenken. In dem Fall entstehen sofort rüchtreibende Kräfte, denn an der Deckelfläche $r_z = a$ des Quaders befinden sich jetzt in einer dünnen Schicht $a \leq r_z \leq a + \Delta s_0$ eine Anzahl N_D *negative* Ladungen, während an der Bodenfläche $r_z = 0$ in einer dünnen Schicht $0 \leq r_z \leq \Delta s_0$ genauso viele unkompenzierte *positive* Ladungen zurück bleiben. Im Bereich $\Delta s_0 \leq r_z \leq a$ dagegen bleibt die Gesamtladungsdichte gleich Null, da dort nach wie vor Ladungsneutralität herrscht. Mit der instantanen *Flächenladungsdichte*

$$\begin{aligned}\omega^{(+)}(t) &= \frac{N|e|}{|\Omega|} \Delta s(t) = n_\Omega |e| \Delta s(t) \\ \omega^{(-)}(t) &= -\frac{N}{|\Omega|} \Delta s_0 |e| = -n_\Omega |e| \Delta s(t)\end{aligned}\quad (8.184)$$

an der Bodenfläche $\partial\Omega^{(+)}$ bzw. der Deckelfläche $\partial\Omega^{(-)}$ einher geht jeweils ein in das Innere hin orientiertes elektrisches Feld

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{(+)}(t) &= \frac{\omega^{(+)}(t)}{2\varepsilon_0} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{E}^{(-)}(t) &= \frac{\omega^{(-)}(t)}{2\varepsilon_0} (-\mathbf{e}_z),\end{aligned}\quad (8.185)$$

denn das elektrische Feld einer (eigentlich unendlich) ausgedehnten ebenen Fläche mit *homogener* Flächenladungsdichte ist parallel zum Normalenvektor der Grenzfläche orientiert und *ortsunabhängig*, siehe (2.22). Da jedes einzelne der N Elektronen im geschilderten Modell um die *selbe* Strecke $\Delta s(t)$ in Richtung \mathbf{e}_z ausgelenkt ist, wirkt demnach die *resultierende* rüchtreibende Kraft

$$N(-|e|) [\mathbf{E}^{(+)}(t) + \mathbf{E}^{(-)}(t)]. \quad (8.186)$$

Das führt nach dem Gesagten auf die Bewegungsgleichung

$$Nm^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta s(t) = N(-|e|) \left[\frac{n_\Omega |e|}{2\varepsilon_0} + \frac{n_\Omega |e|}{2\varepsilon_0} \right] \Delta s(t). \quad (8.187)$$

Umstellen ergibt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{n_\Omega |e|^2}{\varepsilon_0 m^*} \right) \Delta s(t) = 0. \quad (8.188)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines klassischen harmonischen Oszillators mit der Plasmafrequenz $\omega_{pl} = \sqrt{n_{\Omega} |e|^2 / (\varepsilon_0 m^*)}$ als Eigenfrequenz. Die zugeordnete Eigenlösung, auch *Plasmon* genannt, beschreibt eine *kollektive* harmonische Schwingung des Elektronensystems relativ zu den Ionen im Kristall:

$$\Delta s(t) = \Delta s_0 \cos(\omega_{pl} \cdot t). \quad (8.189)$$

Das mit so einer Eigenschwingung einhergehende elektrische Feld $\mathbf{E}(t)$ ist *longitudinal*.

9 Hohlleitermoden

Ein Hohlleiter ist ein Rohr, meist mit rechteckigem, kreisförmigem oder elliptischem Querschnitt, dessen Innenwände aus Metall bestehen. Mit Hohlleitern können elektromagnetische Signale, typischerweise im Frequenzbereich 3 GHz bis 200 GHz, *sehr verlustarm* übertragen werden.

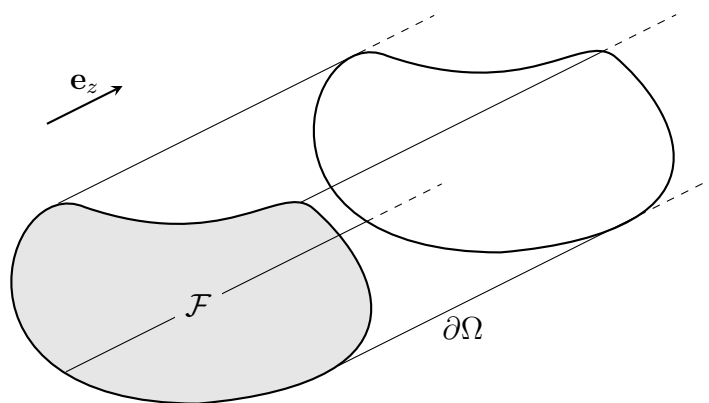


Abbildung 9.1: Ein entlang der z -Achse ausgerichteter, unendlich fortgesetzter Hohlleiter.

Wir betrachten jetzt ein in Richtung \mathbf{e}_z translationsinvariantes, unendlich ausgedehntes Rohr Ω mit konstanter Querschnittsfläche \mathcal{F} , siehe Abbildung 9.1. Die Wände $\partial\Omega$ des Rohres bestehen aus einem Metall mit Leitfähigkeit σ . Das Innere des Rohres ist mit einem *homogenen* und *transparenten* Material mit Dielektrizitätskonstante ε und Permeabilität μ gefüllt. Im einfachsten Fall (SI-Einheiten, $\kappa = 1$) ist $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\mu = \mu_0$, d.h. das Rohr ist hohl (Vakuum). Längs der Rohrachse \mathbf{e}_z können dann elektromagnetische Wellen propagieren. Für den Experimentalphysiker ist der Existenzbeweis von Hohlleitermoden ganz einfach, denn er weiß aus dem Experiment, dass man durch ein langes Rohr der beschriebenen Art hindurch schauen kann!

9 Hohlleitermoden

Wir suchen Lösungen der Maxwell-Gleichungen (8.46), welche einer Überlagerung aus in Richtung \mathbf{e}_z propagierender monochromatische ebener Wellen entsprechen:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \sum_{k_z} \widehat{\mathbf{E}}(r_x, r_y; k_z, \omega) e^{i(k_z r_z - \omega t)} = \operatorname{Re} \left[\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right] \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \sum_{k_z} \widehat{\mathbf{H}}(r_x, r_y; k_z, \omega) e^{i(k_z r_z - \omega t)} = \operatorname{Re} \left[\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \right].\end{aligned}\quad (9.1)$$

Die Feldamplituden

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= \sum_{k_z} \widehat{\mathbf{E}}(r_x, r_y; k_z, \omega) e^{ik_z r_z} \\ \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) &= \sum_{k_z} \widehat{\mathbf{H}}(r_x, r_y; k_z, \omega) e^{ik_z r_z}\end{aligned}\quad (9.2)$$

genügen somit den monochromatischen homogenen Maxwell-Gleichungen in Materie

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) &= -i\omega \varepsilon \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= i\omega \mu \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega).\end{aligned}\quad (9.3)$$

Mit

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) &= \varepsilon \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) &= \mu \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)\end{aligned}\quad (9.4)$$

gilt dann im Inneren des Rohres

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \widehat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) &= \operatorname{div} \left[\varepsilon \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \right] = \frac{i}{\omega} \operatorname{div} \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \\ \operatorname{div} \widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) &= \operatorname{div} \left[\mu \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \right] = -\frac{i}{\omega} \operatorname{div} \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0.\end{aligned}\quad (9.5)$$

Hinzu kommen die Randbedingungen auf den Wänden $\partial\Omega$ des Hohlleiters, die wir zunächst als ideal leitend ($\sigma \rightarrow \infty$) annehmen wollen:

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{n}_{\partial\Omega} \wedge \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \right]_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} &= \mathbf{0} \\ \left[\mathbf{n}_{\partial\Omega} \cdot \widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) \right]_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} &= 0.\end{aligned}\quad (9.6)$$

9.1 Verschiedene Lösungstypen: TEM-Moden, TM-Moden und TE-Moden

Somit folgt durch Einsetzen des Ansatzes (9.1) das folgende System gekoppelter Differentialgleichungen für die kartesischen Komponenten \widehat{E}_a und \widehat{H}_a der Amplitudenfunktionen $\widehat{\mathbf{E}}(r_x, r_y; k_z, \omega)$ und $\widehat{\mathbf{H}}(r_x, r_y; k_z, \omega)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_y} - ik_z \widehat{H}_y &= -i\omega \varepsilon \widehat{E}_x \\ ik_z \widehat{H}_x - \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_x} &= -i\omega \varepsilon \widehat{E}_y \\ \frac{\partial \widehat{H}_y}{\partial r_x} - \frac{\partial \widehat{H}_x}{\partial r_y} &= -i\omega \varepsilon \widehat{E}_z \\ \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_y} - ik_z \widehat{E}_y &= i\omega \mu \widehat{H}_x \\ ik_z \widehat{E}_x - \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_x} &= i\omega \mu \widehat{H}_y \\ \frac{\partial \widehat{E}_y}{\partial r_x} - \frac{\partial \widehat{E}_x}{\partial r_y} &= i\omega \mu \widehat{H}_z.\end{aligned}\tag{9.7}$$

9.1 Verschiedene Lösungstypen: TEM-Moden, TM-Moden und TE-Moden

Transversal-Elektromagnetische Moden (TEM) sind gekennzeichnet durch die Eigenschaft

$$\begin{aligned}\text{TEM} \\ \widehat{E}_z \equiv 0 \equiv \widehat{H}_z.\end{aligned}\tag{9.8}$$

9 Hohlleitermoden

Damit folgt jetzt insbesondere

$$\begin{aligned}
 & \text{TEM} & (9.9) \\
 & -ik_z \widehat{H}_y = -i\omega\varepsilon \widehat{E}_x \\
 & ik_z \widehat{H}_x = -i\omega\varepsilon \widehat{E}_y \\
 & \frac{\partial \widehat{H}_y}{\partial r_x} - \frac{\partial \widehat{H}_x}{\partial r_y} = 0 \\
 & -ik_z \widehat{E}_y = i\omega\mu \widehat{H}_x \\
 & ik_z \widehat{E}_x = i\omega\mu \widehat{H}_y \\
 & \frac{\partial \widehat{E}_y}{\partial r_x} - \frac{\partial \widehat{E}_x}{\partial r_y} = 0.
 \end{aligned}$$

Als Lösbarkeitsbedingung folgt

$$\begin{aligned}
 & \text{TEM} & (9.10) \\
 & \widehat{E}_x \widehat{H}_x + \widehat{E}_y \widehat{H}_y = \widehat{\mathbf{E}}(r_x, r_y; k_z, \omega) \cdot \widehat{\mathbf{H}}(r_x, r_y; k_z, \omega) = 0 \\
 & \omega^2 = \tilde{c}^2 k_z^2 \\
 & \tilde{c} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.
 \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial \widehat{H}_y}{\partial r_x} - \frac{\partial \widehat{H}_x}{\partial r_y} = \frac{k_z}{\omega\mu} \left(\frac{\partial \widehat{E}_x}{\partial r_x} + \frac{\partial \widehat{E}_y}{\partial r_y} \right) & (9.11) \\
 0 &= \frac{\partial \widehat{E}_y}{\partial r_x} - \frac{\partial \widehat{E}_x}{\partial r_y} = -\frac{k_z}{\omega\varepsilon} \left(\frac{\partial \widehat{H}_x}{\partial r_x} + \frac{\partial \widehat{H}_y}{\partial r_y} \right).
 \end{aligned}$$

Nach dem Gesagten existieren für TEM-Wellen zwei *skalare* Potentialfunktionen $U = U(r_x, r_y; k_z, \omega)$ und $V = V(r_x, r_y; k_z, \omega)$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}
 & a \in \{x, y\} & (9.12) \\
 & \widehat{E}_a = \frac{\partial V}{\partial r_a} \\
 & \widehat{H}_a = \frac{\partial U}{\partial r_a}.
 \end{aligned}$$

9.1 Verschiedene Lösungstypen: TEM-Moden, TM-Moden und TE-Moden

Diese genügen auf einem Querschnitt \mathcal{F} des Hohlleiters der zweidimensionalen Laplace-Gleichung

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_y^2} \right) V(r_x, r_y; k_z, \omega) &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_y^2} \right) U(r_x, r_y; k_z, \omega) &= 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Die Randbedingungen (9.6), nämlich dass die Normalkomponente des Magnetfelds und die Tangentialkomponenten des elektrischen Felds an der Wand $\partial\Omega$ verschwinden, sind äquivalent zur Forderung

$$\begin{aligned} [V(r_x, r_y; k_z, \omega)]_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} &= \text{const} \\ [\mathbf{n}_{\partial\Omega} \cdot \nabla U(r_x, r_y; k_z, \omega)]_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Die Äquipotentiallinien von V sind orthogonal zu denjenigen von U .

Ist der Querschnitt \mathcal{F} des Hohlleiters am Ort r_z , wie im vorliegenden Fall angenommen, nun *einfach zusammenhängend*, so ist notwendig $V(r_x, r_y; k_z, \omega) = \text{const}$ bzw. $U(r_x, r_y; k_z, \omega) = \text{const}$ für alle $(r_x, r_y) \in \mathcal{F}$. In einem Hohlleiter mit *einfach zusammenhängender* Querschnittsfläche existieren keine propagierenden TEM-Moden.

Demnach existieren TEM-Moden nur dann, wenn die Querschnittsfläche *nicht* einfach zusammenhängend ist, z.B. wenn längs der Achse des Hohlleiters zusätzlich ein dünner Metalldraht gespannt ist, der zudem auf einem anderen Potentialwert liegt als die Wand des Hohlleiters. In dem Fall ist das Problem, die betreffenden TEM-Moden zu berechnen, äquivalent zum Problem, die Kapazität in einer zweidimensionalen Geometrie zu berechnen (Koaxialkabel).

TM-Moden

Transversal-Magnetische Moden sind gekennzeichnet durch die Eigenschaft

$$\begin{aligned} \text{TM} \\ \widehat{H}_z &\equiv 0 \\ \widehat{E}_z &\neq 0. \end{aligned} \quad (9.15)$$

9 Hohlleitermoden

Aus (9.7) folgt dann

$$\begin{aligned}
 -ik_z \widehat{H}_y &= -i\omega\varepsilon \widehat{E}_x & (9.16) \\
 ik_z \widehat{H}_x &= -i\omega\varepsilon \widehat{E}_y \\
 \frac{\partial \widehat{H}_y}{\partial r_x} - \frac{\partial \widehat{H}_x}{\partial r_y} &= -i\omega\varepsilon \widehat{E}_z \\
 \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_y} - ik_z \widehat{E}_y &= i\omega\mu \widehat{H}_x \\
 ik_z \widehat{E}_x - \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_x} &= i\omega\mu \widehat{H}_y \\
 \frac{\partial \widehat{E}_y}{\partial r_x} - \frac{\partial \widehat{E}_x}{\partial r_y} &= 0.
 \end{aligned}$$

Umstellen ergibt zwei lineare gekoppelte 2×2 -Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}
 \omega\varepsilon \widehat{E}_x - k_z \widehat{H}_y &= 0 & (9.17) \\
 k_z \widehat{E}_x - \omega\mu \widehat{H}_y &= \frac{1}{i} \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_x} \\
 \omega\varepsilon \widehat{E}_y + k_z \widehat{H}_x &= 0 \\
 k_z \widehat{E}_y + \omega\mu \widehat{H}_x &= \frac{1}{i} \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_y}.
 \end{aligned}$$

Mit der Definition

$$q^2 \equiv \omega^2 \varepsilon \mu - k_z^2 \quad (9.18)$$

lauten deren Lösungen

$$\begin{aligned}
 \widehat{E}_x &= i \frac{k_z}{q^2} \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_x} & (9.19) \\
 \widehat{H}_y &= i \frac{\omega\varepsilon}{q^2} \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_x} \\
 \widehat{E}_y &= i \frac{k_z}{q^2} \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_y}
 \end{aligned}$$

9.1 Verschiedene Lösungstypen: TEM-Moden, TM-Moden und TE-Moden

$$\widehat{H}_x = -i \frac{\omega \varepsilon}{q^2} \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_y}.$$

Eine der verbleibenden Gleichungen ist identisch erfüllt:

$$\frac{\partial \widehat{E}_y}{\partial r_x} - \frac{\partial \widehat{E}_x}{\partial r_y} = i \frac{k_z}{q^2} \left(\frac{\partial^2 \widehat{E}_z}{\partial r_x \partial r_y} - \frac{\partial^2 \widehat{E}_z}{\partial r_y \partial r_x} \right) = 0. \quad (9.20)$$

Die andere schreiben wir um zu

$$-i \omega \varepsilon \widehat{E}_z = \frac{\partial \widehat{H}_y}{\partial r_x} - \frac{\partial \widehat{H}_x}{\partial r_y} = i \frac{\omega \varepsilon}{q^2} \left(\frac{\partial^2 \widehat{E}_z}{\partial r_x^2} + \frac{\partial^2 \widehat{E}_z}{\partial r_y^2} \right). \quad (9.21)$$

Dies ist eine Helmholtz-Gleichung für die Feldamplitude \widehat{E}_z zum Eigenwert q^2 :

$$\begin{aligned} & \text{TM} & (9.22) \\ & \frac{\partial^2 \widehat{E}_z}{\partial r_x^2} + \frac{\partial^2 \widehat{E}_z}{\partial r_y^2} + q^2 \widehat{E}_z = 0 \\ & q^2 \equiv \omega^2 \varepsilon \mu - k_z^2 \\ & \widehat{E}_z = \widehat{E}_z(r_x, r_y; k_z, \omega). \end{aligned}$$

Die Randbedingungen (9.6) sind für TM-Moden, siehe (9.19), äquivalent zur Forderung

$$\left[\widehat{E}_z(r_x, r_y; k_z, \omega) \right]_{\mathbf{r} \in \partial \Omega} = 0. \quad (9.23)$$

Es handelt sich demnach um eine *Dirichlet-Randbedingung*. Für eine vorgegebene Frequenz $\omega = 2\pi f$ können nur solche TM-Moden längs der Rohrachse \mathbf{e}_z propagieren, deren Wellenzahlvektor $k_z = k_z(q)$ der Bedingung

$$0 < k_z^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - q^2 \quad (9.24)$$

genügt, wobei $q^2 > 0$ die Eigenwerte des TM-Eigenwertproblems (9.22) und (9.23) bezeichnet.

9 Hohlleitermoden

TE-Moden

Transversal-Elektrische Moden sind gekennzeichnet durch die Eigenschaft

$$\begin{aligned} \text{TE} & & (9.25) \\ \widehat{E}_z &\equiv 0 \\ \widehat{H}_z &\neq 0. \end{aligned}$$

Aus (9.7) folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_y} - ik_z \widehat{H}_y &= -i\omega\varepsilon \widehat{E}_x & (9.26) \\ ik_z \widehat{H}_x - \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_x} &= -i\omega\varepsilon \widehat{E}_y \\ \frac{\partial \widehat{H}_y}{\partial r_x} - \frac{\partial \widehat{H}_x}{\partial r_y} &= 0 \\ -ik_z \widehat{E}_y &= i\omega\mu \widehat{H}_x \\ ik_z \widehat{E}_x &= i\omega\mu \widehat{H}_y \\ \frac{\partial \widehat{E}_y}{\partial r_x} - \frac{\partial \widehat{E}_x}{\partial r_y} &= i\omega\mu \widehat{H}_z. \end{aligned}$$

Umstellen ergibt zwei lineare gekoppelte 2×2 -Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} k_z \widehat{E}_x - \omega\mu \widehat{H}_y &= 0 & (9.27) \\ \omega\varepsilon \widehat{E}_x - k_z \widehat{H}_y &= i \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_y} \\ k_z \widehat{E}_y + \omega\mu \widehat{H}_x &= 0 \\ \omega\varepsilon \widehat{E}_y + k_z \widehat{H}_x &= -i \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_x}. \end{aligned}$$

Mit der Definition

$$q^2 \equiv \omega^2 \varepsilon \mu - k_z^2 \quad (9.28)$$

9.1 Verschiedene Lösungstypen: TEM-Moden, TM-Moden und TE-Moden

lauten deren Lösungen

$$\begin{aligned}\widehat{E}_x &= i \frac{\omega \mu}{q^2} \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_y} \\ \widehat{H}_y &= i \frac{k_z}{q^2} \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_y} \\ \widehat{E}_y &= -i \frac{\omega \mu}{q^2} \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_x} \\ \widehat{H}_x &= i \frac{k_z}{q^2} \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_x}.\end{aligned}\tag{9.29}$$

Eine der verbleibenden Gleichungen ist identisch erfüllt:

$$\frac{\partial \widehat{H}_y}{\partial r_x} - \frac{\partial \widehat{H}_x}{\partial r_y} = i \frac{k_z}{q^2} \left(\frac{\partial^2 \widehat{H}_z}{\partial r_x \partial r_y} - \frac{\partial^2 \widehat{H}_z}{\partial r_y \partial r_x} \right) = 0.\tag{9.30}$$

Die andere schreiben wir um zu

$$i \omega \mu \widehat{H}_z = \frac{\partial \widehat{E}_y}{\partial r_x} - \frac{\partial \widehat{E}_x}{\partial r_y} = -i \frac{\omega \mu}{q^2} \left(\frac{\partial^2 \widehat{H}_z}{\partial r_x^2} + \frac{\partial^2 \widehat{H}_z}{\partial r_y^2} \right).\tag{9.31}$$

Dies ist eine Helmholtz-Gleichung für die Feldamplitude \widehat{H}_z zum Eigenwert q^2 :

$$\begin{aligned}\text{TE} \\ \frac{\partial^2 \widehat{H}_z}{\partial r_x^2} + \frac{\partial^2 \widehat{H}_z}{\partial r_y^2} + q^2 \widehat{H}_z &= 0 \\ q^2 &\equiv \omega^2 \varepsilon \mu - k_z^2 \\ \widehat{H}_z &= \widehat{H}_z(r_x, r_y; k_z, \omega).\end{aligned}\tag{9.32}$$

Die Randbedingungen (9.6) sind für TE-Moden, siehe (9.19), äquivalent zur Forderung

$$\left[\mathbf{n}_{\partial\Omega} \cdot \nabla \widehat{H}_z(r_x, r_y; k_z, \omega) \right]_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} = 0.\tag{9.33}$$

Es handelt sich um eine *Neumann-Randbedingung*. Die Normalableitung von \widehat{H}_z muss demnach auf der Randkurve $\partial\mathcal{F}$ der Querschnittsfläche \mathcal{F} verschwinden.

Orthogonalitätsrelationen für TE- und TM-Moden

TM- und TE-Moden sind nach dem Gesagten *Eigenfunktionen* der skalaren Helmholtz-Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\perp &= (r_x, r_y) \in \mathcal{F} \\ u_q &= u_q(\mathbf{r}_\perp) \\ -\nabla^2 u_q &= q^2 u_q \\ \nabla^2 u_q &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_y^2} \right) u_q(\mathbf{r}_\perp) \end{aligned} \quad (9.34)$$

zum Eigenwert q^2 , allerdings zu unterschiedlichen Randbedingungen. Für TM-Moden ist gefordert, dass u_q auf dem Rand $\partial\mathcal{F}$ der Querschnittsfläche \mathcal{F} verschwindet,

$$\begin{aligned} &\text{TM} \\ [u_q(\mathbf{r}_\perp)]_{\mathbf{r}_\perp \in \partial\mathcal{F}} &= 0, \end{aligned} \quad (9.35)$$

dagegen ist für TE-Moden gefordert, dass die Normalableitung $\mathbf{n}_{\partial\mathcal{F}} \cdot \nabla u_q$ auf dem Rand $\partial\mathcal{F}$ der Querschnittsfläche \mathcal{F} verschwindet

$$\begin{aligned} &\text{TE} \\ [\mathbf{n}_{\partial\mathcal{F}} \cdot \nabla u_q(\mathbf{r}_\perp)]_{\mathbf{r}_\perp \in \partial\mathcal{F}} &= 0. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Wir zeigen jetzt, dass für sämtliche Eigenwerte q^2 , sowohl für TM- als auch für TE-Moden, gilt $q^2 > 0$. Um dies einzusehen, betrachten wir eine auf dem Querschnitt \mathcal{F} definierte Eigenfunktion $u_q = u_q(\mathbf{r}_\perp)$ zum Eigenwert q^2 , die entweder den Randbedingungen für TM- oder den Randbedingungen für TE-Moden genügt. Dann gilt natürlich

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\mathcal{F}} ds [u_q^\dagger(\mathbf{s})]_{\mathbf{s} \in \partial\mathcal{F}} [\mathbf{n}_{\partial\mathcal{F}} \cdot \nabla u_q(\mathbf{s})]_{\mathbf{s} \in \partial\mathcal{F}} \\ &= \int_{\partial\mathcal{F}} dr_\perp \mathbf{n}_{\partial\mathcal{F}} \cdot [u_q^\dagger(\mathbf{r}_\perp) \nabla u_q(\mathbf{r}_\perp)] \\ &= \int_{\mathcal{F}} d^2 r_\perp \operatorname{div} [u_q^\dagger(\mathbf{r}_\perp) \nabla u_q(\mathbf{r}_\perp)]. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Bei der Umformung in der letzten Zeile wurde der Satz von Gauß verwendet.

9.1 Verschiedene Lösungstypen: TEM-Moden, TM-Moden und TE-Moden

Mit der Identität

$$\operatorname{div} \left[u_q^\dagger(\mathbf{r}_\perp) \nabla u_q(\mathbf{r}_\perp) \right] = u_q^\dagger(\mathbf{r}_\perp) \nabla^2 u_q(\mathbf{r}_\perp) + [\nabla u_q(\mathbf{r}_\perp)]^\dagger \cdot \nabla u_q(\mathbf{r}_\perp) \quad (9.38)$$

folgt, da $u_q = u_q(\mathbf{r}_\perp)$ Lösung der Helmholtz-Gleichung ist,

$$\left(\nabla^2 + q^2 \right) u_q(\mathbf{r}_\perp) = 0, \quad (9.39)$$

jetzt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{F}} d^2 r_\perp \operatorname{div} \left[u_q^\dagger(\mathbf{r}_\perp) \nabla u_q(\mathbf{r}_\perp) \right] \\ &= \int_{\mathcal{F}} d^2 r_\perp \left\{ u_q^\dagger(\mathbf{r}_\perp) \nabla^2 u_q(\mathbf{r}_\perp) + [\nabla u_q(\mathbf{r}_\perp)]^\dagger \cdot \nabla u_q(\mathbf{r}_\perp) \right\} \\ &= -q^2 \int_{\mathcal{F}} d^2 r_\perp u_q^\dagger(\mathbf{r}_\perp) u_q(\mathbf{r}_\perp) + \int_{\mathcal{F}} d^2 r_\perp [\nabla u_q(\mathbf{r}_\perp)]^\dagger \cdot \nabla u_q(\mathbf{r}_\perp). \end{aligned} \quad (9.40)$$

Also

$$q^2 = \frac{\int_{\mathcal{F}} d^2 r_\perp [\nabla u_q(\mathbf{r}_\perp)]^\dagger \cdot \nabla u_q(\mathbf{r}_\perp)}{\int_{\mathcal{F}} d^2 r_\perp u_q^\dagger(\mathbf{r}_\perp) u_q(\mathbf{r}_\perp)}. \quad (9.41)$$

Da gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} d^2 r_\perp u_q^\dagger(\mathbf{r}_\perp) u_q(\mathbf{r}_\perp) &> 0 \\ \int_{\mathcal{F}} d^2 r_\perp [\nabla u_q(\mathbf{r}_\perp)]^\dagger \cdot \nabla u_q(\mathbf{r}_\perp) &> 0, \end{aligned} \quad (9.42)$$

ist manifest $q^2 > 0$. Alle Eigenwerte q^2 von TM- bzw. TE-Moden sind positiv.

Sind $u_q(\mathbf{r}_\perp)$ bzw. $u_p(\mathbf{r}_\perp)$ zwei Eigenfunktionen zu *verschiedenen* Eigenwerten q^2 bzw. p^2 , die *beide* entweder den Randbedingungen für TM-Moden oder den Randbedingungen für TE-Moden genügen, so gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\mathcal{F}} ds \left[u_p^\dagger(\mathbf{s}) \right]_{\mathbf{s} \in \partial\mathcal{F}} \left[\mathbf{n}_{\partial\mathcal{F}} \cdot \nabla u_q(\mathbf{s}) \right]_{\mathbf{s} \in \partial\mathcal{F}} \\ &= \int_{\partial\mathcal{F}} dr_\perp \mathbf{n}_{\partial\mathcal{F}} \cdot \left[u_p^\dagger(\mathbf{r}_\perp) \nabla u_q(\mathbf{r}_\perp) \right], \end{aligned} \quad (9.43)$$

und ebenso

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\mathcal{F}} ds \left[u_q(\mathbf{s}) \right]_{\mathbf{s} \in \partial\mathcal{F}} \left[\mathbf{n}_{\partial\mathcal{F}} \cdot \nabla u_p^\dagger(\mathbf{s}) \right]_{\mathbf{s} \in \partial\mathcal{F}} \\ &= \int_{\partial\mathcal{F}} dr_\perp \mathbf{n}_{\partial\mathcal{F}} \cdot \left[u_q(\mathbf{r}_\perp) \nabla u_p^\dagger(\mathbf{r}_\perp) \right]. \end{aligned} \quad (9.44)$$

9 Hohlleitermoden

Demnach

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\mathcal{F}} d\mathbf{r}_\perp \mathbf{n}_{\partial\mathcal{F}} \cdot \left[u_p^\dagger(\mathbf{r}_\perp) \nabla u_q(\mathbf{r}_\perp) - u_q(\mathbf{r}_\perp) \nabla u_p^\dagger(\mathbf{r}_\perp) \right] \\ &= \int_{\mathcal{F}} d^2 r_\perp \operatorname{div} \left[u_p^\dagger(\mathbf{r}_\perp) \nabla u_q(\mathbf{r}_\perp) - u_q(\mathbf{r}_\perp) \nabla u_p^\dagger(\mathbf{r}_\perp) \right]. \end{aligned} \quad (9.45)$$

Bei der Umformung in der letzten Zeile wurde der Satz von Gauß verwendet. Mit der Identität

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \left[u_p^\dagger(\mathbf{r}_\perp) \nabla u_q(\mathbf{r}_\perp) - u_q(\mathbf{r}_\perp) \nabla u_p^\dagger(\mathbf{r}_\perp) \right] \\ &= u_p^\dagger(\mathbf{r}_\perp) \nabla^2 u_q(\mathbf{r}_\perp) - u_q(\mathbf{r}_\perp) \nabla^2 u_p^\dagger(\mathbf{r}_\perp) \end{aligned} \quad (9.46)$$

folgt, da $u_q = u_q(\mathbf{r}_\perp)$ und $u_p = u_p(\mathbf{r}_\perp)$ Lösungen der Helmholtz-Gleichung sind,

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + q^2) u_q(\mathbf{r}_\perp) &= 0 \\ (\nabla^2 + p^2) u_p(\mathbf{r}_\perp) &= 0, \end{aligned} \quad (9.47)$$

nunmehr

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{F}} d^2 r_\perp \left\{ u_p^\dagger(\mathbf{r}_\perp) \nabla^2 u_q(\mathbf{r}_\perp) - u_q(\mathbf{r}_\perp) \left[\nabla^2 u_p(\mathbf{r}_\perp) \right]^\dagger \right\} \\ &= (p^2 - q^2) \int_{\mathcal{F}} d^2 r_\perp u_p^\dagger(\mathbf{r}_\perp) u_q(\mathbf{r}_\perp). \end{aligned} \quad (9.48)$$

Dem Gesagten entnehmen wir die Orthogonalitätsrelation

$$\boxed{\begin{aligned} &p^2 \neq q^2 \\ &\int_{\mathcal{F}} d^2 r_\perp u_p^\dagger(\mathbf{r}_\perp) u_q(\mathbf{r}_\perp) = 0. \end{aligned}} \quad (9.49)$$

Tatsächlich gilt jetzt aber auch

$$\begin{aligned} &p^2 \neq q^2 \\ &\int_{\mathcal{F}} d^2 r_\perp \left[\nabla u_p(\mathbf{r}_\perp) \right]^\dagger \cdot \nabla u_q(\mathbf{r}_\perp) = 0, \end{aligned} \quad (9.50)$$

9.1 Verschiedene Lösungstypen: TEM-Moden, TM-Moden und TE-Moden

denn

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\partial\mathcal{F}} d^2r_{\perp} \mathbf{n}_{\partial\mathcal{F}} \cdot [u_p^{\dagger}(\mathbf{r}_{\perp}) \nabla u_q(\mathbf{r}_{\perp})] \\
 &= \int_{\mathcal{F}} d^2r_{\perp} \operatorname{div} [u_p^{\dagger}(\mathbf{r}_{\perp}) \nabla u_q(\mathbf{r}_{\perp})] \\
 &= \int_{\mathcal{F}} d^2r_{\perp} \left\{ u_p^{\dagger}(\mathbf{r}_{\perp}) \nabla^2 u_q(\mathbf{r}_{\perp}) + [\nabla u_p(\mathbf{r}_{\perp})]^{\dagger} \cdot \nabla u_q(\mathbf{r}_{\perp}) \right\} \\
 &= -q^2 \underbrace{\int_{\mathcal{F}} d^2r_{\perp} u_p^{\dagger}(\mathbf{r}_{\perp}) u_q(\mathbf{r}_{\perp})}_{=0, \text{ für } p^2 \neq q^2} + \int_{\mathcal{F}} d^2r_{\perp} [\nabla u_p(\mathbf{r}_{\perp})]^{\dagger} \cdot \nabla u_q(\mathbf{r}_{\perp}) \\
 &= \int_{\mathcal{F}} d^2r_{\perp} [\nabla u_p(\mathbf{r}_{\perp})]^{\dagger} \cdot \nabla u_q(\mathbf{r}_{\perp}).
 \end{aligned} \tag{9.51}$$

Grenzfrequenz

Für eine vorgegebene Frequenz $\omega = 2\pi f$ können nur solche TE-Moden längs der Rohrachse \mathbf{e}_z propagieren, deren Wellenzahlvektor $k_z = k_z(q)$ der Bedingung

$$0 < k_z^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - q^2 \tag{9.52}$$

genügt, wobei $q^2 > 0$ die Eigenwerte des TE-Eigenwertproblems (9.32) und (9.33) bezeichnet. Für $k_z^2 < 0$ ist die Welle evaneszent, also nicht ausbreitungsfähig, weil sie in Ausbreitungsrichtung exponentiell abfällt.

Für jede *einfach zusammenhängende* Querschnittsfläche \mathcal{F} existiert nach dem Gesagten eine *kleinstmögliche* Frequenz $f_{\min} > 0$, so dass Signale mit Kreisfrequenzen

$$\omega < \omega_{\min} = 2\pi f_{\min} \tag{9.53}$$

nicht entlang der Achse des Rohres propagieren können! Die Größenordnung der Grenzfrequenz f_{\min} ist über den Durchmesser $D \simeq \sqrt{4|\mathcal{F}|/\pi}$ der Querschnittsfläche \mathcal{F} abschätzbar zu

$$\omega_{\min} = 2\pi f_{\min} = \tilde{c} \min_q |q| \simeq 2\pi \frac{\tilde{c}}{D}. \tag{9.54}$$

Bemerkung

Das im Beton der Wand einer modernen Tunnelröhre mit Innendurchmesser $D \simeq 8$ m immer vorhandene Stahlgeflecht mit Gitterkonstante $a \ll D$ ist für Wellen mit

9 Hohlleitermoden

Wellenlänge $\lambda \gg a$ approximativ eine leitende Oberfläche. Daher kann man im Inneren einer langen Tunnelröhre z.B. keine Radiosignale auf der Kurzwelle (KW) oder Mittelwelle (MW) mit Wellenlänge $\lambda_{\text{Radio}} \gg D$ empfangen, weil die Frequenz f_{Radio} der Radiosignale dann bereits unterhalb der Grenzfrequenz $\frac{\omega_{\text{min}}}{2\pi}$ liegt:

$$f_{\text{Radio}} = \frac{c}{\lambda_{\text{Radio}}} \ll \frac{\omega_{\text{min}}}{2\pi} \simeq \frac{c}{D}. \quad (9.55)$$

9.2 Dispersionsrelation und Gruppengeschwindigkeit

Aufgrund von (9.41) ist gewährleistet, dass für die Eigenwerte q^2 von TM- bzw. TE-Moden gilt $q^2 > 0$. Somit existiert für jeden solchen Eigenwert q^2 gemäß (9.24) bzw. (9.52) eine Dispersionsrelation

$$\begin{aligned} \omega_q(k_z) &= \tilde{c} \sqrt{k_z^2 + q^2} \\ \tilde{c} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \\ 0 &\leq k_z^2 < \infty. \end{aligned} \quad (9.56)$$

Zur *Signalübertragung* in Hohlleitern dienen *Wellenpakete*. Diese entstehen durch Überlagerung verschiedener Fourierkomponenten mit einer von k'_z abhängigen charakteristischen Gewichtsfunktion $w_q(k'_z)$, die bei einem bestimmten Wellenzahlvektor $k'_z = k_z^{(m)}$ ein *ausgeprägtes Maximum* besitzt

$$\widehat{\mathbf{E}}_q(\mathbf{r}, \omega) = \widehat{\mathbf{E}}_q^{(0)}(\mathbf{r}_\perp, \omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_z}{2\pi} e^{i[k'_z r_z - \omega_q(k'_z)t]} \widehat{w}_q(k'_z). \quad (9.57)$$

Dann liefert eine Entwicklung der Dispersionsrelation $\omega_q(k'_z)$ um die Stelle $k'_z = k_z^{(m)}$ in führender Ordnung

$$\begin{aligned} \omega_q(k'_z) &= \omega_q(k_z^{(m)}) + v_g(k_z^{(m)}) (k'_z - k_z^{(m)}) + \dots \\ v_g &= v_g(k_z^{(m)}) = \left[\frac{\partial \omega_q(k'_z)}{\partial k'_z} \right]_{k'_z = k_z^{(m)}}. \end{aligned} \quad (9.58)$$

Wir schreiben dann

$$\widehat{\mathbf{E}}_q(\mathbf{r}, \omega) = \widehat{\mathbf{E}}_q^{(0)}(\mathbf{r}_\perp, \omega) e^{i[k_z^{(m)} r_z - \omega_q(k_z^{(m)})t]} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_z}{2\pi} e^{i(k'_z - k_z^{(m)})[r_z - v_g(k_z^{(m)})t]} \widehat{w}_q(k'_z). \quad (9.59)$$

9.2 Dispersionsrelation und Gruppengeschwindigkeit

Das Integral ist (bis auf einen Phasenfaktor) gleich der Fouriertransformierten der Gewichtsfunktion $\hat{w}_q(k'_z)$, d.h.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_z}{2\pi} e^{i(k'_z - k_z^{(m)})(r_z - v_g t)} \hat{w}_q(k'_z) &= e^{-ik_z^{(m)}(r_z - v_g t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_z}{2\pi} e^{ik'_z(r_z - v_g t)} \hat{w}_q(k'_z) \quad (9.60) \\ &= e^{-ik_z^{(m)}(r_z - v_g t)} w_q(r_z - v_g t) \\ &\equiv W_q(r_z - v_g t). \end{aligned}$$

Es folgt als Approximation für das betrachtete Wellenpaket

$$\hat{\mathbf{E}}_q(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\mathbf{E}}_q^{(0)}(\mathbf{r}_\perp, \omega) e^{i[k_z^{(m)} r_z - \omega_q(k_z^{(m)}) t]} W_q(r_z - v_g t). \quad (9.61)$$

Offensichtlich bewegt sich die Einhüllende $W_q(r_z - v_g t)$ des Wellenpaketes, d.h. das eigentliche Signal, mit *Gruppengeschwindigkeit*

$$v_g = \left[\frac{\partial \omega_q(k_z)}{\partial k_z} \right]_{k_z = k_z^{(m)}} = \left[\frac{\tilde{c} k_z}{\sqrt{k_z^2 + q^2}} \right]_{k_z = k_z^{(m)}} = \frac{\tilde{c}^2 k_z^{(m)}}{\omega_q(k_z^{(m)})}. \quad (9.62)$$

Der Phasenfaktor $e^{i\phi(r_z, t)}$ des Wellenpakets, mit der Phase

$$\phi(r_z, t) = k_z r_z - \omega_q(k_z) t, \quad (9.63)$$

oszilliert dagegen mit *Phasengeschwindigkeit*

$$v_{\text{ph}} = \left(\frac{\partial r_z}{\partial t} \right)_{\phi = \text{const}} = \frac{\omega_q(k_z^{(m)})}{k_z}. \quad (9.64)$$

Somit gilt die Relation

$$v_g v_{\text{ph}} = \tilde{c}^2. \quad (9.65)$$

Während die Gruppengeschwindigkeit v_g kleiner gleich der Lichtgeschwindigkeit \tilde{c} ist, nimmt die Phasengeschwindigkeit v_{ph} Werte größer gleich der Lichtgeschwindigkeit \tilde{c} an. Für kleine Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k_z}$ nähern sich beide Geschwindigkeiten der Lichtgeschwindigkeit \tilde{c} an:

$$\lim_{k_z \rightarrow \infty} v_g(k_z) = \tilde{c} = \lim_{k_z \rightarrow \infty} v_{\text{ph}}(k_z) \quad (9.66)$$

Ist das Innere des Rohres nun Vakuum, $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\mu = \mu_0$, dann ist $\tilde{c} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ gleich der Lichtgeschwindigkeit c im freien Raum.

Bemerkung

Würde man in der Entwicklung (9.58) der Dispersionsrelation $\omega_q(k'_z)$ um die Stelle $k'_z = k'_z(m)$ noch die Terme zweiter Ordnung berücksichtigen, so würde man beschreiben, wie das Wellenpaket im Lauf der Zeit auseinanderfließt. Die angestellten Überlegungen sind also nur für kleine Zeitspannen sinnvoll.

9.3 Dämpfung von TM- und TE-Hohlleitermoden

Die zeitlich gemittelte Energiestromdichte für eine entlang der Rohrachse \mathbf{e}_z propagierende TM- bzw. TE-Mode mit Frequenz ω ist durch den Poynting-Vektor $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ im Inneren des Rohres gegeben zu

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{e}_z \rangle &= \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle \cdot \mathbf{e}_z & (9.67) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \wedge \widehat{\mathbf{H}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) \right] \cdot \mathbf{e}_z \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\widehat{E}_x(\mathbf{r}, \omega) \widehat{H}_y^\dagger(\mathbf{r}, \omega) - \widehat{E}_y(\mathbf{r}, \omega) \widehat{H}_x^\dagger(\mathbf{r}, \omega) \right]. \end{aligned}$$

Für TM-Moden folgt aus (9.19)

$$\begin{aligned} \text{TM} & & (9.68) \\ \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{e}_z \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\left(i \frac{k_z}{q^2} \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_x} \right) \left(i \frac{\omega \varepsilon}{q^2} \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_x} \right)^\dagger - \left(i \frac{k_z}{q^2} \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_y} \right) \left(-i \frac{\omega \varepsilon}{q^2} \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_y} \right)^\dagger \right] \\ &= \frac{k_z \omega \varepsilon}{2q^4} \left(\frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_x} \frac{\partial \widehat{E}_z^\dagger}{\partial r_x} + \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_y} \frac{\partial \widehat{E}_z^\dagger}{\partial r_y} \right) \\ &= \frac{k_z \omega \varepsilon}{2q^4} \left[\nabla \widehat{E}_z \right]^\dagger \cdot \nabla \widehat{E}_z, \end{aligned}$$

9.3 Dämpfung von TM- und TE-Hohlleitermoden

entsprechend für TE-Moden aus (9.29)

$$\begin{aligned}
 & \text{TE} \tag{9.69} \\
 \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{e}_z \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\left(i \frac{\omega \mu}{q^2} \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_y} \right) \left(i \frac{k_z}{q^2} \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_y} \right)^\dagger - \left(-i \frac{\omega \mu}{q^2} \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_x} \right) \left(i \frac{k_z}{q^2} \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_x} \right)^\dagger \right] \\
 &= \frac{k_z \omega \mu}{2q^4} \left(\frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_y} \frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_y} + \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_x} \frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_x} \right) \\
 &= \frac{k_z \omega \mu}{2q^4} [\nabla \widehat{H}_z]^\dagger \cdot \nabla \widehat{H}_z.
 \end{aligned}$$

Das Integral der Energieflussdichte $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{e}_z \rangle$ über die Querschnittsfläche \mathcal{F} des Hohlleiters ergibt nun unter Beachtung der Relation (9.41) für den Eigenwert q^2 das Ergebnis

$$\begin{aligned}
 & \text{TM} \tag{9.70} \\
 \int_{\mathcal{F}} d^2 r' \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{e}_z \rangle &= \frac{k_z \omega \varepsilon}{2q^4} \int_{\mathcal{F}} d^2 r' [\nabla \widehat{E}_z]^\dagger \cdot \nabla \widehat{E}_z \\
 &= \frac{k_z \omega \varepsilon}{2q^2} \int_{\mathcal{F}} d^2 r' \widehat{E}_z^\dagger \cdot \widehat{E}_z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{TE} \tag{9.71} \\
 \int_{\mathcal{F}} d^2 r' \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{e}_z \rangle &= \frac{k_z \omega \mu}{2q^4} \int_{\mathcal{F}} d^2 r' [\nabla \widehat{H}_z]^\dagger \cdot \nabla \widehat{H}_z \\
 &= \frac{k_z \omega \mu}{2q^2} \int_{\mathcal{F}} d^2 r' \widehat{H}_z^\dagger \cdot \widehat{H}_z.
 \end{aligned}$$

Hier ist für ω die Dispersionsrelation für die betreffende TM- bzw. TE-Mode einzusetzen:

$$\omega = \omega_q(k_z) = \tilde{c} \sqrt{k_z^2 + q^2}. \tag{9.72}$$

Der Leistungstransport in einem Hohlleiter ist somit *modenabhängig*.

In der Realität ist die *innere* Wandoberfläche $\partial\Omega$ eines Hohlleiters nie ein perfekter Leiter, sondern besteht z.B. aus Kupfer oder Silber. In dem Fall können im Rohr des Hohlleiters befindliche elektromagnetische Felder durch die Grenzfläche $\partial\Omega$ in das Innere der aus Metall bestehenden Wand transmittiert werden und dort

9 Hohlleitermoden

Ströme induzieren. Damit verbunden sind Joulesche Verluste, deren Rate $\frac{d}{dt}\mathcal{E}^{(J)}$, bezogen auf ein Flächenelement $\mathcal{F}_{\partial\Omega} \subset \partial\Omega$ der Wand, gemäß der Relation (8.158) durch den zeitlichen Mittelwert der Normalkomponente der transmittierten Energiestromdichte am Ort der Wand gegeben ist zu

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}^{(J)} = \int_{\mathcal{F}_{\partial\Omega}} d^2r' \langle \mathbf{S}^{(t)}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{n}' \rangle_{\mathbf{r}' \in \mathcal{F}} = \int_{\mathcal{F}_{\partial\Omega}} d^2r' \frac{1}{2\sigma\lambda_\omega} \left| \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}', \omega) \wedge \mathbf{n} \right|_{\mathbf{r}' \in \mathcal{F}}^2. \quad (9.73)$$

Wir betrachten jetzt ein Segment $\Sigma(r_{z_1}, r_{z_2})$ des Hohlleiters mit endlicher Länge $L = r_{z_2} - r_{z_1} > 0$. Da die Querschnittsfläche \mathcal{F} konstant ist, ist das Volumen des Segments $|\Sigma(r_{z_1}, r_{z_2})| = |\mathcal{F}|L$. Die Oberfläche $\partial\Sigma(r_{z_1}, r_{z_2})$ des Segments $\Sigma(r_{z_1}, r_{z_2})$ besteht somit, wie bei einem Zylinder, aus einer Bodenfläche $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(r_{z_1})$, einer Deckelfläche $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}(r_{z_2})$ und der Mantelfläche $\partial\Omega(r_{z_1}, r_{z_2})$. Propagiert nun eine TM- oder TE-Mode entlang der Hohlleiterachse \mathbf{e}_z , so fließt bei $r_z = r_{z_1}$ durch die Fläche \mathcal{F}_1 (im zeitlichen Mittel) ein Energiestrom $\int_{\mathcal{F}_1} d^2r' \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{e}_z \rangle$ in das Volumen $\Sigma(r_{z_1}, r_{z_2})$ hinein, der bei $r_z = r_{z_2}$ durch die Deckelfläche \mathcal{F}_2 hinausfließt, aber eben auch durch die Mantelfläche $\partial\Omega(r_{z_1}, r_{z_2})$, die sich von $r = r_{z_1}$ bis $r = r_{z_2}$ erstreckt, wieder abfließt, falls Transmission in das Innere der Wand des Hohlleiters nicht durch stringente Randbedingungen verhindert wird. Im Inneren des Segments, das als optisch transparent angenommen wurde, kann aber weder Energie erzeugt werden noch kann Energie verloren gehen. Deshalb

$$\int_{\mathcal{F}_1} d^2r' \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{e}_z \rangle = \int_{\mathcal{F}_2} d^2r' \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{e}_z \rangle + \int_{\partial\Omega(r_{z_1}, r_{z_2})} d^2r' \langle \mathbf{S}^{(t)}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{n}' \rangle. \quad (9.74)$$

Für infinitesimal kleinen Abstand $dL > 0$ der Deckelfläche $\mathcal{F}(r_z + dL)$ zur Bodenfläche $\mathcal{F}(r_z)$ folgt hieraus

$$-\frac{\partial}{\partial r_z} \int_{\mathcal{F}(r_z)} d^2r' \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{e}_z \rangle_{\mathbf{r}' \in \mathcal{F}(r_z)} = \oint_{\partial\mathcal{F}(r_z)} dl' \langle \mathbf{S}^{(t)}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{n}' \rangle_{\mathbf{r}' \in \partial\mathcal{F}(r_z)}. \quad (9.75)$$

Der Quotient

$$\alpha = \frac{\oint_{\partial\mathcal{F}(r_z)} dl' \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{n}' \rangle_{\mathbf{r}' \in \partial\mathcal{F}(r_z)}}{\int_{\mathcal{F}(r_z)} d^2r' \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{e}_z \rangle_{\mathbf{r}' \in \mathcal{F}(r_z)}} \quad (9.76)$$

ist für propagierende TM- und TE-Moden, wie weiter unten gezeigt wird, von der Koordinate r_z *unabhängig*. Diese Eigenschaft ist der Translationsinvarianz der Querschnittsfläche $\mathcal{F}(r_z)$ entlang der Achse des Hohlleiters geschuldet.

9.3 Dämpfung von TM- und TE-Hohlleitermoden

Demnach folgt

$$-\frac{\partial}{\partial r_z} \int_{\mathcal{F}(r_z)} d^2r' \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{e}_z \rangle = \alpha \int_{\mathcal{F}(r_z)} d^2r' \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{e}_z \rangle. \quad (9.77)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\int_{\mathcal{F}(r_z)} d^2r' \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{e}_z \rangle = e^{-\alpha r_z} \int_{\mathcal{F}(r_z=0)} d^2r' \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{e}_z \rangle. \quad (9.78)$$

Somit kann der in (9.76) definierte Quotient α , mit der physikalischen Dimension einer reziproken Länge, als *Dämpfungsfaktor* gedeutet werden. Man kann für eine hinreichend dicke Metallschicht auf der Innenwand $\partial\Omega$ des Hohlleiters den Dämpfungsfaktor α approximativ in führender Ordnung bzgl. des kleinen Parameters $k_z \lambda_\omega \ll 1$ berechnen, in dem man das elektromagnetische Feld für die TM- bzw. TE-Moden zunächst mit der Randbedingung (9.6) für einen idealen Leiter berechnet. Die diesen Ergebnissen entsprechenden Energiestromdichten $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{n}' \rangle$ bzw. $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{e}_z \rangle$ können dann zur Berechnung des Quotienten α im Rahmen der Störungsrechnung verwendet werden, da α proportional zum kleinen Parameter $k_z \lambda_\omega$ ist. Dabei zeigt sich, dass der Dämpfungskoeffizient α manifest modenabhängig ist! Wir unterscheiden deshalb im folgenden $\alpha^{(TM)}$ und $\alpha^{(TE)}$.

Dämpfung von TM-Moden

Einsetzen der Ausdrücke (9.73) bzw. (9.70) für Zähler bzw. Nenner des Quotienten α ergibt für TM-Moden den Dämpfungsfaktor

$$\alpha^{(TM)} = \frac{\oint_{\partial\mathcal{F}} dl' \frac{1}{2\sigma\lambda_\omega} \left| \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}', \omega) \wedge \mathbf{n}' \right|_{\mathbf{r}' \in \partial\mathcal{F}}^2}{\frac{k_z \omega \varepsilon}{2q^2} \int_{\mathcal{F}} d^2r' \left| \widehat{E}_z(\mathbf{r}', \omega) \right|_{\mathbf{r}' \in \mathcal{F}}^2}. \quad (9.79)$$

Aber für den Normalenvektor \mathbf{n} auf der Innenwand $\partial\Omega$ des Hohlleiters gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z &= 0 \\ \mathbf{n} &= n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (9.80)$$

9 Hohlleitermoden

Da für TM-Moden keine longitudinale Magnetfeldkomponente existiert, $\widehat{H}_z \equiv 0$, folgt unter Berücksichtigung der in (9.19) angegebenen Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \wedge \mathbf{n} &= \left(n_y \widehat{H}_x - n_x \widehat{H}_y \right) \mathbf{e}_z \\
 &= -\frac{i\omega\varepsilon}{q^2} \left(n_x \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_x} + n_y \frac{\partial \widehat{E}_z}{\partial r_y} \right) \\
 &= -\frac{i\omega\varepsilon}{q^2} \left(\mathbf{n} \cdot \nabla \widehat{E}_z \right) \mathbf{e}_z.
 \end{aligned} \tag{9.81}$$

Für TM-Moden gilt für die longitudinale Komponente \widehat{E}_z , wie bereits in (9.23) gezeigt wurde, auf der Innenwand $\partial\Omega$ des Rohres eine homogene Dirichlet-Randbedingung, d.h. $\widehat{E}_z(\mathbf{r}, \omega)|_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} = 0$. In dem Fall gilt für zwei Punkte \mathbf{r} und \mathbf{r}' der (glatten) Oberfläche $\partial\Omega$ identisch

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}, \mathbf{r}' &\in \partial\Omega \\
 \mathbf{r} &\neq \mathbf{r}' \\
 0 &= \frac{\widehat{E}_z(\mathbf{r}', \omega) - \widehat{E}_z(\mathbf{r}, \omega)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \frac{\widehat{E}_z(\mathbf{r} + h\mathbf{T}, \omega) - \widehat{E}_z(\mathbf{r}, \omega)}{h},
 \end{aligned} \tag{9.82}$$

wobei $h = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ und $\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}$. Im Grenzwert $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ ist der Einheitsvektor \mathbf{T} ein *tangential* zur Fläche $\partial\Omega$ orientierter Einheitsvektor \mathbf{t} am Ort \mathbf{r} . Mit der Definition

$$\mathbf{t} = \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \mathbf{T} = \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \tag{9.83}$$

folgt jetzt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &\in \partial\Omega \\
 0 &= \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \frac{\widehat{E}_z(\mathbf{r} + h\mathbf{T}, \omega) - \widehat{E}_z(\mathbf{r}, \omega)}{h} \\
 &= \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \mathbf{T} \cdot \nabla \widehat{E}_z(\mathbf{r}, \omega) \\
 &= \mathbf{t} \cdot \nabla \widehat{E}_z(\mathbf{r}, \omega).
 \end{aligned} \tag{9.84}$$

9.3 Dämpfung von TM- und TE-Hohlleitermoden

Also ist $\nabla \hat{E}_z|_{\mathbf{r} \in \partial\Omega} \propto \mathbf{n}$, wobei \mathbf{n} der Normalenvektor der Fläche $\partial\Omega$ ist. Somit gilt

$$\begin{aligned} & \text{TM} \\ & \mathbf{n} \wedge \nabla \hat{E}_z|_{\mathbf{r} \in \partial\mathcal{F}} = 0, \end{aligned} \quad (9.85)$$

und weiter

$$\begin{aligned} 0 &= \left[(\mathbf{n} \wedge \nabla \hat{E}_z) \cdot (\mathbf{n} \wedge \nabla \hat{E}_z^\dagger) \right]_{\mathbf{r} \in \partial\mathcal{F}} \\ &= \underbrace{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})}_{=1} (\nabla \hat{E}_z \cdot \nabla \hat{E}_z^\dagger) - (\mathbf{n} \cdot \nabla \hat{E}_z) (\mathbf{n} \cdot \nabla \hat{E}_z^\dagger). \end{aligned} \quad (9.86)$$

Umstellen ergibt

$$\left[(\mathbf{n} \cdot \nabla \hat{E}_z) (\mathbf{n} \cdot \nabla \hat{E}_z^\dagger) \right]_{\mathbf{r} \in \partial\mathcal{F}} = \left[\nabla \hat{E}_z \cdot \nabla \hat{E}_z^\dagger \right]_{\mathbf{r} \in \partial\mathcal{F}}. \quad (9.87)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \text{TM} \\ & \oint_{\partial\mathcal{F}} dl' \frac{1}{2\sigma\lambda_\omega} \left| \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}', \omega) \wedge \mathbf{n}' \right|_{\mathbf{r}' \in \partial\mathcal{F}}^2 = \frac{1}{2\sigma\lambda_\omega} \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{q^4} \oint_{\partial\mathcal{F}} dl' \left[\nabla' \hat{E}_z^\dagger \cdot \nabla' \hat{E}_z \right]_{\mathbf{r}' \in \partial\mathcal{F}}. \end{aligned} \quad (9.88)$$

Einsetzen von (9.88) ergibt schließlich für die Dämpfungskonstante von propagierenden TM-Moden das Ergebnis

$$\alpha^{(TM)} = \frac{1}{\sigma\lambda_\omega} \frac{\omega\varepsilon}{2k_z q^2} \frac{\oint_{\partial\mathcal{F}} dl' \left[\nabla' \hat{E}_z^\dagger \cdot \nabla' \hat{E}_z \right]_{\mathbf{r}' \in \partial\mathcal{F}}}{\int_{\mathcal{F}} d^2r' \left[\hat{E}_z^\dagger \cdot \hat{E}_z \right]_{\mathbf{r}' \in \mathcal{F}}}. \quad (9.89)$$

Dämpfung von TE-Moden

Einsetzen der Ausdrücke (9.73) bzw. (9.71) für Zähler bzw. Nenner des Quotienten α ergibt für TE-Moden den Dämpfungsfaktor

$$\alpha^{(TE)} = \frac{\oint_{\partial\mathcal{F}} dl' \frac{1}{2\sigma\lambda_\omega} \left| \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}', \omega) \wedge \mathbf{n}' \right|_{\mathbf{r}' \in \partial\mathcal{F}}^2}{\frac{k_z \omega \mu}{2q^2} \int_{\mathcal{F}} d^2r' \widehat{H}_z^\dagger \cdot \widehat{H}_z}. \quad (9.90)$$

9 Hohlleitermoden

Für den Normalenvektor \mathbf{n} auf der Innenwand $\partial\Omega$ des Hohlleiters gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z &= 0 \\ \mathbf{n} &= n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y.\end{aligned}\tag{9.91}$$

Somit

$$\begin{aligned}& \left[\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \wedge \mathbf{n} \right]_{\mathbf{r} \in \partial\mathcal{F}} \\ &= \left(\widehat{H}_y n_z - \widehat{H}_z n_y \right) \mathbf{e}_x + \left(\widehat{H}_z n_x - \widehat{H}_x n_z \right) \mathbf{e}_y + \left(\widehat{H}_x n_y - \widehat{H}_y n_x \right) \mathbf{e}_z \\ &\stackrel{n_z \equiv 0}{=} -\widehat{H}_z n_y \mathbf{e}_x + \widehat{H}_z n_x \mathbf{e}_y + \left(\widehat{H}_x n_y - \widehat{H}_y n_x \right) \mathbf{e}_z.\end{aligned}\tag{9.92}$$

Da für TE-Moden als Randbedingung gefordert ist, dass die Normalableitung der magnetischen Feldstärke an der Wand verschwindet, ist es naheliegend, den Ausdruck mittels der Relationen (9.29) umzuschreiben:

$$\left[\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \wedge \mathbf{n} \right]_{\mathbf{r} \in \partial\mathcal{F}} = -\widehat{H}_z n_y \mathbf{e}_x + \widehat{H}_z n_x \mathbf{e}_y + i \frac{k_z}{q^2} \left(\frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_x} n_y - \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_y} n_x \right) \mathbf{e}_z.\tag{9.93}$$

Folglich

$$\begin{aligned}& \left| \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \wedge \mathbf{n} \right|_{\mathbf{r} \in \partial\mathcal{F}}^2 \\ &= \left[\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \wedge \mathbf{n} \right]_{\mathbf{r} \in \partial\mathcal{F}} \cdot \left[\widehat{\mathbf{H}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) \wedge \mathbf{n} \right]_{\mathbf{r} \in \partial\mathcal{F}} \\ &= \left[\underbrace{(n_x^2 + n_y^2)}_{=1} \widehat{H}_z \widehat{H}_z^\dagger + \frac{k_z^2}{q^4} \left(\frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_x} n_y - \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_y} n_x \right) \left(\frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_x} n_y - \frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_y} n_x \right) \right]_{\mathbf{r} \in \partial\mathcal{F}} \\ &= \left\{ \widehat{H}_z \widehat{H}_z^\dagger + \frac{k_z^2}{q^4} \left[\frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_x} \frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_x} n_y^2 + \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_y} \frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_y} n_x^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - n_x n_y \left(\frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_x} \frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_y} + \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_y} \frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_x} \right) \right] \right\}_{\mathbf{r} \in \partial\mathcal{F}}.\end{aligned}\tag{9.94}$$

9.3 Dämpfung von TM- und TE-Hohlleitermoden

Der Randbedingung (9.33) für TE-Moden entnehmen wir die Identität

$$\begin{aligned}
 0 &= \left[\mathbf{n} \cdot \nabla \widehat{H}_z(\mathbf{r}, \omega) \right]_{\mathbf{r} \in \partial \mathcal{F}} \left[\mathbf{n} \cdot \nabla \widehat{H}_z^\dagger(\mathbf{r}, \omega) \right]_{\mathbf{r} \in \partial \mathcal{F}} \\
 &= \left[\left(n_x \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_x} + n_y \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_y} \right) \left(n_x \frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_x} + n_y \frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_y} \right) \right]_{\mathbf{r} \in \partial \mathcal{F}} \\
 &= \left[\frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_x} \frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_x} n_x^2 + \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_y} \frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_y} n_y^2 + n_x n_y \left(\frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_x} \frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_y} + \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_y} \frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_x} \right) \right]_{\mathbf{r} \in \partial \mathcal{F}} .
 \end{aligned} \tag{9.95}$$

Somit

$$\begin{aligned}
 & \left| \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \wedge \mathbf{n} \right|_{\mathbf{r} \in \partial \mathcal{F}}^2 \\
 &= \left\{ \widehat{H}_z \widehat{H}_z^\dagger + \frac{k_z^2}{q^4} \left[\underbrace{(n_x^2 + n_y^2)}_{=1} \left(\frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_x} \frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_x} + \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_y} \frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_y} \right) \right] \right\}_{\mathbf{r} \in \partial \mathcal{F}} \\
 &= \left[\widehat{H}_z \widehat{H}_z^\dagger + \frac{k_z^2}{q^4} \left(\frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_x} \frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_x} + \frac{\partial \widehat{H}_z}{\partial r_y} \frac{\partial \widehat{H}_z^\dagger}{\partial r_y} \right) \right]_{\mathbf{r} \in \partial \mathcal{F}} \\
 &= \left(\widehat{H}_z \widehat{H}_z^\dagger + \frac{k_z^2}{q^4} \nabla \widehat{H}_z \cdot \nabla \widehat{H}_z^\dagger \right)_{\mathbf{r} \in \partial \mathcal{F}} .
 \end{aligned} \tag{9.96}$$

Schließlich

$$\int_{\partial \mathcal{F}} dl' \frac{1}{2\sigma\lambda_\omega} \left| \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}', \omega) \wedge \mathbf{n}' \right|_{\mathbf{r}' \in \partial \mathcal{F}}^2 = \frac{1}{2\sigma\lambda_\omega} \int_{\partial \mathcal{F}} dl' \left[\widehat{H}_z \widehat{H}_z^\dagger + \frac{k_z^2}{q^4} \nabla \widehat{H}_z \cdot \nabla \widehat{H}_z^\dagger \right]_{\mathbf{r}' \in \partial \mathcal{F}} . \tag{9.97}$$

Einsetzen von (9.97) ergibt für die Dämpfungskonstante von propagierenden TE-Moden das Ergebnis

$$\boxed{ \alpha^{(\text{TE})} = \frac{1}{\sigma\lambda_\omega} \frac{q^2}{k_z\omega\mu} \frac{\int_{\partial \mathcal{F}} dl' \left[\widehat{H}_z \widehat{H}_z^\dagger + \frac{k_z^2}{q^4} \nabla \widehat{H}_z \cdot \nabla \widehat{H}_z^\dagger \right]_{\mathbf{r}' \in \partial \mathcal{F}}}{\int_{\mathcal{F}} d^2r' \widehat{H}_z^\dagger \cdot \widehat{H}_z} } . \tag{9.98}$$

Bemerkung

Die hergeleiteten Formeln für die Dämpfungskonstanten $\alpha^{(\text{TM})}$ und $\alpha^{(\text{TE})}$ stimmen mit der im Lehrbuch [LLP84] auf S. 317 angegebenen (sehr knapp gehaltenen) Mitteilung überein.

Exakt lösbares Beispiel: TM- und TE-Moden in Hohlleitern mit rechteckigem Querschnitt

Wir betrachten einen Hohlleitern mit rechteckiger Querschnittsfläche \mathcal{F} , mit Seitenlängen a_x und a_y , also $|\mathcal{F}| = a_x a_y$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei jetzt $a_x \leq a_y$. Lösungen der Eigenwertaufgaben (9.22) und (9.23) bzw. (9.32) und (9.23) sind dann Produkte von trigonometrischen Funktionen der Form

TM

$$\widehat{E}_z(r_x, r_y; k_z, \omega_{n_x, n_y}) = \widehat{E}_z^{(0)} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a_x} r_x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{a_y} r_y\right) \equiv \text{TM}_{n_x, n_y}$$

$$n_x, n_y \in \mathbb{N}$$

$$q_{n_x, n_y}^2 = \pi^2 \left(\frac{n_x^2}{a_x^2} + \frac{n_y^2}{a_y^2} \right)$$

$$\frac{\omega_{n_x, n_y}}{\tilde{c}} = \sqrt{k_z^2 + q_{n_x, n_y}^2}$$

TE

$$\widehat{H}_z(r_x, r_y; k_z, \omega_{n_x, n_y}) = \widehat{H}_z^{(0)} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a_x} r_x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{a_y} r_y\right) \equiv \text{TE}_{n_x, n_y}$$

$$n_x, n_y \in \mathbb{N}_0, n_x + n_y > 0$$

$$q_{n_x, n_y}^2 = \pi^2 \left(\frac{n_x^2}{a_x^2} + \frac{n_y^2}{a_y^2} \right)$$

$$\frac{\omega_{n_x, n_y}}{\tilde{c}} = \sqrt{k_z^2 + q_{n_x, n_y}^2}$$

Zu beachten ist der unterschiedliche Wertevorrat für die Moden-Indizes n_x und n_y . Für TM-Moden ist der Wertevorrat von n_x bzw. n_y gleich $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, für TE-Moden ist der Wertevorrat gleich $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, wobei allerdings der Fall $n_x = 0 = n_y$ auszuschließen ist. Der kleinstmögliche Eigenwert $q_{0,1}^2 = \frac{\pi^2}{a_y^2}$ wird demnach für $a_y > a_x$ von der TE₀₁-Mode angenommen. Für einen Rechteckhohlleiter mit $a_y > a_x$ ist demnach die *Breite* a_y der relevante Parameter zur Charakterisierung ausbreitungsfähiger Wellen.

In Abbildung 9.2 sind die entsprechenden Dispersionsrelationen $\frac{\omega_{n_x, n_y}}{c}$ vs. k_z für die tief liegenden Eigenwerte der Moden TE _{n_x, n_y} und TM _{n_x, n_y} für $(n_x, n_y) \in$

9.3 Dämpfung von TM- und TE-Hohlleitermoden

Dispersionsrelation TE&TM-Moden
im Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt $a_y/a_x=2.1$

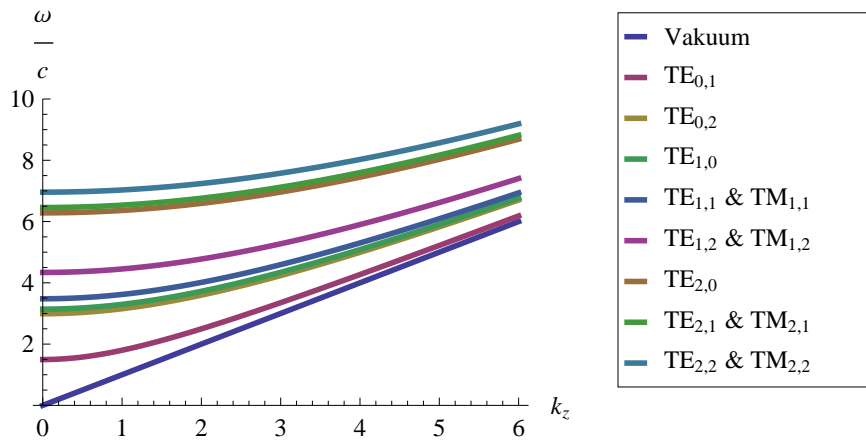


Abbildung 9.2: Dispersionsrelation im Hohlleiter.

$\{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$ dargestellt. Um die Entartungen sichtbar zu machen, wurde dabei das Verhältnis der Seiten a_x und a_y des Rechtecks zu $\frac{a_y}{a_x} = 2.1$ gewählt.

Bemerkung

In Hohlleitern mit *rechteckiger* Querschnittsfläche $a_y = 2a_x$ ist die Dämpfung der TE₀₁-Mode am kleinsten. Den Beweis für diese Behauptung zu führen, ist eine instruktive Übungsaufgabe.

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Wir betrachten jetzt *Inertialsysteme*. Das sind Bezugssysteme, in denen sich jeder *kräftefreie* Massenpunkt geradlinig und gleichförmig bewegt. Dass in einem einzigen Koordinatensystem *alle* kräftefreien Bewegungen geradlinig gleichförmig sein können, ist eine fundamentale Erfahrungstatsache. Raum und Zeit sind folglich homogen und isotrop. Es existiert kein bevorzugtes Inertialsystem, denn alle relativ zu einem Inertialsystem geradlinig und gleichförmig bewegten Bezugssysteme sind physikalisch äquivalent. Alle physikalischen Vorgänge in allen Inertialsystemen gehorchen denselben Naturgesetzen.

Zwei Physiker, P und P' , experimentieren in zwei von einander entfernt positionierten *Inertialsystemen* S bzw. S' mit elektromagnetischen Feldern, wobei P bzw. P' verabreden, als Maßsystem SI-Einheiten zu verwenden. Beide stellen nun mittels sehr genauer Experimente fest, dass die Maxwell-Gleichungen vollumfänglich

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

gültig sind:

$$\begin{aligned} & \text{Physiker } P \text{ im Inertialsystem } S & (10.1) \\ \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \left[\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right] \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Physiker } P' \text{ im Inertialsystem } S' & (10.2) \\ \operatorname{div}' \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho'(\mathbf{r}', t') \\ \operatorname{rot}' \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t') &= \mu_0 \left[\mathbf{j}'(\mathbf{r}', t') + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') \right] \\ \operatorname{rot}' \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') &= -\frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t') \\ \operatorname{div}' \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t') &= 0. \end{aligned}$$

Insbesondere stellen P und P' fest, dass die Konstanten ε_0 und μ_0 in beiden Inertialsystemen den gleichen Zahlenwert besitzen. Hieraus schließen beide, dass die Lichtgeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ sowohl in S als auch in S' den gleichen Zahlenwert $c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ besitzt. Das ist insofern bemerkenswert, als zur Charakterisierung der Inertialsysteme S bzw. S' *nicht* verlangt war, dass der Koordinatenursprung von S' relativ zum Koordinatenursprung S immer in Ruhe ist. Es ist also zulässig, dass sich S' relativ zu S mit *konstanter* Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt. Da nun P und P' für jedes $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ zwar immer die gleiche konstante Lichtgeschwindigkeit c messen, aber zu ihrem Erstaunen z.B. ganz unterschiedliche Feldstärken \mathbf{E} und \mathbf{E}' bzw. \mathbf{B} und \mathbf{B}' messen, stellt sich die Frage, wie die elektromagnetischen Felder \mathbf{E} , \mathbf{B} und ihre Quellen ρ , \mathbf{j} ausgehend vom System S in die entsprechenden Größen \mathbf{E}' , \mathbf{B}' und ρ' , \mathbf{j}' im System S' umgerechnet werden können.

Die auf ein Inertialsystem S bezogene Bewegungsgleichung der Newtonschen

Mechanik für N Massenpunkte unter dem Einfluss der Kraft $[\mathbf{F}]^{(n)}$ lautet

$$1 \leq n \leq N \quad (10.3)$$

$$m^{(n)} \frac{d^2}{dt^2} [\mathbf{r}(t)]^{(n)} = [\mathbf{F}]^{(n)}.$$

Die entsprechende auf ein zweites Inertialsystem S' bezogene Bewegungsgleichung der Newtonschen Mechanik lautet

$$m^{(n)} \left[\frac{d^2}{dt'^2} \mathbf{r}'(t') \right]^{(n)} = [\mathbf{F}']^{(n)} \quad (10.4)$$

Handelt es sich bei den Kräften insbesondere um *Paarkräfte*,

$$[\mathbf{F}]^{(n)} = \sum_{\substack{1 \leq m \leq N \\ m \neq n}} [\mathbf{f}]^{(n,m)} \quad (10.5)$$

$$[\mathbf{f}]^{(n,m)} = \mathbf{f}([\mathbf{r}(t)]^{(n)} - [\mathbf{r}(t)]^{(m)}),$$

so gilt bezüglich einer *Galilei-Transformation*

$$t' = t \quad (10.6)$$

$$[\mathbf{r}'(t')]^{(n)} = [\mathbf{r}(t)]^{(n)} - \mathbf{v}t$$

$$\mathbf{v} = \text{const}$$

die folgende Invarianzeigenschaft:

$$\mathbf{f}([\mathbf{r}(t)]^{(n)} - [\mathbf{r}(t)]^{(m)}) = \mathbf{f}([\mathbf{r}'(t')]^{(n)} - [\mathbf{r}'(t')]^{(m)})$$

$$[\mathbf{F}]^{(n)} = [\mathbf{F}']^{(n)}$$

$$m^{(n)} \frac{d^2}{dt^2} [\mathbf{r}(t)]^{(n)} = m^{(n)} \left[\frac{d^2}{dt'^2} \mathbf{r}'(t') \right]^{(n)}.$$

Die Bewegungsgleichungen der Newtonschen Mechanik für eine Anzahl N von Massenpunkten, die gemäß einer *Paarkraft* wechselwirken, sind demnach invariant unter einer Galilei-Transformation.

Implizit liegt der Newtonschen Mechanik das Postulat der Existenz einer *absoluten Zeit* und das Postulat eines *absoluten Raumes* zugrunde. Räumliche

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Abstände oder Zeitintervalle sind in der Newtonschen Mechanik unabhängig von der Wahl eines Inertialsystems. Diese Invarianz unter Galilei-Transformation ist für die inhomogenen Maxwell-Gleichungen *nicht* gegeben, obwohl es *näherungsweise* für kleine Geschwindigkeiten $|\mathbf{v}| \ll c$ richtig ist.

Wir betrachten nun zwei Inertialsysteme S und S' , wobei sich S' relativ zu S mit Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegen möge. Der Einfachheit halber postulieren wir, dass die kartesischen Achsensysteme in S' und in S zu einem Zeitpunkt $t = 0 = t'$ deckungsgleich waren. Betrachten wir jetzt z.B. die Ausbreitung einer ebenen monochromatischen elektromagnetischen Welle in Richtung $\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \parallel \mathbf{v}$, einmal aus der Sicht von P und einmal aus der Sicht von P' :

Physiker P im Inertialsystem S (10.7)

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \parallel \mathbf{v} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}^{(0)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \right] \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[\mathbf{B}^{(0)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \right] \end{aligned}$$

Lösbarkeitsbedingung für homogene Maxwell-Gleichung in S

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(0)} &= \frac{\mathbf{k}}{\omega} \wedge \mathbf{E}^{(0)} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^{(0)} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} - \frac{\omega^2}{c^2} &= 0 \\ c^2 &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \end{aligned}$$

Physiker P' im Inertialsystem S' (10.8)

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{k}'}{|\mathbf{k}'|} \parallel \mathbf{v} \\ \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') &= \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}'^{(0)} \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - i\omega' t') \right] \\ \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t') &= \operatorname{Re} \left[\mathbf{B}'^{(0)} \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - i\omega' t') \right] \end{aligned}$$

Lösbarkeitsbedingung für homogene Maxwell-Gleichung in S'

$$\begin{aligned}\mathbf{B}'^{(0)} &= \frac{\mathbf{k}'}{\omega} \wedge \mathbf{E}'^{(0)} \\ \mathbf{k}' \cdot \mathbf{E}'^{(0)} &= 0 \\ \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' - \frac{\omega'^2}{c^2} &= 0 \\ c^2 &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}.\end{aligned}$$

O.B.d.A. dürfen wir $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$ wählen, also $k_x = k'_x = 0 = k_y = k'_y$. Dann folgt aus den obigen Lösbarkeitsbedingungen für die homogenen Maxwell-Gleichungen in S bzw. S' insbesondere

$$\boxed{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = k_z'^2 - \frac{\omega'^2}{c^2}} \quad (10.9)$$

Für vorgegebene Wellenzahlen k_z und Frequenzen $\omega = c |k_z|$ im System S suchen wir nun die Gesamtheit aller möglichen Inertialsysteme S' , in denen die betrachtete propagierende elektromagnetische Welle durch Wellenzahlen k_z' und Frequenzen $\omega' = c |k_z'|$ beschrieben wird.

Die Bedingung (10.9) läßt sich durch hyperbolische Funktionen mit einem skalaren Parameter β parametrisieren

$$\begin{aligned}\beta &\in \mathbb{R} \\ k_z' &= k_z \cosh \beta - \frac{\omega}{c} \sinh \beta \\ \frac{\omega'}{c} &= -k_z \sinh \beta + \frac{\omega}{c} \cosh \beta.\end{aligned} \quad (10.10)$$

Wir bestätigen leicht

$$\begin{aligned}k_z'^2 - \frac{\omega'^2}{c^2} &= \left(k_z \cosh \beta - \frac{\omega}{c} \sinh \beta\right)^2 - \left(-k_z \sinh \beta + \frac{\omega}{c} \cosh \beta\right)^2 \\ &= \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \underbrace{\left[\cosh^2(\beta) - \sinh^2(\beta)\right]}_{\equiv 1} \\ &= k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}.\end{aligned} \quad (10.11)$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Obwohl die Physiker P und P' in ihren jeweiligen Inertialsystemen S und S' bei ein und derselben ebenen elektromagnetischen Welle nicht die gleichen Werte für die Amplituden $\mathbf{E}^{(0)}$ und $\mathbf{E}'^{(0)}$ bzw. $\mathbf{B}^{(0)}$ und $\mathbf{B}'^{(0)}$ messen, gibt es Übereinstimmung bei der Phase:

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) = \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - i\omega' t'). \quad (10.12)$$

Im von uns betrachteten Fall $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ führt das auf die Bedingung

$$\boxed{k'_z r'_z - \omega' t' = k_z r_z - \omega t.} \quad (10.13)$$

Die Parametrisierung (10.10) für k'_z und $\frac{\omega'}{c}$ legt eine entsprechende Parametrisierung für r'_z und t' nahe

$$\begin{aligned} r'_z &= r_z \cosh \beta - ct \sinh \beta \\ ct' &= -r_z \sinh \beta + ct \cosh \beta. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Wir prüfen leicht nach

$$\begin{aligned} &k'_z r'_z - \omega' t' \\ &= \left(k_z \cosh \beta - \frac{\omega}{c} \sinh \beta\right) (r_z \cosh \beta - ct \sinh \beta) \\ &\quad - \left(-k_z \sinh \beta + \frac{\omega}{c} \cosh \beta\right) (-r_z \sinh \beta + ct \cosh \beta) \\ &= (k_z r_z - \omega t) \underbrace{\left[\cosh^2(\beta) - \sinh^2(\beta)\right]}_{\equiv 1} \\ &\quad + \left(k_z ct + \frac{\omega}{c} r_z\right) \underbrace{\left(-\cosh \beta \sinh \beta + \sinh \beta \cosh \beta\right)}_{=0} \\ &= k_z r_z - \omega t, \end{aligned} \quad (10.15)$$

d.h. die Phase ist eine Invariante in allen durch den Parameter β gekennzeichneten Inertialsystemen S' .

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Parameter β und der Geschwindigkeit v ? Allgemein ist festzustellen, dass sich das durch β parametrisierte Inertialsystem S' von S aus betrachtet in Richtung \mathbf{e}_z mit konstanter Geschwindigkeit

$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ entfernt. Somit ist die Position des Koordinatenursprungs des Bezugssystems S' von S aus betrachtet gegeben zu

$$\begin{aligned} r_z &= vt \\ r_x &= 0 = r_y. \end{aligned} \tag{10.16}$$

Von S' aus betrachtet ist die Position des Koordinatenursprungs von S natürlich gegeben zu

$$\begin{aligned} r'_z &= 0 \\ r'_x &= 0 = r'_y. \end{aligned} \tag{10.17}$$

Folglich erhalten wir jetzt den Zusammenhang

$$\begin{aligned} 0 &= r'_z = r_z \cosh \beta - ct \sinh \beta = vt \cosh \beta - ct \sinh \beta \\ \Rightarrow \frac{\sinh \beta}{\cosh \beta} &= \tanh \beta = \frac{v}{c}. \end{aligned} \tag{10.18}$$

Der Parameter β wird oft als *Rapidity* bezeichnet.

Unter Verwendung der Identitäten

$$\begin{aligned} \cosh \beta &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(\beta)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \sinh \beta &= \frac{\tanh \beta}{\sqrt{1 - \tanh^2(\beta)}} = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{10.19}$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

schreiben wir dann für (10.10) und (10.14)

$$\begin{aligned}
 k'_x &= k_x & (10.20) \\
 k'_y &= k_y \\
 k'_z &= k_z \cosh \beta - \frac{\omega}{c} \sinh \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(k_z - \frac{\omega v}{c} \right) \\
 \frac{\omega'}{c} &= -k_z \sinh \beta + \frac{\omega}{c} \cosh \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(-k_z \frac{v}{c} + \frac{\omega}{c} \right) \\
 r'_x &= r_x \\
 r'_y &= r_y \\
 r'_z &= r_z \cosh \beta - ct \sinh \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (r_z - vt) \\
 ct' &= -r_z \sinh \beta + ct \cosh \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(-r_z \frac{v}{c} + ct \right).
 \end{aligned}$$

Dies sind die bekannte Formeln der *Lorentz-Transformation* für den Spezialfall $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$. Sie verknüpfen Wellenzahl und Frequenz sowie Ort und Zeit im Inertialsystem S mit den entsprechenden Größen im Inertialsystem S' . Für allgemeine Orientierung der Geschwindigkeit \mathbf{v} , mit der sich das Inertialsystem S' (von S aus gesehen) bewegt, gilt dann

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}} & (10.21) \\
 \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{v}}{c} - \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} ct \\
 ct' &= \gamma \left(ct - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{r} \right) \\
 \mathbf{k}' &= \mathbf{k} + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{k} \right) \frac{\mathbf{v}}{c} - \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \frac{\omega}{c} \\
 \frac{\omega'}{c} &= \gamma \left(\frac{\omega}{c} - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{k} \right). & (10.22)
 \end{aligned}$$

Für kleine Geschwindigkeit $|\mathbf{v}| \ll c$ folgt hieraus für Wellenzahl und Frequenz die bekannte Doppler-Formel

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}| &\ll c \\ \mathbf{k}' &= \mathbf{k} \\ \omega' &= \omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (10.23)$$

während man für Raum- und Zeitkoordinate wieder die Formeln für eine Galilei-Transformation erhält:

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}| &\ll c \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{v}t \\ t' &= t. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Für Geschwindigkeiten $|\mathbf{v}|$, die gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c klein sind, ist eine Lorentz-Transformation von einer Galilei-Transformation nicht zu unterscheiden!

Bemerkung

Die Formeln (10.22) beschreiben für $\mathbf{k} \parallel \mathbf{v}$ den *longitudinalen* und für $\mathbf{k} \perp \mathbf{v}$ den *transversalen* Dopplereffekt. Unter Beachtung der Vakuum-Dispersionsrelation

$$\begin{aligned} \omega &= c|\mathbf{k}| \\ \omega' &= c|\mathbf{k}'| \end{aligned} \quad (10.25)$$

folgen dann die Formeln der Dopplerverschiebung zu

$$\begin{aligned} &\text{longitudinal} \\ &\mathbf{k} \parallel \mathbf{v} \end{aligned} \quad (10.26)$$

$$\omega' = \gamma(\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) = \omega \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

$$\begin{aligned} &\text{transversal in } S \\ &\mathbf{k} \perp \mathbf{v} \end{aligned} \quad (10.27)$$

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Interessant ist noch der Fall, wenn nicht der Wellenzahlvektor \mathbf{k} im System S , sondern der Wellenzahlvektor \mathbf{k}' im System S' orthogonal zur Geschwindigkeit \mathbf{v} orientiert ist:

$$\begin{aligned} & \text{transversal in } S' & (10.28) \\ & \mathbf{k}' \perp \mathbf{v} \\ & \omega' = \omega \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \end{aligned}$$

10.1 Kovarianter Formalismus

Da in der relativistischen Physik die Zeit nicht mehr eine Sonderstellung beanspruchen darf, fasst man die Zeit t und die Position \mathbf{r} eines Ereignisses im vierdimensionalen Zeit-Raumkontinuum zu den sog. *kontravarianten* Komponenten eines Vierer-Vektors zusammen und schreibt

$$x^0 = ct, \quad x^1 = r_x, \quad x^2 = r_y, \quad x^3 = r_z, \quad (10.29)$$

in Kurznotation

$$x^\nu = (ct, r_x, r_y, r_z)_\nu, \quad \nu \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Griechische Indizes μ, ν, λ usw. für Tensorcomponenten $T^{\mu\nu\lambda\dots}$ besitzen im folgenden den Wertevorrat $\{0, 1, 2, 3\}$, lateinische Indizes a, b, c usw. für Tensorcomponenten $T^{abc\dots}$ besitzen den Wertevorrat $\{1, 2, 3\}$, der wiederum in lexikographischer Ordnung den drei linear unabhängigen kartesischen Basisvektoren $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ zugeordnet ist.

Weiter definiert man die *kovarianten* Komponenten x_μ eines Vierer-Vektors über die zugeordneten kontravarianten Komponenten x^ν zu (Summenkonvention beachten)

$$\begin{aligned} x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu & (10.30) \\ \mu, \nu &\in \{0, 1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Die $g_{\mu\nu}$ sind hier die Komponenten des *metrischen Tensors* in der *flachen* Minkowski-Raumzeit

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad (10.31)$$

$$\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\det(g) = -1.$$

Die Komponenten der inversen Matrix zum metrischen Tensor bezeichnet man als $g^{\mu\nu}$. Man schreibt

$$g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = g_{\mu}{}^{\nu} \quad (10.32)$$

$$g_{\mu}{}^{\nu} = \delta_{\mu}{}^{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = \mu, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit $\delta_{\mu}{}^{\nu}$ als dem Kronecker-Delta. Folglich (Summenkonvention!)

$$\begin{aligned} x_{\mu} &= g_{\mu\nu} x^{\nu} \\ x^{\nu} &= g^{\nu\mu} x_{\mu}. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Explizit bedeutet das für die kovarianten Komponenten (Minuszeichen beachten!)

$$\begin{aligned} x_{\nu} &= (ct, -r_x, -r_y, -r_z)_{\nu} \\ \nu &\in \{0, 1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Generell gilt für den Wechsel von den kontravarianten Komponenten eines Tensors T zu den kovarianten Komponenten die Regel (Summenkonvention!)

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta\dots\mu\dots\lambda} &= g^{\mu\nu} T_{\dots\nu}^{\alpha\beta\dots\lambda} \\ T_{\dots\nu}^{\alpha\beta\dots\lambda} &= g_{\nu\mu} T^{\alpha\beta\dots\mu\dots\lambda}. \end{aligned} \quad (10.35)$$

Das Skalarprodukt im Minkowski-Raum ist weder positiv definit noch negativ definit. Es gibt insbesondere auch sog. *Nullvektoren* mit Skalarprodukt gleich Null.

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Ein Beobachter im Inertialsystem $S = (x^\mu)$, der zur Zeit $t = 0$ am Ort $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ eine elektromagnetische Kugelwelle (Lichtblitz) aussendet, beschreibt die zugehörige Wellenfront als die Menge aller Raumzeitpunkte x^μ mit der Eigenschaft

$$x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = c^2 t^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 0. \quad (10.36)$$

Dies ist die Gleichung eines Doppelkegels (*Lichtkegel*). Ein anderer Beobachter in einem Inertialsystem $S' = (x'^\mu)$, welches sich relativ zum Bezugssystem $S = (x^\mu)$ mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt (wobei die Koordinatenachsen von S' zur Zeit $t' = 0$ mit denjenigen von S als deckungsgleich angenommen werden) beschreibt dieselbe Wellenfront jetzt als die Menge aller Raumzeitpunkte x'^μ mit der Eigenschaft

$$x'^\mu x'_\mu = c^2 t'^2 - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 0, \quad (10.37)$$

da sich elektromagnetische Kugelwellen (Licht) in *jedem* Inertialsystem mit konstanter Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten. Die lineare Transformation, die S' mit S verknüpft, ist eine *Lorentz-Transformation*

$$\begin{aligned} x'^\mu &= L^\mu{}_\nu x^\nu \\ x'_\mu &= g_{\mu\lambda} x'^\lambda = g_{\mu\lambda} L^\lambda{}_\sigma x^\sigma = g_{\mu\lambda} L^\lambda{}_\sigma g^{\sigma\nu} x_\nu = L_\mu{}^\nu x_\nu, \end{aligned}$$

wobei

$$L_\mu{}^\nu = g_{\mu\lambda} L^\lambda{}_\sigma g^{\sigma\nu}. \quad (10.38)$$

Dann gilt notwendig

$$L^\lambda{}_\mu L_\lambda{}^\nu = g_\mu{}^\nu, \quad (10.39)$$

damit die Wellenfront der Kugelwelle unter Lorentz-Transformationen invariant bleibt:

$$\begin{aligned} x'^\lambda x'_\lambda &= L^\lambda{}_\mu x^\mu L_\lambda{}^\nu x_\nu \\ &= L^\lambda{}_\mu L_\lambda{}^\nu x^\mu x_\nu \\ &= g_\mu{}^\nu x^\mu x_\nu \\ &= x^\mu x_\mu = 0. \end{aligned} \quad (10.40)$$

Die zur Lorentz-Transformation $L^\mu{}_\nu$ *inverse* Lorentz-Transformation $L_\mu{}^\lambda$ lesen wir aus der folgenden identischen Umformung ab:

$$x^\lambda = g^\lambda{}_\nu x^\nu = L^\mu{}_\nu L_\mu{}^\lambda x^\nu = L_\mu{}^\lambda (L^\mu{}_\nu x^\nu) = L_\mu{}^\lambda x'^\mu. \quad (10.41)$$

Aus (10.39) folgt als Spezialfall (Summenkonvention!)

$$\begin{aligned} \mu = 0 = \nu & & (10.42) \\ L^\lambda_0 L_\lambda^0 = g_0^0 = 1. \end{aligned}$$

Heraufziehen der Indizes liefert

$$\begin{aligned} \lambda \in \{0, 1, 2, 3\} & & (10.43) \\ L^\lambda_0 = L^{\lambda\mu} g_{\mu 0} = L^{\lambda 0} \\ a \in \{1, 2, 3\} \\ L_a^0 = g_{a\mu} L^{\mu 0} = -L^{a0}. \end{aligned}$$

Somit

$$1 = L^\lambda_0 L_\lambda^0 = L^0_0 L_0^0 + L^a_0 L_a^0 = (L^{00})^2 - L^{a0} L^{a0}. \quad (10.44)$$

Folglich ist

$$|L^{00}| = \left(1 + \underbrace{L^{a0} L^{a0}}_{\geq 0}\right)^{1/2} > 1. \quad (10.45)$$

Es gibt daher keine stetige Abbildung von einem Inertialsystem mit $L^{00} > 0$ in eines mit $L^{00} < 0$.

Eigentliche orthochrone Lorentz-Transformationen

Man unterscheidet nun zwischen Lorentz-Transformationen mit $L^{00} > 0$ und solchen mit $L^{00} < 0$. Es gilt stets $L^{00} = (dt/dt')_{\mathbf{r}'=\text{const}}$, d.h. eine im Bezugssystem S' ruhende Uhr läuft für $L^{00} > 0$ vom Bezugssystem S aus betrachtet im üblichen Uhrzeigersinn (Konvention!), während sie für $L^{00} < 0$ (bezogen auf die gleiche Konvention) im Gegenuhrzeigersinn (rückwärts) läuft. Im folgenden betrachten wir nur Lorentz-Transformationen mit $L^{00} > 0$ (orthochrone Untergruppe).

Ohne Mühe entnehmen wir der Identität (10.39) die Eigenschaft

$$g_\mu^\nu = L^\lambda_\mu L_\lambda^\nu = L^\lambda_\mu L_{\lambda\alpha} g^{\alpha\nu} = L^\lambda_\mu g_{\lambda\beta} L^\beta_\alpha g^{\alpha\nu}. \quad (10.46)$$

Für die Determinante dieser 4×4 -Matrix folgt somit unter Verwendung des Multiplikationssatzes für Determinanten

$$1 = \det(g_\mu^\nu) = \det(L^\lambda_\mu g_{\lambda\beta} L^\beta_\alpha g^{\alpha\nu}) = [\det(L^\lambda_\mu)]^2 [\det g]^2. \quad (10.47)$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Wegen

$$\det g = -1 \quad (10.48)$$

ist dann

$$\det \left(L^\lambda{}_\mu \right) = \pm 1. \quad (10.49)$$

Lorentz-Transformationen mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} L^{00} &= 1 \\ \det \left(L^\lambda{}_\mu \right) &= 1 \end{aligned} \quad (10.50)$$

bilden die Untergruppe der *eigentlichen orthochronen* Lorentz-Transformationen. Wir betrachten in dieser Vorlesung ausschließlich die *eigentlichen orthochronen* Lorentz-Transformationen. Jede eigentliche orthochrone Lorentz-Transformation, die ein Inertialsystem S mit einem Inertialsystem S' verknüpft, hängt im Allgemeinen von sechs reellen Parametern ab. Drei Parameter dienen zur Spezifikation derjenigen Drehmatrix, die zur parallelen Ausrichtung der kartesischen Achsensysteme von S und S' führt, die drei übrigen Parameter entsprechen den kartesischen Komponenten der Relativgeschwindigkeit \mathbf{v} von S' relativ zu S . Durch stetige Veränderung dieser sechs Parameter kann jede eigentliche orthochrone Lorentz-Transformation in die identische Abbildung überführt werden.

Erwähnt sei, dass die elektroschwache Wechselwirkung nicht invariant unter den eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen ist, da Parität und Zeit-Umkehrsymmetrie verletzt werden.

Nach dem Gesagten folgt jetzt das Transformationsverhalten eines vierdimensionalen Raumzeitvolumens unter (eigentlichen orthochronen) Lorentz-Transformationen zu

$$\begin{aligned} dt' d^3r' &= \frac{1}{c} dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \frac{1}{c} \det \left(L^\lambda{}_\mu \right) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= \frac{1}{c} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = dt d^3r, \end{aligned} \quad (10.51)$$

d.h. ein vierdimensionales Volumenelement $dt d^3r$ ist invariant unter (eentlichen) Lorentz-Transformationen! Eine skalare Größe, die unter einer Lorentz-Transformation invariant bleibt, nennt man *Vierer-Skalar*. Das vierdimensionale Volumenelement d^4x ist demnach ein Vierer-Skalar.

Liegt der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} , mit dem sich das Bezugssystem S' relativ zum Bezugssystem S bewegt, jetzt z.B. parallel zur z -Achse, $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$, so sind die Elemente der betreffenden Lorentz-Transformationsmatrix L^μ_ν bzw. ihrer Inversen L_ν^μ gemäß (10.20) gegeben zu

$$\beta = \frac{|\mathbf{v}|}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (10.52)$$

$$L^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}_{\mu,\nu}, \quad L_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}_{\mu,\nu}$$

$$L^\lambda_\mu L_\lambda^\nu = g_\mu^\nu \quad (\text{Summenkonvention beachten.})$$

Man bezeichnet $L^\mu_\nu = L^\mu_\nu(\mathbf{v})$ auch als Lorentz-Boost. Eine allgemeine Lorentz-Transformation setzt sich aus gewöhnlichen dreidimensionalen Rotationen und Lorentz-Boosts zusammen. Es gibt im allgemeinen drei Eulerwinkel für die Rotation und drei Geschwindigkeitskomponenten für Boosts, d.h. es gibt insgesamt $3 + 3 = 6$ unabhängige Parameter für eine allgemeine (eigentliche) Lorentz-Transformation, siehe (10.21).

Für einen allgemein orientierten Lorentz-Boost L^μ_ν erhält man aus (10.21):

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z \quad (10.53)$$

$$L^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v_x}{c} & -\gamma\frac{v_y}{c} & -\gamma\frac{v_z}{c} \\ -\gamma\frac{v_x}{c} & 1 + \frac{\gamma^2 v_x v_x}{1+\gamma} \frac{v_x}{c} \frac{v_x}{c} & \frac{\gamma^2 v_x v_y}{1+\gamma} \frac{v_x}{c} \frac{v_y}{c} & \frac{\gamma^2 v_x v_z}{1+\gamma} \frac{v_x}{c} \frac{v_z}{c} \\ -\gamma\frac{v_y}{c} & \frac{\gamma^2 v_y v_x}{1+\gamma} \frac{v_y}{c} \frac{v_x}{c} & 1 + \frac{\gamma^2 v_y v_y}{1+\gamma} \frac{v_y}{c} \frac{v_y}{c} & \frac{\gamma^2 v_y v_z}{1+\gamma} \frac{v_y}{c} \frac{v_z}{c} \\ -\gamma\frac{v_z}{c} & \frac{\gamma^2 v_z v_x}{1+\gamma} \frac{v_z}{c} \frac{v_x}{c} & \frac{\gamma^2 v_z v_y}{1+\gamma} \frac{v_z}{c} \frac{v_y}{c} & 1 + \frac{\gamma^2 v_z v_z}{1+\gamma} \frac{v_z}{c} \frac{v_z}{c} \end{bmatrix}_{\mu,\nu}.$$

Das stimmt für den Spezialfall $v_x = 0 = v_y$, also $|v_z| = c\beta$, mit der obigen Formel

(10.52) überein, denn

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \frac{v_z}{c} \frac{v_z}{c} &= 1 + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \\
 &= 1 + \gamma - 1 \\
 &= \gamma.
 \end{aligned} \tag{10.54}$$

10.2 Relativität der Gleichzeitigkeit

Betrachten wir im System S zwei Ereignisse $X = (x^\mu)$ und $Y = (y^\mu)$. Dann gilt nach dem Gesagten für den „Abstand“ der beiden Ereignisse

$$\begin{aligned}
 s^2 &= (x^\lambda - y^\lambda)(x_\lambda - y_\lambda) \\
 &= (x^\lambda - y^\lambda) g^\sigma{}_\lambda (x_\sigma - y_\sigma) \\
 &= (x^\lambda - y^\lambda) L^\sigma{}_\mu L^\mu{}_\lambda (x_\sigma - y_\sigma) \\
 &= L^\mu{}_\lambda (x^\lambda - y^\lambda) L_\mu{}^\sigma (x_\sigma - y_\sigma) \\
 &= (x'^\mu - y'^\mu)(x'_\mu - y'_\mu) \\
 &= s'^2.
 \end{aligned} \tag{10.55}$$

Die Größe s^2 ist demnach ein Vierer-Skalar. O.B.d.A. positionieren wir jetzt das Ereignis Y am Koordinatenursprung des Inertialsystems S , d.h. $y^\lambda = 0$ für $\lambda \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dann ist

$$s^2 = x^\lambda x_\lambda = c^2 t^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}. \tag{10.56}$$

Für die Wellenfront einer sich mit Lichtgeschwindigkeit c ausbreitenden elektromagnetischen Kugelwelle (Lichtblitz) gilt, siehe Abbildung 10.1,

$$s^2 = 0, \tag{10.57}$$

d.h. wenn ein Lichtblitz von einem Ereignis zum anderen läuft, so ist der „Abstand“ der beiden Ereignisse *lichtartig*, also $s^2 = 0$.

Für $s^2 < 0$ besitzen die beiden Ereignisse X und Y einen *raumartigen* Abstand. Das bedeutet, es existiert ein Inertialsystem S' , in dem das Ereignis $X = (x'^\mu)$ und das Ereignis $Y = (y'^\mu)$ *gleichzeitig* statt finden können, also

$$x'^0 = 0 = y'^0. \tag{10.58}$$

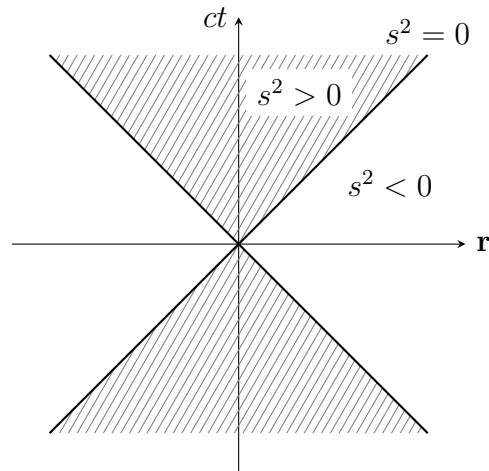


Abbildung 10.1: Die grafische Darstellung des Abstands s^2 einer auslaufenden elektromagnetischen Kugelwelle (Lichtblitz) ist der sog. *Lichtkegel*.

Ein Lorentz-Boost $L^\mu{}_\lambda = L^\mu{}_\lambda(\mathbf{v})$, mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ als noch zu bestimmendem Parameter, setzt die Koordinaten x^μ des Ereignisses X im System S in Beziehung zu den entsprechenden Koordinaten x'^μ des selben Ereignisses X im Bezugssystem S' :

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10.59)$$

$$ct' = x'^0 = L^0{}_\lambda x^\lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}_{0,\lambda} \begin{pmatrix} ct \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}_\lambda = \gamma \left(ct - \frac{vr_z}{c} \right)$$

$$r'_x = x'^1 = L^1{}_\lambda x^\lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}_{1,\lambda} \begin{pmatrix} ct \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}_\lambda = r_x$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

$$r'_y = x'^2 = L^2_{\lambda} x^{\lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}_{2,\lambda} \begin{pmatrix} ct \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}_{\lambda} = r_y$$

$$r'_z = x'^3 = L^3_{\lambda} x^{\lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}_{3,\lambda} \begin{pmatrix} ct \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}_{\lambda} = \gamma(r_z - vt).$$

Der gesuchte Wert für die Geschwindigkeit v folgt jetzt aus der Forderung

$$t' \stackrel{!}{=} 0 = \gamma \left(t - \frac{vr_z}{c^2} \right). \quad (10.60)$$

Diese Forderung wird erfüllt für

$$v = \frac{c^2 t}{r_z}. \quad (10.61)$$

Die Koordinate r'_z des Ereignisses X im Bezugssystem S' ist somit gegeben zu

$$\begin{aligned} r'_z &= \gamma(r_z - vt) & (10.62) \\ &= \frac{r_z}{\sqrt{1 - \left(\frac{c^2 t}{r_z}\right)^2}} \left(1 - \frac{c^2 t^2}{r_z^2} \right) \\ &= r_z \sqrt{1 - \frac{c^2 t^2}{r_z^2}} \\ &= \operatorname{sgn}(r_z) \sqrt{r_z^2 - c^2 t^2} \\ &= \operatorname{sgn}(r_z) \sqrt{-s^2}. \end{aligned}$$

Für zwei relativ raumartige Ereignisse X und Y kann man demnach immer ein Inertialsystem finden, in denen beide Ereignisse gleichzeitig stattfinden. Dies ist die Relativität der Gleichzeitigkeit.

Kausalität

Für $s^2 > 0$ besitzen die beiden Ereignisse X und Y einen sog. *zeitartigen* Abstand. Das bedeutet, es existiert ein Inertialsystem S' , in dem die Ereignisse X und Y von S' aus gesehen am *selben Ort* stattfinden. Ein Lorentz-Boost $L^\mu_\lambda(\mathbf{v})$, mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ als noch zu bestimmendem Parameter, setzt die Koordinaten x^μ des Ereignisses X im System S in Beziehung zu den entsprechenden Koordinaten x'^μ des Ereignisses X im Bezugssystem S' . Der gesuchte Wert für die Geschwindigkeit v folgt jetzt aus der Forderung

$$x'^3 \stackrel{!}{=} 0 = \gamma(r_z - vt) \quad (10.63)$$

zu

$$v = \frac{r_z}{t}. \quad (10.64)$$

Somit

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{vr_z}{c^2} \right) & (10.65) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_z}{t}\right)^2}} \left(t - \frac{r_z r_z}{t c^2} \right) \\ &= \frac{t}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_z}{t}\right)^2}} \left(1 - \frac{\left(\frac{r_z}{t}\right)^2}{c^2} \right) \\ &= t \cdot \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{r_z}{t}\right)^2}{c^2}} \\ &= \frac{\text{sgn}(t)}{c} \sqrt{c^2 t^2 - r_z^2} \\ &= \frac{\text{sgn}(t)}{c} \sqrt{s^2} = \frac{\text{sgn}(t)}{c} s. \end{aligned}$$

Da $s^2 > 0$ ist, kann sich die zeitliche Reihenfolge von zeitartigen Ereignissen (unter eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen) nicht ändern. Nur zeitartige oder lichtartige Ereignisse X und Y können in einer kausaler Beziehung zueinander stehen, so dass die zeitliche Abfolge derartiger Ereignisse, z.B. die Feststellung X ist früher als Y , unabhängig vom gewählten Inertialsystem ist.

Eigenzeit

Als *Eigenzeit* eines Teilchens definiert man die Zeitspanne τ , die im *Ruhesystem* des Teilchens verstreicht. Das Ruhesystem ist das (instantane) Bezugssystem S' , in dem sich das Teilchen als Funktion der Zeit während der betrachteten Zeitspanne relativ zum eigenen Bezugssystem S' nicht vom Fleck rührt. Nun ist nach dem Gesagten $(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu$, definiert als der Abstand zweier infinitesimal benachbarter Ereignisse X und $Y = X + dX$, ein Vierer-Skalar. Folglich ist auch das Differential der Eigenzeit

$$\boxed{d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}(t)|^2}{c^2}} dt} \quad (10.66)$$

ein Vierer-Skalar, insbesondere ist $d\tau$ unabhängig vom betrachteten Inertialsystem:

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{dt'}{\gamma'} = \frac{dt''}{\gamma''} & (10.67) \\ \gamma' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}'|^2}{c^2}}} \\ \gamma'' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}''|^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Die Eigenzeit τ eines Teilchens, das sich mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ entlang einer Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ vom Ort $\mathbf{r}(t_I)$ zum Ort $\mathbf{r}(t_{II})$ bewegt, folgt demnach zu

$$\tau = \int_{t_I}^{t_{II}} dt \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}(t)|^2}{c^2}}. \quad (10.68)$$

Offensichtlich gilt

$$\tau \leq t_{II} - t_I, \quad (10.69)$$

die Eigenzeit ist nie größer als die in jedem (!) Inertialsystem gemessene Zeit.

Vierer-Vektoren und Vierer-Skalare

Transformieren sich vier Größen a^μ für $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ beim Übergang vom Inertialsystem S zum Inertialsystem S' wie die Raumzeit-Koordinaten x^μ und x'^μ , d.h.

$$a'^\mu = L^\mu_\nu a^\nu, \quad (10.70)$$

so bilden die a^μ einen *Vierer-Vektor*. Offensichtlich ist die sog. *Vierer-Geschwindigkeit* (Weltgeschwindigkeit)

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (10.71)$$

eines Teilchens ein Vierer-Vektor, denn da das Differential $d\tau$ der Eigenzeit τ ein Vierer-Skalar ist, transformiert sich u^μ wie dx^μ bzw. wie x^μ .

Gemäß (10.66) schreiben wir

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}(t)|^2}{c^2}}} \equiv \gamma \quad (10.72)$$

und erhalten als Komponenten der *Weltgeschwindigkeit*

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = v^\mu \gamma, \quad (10.73)$$

wobei

$$\begin{aligned} v^\mu &= \frac{dx^\mu}{dt} & (10.74) \\ v^0 &= \frac{dx^0}{dt} = \frac{d(ct)}{dt} = c \\ a &\in \{1, 2, 3\} \equiv \{x, y, z\} \\ v^a &= \frac{dr_a}{dt}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Größe v^μ kein Vierer-Vektor, da dt kein Vierer-Skalar ist.

Wir beobachten

$$u^\mu u_\mu = (c^2 - |\mathbf{v}|^2) \gamma^2 = c^2 = u'^\mu u'_\mu, \quad (10.75)$$

d.h. $u^\mu u_\mu$ ist ein Vierer-Skalar. Offensichtlich ist die Vierer-Geschwindigkeit zeitartig.

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Das Skalarprodukt zweier verschiedener Vierer-Vektoren q^μ und p^μ ist natürlich auch ein Vierer-Skalar, denn

$$q'^\mu p'_\mu = L^\mu{}_\nu q^\nu L_\mu{}^\lambda p_\lambda = L^\mu{}_\nu L_\mu{}^\lambda q^\nu p_\lambda = g_\nu{}^\lambda q^\nu p_\lambda = q^\nu p_\nu. \quad (10.76)$$

Ist nun $q^\nu p_\nu$ ein Vierer-Skalar, und ist q^ν ein beliebiger Vierer-Vektor (eines vollständigen Systems von Vierer-Vektoren), dann ist auch p^μ ein Vierer-Vektor. Um das einzusehen, schreiben wir

$$0 = q^\nu p_\nu - q'^\mu p'_\mu = q^\nu p_\nu - L^\mu{}_\nu q^\nu p'_\mu = q^\nu (p_\nu - L^\mu{}_\nu p'_\mu). \quad (10.77)$$

Da die q^ν beliebig sind, gilt notwendig

$$p_\nu = L^\mu{}_\nu p'_\mu, \quad (10.78)$$

d.h. die Größen $p^\mu = g^{\mu\nu} p_\nu$ bilden die Komponenten eines Vierer-Vektors.

Die Komponenten der Vierer-Beschleunigung sind definiert zu

$$\begin{aligned} w^\mu &= \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \\ w^0 &= \gamma^4 \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ w^a &= \gamma^2 \left[\frac{dv_a}{dt} + \gamma^2 \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \frac{v_a}{c} \right]. \end{aligned} \quad (10.79)$$

Demnach

$$w^\mu u_\mu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (u^\mu u_\mu) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (c^2) = 0. \quad (10.80)$$

Da die Vierer-Geschwindigkeit zeitartig ist, folgt hieraus dass die Vierer-Beschleunigung raumartig ist, d.h. $w^\mu w_\mu < 0$. Im momentanen *Ruhesystem* eines Teilchens gilt

$$\begin{aligned} u^0 &= c \\ u^a &= 0 \\ w^0 &= 0 \\ w^a &= \frac{d}{dt} v_a. \end{aligned} \quad (10.81)$$

Zeitdilatation und Längenkontraktion

Wir betrachten vom Inertialsystem S aus gesehen eine Uhr, die im bewegten Bezugssystem S' ruht, d.h. für die Position \mathbf{r}' der Uhr in S' gilt $\mathbf{r}' = \text{const}$. Dann gilt aufgrund des allgemeinen Zusammenhangs (inverse Lorentz-Transformation)

$$x^\lambda = L_\mu^\lambda x'^\mu, \quad (10.82)$$

insbesondere für $\lambda = 0$:

$$ct = x^0 = L_\mu^0 x'^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}_{0,\mu} \begin{pmatrix} ct' \\ r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{pmatrix}_\mu = \gamma(ct' + \beta r'_z). \quad (10.83)$$

Also

$$\left(\frac{dt}{dt'}\right)_{\mathbf{r}'=\text{const}} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10.84)$$

und weiter

$$\Delta t = \left(\frac{dt}{dt'}\right)_{\mathbf{r}'=\text{const}} \Delta t' = \gamma \Delta t'. \quad (10.85)$$

Offensichtlich geht eine in S' ruhende Uhr, wenn man sie vom Bezugssystem S aus betrachtet, *langsamer*

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t < \Delta t. \quad (10.86)$$

Das ist die sog. *Zeitdilatation*. Dieser Effekt ist z.B. durch die Beobachtung einer (scheinbar) verlängerten Lebensdauer sich schnell bewegender Pionen und Myonen in der kosmischen Höhenstrahlung nachgewiesen. Auch Experimente mit bewegten Atomuhren (Hafele und Keating 1971, Maryland-Experiment 1976) bestätigen die Zeitdilatation eindrucksvoll.

Ein Maßstab, der in S' ruht, und der in Richtung von \mathbf{v} orientiert ist, erscheint verkürzt, wenn er im System S betrachtet wird. Um dies einzusehen betrachten wir die Lorentz-Transformation

$$x'^\mu = L^\mu_\lambda x^\lambda. \quad (10.87)$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Für die Komponente $\mu = 3$ gilt

$$r'_z = x'^3 = L^3_{\lambda} x^\lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}_{3,\lambda} \begin{pmatrix} ct \\ r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}_\lambda = \gamma(r_z - vt).$$

Offensichtlich ist

$$\left(\frac{\partial r'_z}{\partial r_z} \right)_{t=\text{const}} = \gamma. \quad (10.88)$$

Zu einer festen Zeit $t = \text{const}$ entspricht der Position der beiden Enden des Maßstabes im Bezugssystem S' ein raumartiger Differenzvektor $\Delta r'_z$. Das bedeutet

$$\Delta r'_z = \left(\frac{\partial r'_z}{\partial r_z} \right)_{t=\text{const}} \Delta r_z = \gamma \Delta r_z, \quad (10.89)$$

oder auch

$$\Delta r_z = \frac{\Delta r'_z}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta r'_z. \quad (10.90)$$

Dies ist die sog. *Lorentz-Kontraktion*, wie sie 1905 von Albert Einstein in seiner speziellen Relativitätstheorie durch seine geniale Umdeutung der Begriffe von Raum und Zeit begründet wurde. Ein im System S' ruhender Maßstab der Länge $\Delta r'_z$, der in Richtung von \mathbf{v} orientiert ist, erscheint vom System S aus betrachtet *verkürzt*, während ein im System S' ruhender Maßstab, der orthogonal zur Bewegungsrichtung \mathbf{v} orientiert ist, unverändert erscheint.

Bemerkung

Der irische Physiker George Francis Fitzgerald veröffentlichte seine These zur Längenkontraktion bereits im Jahr 1889, der Holländer Hendrik A. Lorentz etwas später 1892, um den negativen Ausgang des Interferenzexperiments von Michelson-Morley aus dem Jahr 1887 zu deuten, das ja dazu gedacht war, den Bewegungszustands des Planeten Erde auf seiner Bahn um die Sonne relativ zum (hypothetischen) Äther festzustellen. Die moderne Deutung des negativen Ausgangs des Michelson-Morley Experiments ist, dass kein bevorzugtes Bezugssystem (Äther)

existiert. Alle durch Lorentz-Transformationen auseinander hervorgehenden Bezugssysteme sind gleichberechtigte Inertialsysteme, in denen die Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom Bewegungszustand der Quelle immer den gleichen Wert c besitzt. Die Naturgesetze und die Ergebnisse von Experimenten in zwei verschiedenen Inertialsystemen sind unabhängig von der Geschwindigkeit, mit der sich das eine System relativ zum anderen bewegt.

Additionstheorem für relativistische Geschwindigkeiten

Wir betrachten in einem Bezugssystem S' , das sich relativ zum Bezugssystem S mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ bewegen möge, ein mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}'_T = v'_T\mathbf{e}_z$ fliegendes Teilchen. Das Bezugssystem S' und das Teilchen haben somit von S aus betrachtet dieselbe Flugrichtung. Wie groß ist jetzt die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_T = v_T\mathbf{e}_z$ des betreffenden Teilchens von S aus gesehen?

Die *inverse* Lorentz-Transformation (10.82) impliziert

$$r_z = x^3 = L_{\mu}^3 x'^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}_{3,\mu} \begin{pmatrix} ct' \\ r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{pmatrix}_{\mu} = \gamma(r'_z + vt') \quad (10.91)$$

$$ct = x^0 = L_{\mu}^0 x'^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}_{0,\mu} \begin{pmatrix} ct' \\ r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{pmatrix}_{\mu} = c\gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} r'_z \right).$$

Mit $v'_T = \frac{r'_z}{t'}$ bzw. $r'_z = v'_T t'$ folgt jetzt

$$r_z = \gamma(v'_T t' + vt') \quad (10.92)$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} v'_T t' \right).$$

Die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_T = v_T\mathbf{e}_z$ des betreffenden Teilchens von S aus gesehen ist somit

$$v_T = \frac{r_z}{t} = \frac{v'_T + v}{1 + \frac{v'_T v}{c^2}}. \quad (10.93)$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Für $v'_T = c$ folgt insbesondere

$$v_T = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = c \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} = c \quad (10.94)$$

und im Fall $v'_T = -c$ bekommt man

$$v_T = \frac{-c + v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = -c \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} = -c. \quad (10.95)$$

Die zusammengesetzte Geschwindigkeit v_T kann nie größer werden als die Lichtgeschwindigkeit c , denn es gilt

$$\begin{aligned} 1 - \frac{v_T^2}{c^2} &= 1 - \left(\frac{\frac{v'_T}{c} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v'_T v}{c^2}} \right)^2 & (10.96) \\ &= \frac{\left(1 + 2\frac{v'_T v}{c^2} + \frac{v'^2_T v^2}{c^4} \right) - \left(\frac{v'^2_T}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} + 2\frac{v'_T v}{c^2} \right)}{\left(1 + \frac{v'_T v}{c^2} \right)^2} \\ &= \frac{1 + \frac{v'^2_T v^2}{c^4} - \frac{v'^2_T}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v'_T v}{c^2} \right)^2} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{v'^2_T}{c^2} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{\left(1 + \frac{v'_T v}{c^2} \right)^2}. \end{aligned}$$

Es ist $1 - \frac{v_T^2}{c^2}$ manifest positiv für $|v'_T| < c$ und $|v| < c$, was zu zeigen war. Demnach ist die Lichtgeschwindigkeit c die universelle Grenzgeschwindigkeit in jedem Inertialsystem S .

10.3 Vierdimensionale Formulierung der Maxwell'schen Theorie

In der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik werden die Quellen für die elektromagnetischen Felder, d.h. Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ und Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$,

10.3 Vierdimensionale Formulierung der Maxwell'schen Theorie

zur Vierer-Stromdichte zusammengefasst

$$\begin{aligned} \mu &\in \{0, 1, 2, 3\} & (10.97) \\ j^\mu &= \left(c\rho, j_x, j_y, j_z \right)_\mu. \end{aligned}$$

Diese Größe ist in der Tat ein Vierer-Vektor, d.h. j^μ transformiert sich unter Lorentz-Transformationen so wie die Koordinaten x^μ eines Ereignisses. Um das einzusehen, betrachten wir die Stromdichte einer Punktladung q , die sich im Bezugssystem S mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ entlang einer Trajektorie $\mathbf{r}(t)$ bewegen möge. Dann gilt

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= q\delta^{(3)}[\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)] & (10.98) \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{v}(t)\rho(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Wir schreiben jetzt in Vierer-Notation für die Trajektorie, entlang der sich die Ladung bewegt

$$x^\mu(t) = \left(ct, r_x(t), r_y(t), r_z(t) \right)_\mu \quad (10.99)$$

und weiter

$$\begin{aligned} v^\mu(t) &= \frac{d}{dt}x^\mu(t) = \left(c, v_x(t), v_y(t), v_z(t) \right)_\mu & (10.100) \\ &= \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \\ &= u^\mu(\tau) \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}(t)|^2}{c^2}}, \end{aligned}$$

wobei $u^\mu(\tau)$ die Komponenten der *Weltgeschwindigkeit* der Punktladung bezeichnen. Wir erhalten nach dem Gesagten

$$\begin{aligned} j^\mu &= v^\mu \rho & (10.101) \\ &= u^\mu(\tau) \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}(t)|^2}{c^2}} \rho. \end{aligned}$$

Es wurde bereits gezeigt, dass die Weltgeschwindigkeit $u^\mu(\tau)$ der Punktladung ein Vierer-Vektor ist. Damit j^μ ebenfalls ein Vierer-Vektor ist, sollte demnach das

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Produkt $\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}(t)|^2}{c^2}} \rho$ ein Vierer-Skalar sein. Das ist in der Tat richtig, denn es gilt im betrachteten Inertialsystem S für die Ladungsdichte

$$\rho = \frac{dq}{d|V|}, \quad (10.102)$$

wobei $d|V|$ das von der Ladungsmenge dq eingenommene Volumen des Teilchens im Bezugssystem S bezeichnet. Die Ladungsmenge dq ist natürlich ein Vierer-Skalar, da beim Übergang von einem Bezugssystem zum anderen keine neuen elektrischen Ladungen generiert werden können. Aufgrund der Lorentz-Kontraktion nimmt die gleiche Ladungsmenge jedoch in verschiedenen Inertialsystemen ein unterschiedliches Volumen ein. Sei etwa dr_z die Kante eines quaderförmigen Volumenelements $d|V| = dr_x dr_y dr_z$ parallel zur Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ im Inertialsystem S . Dann besagt die Lorentz-Kontraktion

$$dr_z = dr'_z \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}(t)|^2}{c^2}}. \quad (10.103)$$

Demnach

$$\begin{aligned} d|V| &= dr_x dr_y dr_z \\ &= dr'_x dr'_y dr'_z \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}(t)|^2}{c^2}} \\ &= d|V'| \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}(t)|^2}{c^2}}, \end{aligned} \quad (10.104)$$

wobei $d|V'| = dr'_x dr'_y dr'_z$ jetzt ein entsprechendes Volumenelement im (instantanen) *Ruhesystem* S' des Teilchens bezeichnet. Es besteht zwischen der Ladungsdichte ρ im System S und der Ladungsdichte ρ' im Ruhesystem S' somit der Zusammenhang

$$\rho = \frac{dq}{d|V|} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}(t)|^2}{c^2}}} \frac{dq}{d|V'|} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}(t)|^2}{c^2}}} \rho'. \quad (10.105)$$

Weil (per definitionem) im Ruhesystem S' der Ladung q diese sich nicht bewegt, ist in S' natürlich die (eigentliche) Stromdichte $\mathbf{j}' = \mathbf{0}$, d.h. die Vierer-Stromdichte

10.3 Vierdimensionale Formulierung der Maxwell'schen Theorie

ist $j'^{\mu} = \delta_{\mu,0} c \rho'$. Somit

$$\begin{aligned}
 j'^{\mu} j'_{\mu} &= j'^0 j'_0 - \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}' & (10.106) \\
 &= c^2 \rho'^2 \\
 &= c^2 \left(1 - \frac{|\mathbf{v}(t)|^2}{c^2} \right) \rho^2 \\
 &= c^2 \rho^2 - |\mathbf{v}(t)|^2 \rho^2 \\
 &= j^0 j_0 - \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\
 &= j^0 j_0 - j^a g_{ab} j_b \\
 &= j^0 j_0 + j^a j_a \\
 &= j^{\mu} j_{\mu}.
 \end{aligned}$$

Demnach ist $j^{\mu} j_{\mu}$ ein Vierer-Skalar. Folglich ist die Ladungsdichte

$$\rho' = \frac{1}{c} \sqrt{j^{\mu} j_{\mu}}$$

im Ruhesystem der Punktladung ebenfalls ein Vierer-Skalar. Dem Gesagten zufolge ist

$$j^{\mu} = u^{\mu}(\tau) \rho' \quad (10.107)$$

das Produkt eines Vierer-Vektors mit einem Vierer-Skalar, d.h. j^{μ} ist ein Vierer-Vektor.

Die lokale Formulierung des Erhaltungssatzes für elektrische Ladungen ist die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (10.108)$$

In Vierer-Notation lautet die Kontinuitätsgleichung (Summenkonvention!)

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} j^{\mu} = 0, \quad (10.109)$$

denn

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x^0} j^0 &= \frac{\partial}{\partial (ct)} (c\rho) = \frac{\partial}{\partial t} \rho & (10.110) \\
 a &\in \{x, y, z\} \\
 \frac{\partial}{\partial x^a} j^a &= \operatorname{div} \mathbf{j}.
 \end{aligned}$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Beim Übergang vom Inertialsystem $S = (x^\mu)$ zum Inertialsystem $S' = (x'^\mu)$ gilt gemäß der Kettenregel die Transformationseigenschaft

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = L^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (10.111)$$

d.h. die Ableitung nach einer kontravarianten Koordinate x'^μ transformiert sich wie eine kovariante Koordinate x'_μ . Umgekehrt gilt, dass sich die Ableitung nach einer kovarianten Koordinate x'_μ wie eine kontravariante Koordinate x'^μ transformiert:

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = L^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}. \quad (10.112)$$

Man verwendet daher die Notation

$$\begin{aligned} \partial_\nu &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial r_x}, \frac{\partial}{\partial r_y}, \frac{\partial}{\partial r_z} \right)_\nu \\ \partial^\nu &= \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial r_x}, -\frac{\partial}{\partial r_y}, -\frac{\partial}{\partial r_z} \right)_\nu. \end{aligned} \quad (10.113)$$

Wir notieren als Merkregel

$$\begin{aligned} \partial^0 &= \partial_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ a &\in \{x, y, z\} \\ \partial_a &= \frac{\partial}{\partial r_a} \\ \partial^a &= -\partial_a, \text{ Minuszeichen!} \end{aligned} \quad (10.114)$$

Also lautet das Transformationsverhalten der kontravarianten bzw. kovarianten Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial'_\mu &= L^\nu{}_\mu \partial_\nu \\ \partial'^\mu &= L^\mu{}_\nu \partial^\nu. \end{aligned} \quad (10.115)$$

Dann nimmt die Kontinuitätsgleichung die folgende Gestalt an

$$\partial_\mu j^\mu = 0 = \partial'_\mu j'^\mu. \quad (10.116)$$

10.3 Vierdimensionale Formulierung der Maxwell'schen Theorie

Die Vierer-Divergenz eines Vierer-Vektors q^μ ist immer ein Vierer-Skalar

$$\partial'_\mu q'^\mu = (L_\mu^\nu \partial_\nu) (L^\mu_\lambda q^\lambda) = L^\mu_\lambda L_\mu^\nu \partial_\nu q^\lambda = g_\lambda^\nu \partial_\nu q^\lambda = \partial_\nu q^\nu. \quad (10.117)$$

Entsprechend zur beschriebenen Zusammenfassung von Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ und Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ zum Vierer-Vektor j^μ fassen wir jetzt das skalare Potential $\phi(\mathbf{r}, t)$ und das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ zum Vierer-Potential A^μ zusammen:

$$\begin{aligned} \mu &\in \{0, 1, 2, 3\} & (10.118) \\ A^\mu &= \left(\frac{1}{\kappa c} \phi, A_x, A_y, A_z \right)_\mu. \end{aligned}$$

Die in (7.8) angegebene Lorenz-Eichung für die elektromagnetischen Potentiale schreiben wir mit

$$\kappa^2 \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}, \quad (10.119)$$

siehe (A.4), um zu

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\kappa c} \phi(\mathbf{r}, t) \right] + \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \stackrel{!}{=} 0. \quad (10.120)$$

Also lautet die Lorenz-Eichung in Vierer-Notation

$$\partial_\mu A^\mu \stackrel{!}{=} 0. \quad (10.121)$$

Die vier inhomogenen Wellengleichungen (7.10) zur Bestimmung der elektromagnetischen Potentiale erhalten in Vierer-Schreibweise jetzt die kompakte Gestalt

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = \kappa \mu_0 j^\nu. \quad (10.122)$$

Da j^ν ein Vierer-Vektor ist, und auch $\partial^\mu \partial_\mu$ das Transformationsverhalten eines Vierer-Skalars besitzt, muss A^ν notwendig ein Vierer-Vektor sein. Das ist in der Tat der Fall, wie die folgende Betrachtung zeigt.

Die in (7.60) hergeleitete *retardierte* Lösung der inhomogenen Wellengleichung lautet in Vierer-Notation

$$\begin{aligned} \nu &\in \{0, 1, 2, 3\} & (10.123) \\ [A^\nu]^{(\text{ret})}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\kappa \mu_0}{4\pi} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| < ct} d^3 r' \frac{j^\nu(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \end{aligned}$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Diesen Ausdruck schreiben wir identisch um zu

$$[A^\nu]^{(\text{ret})}(\mathbf{r}, t) = \frac{\kappa\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \frac{j^\nu(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Dabei haben wir verabredet, dass $j^\nu(\mathbf{r}', t') = 0$ für $t' < 0$. Wir schreiben in Vierer-Notation

$$\begin{aligned} x^\mu &= (ct, r_x, r_y, r_z)_\mu \\ y^\mu &= (ct', r'_x, r'_y, r'_z)_\mu \end{aligned} \quad (10.124)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \delta[(x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu)] &= \delta\left[(y^0 - x^0)^2 + (y^a - x^a)(y_a - x_a)\right] \\ &= \delta\left[c^2(t - t')^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2\right]. \end{aligned} \quad (10.125)$$

Die Nullstellen der Funktion

$$f(t') = c^2(t - t')^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \quad (10.126)$$

(bei festgehaltenem t und $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$) bestimmen wir aus der Forderung

$$f(t'_\pm) \stackrel{!}{=} 0 \quad (10.127)$$

zu

$$t'_\pm = t \pm \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}. \quad (10.128)$$

Da die Funktion $f(t')$ für $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ zwei *einfache* Nullstellen besitzt, gilt

$$\begin{aligned} \delta[f(t')] &= \frac{1}{\left|\frac{df}{dt'}\right|_{t'=t'_+}} \delta(t' - t'_+) + \frac{1}{\left|\frac{df}{dt'}\right|_{t'=t'_-}} \delta(t' - t'_-) \\ \left|\frac{df}{dt'}\right|_{t'=t'_\pm} &= 2c^2 |t - t'|_{t'=t'_\pm} = 2c |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \end{aligned} \quad (10.129)$$

10.3 Vierdimensionale Formulierung der Maxwell'schen Theorie

Somit

$$\begin{aligned}
 & \delta \left[c^2 (t - t')^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \right] & (10.130) \\
 &= \frac{1}{2c |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[\delta (t' - t'_+) + \delta (t' - t'_-) \right] \\
 &= \frac{1}{2c |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[\delta \left(t' - t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) + \delta \left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Um den Beitrag von t'_+ auszublenden, verlangen wir $t > t'$. Also folgt die Identität

$$\begin{aligned}
 & \Theta (x^0 - y^0) \delta [(x^\mu - y^\mu) (x_\mu - y_\mu)] & (10.131) \\
 &= \Theta (ct - ct') \delta [c^2 (t - t')^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2] \\
 &= \frac{1}{2c |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta \left(t' - t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right).
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung schreiben wir jetzt für die retardierten elektromagnetischen Potentiale (Überlagerung von *auslaufenden* Kugelwellen gemäß (7.60))

$$\begin{aligned}
 [A^\nu]^{(\text{ret})} (x) &= \frac{\kappa \mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta \left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \frac{j^\nu (\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} & (10.132) \\
 &= \frac{\kappa \mu_0}{2\pi} \int d^4 y \Theta (x^0 - y^0) \delta [(x^\mu - y^\mu) (x_\mu - y_\mu)] j^\nu (y).
 \end{aligned}$$

Das Integrationsmaß $d^4 y$ ist ein Vierer-Skalar, $(x^\mu - y^\mu) (x_\mu - y_\mu)$ ist ein Vierer-Skalar, die Stromdichte $j^\nu (y)$ ist ein Vierer-Vektor. Das Vorzeichen der Zeitdifferenz $x^0 - y^0$ bleibt für lichtartige Ereignisse $(x^\mu - y^\mu) (x_\mu - y_\mu) = 0$ unter (eigentlichen orthochronen) Lorentz-Transformationen unverändert. Die retardierte Lösung für das Vierer-Potential in der letzten Zeile ist somit manifest Lorentz-invariant, d.h. $[A^\nu]^{(\text{ret})}$ ist ein Vierer-Vektor.

Ersetzt man $\Theta (x^0 - y^0)$ durch $\Theta (y^0 - x^0)$, erhält man die *avancierte* Lösung (Überlagerung von *einlaufenden* Kugelwellen)

$$[A^\nu]^{(\text{av})} (x) = \frac{\kappa \mu_0}{2\pi} \int d^4 y \Theta (y^0 - x^0) \delta [(x^\mu - y^\mu) (x_\mu - y_\mu)] j^\nu (y). \quad (10.133)$$

Dem Gesagten entnehmen wir, dass $[A^\nu]^{(\text{av})}$ ebenfalls ein Vierer-Vektor ist.

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Für die 6 kartesischen Komponenten des elektromagnetischen Feldes gilt bekanntlich die folgende Darstellung mit dem skalaren Potential ϕ und dem Vektorpotential \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} a &\in \{x, y, z\} & (10.134) \\ B_a &= \epsilon_{abc} \frac{\partial}{\partial r_b} A_c \\ E_a &= -\frac{\partial}{\partial r_a} \phi - \kappa \frac{\partial}{\partial t} A_a. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial}{\partial r_y} A_z - \frac{\partial}{\partial r_z} A_y = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 & (10.135) \\ B_y &= \frac{\partial}{\partial r_z} A_x - \frac{\partial}{\partial r_x} A_z = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \\ B_z &= \frac{\partial}{\partial r_x} A_y - \frac{\partial}{\partial r_y} A_x = \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 \\ E_x &= \kappa c \left(-\frac{\partial}{\partial r_x} \frac{\phi}{\kappa c} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_x \right) = \kappa c (\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1) \\ E_y &= \kappa c \left(-\frac{\partial}{\partial r_y} \frac{\phi}{\kappa c} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_y \right) = \kappa c (\partial^2 A^0 - \partial^0 A^2) \\ E_z &= \kappa c \left(-\frac{\partial}{\partial r_z} \frac{\phi}{\kappa c} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_z \right) = \kappa c (\partial^3 A^0 - \partial^0 A^3). \end{aligned}$$

Dies legt nahe, die Größen

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (10.136)$$

10.3 Vierdimensionale Formulierung der Maxwell'schen Theorie

als die Komponenten des *elektromagnetischen Feldtensors* $F^{\mu\nu}$ zu definieren

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{\kappa c} & -\frac{E_y}{\kappa c} & -\frac{E_z}{\kappa c} \\ \frac{E_x}{\kappa c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{\kappa c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{\kappa c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \quad (10.137)$$

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\mu'} F^{\mu'\nu'} g_{\nu\nu'} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{\kappa c} & \frac{E_y}{\kappa c} & \frac{E_z}{\kappa c} \\ -\frac{E_x}{\kappa c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{\kappa c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{\kappa c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu}$$

$$F^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c\kappa} E_x & \frac{1}{c\kappa} E_y & \frac{1}{c\kappa} E_z \\ \frac{1}{c\kappa} E_x & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{1}{c\kappa} E_y & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{1}{c\kappa} E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu}. \quad (10.138)$$

Offensichtlich ist $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad (10.139)$$

Wir schreiben jetzt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\partial}{\partial r_a} E_a = \kappa c \partial_a F^{a0} & (10.140) \\ [\operatorname{rot} \mathbf{B}]_x - \kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_x &= \frac{\partial}{\partial r_y} B_z - \frac{\partial}{\partial r_z} B_y - \frac{\partial}{c \partial t} \frac{E_x}{\kappa c} \\ &= \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} = \partial_\mu F^{\mu 1} \\ [\operatorname{rot} \mathbf{B}]_y - \kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_y &= \frac{\partial}{\partial r_z} B_x - \frac{\partial}{\partial r_x} B_z - \frac{\partial}{c \partial t} \frac{E_x}{\kappa c} \\ &= \partial_3 F^{32} + \partial_1 F^{12} + \partial_0 F^{02} = \partial_\mu F^{\mu 2} \\ [\operatorname{rot} \mathbf{B}]_z - \kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_z &= \frac{\partial}{\partial r_x} B_y - \frac{\partial}{\partial r_y} B_x - \frac{\partial}{c \partial t} \frac{E_x}{\kappa c} \\ &= \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} + \partial_0 F^{03} = \partial_\mu F^{\mu 3}. \end{aligned}$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Der Satz von vier (!) inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} - \kappa\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} &= \kappa\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (10.141)$$

besitzt nach dem Gesagten die äquivalente Darstellung

$$\begin{aligned} a &\in \{1, 2, 3\} \\ \mu &\in \{0, 1, 2, 3\} \\ \kappa c \partial_a F^{a0} &= \frac{j^0}{c\varepsilon_0} \\ \partial_\mu F^{\mu a} &= \kappa\mu_0 j^a. \end{aligned} \quad (10.142)$$

Die 4 inhomogenen Maxwell-Gleichungen zusammen erhalten in eleganter Vierer-Notation die Gestalt

$$\begin{aligned} \mu, \nu &\in \{0, 1, 2, 3\} \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \kappa\mu_0 j^\nu. \end{aligned} \quad (10.143)$$

Da $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch bzgl. Vertauschen der Indizes μ und ν ist, und weil zweite partielle Ableitungen vertauschen, ist die Kontinuitätsgleichung für den Vierer-Strom manifest erfüllt

$$\partial_\nu j^\nu = \frac{1}{\kappa\mu_0} \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa\mu_0} (\partial_\nu \partial_\mu - \partial_\mu \partial_\nu) F^{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa\mu_0} (\partial_\nu \partial_\mu - \partial_\nu \partial_\mu) F^{\mu\nu} = 0. \quad (10.144)$$

Setzen wir die Darstellung des Feldtensors als Ableitungen der Vierer-Potentiale ein, so folgt

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \kappa\mu_0 j^\nu. \quad (10.145)$$

In der Lorenz-Eichung,

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (10.146)$$

erhalten wir mit

$$\partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (10.147)$$

10.3 Vierdimensionale Formulierung der Maxwell'schen Theorie

die bereits diskutierten inhomogenen Wellengleichungen für die Komponenten des Vierer-Potentials

$$\begin{aligned} \mu, \nu &\in \{0, 1, 2, 3\} \\ \partial_\mu \partial^\mu A^\nu &= \kappa \mu_0 j^\nu. \end{aligned} \quad (10.148)$$

Ähnlich zu den inhomogenen Maxwell-Gleichungen schreiben wir jetzt die verbleibenden vier *homogenen* Maxwell-Gleichungen in Vierer-Schreibweise:

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial r_a} B_a = \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} \\ 0 &= \frac{1}{\kappa c} \left[\operatorname{rot} \mathbf{E} + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right]_x = \frac{\partial}{\partial r_y} \frac{E_z}{\kappa c} - \frac{\partial}{\partial r_z} \frac{E_y}{\kappa c} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_x \\ &= - \left[\partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} + \partial^0 F^{23} \right] \\ 0 &= \frac{1}{\kappa c} \left[\operatorname{rot} \mathbf{E} + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right]_y = \frac{\partial}{\partial r_z} \frac{E_x}{\kappa c} - \frac{\partial}{\partial r_x} \frac{E_z}{\kappa c} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_y \\ &= - \left[\partial^3 F^{10} + \partial^1 F^{03} + \partial^0 F^{31} \right] \\ 0 &= \frac{1}{\kappa c} \left[\operatorname{rot} \mathbf{E} + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right]_z = \frac{\partial}{\partial r_x} \frac{E_y}{\kappa c} - \frac{\partial}{\partial r_y} \frac{E_x}{\kappa c} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_z \\ &= - \left[\partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} + \partial^0 F^{12} \right]. \end{aligned} \quad (10.149)$$

Zusammengefasst

$$\begin{aligned} \lambda, \mu, \nu &\in \{0, 1, 2, 3\} \\ \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (10.150)$$

Diese Gleichungen sind nur für *verschiedene* Indizes $\lambda \neq \mu, \lambda \neq \nu, \mu \neq \nu$ nicht trivial.

Dualer Feldtensor

Das Levi-Civita Symbol $\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}$ (siehe Anhang H) findet zur Definition des sog. *dualen* Feldtensors \tilde{F} Verwendung:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} F_{\sigma\lambda}. \quad (10.151)$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Das Levi-Civita Symbol $\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}$ ist invariant unter allen linearen Transformationen mit Determinante Eins (H.8), d.h. insbesondere $\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}$ ist invariant unter eigentlichen Lorentz-Transformationen. Mit Hilfe des dualen Feldtensors erhält man für die homogenen Maxwell-Gleichungen (10.150) den kompakten Ausdruck

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (10.152)$$

Um dies einzusehen, schreiben wir

$$\begin{aligned} F_{\sigma\lambda} &= g_{\sigma\alpha} F^{\alpha\beta} g_{\beta\lambda} \\ &= g_{\sigma\alpha} (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) g_{\beta\lambda} \\ &= g_{\sigma\alpha} \partial^\alpha A^\beta g_{\beta\lambda} - g_{\sigma\alpha} \partial^\beta A^\alpha g_{\beta\lambda} \\ &= (g_{\sigma\alpha} \partial^\alpha) (A^\beta g_{\beta\lambda}) - (g_{\beta\lambda} \partial^\beta) (A^\alpha g_{\sigma\alpha}). \end{aligned} \quad (10.153)$$

Wegen $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ist dann

$$F_{\sigma\lambda} = (g_{\sigma\alpha} \partial^\alpha) (A^\beta g_{\beta\lambda}) - (g_{\lambda\beta} \partial^\beta) (A^\alpha g_{\sigma\alpha}) = \partial_\sigma A_\lambda - \partial_\lambda A_\sigma. \quad (10.154)$$

Wir erhalten (Summenkonvention!)

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \left[\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} F_{\sigma\lambda} \right] = \partial_\mu \left[\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} (\partial_\sigma A_\lambda - \partial_\lambda A_\sigma) \right]. \quad (10.155)$$

Im zweiten Term führen wir eine Indextransformation der Summationsvariablen gemäß $(\lambda, \sigma) \rightarrow (\sigma', \lambda')$ vor, und nennen anschließend wieder $\sigma' = \sigma$, $\lambda' = \lambda$:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \frac{1}{2} (\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} - \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}) \partial_\sigma A_\lambda. \quad (10.156)$$

Da $\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}$ total antisymmetrisch gegen Vertauschen zweier Indizes ist,

$$- \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}, \quad (10.157)$$

schreiben wir jetzt

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} \partial_\sigma A_\lambda \\ &= \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} \partial_\mu \partial_\sigma A_\lambda \\ &= \epsilon^{\mu\sigma\lambda\nu} \partial_\mu \partial_\sigma A_\lambda \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\sigma\lambda\nu} (\partial_\mu \partial_\sigma - \partial_\sigma \partial_\mu) A_\lambda \\ &= 0, \end{aligned} \quad (10.158)$$

10.3 Vierdimensionale Formulierung der Maxwell'schen Theorie

was zu zeigen war.

Wieso nennt man $\tilde{F}^{\mu\nu}$ den zu $F^{\mu\nu}$ dualen Tensor? Ein Blick auf die (kartesischen) Komponenten zeigt

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{E_z}{\kappa c} & -\frac{E_y}{\kappa c} \\ B_y & -\frac{E_z}{\kappa c} & 0 & \frac{E_x}{\kappa c} \\ B_z & \frac{E_y}{\kappa c} & -\frac{E_x}{\kappa c} & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \quad (10.159)$$

Demnach sind die Komponenten $F^{\mu\nu}$ des Feldstärketensors F über die Substitution $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \rightarrow (-\mathbf{B}, \mathbf{E})$ mit den Komponenten $\tilde{F}^{\mu\nu}$ des dualen Feldstärketensors \tilde{F} verknüpft. Für den wiederum zu \tilde{F} dualen Tensor $\tilde{\tilde{F}}$ folgt dann

$$\tilde{\tilde{F}} = -F. \quad (10.160)$$

Ausgehend von (10.137) beweist man jetzt leicht die folgenden nützlichen Identitäten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{\kappa^2 c^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} & (10.161) \\ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{\kappa c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \\ \tilde{F}_{\mu\lambda} \tilde{F}^{\lambda\nu} - F_{\mu\lambda} F^{\lambda\nu} &= \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\ F^{\mu\lambda} \tilde{F}_{\lambda\nu} &= \delta^{\mu}_{\nu} \frac{1}{\kappa c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Zusammenfassung

Die kompakte kovariante Formulierung der relativistischen Feldgleichungen der Elektrodynamik lautet

$$\begin{aligned} \mu, \nu &\in \{0, 1, 2, 3\} & (10.162) \\ \partial_{\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0 \\ \partial_{\mu} F^{\mu\nu} &= \kappa \mu_0 j^{\nu}. \end{aligned}$$

Mit der Darstellung

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} \quad (10.163)$$

werden die homogenen Maxwell-Gleichungen automatisch erfüllt. Insbesondere wird zur Erfüllung der homogenen Maxwell-Gleichungen kein durch den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ vermittelter Zusammenhang (im Sinne der Differentialgeometrie) zwischen Raum und Zeit benötigt (Bianchi-Identität). Die Antisymmetrie $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ führt sofort auf die Kontinuitätsgleichung $\partial_\nu j^\nu = 0$. Es dürfen somit nur mit der Ladungserhaltung kompatible Vierer-Stromdichten j^ν vorgegeben werden.

10.4 Lorentz-Transformation der elektromagnetischen Felder und ihrer Quellen

Unter einer Lorentz-Transformation vom Inertialsystem S zum Inertialsystem S' transformieren sich ∂^μ und die Komponenten A^ν der elektromagnetischen Potentiale bzw. die Komponenten j^μ der Quellen wie Vektoren, d.h.

$$\begin{aligned}\mu, \nu, \lambda, \sigma &\in \{0, 1, 2, 3\} & (10.164) \\ \partial'^\mu &= L^\mu_\sigma \partial^\sigma \\ A'^\nu &= L^\nu_\lambda A^\lambda \\ j'^\nu &= L^\nu_\lambda j^\lambda.\end{aligned}$$

Dann transformiert sich der elektromagnetische Feldtensor, wie man leicht zeigt, gemäß

$$\begin{aligned}F'^{\mu\nu} &= \partial'^\mu A'^\nu - \partial'^\nu A'^\mu & (10.165) \\ &= (L^\mu_\sigma \partial^\sigma) (L^\nu_\lambda A^\lambda) - (L^\nu_\lambda \partial^\lambda) (L^\mu_\sigma A^\sigma) \\ &= L^\mu_\sigma L^\nu_\lambda (\partial^\sigma A^\lambda - \partial^\lambda A^\sigma) \\ &= L^\mu_\sigma L^\nu_\lambda F^{\sigma\lambda}.\end{aligned}$$

Einsetzen des Lorentz-Boosts (10.52) liefert, wenn sich das System S' relativ zum System S mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ bewegt, und wenn beide Koordinatensysteme zur Zeit $t = 0$ als deckungsgleich angenommen werden dürfen,

10.4 Lorentz-Transformation der elektromagnetischen Felder und ihrer Quellen

nunmehr

$$\begin{aligned}
 \frac{E'_x}{\kappa c} &= F'^{10} = L^1{}_\sigma L^0{}_\lambda F^{\sigma\lambda} = \gamma F^{10} - \beta\gamma F^{13} = \gamma \left(\frac{E_x}{\kappa c} - \beta B_y \right) \\
 \frac{E'_y}{\kappa c} &= F'^{20} = L^2{}_\sigma L^0{}_\lambda F^{\sigma\lambda} = \gamma F^{20} - \beta\gamma F^{23} = \gamma \left(\frac{E_y}{\kappa c} + \beta B_x \right) \\
 \frac{E'_z}{\kappa c} &= F'^{30} = L^3{}_\sigma L^0{}_\lambda F^{\sigma\lambda} = (-\beta\gamma)^2 F^{03} + \gamma^2 F^{30} = \gamma^2 (1 - \beta^2) \frac{E_z}{\kappa c} = \frac{E_z}{\kappa c} \\
 B'_x &= F'^{32} = L^3{}_\sigma L^2{}_\lambda F^{\sigma\lambda} = -\beta\gamma F^{02} + \gamma F^{32} = \gamma \left(\frac{E_y}{\kappa c} + B_x \right) \\
 B'_y &= F'^{13} = L^1{}_\sigma L^3{}_\lambda F^{\sigma\lambda} = -\beta\gamma F^{10} + \gamma F^{13} = \gamma \left(-\frac{E_x}{\kappa c} + B_y \right) \\
 B'_z &= F'^{21} = L^2{}_\sigma L^1{}_\lambda F^{\sigma\lambda} = F^{21} = B_z.
 \end{aligned} \tag{10.166}$$

Dies ist in Übereinstimmung mit den Relationen (7.175), die wir dazu verwendet hatten, das elektromagnetische Feld einer sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegenden Ladung vom Laborsystem in deren Ruhesystem zu transformieren.

Für die elektromagnetischen Potentiale (Skalarpotential ϕ und Vektorpotential \mathbf{A}) und die Quellen der elektromagnetischen Felder (Ladungsdichte ρ und Stromdichte \mathbf{j}) folgen entsprechende Ausdrücke für einen Lorentz-Boost (10.53) mit allgemeiner Orientierung von \mathbf{v} :

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}}} \\
 \frac{\phi'}{\kappa c} &= \gamma \left(\frac{\phi}{\kappa c} - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A} \right) \\
 \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A} \right) \frac{\mathbf{v}}{c} - \gamma \left(\frac{\phi}{\kappa c} \right) \frac{\mathbf{v}}{c} \\
 c\rho' &= \gamma \left(c\rho - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{j} \right) \\
 \mathbf{j}' &= \mathbf{j} + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{j} \right) \frac{\mathbf{v}}{c} - \gamma (c\rho) \frac{\mathbf{v}}{c}.
 \end{aligned} \tag{10.167}$$

Für die elektromagnetischen Felder folgt (nach entsprechend längerer Rechnung)

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

dann

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{E}'}{\kappa c} &= \gamma \left(\frac{\mathbf{E}}{\kappa c} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B} \right) - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{\mathbf{E}}{\kappa c} \right) \frac{\mathbf{v}}{c} \\ \mathbf{B}' &= \gamma \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \frac{\mathbf{E}}{\kappa c} \right) - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{B} \right) \frac{\mathbf{v}}{c}.\end{aligned}\quad (10.168)$$

Alle gestrichenen Größen beziehen sich auf das Inertialsystem S' , alle ungestrichenen auf das Inertialsystem S . Also z.B. $\mathbf{A}' = \mathbf{A}'(\mathbf{r}', t')$, aber $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Der Koordinatenursprung des Inertialsystems S' bewegt sich vom Inertialsystem S aus betrachtet mit Geschwindigkeit \mathbf{v} . Dann besteht zwischen den kartesischen Koordinaten (\mathbf{r}', t') und den kartesischen Koordinaten (\mathbf{r}, t) eines Ereignisses (z.B. ein Lichtblitz), einmal von S aus betrachtet und einmal von S' aus betrachtet, der durch die Formeln des Lorentz-Boost (10.21) gegebene Zusammenhang.

10.5 Relativistisches Ohmsches Gesetz

Im *Ruhesystem* S' eines Leiters mit Gleichstromleitfähigkeit σ_0 lautet das Ohmsche Gesetz

$$\mathbf{j}'(\mathbf{r}', t') = \sigma_0 \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t'). \quad (10.169)$$

Bewegt sich der Leiter mit Geschwindigkeit \mathbf{v} in einem äußeren elektromagnetischen Feld relativ zu einem Inertialsystem S , so ist die *relativistische Verallgemeinerung des Ohmschen Gesetzes* durch den Ausdruck

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) - \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v} = \sigma_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}}} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right] \frac{\mathbf{v}}{c} \right] \quad (10.170)$$

gegeben. Der Term $\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}$ ist anschaulich, denn er beschreibt den Konvektionstrom, der natürlich nicht dissipativ ist.

Zum Beweis von (10.170) verwenden wir die in (10.168) und (10.167) hergeleiteten Transformationsgesetze und schreiben

$$\underbrace{\mathbf{j} + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{j} \right) \frac{\mathbf{v}}{c} - \gamma(c\rho) \frac{\mathbf{v}}{c}}_{\equiv \mathbf{j}'} = \sigma_0 \cdot \underbrace{\left[\gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E} \right) \frac{\mathbf{v}}{c} \right]}_{\equiv \mathbf{E}'}. \quad (10.171)$$

10.5 Relativistisches Ohmsches Gesetz

Es ist nützlich, die folgenden Identitäten zu verwenden:

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= \frac{1}{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}} \\ \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2} &= \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \gamma - 1 \\ \hat{\mathbf{v}} &= \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \\ \hat{\mathbf{v}}^T \hat{\mathbf{v}} &= \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = 1 \\ [\hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T] \hat{\mathbf{v}} &= \hat{\mathbf{v}} \\ [\mathbf{1} + (\gamma - 1) \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T] \hat{\mathbf{v}} &= \hat{\mathbf{v}} + (\gamma - 1) \hat{\mathbf{v}} = \gamma \hat{\mathbf{v}}.\end{aligned}$$

Dann schreiben wir für die linke Seite

$$\begin{aligned}\mathbf{j}' &= \mathbf{j} + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{j}\right) \frac{\mathbf{v}}{c} - \gamma(c\rho) \frac{\mathbf{v}}{c} \\ &= \mathbf{j} + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2} (\hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T) \mathbf{j} - \gamma\rho\mathbf{v} \\ &= [\mathbf{1} + (\gamma - 1) \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T] (\mathbf{j} - \rho\mathbf{v})\end{aligned}\tag{10.172}$$

und für die rechte Seite wegen $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \equiv 0$ entsprechend:

$$\begin{aligned}\sigma_0 \mathbf{E}' &= \sigma_0 \left[\gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E}\right) \frac{\mathbf{v}}{c} \right] \\ &= \sigma_0 \left\{ \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \right] \frac{\mathbf{v}}{c} \right\} \\ &= \sigma_0 [\gamma \mathbf{1} - (\gamma - 1) \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T] (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).\end{aligned}\tag{10.173}$$

Folglich

$$[\mathbf{1} + (\gamma - 1) \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T] (\mathbf{j} - \rho\mathbf{v}) = \sigma_0 [\gamma \mathbf{1} - (\gamma - 1) \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T] (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})\tag{10.174}$$

und weiter

$$\mathbf{j} - \rho\mathbf{v} = \sigma_0 [\mathbf{1} + (\gamma - 1) \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T]^{-1} [\gamma \mathbf{1} - (\gamma - 1) \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T] (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Nun gilt

$$\begin{aligned}
 & \left[\mathbf{1} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T \right] \left[\mathbf{1} + (\gamma - 1) \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T \right] & (10.175) \\
 &= \mathbf{1} + \left[\left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) + (\gamma - 1) + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) (\gamma - 1) \right] \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T \\
 &= \mathbf{1} + \underbrace{\left[\left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) + (\gamma - 1) + (1 - \gamma) - \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \right]}_{\equiv 0} \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T \\
 &= \mathbf{1},
 \end{aligned}$$

d.h. die inverse Matrix ist gegeben zu

$$\left[\mathbf{1} + (\gamma - 1) \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T \right]^{-1} = \mathbf{1} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T. \quad (10.176)$$

Also folgt jetzt

$$\begin{aligned}
 & \left[\mathbf{1} + (\gamma - 1) \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T \right]^{-1} \left[\gamma \mathbf{1} - (\gamma - 1) \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T \right] & (10.177) \\
 &= \left[\mathbf{1} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T \right] \left[\gamma \mathbf{1} - (\gamma - 1) \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T \right] \\
 &= \gamma \mathbf{1} + \left[\left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \gamma - (\gamma - 1) - \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) (\gamma - 1) \right] \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T \\
 &= \gamma \mathbf{1} + \left[\left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) - (\gamma - 1) \right] \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T \\
 &= \gamma \mathbf{1} + \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma \right) \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T \\
 &= \gamma \left[\mathbf{1} + \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T \right] \\
 &= \gamma \left(\mathbf{1} - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2} \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}^T \right) \\
 &= \gamma \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{v}}{c} \otimes \frac{\mathbf{v}^T}{c} \right).
 \end{aligned}$$

10.6 Lagrange- und Hamilton-Formalismus für geladene Teilchen

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{j} - \rho \mathbf{v} &= \sigma_0 \gamma \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{v}}{c} \otimes \frac{\mathbf{v}^T}{c} \right) (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \\ &= \sigma_0 \gamma \left[\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} - \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E} \right) \frac{\mathbf{v}}{c} \right], \end{aligned} \quad (10.178)$$

was zu zeigen war.

Der Konvektionstrom $\rho \mathbf{v}$ spielt für das Innere eines Metalls eigentlich keine Rolle, da im *Innern* eines guten Leiters immer in sehr guter Näherung $\rho(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ gilt, sofern die relevante Zeitskala für Ladungsdichte-Fluktuationen *langsam* gegenüber der inversen Plasmafrequenz ist. Im nicht relativistischen Grenzfall geht (10.178) über in das zuvor erhaltene Ergebnis (4.112) für bewegte Ohmsche Leiter.

10.6 Lagrange- und Hamilton-Formalismus für geladene Teilchen

Wir betrachten jetzt *vorgegebene* elektromagnetische Felder $\mathbf{E}(r, t)$ und $\mathbf{B}(r, t)$ in einem *Inertialsystem* S . Ein geladenes Teilchen mit Masse m und Ladung q , das sich mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t)$ relativ zu S bewegt, erfährt dann für nicht relativistische Geschwindigkeit $|\mathbf{v}| \ll c$ eine Beschleunigung, die durch die Lorentz-Kraft (1.5) gegeben ist (SI-Einheiten, $\kappa = 1$):

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = q \mathbf{E}[\mathbf{r}(t), t] + q \mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}[\mathbf{r}(t), t]. \quad (10.179)$$

Die Lagrange-Funktion, die dieser Bewegungsgleichung über die Stationaritätsbedingung des Wirkungsfunktional

$$S[\mathbf{r}(\cdot); t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} dt L[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t] \quad (10.180)$$

bzgl. einer Variation $\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(t) + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(t)$ der tatsächlichen Teilchenbahn $\mathbf{r}(t)$ zugeordnet ist, lautet

$$L[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t] = \frac{m}{2} \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t) - q\phi[\mathbf{r}(t), t] + q \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{A}[\mathbf{r}(t), t], \quad (10.181)$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

wobei gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) & (10.182) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}$$

Das Wirkungsintegral (10.180) ist ein *Funktional* der *Teilchenbahn* $\mathbf{r}(t)$. Die tatsächliche Teilchenbahn $\mathbf{r}(t)$ ist diejenige, die das Wirkungsintegral $S[\mathbf{r}(\cdot); t_1, t_2]$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t_1) &\stackrel{!}{=} \mathbf{r}^{(1)} & (10.183) \\ \mathbf{r}(t_2) &\stackrel{!}{=} \mathbf{r}^{(2)}\end{aligned}$$

stationär macht, d.h. die wahre Teilchenbahn $\mathbf{r}(t)$ ist aus der *Forderung* zu bestimmen, dass bzgl. einer benachbarten Trajektorie $\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(t) + \varepsilon\boldsymbol{\eta}(t)$ mit

$$\boldsymbol{\eta}(t_1) = \mathbf{0} = \boldsymbol{\eta}(t_2) \quad (10.184)$$

gilt

$$S[\mathbf{r}(\cdot) + \varepsilon\boldsymbol{\eta}(\cdot); t_1, t_2] - S[\mathbf{r}(\cdot); t_1, t_2] \stackrel{!}{=} \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (10.185)$$

10.6 Lagrange- und Hamilton-Formalismus für geladene Teilchen

Es folgt nach dem Gesagten

$$\begin{aligned}
 & S[\mathbf{r}(\cdot) + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(\cdot); t_1, t_2] - S[\mathbf{r}(\cdot); t_1, t_2] & (10.186) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{m}{2} \left[\mathbf{v}(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} \boldsymbol{\eta}(t) \right] \cdot \left[\mathbf{v}(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} \boldsymbol{\eta}(t) \right] \right. \\
 &\quad - q\phi[\mathbf{r}(t) + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(t), t] + q \left[\mathbf{v}(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} \boldsymbol{\eta}(t) \right] \cdot \mathbf{A}[\mathbf{r}(t) + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(t), t] \\
 &\quad \left. - \frac{m}{2} \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t) + q\phi[\mathbf{r}(t), t] - q\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{A}[\mathbf{r}(t), t] \right\}
 \end{aligned}$$

$a, b \in \{x, y, z\}$, Summenkonvention beachten!

$$\begin{aligned}
 &= \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ m v_a(t) \frac{d}{dt} \eta_a(t) - q \frac{\partial \phi[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} \eta_a(t) \right. \\
 &\quad \left. + q A_a[\mathbf{r}(t), t] \frac{d}{dt} \eta_a(t) + q v_b(t) \frac{\partial A_b[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} \eta_a(t) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \{m v_a(t) + q A_a[\mathbf{r}(t), t]\} \frac{d}{dt} \eta_a(t) \right. \\
 &\quad \left. + \left[-q \frac{\partial \phi[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} + q v_b(t) \frac{\partial A_b[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} \right] \eta_a(t) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{d}{dt} \{ [m v_a(t) + q A_a[\mathbf{r}(t), t]] \eta_a(t) \} \right. \\
 &\quad \left. + \left[-q \frac{\partial \phi[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} + q v_b(t) \frac{\partial A_b[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} - \frac{d}{dt} \{m v_a(t) + q A_a[\mathbf{r}(t), t]\} \right] \eta_a(t) \right\} \\
 &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

Mit (10.184) folgt dann

$$\begin{aligned}
 & S[\mathbf{r}(\cdot) + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(\cdot); t_1, t_2] - S[\mathbf{r}(\cdot); t_1, t_2] & (10.187) \\
 &= \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ -q \frac{\partial \phi[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} + q v_b(t) \frac{\partial A_b[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} \right. \\
 &\quad \left. - m \frac{d}{dt} v_a(t) - q \frac{d}{dt} A_a[\mathbf{r}(t), t] \right\} \eta_a(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Die Stationaritätsforderung (10.185), nämlich dass der Koeffizient proportional zu ε in (10.187) gleich Null sein soll, ergibt jetzt eine Differentialgleichung für die gesuchte Bahn

$$m \frac{d}{dt} v_a(t) = -q \frac{\partial \phi[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} + q v_b(t) \frac{\partial A_b[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} - q \frac{d}{dt} A_a[\mathbf{r}(t), t]. \quad (10.188)$$

Wir schreiben mittels der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_a[\mathbf{r}(t), t] &= \frac{\partial A_a[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_b} \frac{\partial r_b(t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} A_a[\mathbf{r}(t), t] \\ &= v_b(t) \frac{\partial A_a[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_b} + \frac{\partial A_a[\mathbf{r}(t), t]}{\partial t}. \end{aligned} \quad (10.189)$$

Also

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} v_a(t) &= -q \frac{\partial \phi[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} + q v_b(t) \frac{\partial A_b[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} \\ &\quad - q v_b(t) \frac{\partial A_a[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_b} - q \frac{\partial A_a[\mathbf{r}(t), t]}{\partial t} \\ &= q \left[-\frac{\partial \phi[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} - \frac{\partial A_a[\mathbf{r}(t), t]}{\partial t} \right] \\ &\quad + q v_b(t) \left[\frac{\partial A_b[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} - \frac{\partial A_a[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_b} \right]. \end{aligned} \quad (10.190)$$

10.6 Lagrange- und Hamilton-Formalismus für geladene Teilchen

Nun gilt

$$\begin{aligned}
 a, b, c, m, n \in \{x, y, z\} \text{ ; Summenkonvention!} & \quad (10.191) \\
 v_b(t) \left(\frac{\partial A_b[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} - \frac{\partial A_a[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_b} \right) \\
 = (\delta_{am}\delta_{bn} - \delta_{an}\delta_{bm}) v_b(t) \frac{\partial A_n[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_m} \\
 = \epsilon_{abc}\epsilon_{cmn} v_b(t) \frac{\partial A_n[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_m} \\
 = \epsilon_{abc} v_b(t) \underbrace{\epsilon_{cmn} \frac{\partial A_n[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_m}}_{=B_c[\mathbf{r}(t), t]} \\
 = \epsilon_{abc} v_b(t) B_c[\mathbf{r}(t), t] \\
 = (\mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}[\mathbf{r}(t), t])_a,
 \end{aligned}$$

ferner gilt für die kartesischen Komponenten des elektrischen Feldes

$$E_a[\mathbf{r}(t), t] = -\frac{\partial \phi[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} - \frac{\partial A_a[\mathbf{r}(t), t]}{\partial t}. \quad (10.192)$$

Die gesuchte Differentialgleichung, die das Wirkungsfunktional (10.180) stationär macht, lautet demnach

$$\begin{aligned}
 m \frac{d}{dt} v_a(t) &= q \left[-\frac{\partial \phi[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} - \frac{\partial A_a[\mathbf{r}(t), t]}{\partial t} \right] \\
 &+ q v_b(t) \left[\frac{\partial A_b[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} - \frac{\partial A_a[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_b} \right] \\
 &= q E_a[\mathbf{r}(t), t] + q (\mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}[\mathbf{r}(t), t])_a \\
 a &\in \{x, y, z\} \\
 v_a(t) &= \frac{d}{dt} r_a(t).
 \end{aligned} \quad (10.193)$$

Dies sind gerade die kartesischen Komponenten der Newtonschen Bewegungsgleichung mit der Lorentz-Kraft, siehe (10.179).

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Ausgehend von der Lagrange-Funktion (10.181) erhalten wir jetzt den kanonischen Impuls für ein massives geladenen Teilchen zu

$$p_a(t) = \frac{\partial L[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t]}{\partial v_a} = mv_a(t) + qA_a[\mathbf{r}(t), t]. \quad (10.194)$$

Somit ist, wenn wir $v_a(t)$ durch die kartesischen Komponenten $p_a(t)$ und $r_b(t)$ ausdrücken,

$$v_a[\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), t] = \frac{1}{m} (p_a(t) - qA_a[\mathbf{r}(t), t]). \quad (10.195)$$

Es folgt für die Hamilton-Funktion $H[\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), t]$ als Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion $L[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t]$ der Ausdruck

$$\begin{aligned} H[\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), t] &= \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{v}[\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), t] - L[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}[\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), t], t] \quad (10.196) \\ &= p_a(t) \frac{1}{m} (p_a(t) - qA_a[\mathbf{r}(t), t]) \\ &\quad - \frac{m}{2} \frac{1}{m} (p_a(t) - qA_a[\mathbf{r}(t), t]) \frac{1}{m} (p_a(t) - qA_a[\mathbf{r}(t), t]) \\ &\quad + q\phi[\mathbf{r}(t), t] - \frac{1}{m} (p_a(t) - qA_a[\mathbf{r}(t), t]) qA_a[\mathbf{r}(t), t] \\ &= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m} \right) (p_a(t) - qA_a[\mathbf{r}(t), t]) (p_a(t) - qA_a[\mathbf{r}(t), t]) + q\phi[\mathbf{r}(t), t]. \end{aligned}$$

Die Hamilton-Funktion der klassischen Newtonschen Mechanik für ein geladenes massives Teilchen im äußeren elektromagnetischen Feld ist demnach

$$\boxed{ \begin{aligned} H[\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), t] \\ = \frac{1}{2m} (\mathbf{p}(t) - q\mathbf{A}[\mathbf{r}(t), t]) \cdot (\mathbf{p}(t) - q\mathbf{A}[\mathbf{r}(t), t]) + q\phi[\mathbf{r}(t), t]. \end{aligned} } \quad (10.197)$$

Die zugeordneten kanonischen Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} a &\in \{x, y, z\} \quad (10.198) \\ \frac{d}{dt} r_a(t) &= \frac{\partial H[\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), t]}{\partial p_a} \\ \frac{d}{dt} p_a(t) &= -\frac{\partial H[\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), t]}{\partial r_a}. \end{aligned}$$

10.6 Lagrange- und Hamilton-Formalismus für geladene Teilchen

Konkret bedeutet das im vorliegenden Fall

$$\frac{dr_a(t)}{dt} = \frac{\partial H[\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), t]}{\partial p_a} = \frac{1}{m} (p_a(t) - qA_a[\mathbf{r}(t), t]) \quad (10.199)$$

$a, b \in \{x, y, z\}$; Summenkonvention!

$$\frac{dp_a(t)}{dt} = -\frac{\partial H[\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), t]}{\partial r_a} \quad (10.200)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{m} (p_b(t) - qA_b[\mathbf{r}(t), t]) \frac{\partial A_b[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} - q \frac{\partial \phi[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} \\ &= q \frac{dr_b(t)}{dt} \frac{\partial A_b[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} - q \frac{\partial \phi[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} \\ &= q \frac{dr_b(t)}{dt} \left(\frac{\partial A_b[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} - \frac{\partial A_a[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_b} \right) + q \left(\frac{d}{dt} r_b(t) \right) \frac{\partial A_a[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_b} \\ &\quad - q \frac{\partial \phi[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} \\ &= q \frac{dr_b(t)}{dt} \left(\frac{\partial A_b[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} - \frac{\partial A_a[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_b} \right) + q \frac{d}{dt} A_a[\mathbf{r}(t), t] \\ &\quad - q \frac{\partial A_a[\mathbf{r}(t), t]}{\partial t} - q \frac{\partial \phi[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a}. \end{aligned}$$

Elementare Umstellungen liefern

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} (p_a(t) - qA_a[\mathbf{r}(t), t]) \quad (10.201) \\ &= \left(-\frac{\partial A_a[\mathbf{r}(t), t]}{\partial t} - \frac{\partial \phi[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} \right) + q \frac{dr_b(t)}{dt} \left(\frac{\partial A_b[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_a} - \frac{\partial A_a[\mathbf{r}(t), t]}{\partial r_b} \right). \end{aligned}$$

Mit (10.191) und (10.192) folgt dann unter Beachtung von (10.199) wieder die (nicht relativistische) Newtonsche Bewegungsgleichung für ein massives geladenes Teilchen, welches entsprechend der Lorentz-Kraft im äußeren elektromagnetischen Feld beschleunigt wird:

$$\begin{aligned} &a \in \{x, y, z\} \quad (10.202) \\ &\frac{d}{dt} \left(m \frac{dr_a(t)}{dt} \right) = q \left(\mathbf{E}[\mathbf{r}(t), t] + \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \wedge \mathbf{B}[\mathbf{r}(t), t] \right)_a. \end{aligned}$$

Bemerkung

In der Quantenmechanik lautet die entsprechende Bewegungsgleichung für den Ortsoperator \hat{r}_a im Heisenbergbild

$$a \in \{x, y, z\} \quad (10.203)$$

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{d\hat{r}_a(t)}{dt} \right) = q \left(\hat{\mathbf{E}}[\hat{\mathbf{r}}(t), t] + \frac{1}{2} \frac{d\hat{\mathbf{r}}(t)}{dt} \wedge \hat{\mathbf{B}}[\hat{\mathbf{r}}(t), t] - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{B}}[\hat{\mathbf{r}}(t), t] \wedge \frac{d\hat{\mathbf{r}}(t)}{dt} \right)_a .$$

Relativistische Lagrange-Funktion für ein geladenes Teilchen

Die Lagrange-Funktion (10.181) beschreibt die nicht relativistische Bewegung eines geladenen Teilchens mit Ladung q und Masse m im äußeren elektromagnetischen Feld gemäß der Newtonschen Mechanik. Um die entsprechende *relativistische* Lagrange-Funktion zu konstruieren, müssen wir das Wirkungsfunktional (10.180) zu einer Lorentz-invarianten Form abändern:

$$S^{(\text{rel})}[\mathbf{r}(\cdot); t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} dt L^{(\text{rel})}[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t] \quad (10.204)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}} - q\phi[\mathbf{r}(t), t] + q\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{A}[\mathbf{r}(t), t] \right]$$

$$v_a(t) = \frac{d}{dt} r_a(t)$$

$$a \in \{x, y, z\} .$$

Nun besteht zwischen den Komponenten der Geschwindigkeit $v_a(t)$, einerseits, und der in (10.66) definierten Eigenzeit τ bzw. der in (10.71) definierten Weltgeschwin-

10.6 Lagrange- und Hamilton-Formalismus für geladene Teilchen

digkeit u^μ andererseits, der Zusammenhang

$$\begin{aligned}
 \mu &\in \{0, 1, 2, 3\} & (10.205) \\
 u^\mu(\tau) &= \frac{dx^\mu[t(\tau)]}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\
 \frac{dt}{d\tau} &= \gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}}} \\
 u^0(\tau) &= \frac{d}{d\tau}(ct) = c \frac{dt}{d\tau} = \gamma c \\
 a &\in \{1, 2, 3\} \equiv \{x, y, z\} \\
 u^a(\tau) &= \frac{dx^a}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma v_a(t).
 \end{aligned}$$

Unter Beachtung des Minuszeichens bei den kovarianten Komponenten,

$$A_\mu = \left(\frac{\phi}{c}, -A_x, -A_y, -A_z \right)_\mu,$$

schreiben wir jetzt

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \{ -q\phi[\mathbf{r}(t), t] + q\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{A}[\mathbf{r}(t), t] \} = -q \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau u^\mu(\tau) A_\mu[x^\nu(\tau)]. \quad (10.206)$$

Der an das äußere elektromagnetische Feld koppelnde Term in der Wirkung (10.204) ist demnach manifest Lorentz-invariant.

Der kinetische Term in (10.204) ist ebenfalls manifest Lorentz-invariant:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}} \right] &= -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{dt}{d\tau} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}} \\
 &= -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau. \quad (10.207)
 \end{aligned}$$

Das Lorentz-invariante Wirkungsfunktional für ein geladenes Teilchen im äußeren elektromagnetischen Feld lautet demnach

$$S^{(\text{rel})}[\mathbf{r}(\cdot); t_1, t_2] = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \{ mc^2 + qA_\mu[x^\nu(\tau)] u^\mu(\tau) \}. \quad (10.208)$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Dem Gesagten entnehmen wir als *relativistische Lagrange-Funktion* eines massiven geladenen Teilchens, dass sich relativ zu einem Inertialsystem S in einem äußeren elektromagnetischen Feld mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ bewegt, den Ausdruck

$$\begin{aligned} L^{(\text{rel})}[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t] \\ = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}} - q\phi[\mathbf{r}(t), t] + q\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{A}[\mathbf{r}(t), t]. \end{aligned} \quad (10.209)$$

Für kleine Geschwindigkeiten $|\mathbf{v}(t)| \ll c$ ergibt sich hieraus (bis auf eine Konstante $-mc^2$) die zuvor betrachtete nichtrelativistische Lagrange-Funktion (10.181).

Die Stationaritätsbedingung des Wirkungsfunktional

$$S^{(\text{rel})}[\mathbf{r}(\cdot); t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} dt L^{(\text{rel})}[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t] \quad (10.210)$$

bzgl. einer Variation $\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(t) + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(t)$ der tatsächlichen Teilchenbahn $\mathbf{r}(t)$, wieder unter der Nebenbedingung (10.183), führt in völliger Analogie zu den im nicht relativistischen Fall angestellten Überlegungen (siehe die Rechnungen im vorigen Abschnitt) jetzt auf die *relativistische Bewegungsgleichung*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{d\mathbf{r}(t) \cdot d\mathbf{r}(t)}{c^2}}} \right) = q \left\{ \mathbf{E}[\mathbf{r}(t), t] + \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \wedge \mathbf{B}[\mathbf{r}(t), t] \right\}. \quad (10.211)$$

Skalare Multiplikation der Bewegungsgleichung (10.211) mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ eliminiert den Beitrag des magnetischen Induktionsfeldes:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}(t)}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}}} \right) &= q\mathbf{v}(t) \cdot \{ \mathbf{E}[\mathbf{r}(t), t] + \mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}[\mathbf{r}(t), t] \} \\ &= \mathbf{v}(t) \cdot q\mathbf{E}[\mathbf{r}(t), t]. \end{aligned} \quad (10.212)$$

10.6 Lagrange- und Hamilton-Formalismus für geladene Teilchen

Die linke Seite lässt sich als zeitliche Ableitung darstellen:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(t) \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{m\mathbf{v}(t)}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}}} \right] & \quad (10.213) \\
 = m\mathbf{v}(t) \cdot \left[\frac{\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}}} + \frac{\mathbf{v}(t)}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}}{c^2} \right] \\
 = m \left[\frac{\mathbf{v}(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}}} + \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}}{c^2} \right] \\
 = m \left[\mathbf{v}(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \right] \frac{\left(1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}\right) + \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\
 = m \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\
 = \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}}} \right).
 \end{aligned}$$

Wir definieren jetzt als *relativistische Bewegungsenergie* die Größe

$$\mathcal{E}_K[\mathbf{v}(t)] = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}}}. \quad (10.214)$$

Für nicht relativistische Geschwindigkeiten $|\mathbf{v}(t)| \ll c$ folgt

$$\mathcal{E}_K[\mathbf{v}(t)] \simeq mc^2 + \frac{m}{2} \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t). \quad (10.215)$$

Demnach besitzt auch ein *ruhendes* Teilchen der Masse m eine konstante Energie

$$\mathcal{E}_K[\mathbf{0}] = \mathcal{E}_0 = mc^2. \quad (10.216)$$

Diese *Ruheenergie* \mathcal{E}_0 ist für ein *einzelnes* Teilchen nicht zu beobachten, tritt aber bei Stoßprozessen in Erscheinung, bei denen sich zwei oder mehr Teilchen (am gleichen Ort) in andere umwandeln können.

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Aus (10.212) und (10.213) folgt demnach

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_K [\mathbf{v}(t)] = \mathbf{v}(t) \cdot q \mathbf{E} [\mathbf{r}(t), t]. \quad (10.217)$$

Dies ist das relativistische Analogon zur Relation (1.7). Die Änderung der Bewegungsenergie $\mathcal{E}_K [\mathbf{v}(t)]$ eines geladenen Teilchens im äußeren elektromagnetischen Feld erfolgt allein durch das elektrische Feld!

Wir schreiben die relativistische Bewegungsgleichung jetzt noch um zu

$$\begin{aligned} q \{ \mathbf{E} [\mathbf{r}(t), t] + \mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B} [\mathbf{r}(t), t] \} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m \mathbf{v}(t)}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}}} \right) \quad (10.218) \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\mathcal{E}_K [\mathbf{v}(t)]}{c^2} \mathbf{v}(t) \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{d}{dt} \mathcal{E}_K [\mathbf{v}(t)] \right) \mathbf{v}(t) + \frac{\mathcal{E}_K [\mathbf{v}(t)]}{c^2} \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \\ &= \frac{1}{c^2} \{ \mathbf{v}(t) \cdot q \mathbf{E} [\mathbf{r}(t), t] \} \mathbf{v}(t) + \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \end{aligned}$$

Elementare Umstellungen führen schließlich auf die relativistische Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} &= \mathbf{v}(t) \quad (10.219) \\ \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} &= \frac{q}{m} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}} \left[\mathbf{E} [\mathbf{r}(t), t] + \mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B} [\mathbf{r}(t), t] \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\mathbf{v}(t)}{c} \cdot \mathbf{E} [\mathbf{r}(t), t] \right) \frac{\mathbf{v}(t)}{c} \right], \end{aligned}$$

die natürlich zur ursprünglichen relativistischen Bewegungsgleichung (10.211) äquivalent ist.

Relativistische Hamilton-Funktion für ein geladenes Teilchen

Ausgehend von der relativistischen Lagrange-Funktion (10.209) berechnen wir zuerst den relativistischen kanonischen Impuls:

$$a \in \{x, y, z\} \tag{10.220}$$

$$p_a(t) = \frac{\partial L^{(\text{rel})}[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t]}{\partial v_a} = \frac{mv_a(t)}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}}} + qA_a[\mathbf{r}(t), t].$$

Auflösen nach der Geschwindigkeit $v_a(t)$ ergibt (wir lassen die Argumente t bzw. $[\mathbf{r}(t), t]$ zwecks Vereinfachung der Schreibweise weg)

$$\frac{mv_a}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}}} = p_a - qA_a. \tag{10.221}$$

Wie man leicht sieht gilt

$$\frac{\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})}{m^2c^2} \tag{10.222}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2} = \frac{\frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})}{m^2c^2}}{1 + \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})}{m^2c^2}}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2} = \frac{1}{1 + \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})}{m^2c^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} = \frac{mc}{\sqrt{m^2c^2 + (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})}}.$$

Also insgesamt

$$v_a = \frac{1}{m} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} (p_a - qA_a) = c \frac{(p_a - qA_a)}{\sqrt{m^2c^2 + (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})}}.$$

Für die relativistische kinetische Energie (10.214) eines geladenen massiven Teilchens im äußeren elektromagnetischen Feld dürfen wir dann schreiben

$$\mathcal{E}_K[\mathbf{r}, \mathbf{p}, t] = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}}} \tag{10.223}$$

$$= \sqrt{(mc^2)^2 + c^2 (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})}.$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Im nicht relativistischen Limes $|\mathbf{p} - q\mathbf{A}| \ll mc$ folgt hieraus die kinetische Energie eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld zu

$$\mathcal{E}_K [\mathbf{r}, \mathbf{p}, t] = mc^2 + \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}). \quad (10.224)$$

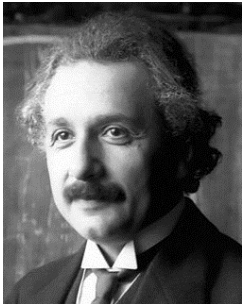
Entsprechend der kanonischen Vorschrift konstruiert man die relativistische Hamilton-Funktion $H^{(\text{rel})} [\mathbf{r}, \mathbf{p}, t]$ nun als Legendre-Transformierte der relativistischen Lagrange-Funktion (10.209)

$$\begin{aligned} H^{(\text{rel})} [\mathbf{r}, \mathbf{p}, t] &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} [\mathbf{r}, \mathbf{p}, t] - L^{(\text{rel})} [\mathbf{r}, \mathbf{v} [\mathbf{r}, \mathbf{p}, t], t] \\ &= \left\{ \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} - q\phi + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right) \right\}_{\substack{\mathbf{v}=\mathbf{v}[\mathbf{r}(t),\mathbf{p}(t),t] \\ \phi=\phi[\mathbf{r}(t),t] \\ \mathbf{A}=\mathbf{A}[\mathbf{r}(t),t]}} \\ &= mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) + q\phi \\ &= mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} + \frac{1}{m} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) + q\phi \\ &= \frac{1}{m} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} [m^2 c^2 + (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})] + q\phi \\ &= c \frac{m^2 c^2 + (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})}{\sqrt{m^2 c^2 + (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})}} + q\phi \\ &= \sqrt{(mc^2)^2 + c^2 (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})} + q\phi. \end{aligned} \quad (10.225)$$

Die *relativistische Hamilton-Funktion* eines geladenen massiven Teilchens im äußeren elektromagnetischen Feld lautet demnach

$$\begin{aligned} H^{(\text{rel})} [\mathbf{r}, \mathbf{p}, t] &= \mathcal{E}_K [\mathbf{r}, \mathbf{p}, t] + q\phi [\mathbf{r}, t] \\ &= \sqrt{(mc^2)^2 + c^2 (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})} + q\phi [\mathbf{r}, t]. \end{aligned} \quad (10.226)$$

10.7 Relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichungen



Albert Einstein
(1879–1955)

Albert Einstein revolutionierte im Jahr 1905 die moderne Physik durch die Einsicht, dass die Invarianz physikalischer Gesetze unter Lorentz-Transformationen ein

10.7 Relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichungen

ganz *allgemeines* Prinzip ist, dessen Gültigkeitsbereich nicht auf die Elektrodynamik beschränkt ist. Nach Einstein müssen deshalb auch die Gesetze der Mechanik von Newton so abgeändert werden, dass diese immer Lorentz-invariant sind. Ein Hinweis darauf, wie das zu machen ist, wird durch die in (10.211) hergeleitete relativistische Bewegungsgleichung für ein Teilchen mit Ladung q und Masse m im äußeren elektromagnetischen Feld gegeben. Mit der Definition

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}}} & (10.227) \\ \mathbf{p}^{(\text{rel})}(t) &= m\gamma(t) \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\end{aligned}$$

als relativistischer Verallgemeinerung der Beziehung zwischen Impuls und Geschwindigkeit für *ein* Teilchen lautet die betreffende Bewegungsgleichung (10.211) nun

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}^{(\text{rel})}(t) = q (\mathbf{E}[\mathbf{r}(t), t] + \mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}[\mathbf{r}(t), t]). \quad (10.228)$$

Offensichtlich ist $\frac{d}{dt} \mathbf{p}^{(\text{rel})}$ die vom äußeren elektromagnetischen Feld auf das Teilchen ausgeübte Kraft. Die dabei an das Teilchen abgegebene *Leistung* ist gleich der Rate, mit der die relativistische kinetische Energie \mathcal{E}_K des Teilchens (10.214) sich zeitlich ändert, siehe (10.217):

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_K = \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{E}[\mathbf{r}(t), t]. \quad (10.229)$$

Mit den kovarianten Komponenten der Teilchenposition

$$x_\nu(t) = (ct, -r_x(t), -r_y(t), -r_z(t))_\nu \quad (10.230)$$

schreiben wir jetzt

$$\frac{d}{dt} x_a(t) = -\frac{d}{dt} r_a(t) = -v_a(t). \quad (10.231)$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned}p^0(t) &\equiv \frac{\mathcal{E}_K}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c^2}}} = m\gamma(t) c & (10.232) \\ p^a(t) &\equiv p_a^{(\text{rel})}(t) = m\gamma(t) v_a(t)\end{aligned}$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

folgt dann die Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen im äußeren elektromagnetischen Feld $F^{\mu\nu}$ in eleganter Vierer-Schreibweise zu

$$\begin{aligned} \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}; \text{ Summenkonvention!} & \quad (10.233) \\ \frac{d}{dt}p^\mu(t) = qF^{\mu\nu}\frac{d}{dt}x_\nu(t). \end{aligned}$$

Die rechte Seite entspricht für $\mu = 1, 2, 3$ den kartesischen Komponenten der Lorentz-Kraft, wie man durch explizites Einsetzen der Komponenten $F^{\mu\nu}$ des elektromagnetischen Feldtensors (10.137) leicht bestätigt:

$$\begin{aligned} a \in \{x, y, z\} & \quad (10.234) \\ \frac{d}{dt}p^0(t) &= q \left[F^{01} \frac{d}{dt}x_1(t) + F^{02} \frac{d}{dt}x_2(t) + F^{03} \frac{d}{dt}x_3(t) \right] \\ &= q \left(\frac{E_x}{c} v_x(t) + \frac{E_y}{c} v_y(t) + \frac{E_z}{c} v_z(t) \right) \\ &= \frac{\mathbf{v}(t)}{c} \cdot q\mathbf{E}[\mathbf{r}(t), t] \\ \frac{d}{dt}p^1(t) &= q \left[F^{10} \frac{d}{dt}x_0(t) + F^{12} \frac{d}{dt}x_2(t) + F^{13} \frac{d}{dt}x_3(t) \right] \\ &= q [E_x + B_z v_y(t) - B_y v_z(t)] \\ &= q [\mathbf{E} + \mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}]_x \\ \frac{d}{dt}p^2(t) &= q \left[F^{20} \frac{d}{dt}x_0(t) + F^{21} \frac{d}{dt}x_1(t) + F^{23} \frac{d}{dt}x_3(t) \right] \\ &= q [E_y - B_z v_x(t) + B_x v_z(t)] \\ &= q [\mathbf{E} + \mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}]_y \\ \frac{d}{dt}p^3(t) &= q \left[F^{30} \frac{d}{dt}x_0(t) + F^{31} \frac{d}{dt}x_1(t) + F^{32} \frac{d}{dt}x_2(t) \right] \\ &= q [E_z + B_y v_x(t) - B_x v_y(t)] \\ &= q [\mathbf{E} + \mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}]_z. \end{aligned}$$

10.7 Relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichungen

Die Kraft $\frac{d}{dt}p^\mu(t)$ und auch die Geschwindigkeit $\frac{d}{dt}x_\nu(t)$ sind allerdings keine Vierer-Vektoren, da das Differential dt auf das Inertialsystem S bezogen wird, also kein Lorentz-Skalar ist. Multiplikation mit $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$ auf beiden Seiten und Beachten der Kettenregel beseitigt diese Schwierigkeit:

$$\underbrace{\left[\frac{d}{dt} p^\mu(t) \right] \frac{dt}{d\tau}}_{= \frac{d}{d\tau} p^{(\mu)}[t(\tau)]} = q F^{\mu\nu} \underbrace{\left[\frac{d}{dt} x_\nu(t) \right] \frac{dt}{d\tau}}_{= \frac{d}{d\tau} x_\nu[t(\tau)] \equiv u_\nu(\tau)}. \quad (10.235)$$

Die Größe

$$\begin{aligned} P^\mu(\tau) &= p^\mu[t(\tau)] = m u^\mu(\tau) \\ u^\mu(\tau) &= \frac{d}{d\tau} x^\mu[t(\tau)] \end{aligned} \quad (10.236)$$

definiert den sog. *Vierer-Impuls*. Es folgt somit eine durch die Eigenzeit τ reparametrisierte Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens im äußeren elektromagnetischen Feld:

$$\boxed{m \frac{d}{d\tau} u^\mu(\tau) = q F^{\mu\nu} u_\nu(\tau)}. \quad (10.237)$$

Dies ist eine manifest Lorentz-invariante Bewegungsgleichung, da die Ladung q als individuelle Teilcheneigenschaft ein Vierer-Skalar ist. Die Größe

$$\frac{d}{d\tau} P^\mu(\tau) = m \frac{d}{d\tau} u^\mu(\tau) \quad (10.238)$$

ist ein Vierer-Vektor, dessen Komponenten für einen Massenpunkt mit Ruhemasse m den pro Eigenzeitintervall $d\tau$ zugeführten Impuls P^a bzw. die pro Eigenzeitintervall $d\tau$ zugeführte Energie $P^0 = \frac{\mathcal{E}_K}{c}$ bestimmen.

Bewegung im konstanten elektromagnetischen Feld

Für ein *konstantes* elektromagnetisches Feld $F^{\mu\nu}$ kann die exakte Lösung der Bewegungsgleichung (10.237) leicht berechnet werden. Dazu schreiben wir

$$\begin{aligned} u_\nu(\tau) &= g_{\nu\lambda} u^\lambda(\tau) \\ u^\mu(\tau) &= \frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau), \end{aligned} \quad (10.239)$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

also

$$\frac{d}{d\tau}u^\mu(\tau) = \frac{q}{m}F^{\mu\nu}g_{\nu\lambda}u^\lambda(\tau). \quad (10.240)$$

Sei \hat{C} die 4×4 -Matrix mit Elementen

$$[\hat{C}]_{\mu,\nu} = \frac{q}{m}F^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \frac{q}{m} \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{\kappa c} & \frac{E_y}{\kappa c} & \frac{E_z}{\kappa c} \\ \frac{E_x}{\kappa c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{\kappa c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{\kappa c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}_{\mu,\nu} \quad (10.241)$$

und sei $u(\tau) = \frac{d}{d\tau}x(\tau)$ ein entsprechender Spaltenvektor. Dann erhalten wir für die relativistische Bewegungsgleichung (10.237) ein System gekoppelter Matrix-Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}x(\tau) &= u(\tau) \\ \frac{d}{d\tau}u(\tau) &= \hat{C}u(\tau). \end{aligned} \quad (10.242)$$

Zu Anfangswerten $u^\mu(0)$ und $x^\mu(0)$ lautet die (formale) Lösung für ein *konstantes* elektromagnetisches Feld

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}x(\tau) &= u(\tau) = \exp(\hat{C}\tau)u(0) \\ x(\tau) - x(0) &= \int_0^\tau d\tau' \frac{d}{d\tau'}x(\tau') = \frac{\exp(\hat{C}\tau) - \hat{1}}{\hat{C}}u(0). \end{aligned} \quad (10.243)$$

Ein Beobachter im Inertialsystem S möchte gerne die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ des Teilchens parametrisiert durch die Zeitkoordinate t beschreiben. Er muss dann lediglich für jedes τ die Kurven $r_a(\tau) = x^a(\tau)$ für $a \in \{x, y, z\} \equiv \{1, 2, 3\}$ gegen $t(\tau) = \frac{x_0(\tau)}{c}$ auftragen. Das ist einfacher, als die Umkehrfunktion $\tau = \tau(t)$ aus der Forderung $\frac{x_0(\tau)}{c} \stackrel{!}{=} t$ zu berechnen.

10.7 Relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichungen

Beispiel

Wir untersuchen die Bewegung eines geladenen Teilchens im *homogenen konstanten* elektrischen Feld $\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Dann gilt nach dem Gesagten

$$\hat{C} = \frac{q E_z}{m \kappa c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{C}^{-1} = \frac{1}{\frac{q E_z}{m \kappa c}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.244)$$

$$\hat{C}^2 = \hat{C} \circ \hat{C} = \left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit

$$\exp(\hat{C}\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \hat{C}^n = \hat{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau^{2m}}{(2m)!} (\hat{C}^2)^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tau^{2m+1}}{(2m+1)!} (\hat{C}^2)^m \circ \hat{C} \quad (10.245)$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right) & 0 & 0 & \sinh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right) & 0 & 0 & \cosh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right) \end{pmatrix}$$

und weiter

$$\begin{aligned} & \hat{C}^{-1} \circ [\exp(\hat{C}\tau) - \hat{1}] \quad (10.246) \\ &= \frac{1}{\frac{q E_z}{m \kappa c}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right) - 1 & 0 & 0 & \sinh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sinh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right) & 0 & 0 & \cosh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right) - 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\frac{q E_z}{m \kappa c}} \begin{pmatrix} \sinh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right) & 0 & 0 & \cosh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right) - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cosh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right) - 1 & 0 & 0 & \sinh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Als Lösung folgt in dem Fall

$$\begin{aligned}
 x^\mu(\tau) &= x^\mu(0) + \left(\widehat{C}^{-1} \circ \left[\exp(\widehat{C}\tau) - \widehat{1} \right] \right)_{\mu,\nu} u^\nu(0) & (10.247) \\
 x^0(\tau) &= x^0(0) + \frac{\sinh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right)}{\frac{q E_z}{m \kappa c}} u^0(0) + \frac{\cosh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right) - 1}{\frac{q E_z}{m \kappa c}} u^3(0) \\
 x^1(\tau) &= x^1(0) \\
 x^2(\tau) &= x^2(0) \\
 x^3(\tau) &= x^3(0) + \frac{\cosh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right) - 1}{\frac{q E_z}{m \kappa c}} u^0(0) + \frac{\sinh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right)}{\frac{q E_z}{m \kappa c}} u^3(0).
 \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit des Teilchens vom Bezugssystem S aus gesehen ist

$$v_z(t) = \frac{d}{dt} r_z(t) = \frac{\frac{d}{d\tau} x^3(\tau)}{\frac{d}{d\tau} t(\tau)} = c \frac{\frac{d}{d\tau} x^3(\tau)}{\frac{d}{d\tau} x^0(\tau)} = c \frac{u^3(\tau)}{u^0(\tau)}. \quad (10.248)$$

Zur Zeit $t=0$ war das Teilchen in Ruhe:

$$\begin{aligned}
 x^\mu(0) &= 0 & (10.249) \\
 u^0(0) &= c \\
 u^3(0) &= 0.
 \end{aligned}$$

Somit folgt als Lösung (in parametrischer Darstellung)

$$\begin{aligned}
 ct = x^0(\tau) &= \frac{\sinh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right)}{\frac{q E_z}{m \kappa c}} c & (10.250) \\
 r_x &= 0 \\
 r_y &= 0 \\
 r_z[t(\tau)] = x^3(\tau) &= \frac{\cosh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right) - 1}{\frac{q E_z}{m \kappa c}} c.
 \end{aligned}$$

10.7 Relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichungen

Schließlich

$$\frac{v_z(t)}{c} = \tanh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right) = \frac{\sinh\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right)}{\sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{q E_z}{m \kappa c} \tau\right)}} = \frac{\frac{q E_z}{m \kappa} t}{\sqrt{1 + \left(\frac{q E_z}{m \kappa} t\right)^2}} \quad (10.251)$$

$$r_z(t) = c \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{q E_z}{m \kappa} t\right)^2} - 1}{\frac{q E_z}{m \kappa}}.$$

Die Geschwindigkeit des Teilchens nähert sich demnach für $t \rightarrow \infty$ der Lichtgeschwindigkeit c an, ohne diese je zu überschreiten! Für kleine Zeiten $|\frac{q E_z}{m \kappa} t| \ll 1$ nimmt der Abstand $r_z(t) - r_z(0)$ unter dem Einfluss der konstanten Kraft qE_z quadratisch zu, so wie beim klassischen „Fallgesetz“ der Newtonschen Mechanik.

Äquivalenz von Energie und Masse

Dem allgemeinen Gedankengang von Albert Einstein beim Aufbau der relativistischen Mechanik folgend erwarten wir im *Ruhesystem* S' eines Massenpunkts (Teilchen) für die Komponenten seines Vierer-Impulses P'^μ die Darstellung

$$P'^0 = \frac{\mathcal{E}_0}{c}, \quad P'^1 = 0, \quad P'^2 = 0, \quad P'^3 = 0, \quad (10.252)$$

wobei \mathcal{E}_0 die Ruheenergie bezeichnet. Dieses Inertialsystem S' ist mit einer speziellen Boost-Transformation (10.52), mit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ als Geschwindigkeit des Teilchens, mit demjenigen Inertialsystem S verknüpft, von dem aus betrachtet sich das Teilchen mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ bewegt:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}} \quad (10.253)$$

$$P'^\mu = L^\mu{}_\nu P^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\frac{v}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}_{\mu,\nu} P^\nu.$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Umkehrung liefert

$$P^\mu = \left(\begin{array}{cccc} \gamma & 0 & 0 & +\frac{v}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{array} \right)_{\mu,\nu} P^{\nu}. \quad (10.254)$$

Also

$$P^0 = \gamma \frac{\mathcal{E}_0}{c}, \quad P^1 = 0, \quad P^2 = 0, \quad P^3 = \frac{\mathcal{E}_0}{c^2} \gamma v. \quad (10.255)$$

Die Beziehung gilt, wie man leicht zeigt, auch für eine *allgemein* gewählte Geschwindigkeitsrichtung $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z$:

$$\begin{aligned} P^0 &= \frac{\mathcal{E}_0}{c^2} \gamma c \\ P^a &= \frac{\mathcal{E}_0}{c^2} \gamma v_a \\ a &\in \{1, 2, 3\} \equiv \{x, y, z\}. \end{aligned} \quad (10.256)$$

Für nicht relativistische Geschwindigkeiten $\gamma \simeq 1$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} v &\ll c \\ P^a &= \frac{\mathcal{E}_0}{c^2} v_a + \dots \end{aligned} \quad (10.257)$$

In dem Fall sollte der Impuls P^a mit dem Impuls der Newtonschen Mechanik für eine Punktmasse übereinstimmen, also

$$P^a = \frac{\mathcal{E}_0}{c^2} v_a \stackrel{!}{=} m v_a. \quad (10.258)$$

Hieraus folgt die berühmte Gleichung von Albert Einstein

$$\boxed{\mathcal{E}_0 = m c^2.} \quad (10.259)$$

Die Ruheenergie eines Massenpunktes ist proportional zu seiner Masse. Dies ist eine fundamentale Erkenntnis der modernen Physik. Beobachtbar sind Differenzen von Ruhemassen bei (inelastischen) Streuprozessen (an ein und demselben Raumzeitpunkt!), bei denen *mehrere* Teilchen beteiligt sind. Dies ist z.B. der Fall bei der

10.7 Relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichungen

stellare Kernfusion. Ist die Masse der bei der Fusion entstandenen Kerne oder Teilchen geringer als die Summe der Masse der Ausgangskerne, wird die Massendifferenz Δm in Form von Energie $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ freigesetzt (als kinetische Energie der Reaktionsprodukte und als Strahlungsenergie). In der Sonne fusionieren jede Sekunde 5.64×10^{11} kg Wasserstoff zu Deuterium und (über weitere verschiedene Zyklen) schließlich zu Helium.

Für ein Teilchen der Masse m (Massenpunkt) gilt demnach im Inertialsystem S

$$\begin{aligned} P^0 &= m\gamma c \equiv \frac{\mathcal{E}_K}{c} & (10.260) \\ P^a &= m\gamma v_a \\ a &\in \{1, 2, 3\} \equiv \{x, y, z\}. \end{aligned}$$

Es folgt jetzt, ausgedrückt durch die Vierer-Geschwindigkeit

$$u^\mu = \left(\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z \right)_\mu, \quad (10.261)$$

für den *Vierer-Impuls* P^μ des Teilchens im Inertialsystem S der Ausdruck

$$P^\mu = m u^\mu. \quad (10.262)$$

Mit (10.75) impliziert dies sofort

$$P^\mu P_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = m^2 c^2, \quad (10.263)$$

d.h.

$$\begin{aligned} m^2 c^2 &= P^\mu P_\mu = \frac{\mathcal{E}_K^2}{c^2} - |\mathbf{P}|^2 & (10.264) \\ \mathbf{P} &= m\gamma \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Somit

$$\mathcal{E}_K = \sqrt{(mc^2)^2 + c^2 |\mathbf{P}|^2} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}}, \quad (10.265)$$

was mit (10.214) übereinstimmt.

Die relativistische Verallgemeinerung des Kraftgesetzes von Newton lautet

$$\frac{d}{d\tau} P^\mu(\tau) = K^\mu(\tau), \quad (10.266)$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

wobei der Vierer-Vektor

$$K^\mu = \gamma F^\mu \quad (10.267)$$

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}}}$$

die sog. *Minkowski-Kraft* ist. Um dies besser zu verstehen, betrachten wir ein Inertialsystem S und schreiben

$$a \in \{x, y, z\} \equiv \{1, 2, 3\} \quad (10.268)$$

$$\frac{d}{d\tau} P^a = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} (m\gamma v^a) = \gamma \frac{d}{dt} (m\gamma v^a).$$

Nach Kürzen des Faktors γ auf beiden Seiten folgt in der Tat

$$\frac{d}{dt} (m\gamma v^a) = F^a. \quad (10.269)$$

Für nicht relativistische Geschwindigkeiten ist $\gamma \simeq 1$ und es ergibt sich Übereinstimmung mit dem Kraftgesetz von Newton.

Da die äußere Kraft F^a die Ruhemasse m des Teilchens nicht verändert, ist die Minkowski-Kraft K^μ bzgl. der Metrik (10.31) orthogonal zum Vierer-Impuls

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} (m^2 c^2) & (10.270) \\ &= \frac{d}{d\tau} (P^\mu P_\mu) \\ &= \left(\frac{d}{d\tau} P^\mu \right) P_\mu + P^\mu \left(\frac{d}{d\tau} P_\mu \right) \\ &= K^\mu P_\mu + P^\mu K_\mu \\ &= 2K^\mu P_\mu. \end{aligned}$$

Diese Beziehung legt die Komponente $K^0 = \gamma F^0$ der Vierer-Kraft fest:

$$\begin{aligned} 0 &= K^\mu P_\mu = K^0 P_0 - (\gamma \mathbf{F}) \cdot (m\gamma \mathbf{v}) = 0 & (10.271) \\ \Rightarrow K^0 &= \frac{(\gamma \mathbf{F}) \cdot (m\gamma \mathbf{v})}{P_0} = \frac{\mathbf{F} \cdot (\gamma \mathbf{v})}{c}. \end{aligned}$$

10.7 Relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichungen

Aus der relativistischen Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{d\tau} P^0 = K^0 \quad (10.272)$$

folgt dann

$$\frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} P^0 = \gamma(t) \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(t)}{c} \quad (10.273)$$

und weiter nach Kürzen des Faktors $\gamma(t) = \frac{dt}{d\tau}$ auf beiden Seiten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P^0 &= \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(t)}{c} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} [m\gamma(t) c^2] &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(t). \end{aligned} \quad (10.274)$$

Für eine konservative Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (10.275)$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_K[\mathbf{v}(t_1)] - \mathcal{E}_K[\mathbf{v}(t_2)] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} [m\gamma(t) c^2] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = - \int_{\mathbf{r}(t_1)}^{\mathbf{r}(t_2)} d\mathbf{r} \cdot \nabla U(\mathbf{r}) \\ &= U[\mathbf{r}(t_1)] - U[\mathbf{r}(t_2)]. \end{aligned} \quad (10.276)$$

Dies ist der Erhaltungssatz der Energie für ein relativistisches Teilchen, das sich in einem konservativen Kraftfeld bewegt:

$$\mathcal{E}_K[\mathbf{v}(t)] + U[\mathbf{r}(t)] = \text{const.} \quad (10.277)$$

10.8 Lagrange- und Hamilton-Formalismus für elektromagnetische Felder

Ein Lorentz-invariantes Wirkungsfunktional für das elektromagnetische Feld hat die Gestalt

$$\begin{aligned}
 S[A^\mu[\cdot], \partial^\nu A^\mu[\cdot]] &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' L[A^\mu(ct', \cdot), \partial^\nu A^\mu(ct', \cdot)] \\
 &= \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} c dt' \int d^3 r' \mathcal{L}[A^\mu(ct', \mathbf{r}'), \partial^\nu A^\mu(ct', \mathbf{r}')] \\
 &= \frac{1}{c} \int d^4 x' \mathcal{L}[A^\mu(x'), \partial^\nu A^\mu(x')].
 \end{aligned} \tag{10.278}$$

Gemäß (10.51) ist das Volumenelement $d^4 x'$ ein Vierer-Skalar. Die Lagrange-Dichte muss dann ebenfalls ein Vierer-Skalar sein. Variation nach den Potentialkomponenten $A^\nu(x')$ soll auf die inhomogenen Maxwell-Gleichungen führen. Es ist daher naheliegend, den folgenden Ansatz zu machen

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[A^\mu(x'), \partial^\nu A^\mu(x')] &= -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}(x') F^{\mu\nu}(x') - \kappa j^\nu(x') A_\nu(x') \\
 &= -\frac{1}{4\mu_0} [\partial_\mu A_\nu(x') - \partial_\nu A_\mu(x')] [\partial^\mu A^\nu(x') - \partial^\nu A^\mu(x')] - \kappa j^\nu(x') A_\nu(x').
 \end{aligned} \tag{10.279}$$

Hier ist $j^\mu(x')$ eine vorgegebene Ladungsdichte bzw. Stromdichte. Da jetzt die Lagrangedichte \mathcal{L} wie auch das Volumenelement $d^4 x'$ Vierer-Skalare sind, ist

$$S[A^\mu[\cdot], \partial^\nu A^\mu[\cdot]] = \frac{1}{c} \int d^4 x' \left[-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}(x') F^{\mu\nu}(x') - \kappa j^\nu(x') A_\nu(x') \right] \tag{10.280}$$

ein Lorentz-invariantes Wirkungsfunktional (bzgl. der eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen).

Die Bestimmungsgleichung für das physikalisch realisierte Vierer-Potential $A^\mu(x')$ zur vorgegebenen Vierer-Stromdichte $j^\mu(x')$ ergibt sich dann aus der Forderung der Stationarität des Wirkungsfunktionals $S[A^\mu[\cdot], \partial^\nu A^\mu[\cdot]]$ unter einer Variation $\tilde{A}^\mu(x') = A^\mu(x') + \varepsilon a^\mu(x')$, d.h. es ist gefordert

$$S[A^\mu[\cdot] + \varepsilon a^\mu[\cdot], \partial^\nu A^\mu[\cdot] + \varepsilon \partial^\nu a^\mu[\cdot]] - S[A^\mu[\cdot], \partial^\nu A^\mu[\cdot]] \stackrel{!}{=} \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{10.281}$$

10.8 Lagrange- und Hamilton-Formalismus für elektromagnetische Felder

Der Koeffizient proportional zum kleinen Parameter ε muss also für das physikalisch realisierte Vierer-Potential $A^\mu(x')$ gleich Null sein, woraus man die gesuchte Bestimmungsgleichung für $A^\mu(x')$ abliest.

$$\begin{aligned}
 \Delta S(\varepsilon) &= S[A^\mu[\cdot] + \varepsilon a^\mu[\cdot], \partial^\nu A^\mu[\cdot] + \varepsilon \partial^\nu a^\mu[\cdot]] - S[A^\mu[\cdot], \partial^\nu A^\mu[\cdot]] \quad (10.282) \\
 &= \frac{1}{c} \int d^4x' \left\{ -\frac{1}{4\mu_0} [\partial_\mu A_\nu(x') - \partial_\nu A_\mu(x') + \varepsilon \partial_\mu a_\nu(x') - \varepsilon \partial_\nu a_\mu(x')] \right. \\
 &\quad \times [\partial^\mu A^\nu(x') - \partial^\nu A^\mu(x') + \varepsilon \partial^\mu a^\nu(x') - \varepsilon \partial^\nu a^\mu(x')] \\
 &\quad - \kappa j^\nu(x') [A_\nu(x') + \varepsilon a_\nu(x')] \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4\mu_0} [\partial_\mu A_\nu(x') - \partial_\nu A_\mu(x')] [\partial^\mu A^\nu(x') - \partial^\nu A^\mu(x')] + \kappa j^\nu(x') A_\nu(x') \right\} \\
 &= \frac{\varepsilon}{c} \int d^4x' \left\{ -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu}(x') [\partial^\mu a^\nu(x') - \partial^\nu a^\mu(x')] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4\mu_0} [\partial_\mu a_\nu(x') - \partial_\nu a_\mu(x')] F^{\mu\nu}(x') - \kappa j^\nu(x') a_\nu(x') \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \frac{\varepsilon}{c} \int d^4x' \left\{ -\frac{1}{2\mu_0} [\partial_\mu a_\nu(x') - \partial_\nu a_\mu(x')] F^{\mu\nu}(x') - \kappa j^\mu(x') a_\mu(x') \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

Der Wert einer Summe ändert sich nicht, wenn der Summationsindex unbenannt wird:

$$F^{\mu\nu}(x') \partial_\nu a_\mu(x') = F^{\nu'\mu'}(x') \partial_{\mu'} a_{\nu'}(x'). \quad (10.283)$$

Mit $F^{\nu'\mu'} = -F^{\mu'\nu'}$ folgt dann

$$\begin{aligned}
 \Delta S(\varepsilon) &= \frac{\varepsilon}{c} \int d^4x' \left[-\frac{1}{\mu_0} \partial_\mu a_\nu(x') F^{\mu\nu}(x') - \kappa j^\nu(x') a_\nu(x') \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (10.284) \\
 &= \frac{\varepsilon}{c} \int d^4x' \left\{ -\partial_\mu [a_\nu(x') F^{\mu\nu}(x')] + \frac{1}{\mu_0} [\partial_\mu F^{\mu\nu}(x') - \kappa \mu_0 j^\nu(x')] a_\nu(x') \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

Der erste Term in der geschweiften Klammer führt mit dem Satz von Gauß auf einen Oberflächenterm, der im vierdimensionalen Raum aufgrund entsprechender Randbedingungen für die Felder $a_\nu(x')$ im Unendlichen gleich Null ist. Die Forderung

$$\Delta S(\varepsilon) \stackrel{!}{=} \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (10.285)$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

impliziert dann die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \kappa\mu_0 j^\nu(x). \quad (10.286)$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (10.287)$$

sind wegen der aus der Darstellung

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) \quad (10.288)$$

folgenden Antisymmetrie $F^{\mu\nu}(x) = -F^{\nu\mu}(x)$ identisch erfüllt (Bianchi-Identität).

Im kanonischen Formalismus gelangt man von der Lagrange-Funktion $L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ eines Teilchens zur Hamilton-Funktion $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ durch eine Legendre-Transformation, in dem man anstelle der drei Geschwindigkeitskomponenten $v_a(t) = \frac{d}{dt}r_a(t)$ eines Teilchens nun die Komponenten $p_a(t) = \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial v_a}$ des kanonischen Impulses als Variablen einführt, siehe (10.194). Das im vorigen Abschnitt betrachtete Lagrange-Funktional

$$L[A^\mu(ct, \cdot), \partial^\nu A^\mu(ct, \cdot)] = \int d^3r' \mathcal{L}[A^\mu(x'), \partial^\nu A^\mu(x')] \quad (10.289)$$

des elektromagnetischen Feldes ist vom Vierer-Potential A^μ , den räumlichen Gradienten $\partial^a A^\mu$ sowie den Zeitableitungen $\partial^0 A^\mu$ abhängig. Es ist daher naheliegend, als Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes die Größe

$$\begin{aligned} \mu &\in \{0, 1, 2, 3\} \\ \pi_\mu(x) &= \frac{\partial L}{\partial [\partial^0 A^\mu(x)]} \end{aligned} \quad (10.290)$$

zu betrachten. Allerdings ist $\pi_0 \equiv 0$, denn im Funktional \mathcal{L} kommt $\partial^0 A^0$ gar nicht

10.8 Lagrange- und Hamilton-Formalismus für elektromagnetische Felder

vor! Es folgt dann mit $x = (ct, \mathbf{r})$ und $x' = (ct, \mathbf{r}')$ für den kanonischen Impuls

$$\begin{aligned}
 a &\in \{1, 2, 3\} & (10.291) \\
 \pi_a(x) &= \frac{\partial}{\partial [\partial^0 A^a(x)]} \int d^3 r' \left[-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}(x') F^{\mu\nu}(x') - \kappa j^\nu(x') A_\nu(x') \right] \\
 &= -\frac{1}{\mu_0} F_{0a}(x) \\
 \pi^a(x) &= \frac{\partial}{\partial [\partial_0 A_a(x)]} \int d^3 r' \left[-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}(x') F^{\mu\nu}(x') - \kappa j^\nu(x') A_\nu(x') \right] \\
 &= -\frac{1}{\mu_0} F^{0a}(x).
 \end{aligned}$$

Unter Beachtung von

$$F_{0a} = \partial_0 A_a - \partial_a A_0 = \frac{E_a}{\kappa c} \quad (10.292)$$

folgt somit

$$\begin{aligned}
 \partial_0 A_a &= F_{0a} + \partial_a A_0 = -\mu_0 \pi_a + \partial_a A_0 & (10.293) \\
 \partial^0 A^a &= F^{0a} + \partial^a A^0 = -\mu_0 \pi^a + \partial^a A^0.
 \end{aligned}$$

Die Komponenten des kanonischen Impulses π_a sind demnach als entsprechende Komponenten der elektrischen Feldstärke gegeben:

$$\begin{aligned}
 a &\in \{1, 2, 3\} \equiv \{x, y, z\} & (10.294) \\
 \pi_a &= \frac{E_a}{\mu_0 \kappa c} \\
 \pi^a &= -\frac{E_a}{\mu_0 \kappa c}.
 \end{aligned}$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Gemäß der kanonischen Vorschrift folgt die Hamilton-Dichte nun zu

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} [A^\mu (x), \partial^a A^\mu (x), \pi_a (x)] & \quad (10.295) \\
 &= \pi_a \left(\partial^0 A^a \right) - \mathcal{L} [A^\mu (x), \partial^\nu A^\mu (x)]_{\partial^0 A^a \rightarrow (-\mu_0 \pi^a + \partial^a A^0)} \\
 &= \pi_a \left(\partial^0 A^a \right) + \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \kappa j^\nu A_\nu \\
 &= \pi_a \left(\partial^0 A^a \right) + \frac{1}{2\mu_0} F_{a0} F^{a0} + \frac{1}{4\mu_0} F_{ab} F^{ab} + \kappa j^\nu A_\nu \\
 &= \pi_a \left(\partial^0 A^a \right) + \frac{\mu_0}{2} \pi_a \pi^a + \frac{1}{4\mu_0} F_{ab} F^{ab} + \kappa j^\nu A_\nu \\
 &= \pi_a \left(-\mu_0 \pi^a + \partial^a A^0 \right) + \frac{\mu_0}{2} \pi_a \pi^a + \frac{1}{4\mu_0} F_{ab} F^{ab} + \kappa j^\nu A_\nu \\
 &= -\frac{\mu_0}{2} \pi_a \pi^a + \pi_a \partial^a A^0 + \frac{1}{4\mu_0} F_{ab} F^{ab} + \kappa j^\nu A_\nu.
 \end{aligned}$$

Es gilt unter Beachtung von (A.4):

$$-\frac{\mu_0}{2} \pi_a \pi^a = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_a E_a}{\kappa^2 c^2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}. \quad (10.296)$$

Ebenso

$$\begin{aligned}
 a &\in \{x, y, z\} \quad (10.297) \\
 \pi_a \partial^a A^0 &= \frac{E_a}{\mu_0 \kappa c} \frac{\partial}{\partial r_a} \frac{\phi}{\kappa c} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \nabla \phi
 \end{aligned}$$

und zu guter Letzt

$$\begin{aligned}
 a, b &\in \{x, y, z, \} \quad (10.298) \\
 \frac{1}{4\mu_0} F_{ab} F^{ab} &= \frac{1}{4\mu_0} \left[(B_z^2 + B_y^2) + (B_z^2 + B_x^2) + (B_y^2 + B_x^2) \right] = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}.
 \end{aligned}$$

Mit

$$\kappa j^\nu A_\nu = \kappa \left(j^0 A_0 - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right) = \kappa \left(c \varrho \frac{1}{\kappa c} \phi - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right) = \varrho \phi - \kappa \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \quad (10.299)$$

10.8 Lagrange- und Hamilton-Formalismus für elektromagnetische Felder

folgt somit für die Hamilton-Dichte des elektromagnetischen Feldes

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[A^\mu(x), \partial^a A^\mu(x), \pi_a(x)] & \quad (10.300) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \kappa \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ & \quad + \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, t) + \varrho(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Das Coulomb-Gesetz besagt nun

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (10.301)$$

folglich

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, t) + \varrho(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t) & \quad (10.302) \\ &= \varepsilon_0 [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, t) + \phi(\mathbf{r}, t) \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \\ &= \varepsilon_0 \operatorname{div} [\phi(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]. \end{aligned}$$

Folglich ist die Energie H des elektromagnetischen Feldes in Gegenwart vorgegebener Stromdichten $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ und Ladungsverteilungen $\varrho(\mathbf{r}, t)$ gleich dem Volumenintegral der Hamilton-Dichte

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 r' \mathcal{H}[A^\mu(\mathbf{r}', t), \partial^a A^\mu(\mathbf{r}', t), \pi_a(\mathbf{r}', t)] \quad (10.303) \\ &= \int d^3 r' \left\{ \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \right. \\ & \quad \left. - \kappa \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) + \varepsilon_0 \operatorname{div} [\phi(\mathbf{r}', t) \mathbf{E}(\mathbf{r}', t)] \right\} \end{aligned}$$

Der letzte Term in der geschweiften Klammer ist aufgrund des Satzes von Gauß äquivalent zu einem Oberflächenintegral, das wir gleich Null setzen.

Auf den ersten Blick wirkt es befremdlich, dass die Coulomb-Wechselwirkung der Ladungsverteilung $\varrho(\mathbf{r}, t)$ in dem Ausdruck für die Energie des Feldes nicht manifest in Erscheinung tritt. Dieser Beitrag ist aber tatsächlich bereits im Quadrat der elektrischen Feldstärke berücksichtigt. Um dies einzusehen, zerlegen wir das Vektorfeld der elektrischen Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ in einen *transversalen* und einen *longitudinalen* Anteil:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(\text{tr})}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}, t). \quad (10.304)$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Der transversale Anteil ist *quellenfrei*:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}^{(\text{tr})}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (10.305)$$

Der longitudinale Anteil ist *wirbelfrei*:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}. \quad (10.306)$$

Dann gilt aufgrund des Coulomb-Gesetzes

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{div} \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\varrho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0}. \quad (10.307)$$

Aufgrund von (10.306) existiert ein skalares Potential $\phi(\mathbf{r}, t)$ mit der Eigenschaft

$$\mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}, t) = -\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}, t), \quad (10.308)$$

d.h. die vorgegebene Ladungsdichte $\varrho(\mathbf{r}, t)$ legt den longitudinalen Anteil $\mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}, t)$ der Feldstärke als Lösung der Poisson-Gleichung fest

$$-\nabla_{\mathbf{r}}^2\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\varrho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0}. \quad (10.309)$$

Gemäß (2.9) ist dann $\phi(\mathbf{r}, t)$ gegeben zu

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\varrho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (10.310)$$

Es folgt nach dem Gesagten

$$\begin{aligned} & \int d^3r' \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) \\ &= \int d^3r' \frac{\varepsilon_0}{2} [\mathbf{E}^{(\text{tr})}(\mathbf{r}', t) + \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}', t)] \cdot [\mathbf{E}^{(\text{tr})}(\mathbf{r}', t) + \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}', t)] \\ &= \int d^3r' \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^{(\text{tr})}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{E}^{(\text{tr})}(\mathbf{r}', t) + \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}', t) \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon_0 \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{E}^{(\text{tr})}(\mathbf{r}', t) \right). \end{aligned} \quad (10.311)$$

10.8 Lagrange- und Hamilton-Formalismus für elektromagnetische Felder

Dabei gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\begin{aligned}
 & \int d^3r' \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{E}^{(tr)}(\mathbf{r}', t) \\
 &= \int d^3r' [-\nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}', t)] \cdot \mathbf{E}^{(tr)}(\mathbf{r}', t) \\
 &= - \int d^3r' \operatorname{div} [\phi(\mathbf{r}', t) \mathbf{E}^{(tr)}(\mathbf{r}', t)] + \int d^3r' \phi(\mathbf{r}', t) \operatorname{div} \mathbf{E}^{(tr)}(\mathbf{r}', t) \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{10.312}$$

denn der erste Term ist äquivalent zu einem Oberflächenintegral, das wir wieder gleich Null setzen. Der zweite Term ist identisch Null, da der transversale Anteil $\mathbf{E}^{(tr)}$ quellenfrei ist.

Für den Beitrag der longitudinalen Feldstärke zur Energie schreiben wir jetzt

$$\begin{aligned}
 & \int d^3r' \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}', t) \\
 &= \int d^3r' \frac{\varepsilon_0}{2} [-\nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}', t)] \cdot \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}', t) \\
 &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r' [\operatorname{div} [\phi(\mathbf{r}', t) \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}', t)] - \phi(\mathbf{r}', t) \operatorname{div} \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}', t)] \\
 &= \int d^3r' \left[-\frac{\varepsilon_0}{2} \operatorname{div} [\phi(\mathbf{r}', t) \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}', t)] + \frac{1}{2} \phi(\mathbf{r}', t) \varrho(\mathbf{r}', t) \right] \\
 &= -\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r' \operatorname{div} [\phi(\mathbf{r}', t) \mathbf{E}^{(l)}(\mathbf{r}', t)] + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \int d^3r'' \frac{\varrho(\mathbf{r}'', t) \varrho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|}.
 \end{aligned} \tag{10.313}$$

Der erste Term verschwindet wieder, da er ein Oberflächenintegral repräsentiert. Der zweite Term stellt die gesuchte *Coulomb-Wechselwirkungsenergie* einer durch die Verteilungsfunktion $\varrho(\mathbf{r}', t)$ beschriebenen Ladungswolke dar.

Wir erhalten nach dem Gesagten (falls die diskutierten Oberflächenintegrale auf dem Rand des betrachteten Volumens verschwinden) für die Energie des elektromagnetischen Feldes in Gegenwart vorgegebener Stromdichten $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ und Ladungs-

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

verteilungen $\varrho(\mathbf{r}, t)$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} H &= \int d^3r' \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) - \kappa \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) \right] \\ &= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \int d^3r'' \frac{\varrho(\mathbf{r}', t) \varrho(\mathbf{r}'', t)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} + \int d^3r' \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^{(\text{tr})}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{E}^{(\text{tr})}(\mathbf{r}', t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t) - \kappa \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) \right]. \end{aligned} \quad (10.314)$$

Mit

$$\mathbf{E}^{(\text{tr})}(\mathbf{r}', t) = -\kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) \quad (10.315)$$

folgt unter Beachtung von

$$\frac{\varepsilon_0 \kappa^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \kappa^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0 c^2} \quad (10.316)$$

für die elektromagnetische Feldenergie H einer vorgegebenen Verteilung von Ladungen und Strömen schließlich der Ausdruck

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \int d^3r'' \frac{\varrho(\mathbf{r}', t) \varrho(\mathbf{r}'', t)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} - \kappa \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) \quad (10.317) \\ &\quad + \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r' \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) + \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) \cdot \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) \right]. \end{aligned}$$

Diese Darstellung der Feldenergie H dient in der Quantenelektrodynamik als Startpunkt zur Quantisierung der transversalen Freiheitsgrade des elektromagnetischen Feldes.

Bemerkung

Wegen der Eigenschaft (10.305) gilt für das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, das über (7.3) mit dem elektrischen Feld gemäß

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(l)(\mathbf{r}, t)} + \mathbf{E}^{(\text{tr})}(\mathbf{r}, t) = -\nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}, t) - \kappa \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (10.318)$$

verknüpft ist, notwendig die Bedingung der Coulomb-Eichung:

$$\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (10.319)$$

10.9 Verschiedene Eichungen

Die über (10.163) gegebene Verknüpfung von elektromagnetischem Feldtensor $F^{\mu\nu}$ und Vierer-Potential A^ν ist nicht eindeutig. Die Eichtransformation

$$A^\nu \rightarrow A^\nu + \partial^\nu \chi \quad (10.320)$$

belässt den elektromagnetischen Tensor $F^{\mu\nu}$ invariant:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &\rightarrow \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu \chi) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu \chi) \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \underbrace{(\partial^\mu \partial^\nu - \partial^\nu \partial^\mu)}_{=0} \chi \\ &= F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (10.321)$$

Eichinvarianz bedeutet, dass das *lokale* Vierer-Potential A^μ selbst nicht beobachtbar ist. Allerdings sind Integrale des Vierer-Potentials über *geschlossene* Pfade beobachtbar, z.B. als quantisierter magnetischer Fluss, der einen supraleitenden Ring durchsetzt.

Unter einer Eichtransformation (10.320) ändert sich das Wirkungsfunktional (10.280) für das Maxwell-Feld gemäß

$$\begin{aligned} S[A^\mu[\cdot], \partial^\nu A^\mu[\cdot]] &\rightarrow S[A^\mu[\cdot] + \partial^\mu \chi[\cdot], \partial^\nu A^\mu[\cdot] + \partial^\nu \partial^\mu \chi[\cdot]] \\ &= \frac{1}{c} \int d^4x' \left[-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}(x') F^{\mu\nu}(x') - \kappa j^\nu(x') [A_\nu(x') + \partial_\nu \chi(x')] \right] \\ &= S[A^\mu[\cdot], \partial^\nu A^\mu[\cdot]] - \frac{\kappa}{c} \int d^4x' j^\nu(x') \partial_\nu \chi(x') \\ &= S[A^\mu[\cdot], \partial^\nu A^\mu[\cdot]] - \frac{\kappa}{c} \int d^4x' \partial_\nu [j^\nu(x') \chi(x')] + \frac{\kappa}{c} \int d^4x' \chi(x') \partial_\nu j^\nu(x'). \end{aligned} \quad (10.322)$$

Das Integral $\int d^4x' \partial_\nu [j^\nu(x') \chi(x')]$ ist äquivalent zu einem Oberflächenintegral im vierdimensionalen Minkowski-Raum, dessen Wert für lokalisierte Quellen, die zudem in der fernen Vergangenheit und in der fernen Zukunft ausgeschaltet sind, gleich Null gesetzt werden darf. Das Integral $\frac{\kappa}{c} \int d^4x' \chi(x') \partial_\nu j^\nu(x')$ verschwindet identisch, sofern die vorgegebenen Quellen $j^\nu(x')$ der Kontinuitätsgleichung (10.116) genügen (Ladungserhaltung). Das Wirkungsfunktional (10.280) für das Maxwell-Feld ist demnach nicht nur Lorentz-invariant, es ist auch eichinvariant.

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Der Erhaltungssatz für Ladungen ist eine notwendige Bedingung für die Eichinvarianz des Wirkungsfunktionals 10.280) für das Maxwell-Feld.

Neben der gebräuchlichen

$$\begin{aligned} & \text{Lorenz-Eichung} && (10.323) \\ & \mu \in \{0, 1, 2, 3\} \\ & \partial_\mu A^\mu = 0 \end{aligned}$$

und der für die nichtrelativistische Quantenmechanik wichtigen

$$\begin{aligned} & \text{Coulomb-Eichung} && (10.324) \\ & a \in \{x, y, z\} \\ & \partial_a A^a = 0 \end{aligned}$$

kommen in der QED (Quantenelektrodynamik) noch die folgenden (äquivalenten) Eichbedingungen zum Einsatz:

$$\begin{aligned} & \text{Lichtkegel-Eichung} && (10.325) \\ & \mu \in \{0, 1, 2, 3\} \\ & n_\mu A^\mu = 0 \\ & n_\mu n^\mu = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Temporale Eichung} && (10.326) \\ & A^0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Axiale Eichung} && (10.327) \\ & A^3 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Fock-Schwinger Eichung} && (10.328) \\ & \mu \in \{0, 1, 2, 3\} \\ & x_\mu A^\mu = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Poincaré-Eichung} && (10.329) \\ & a \in \{x, y, z\} \\ & x_a A^a = 0. \end{aligned}$$

Jede dieser Eichbedingungen erfüllt den Zweck, Berechnungen der elektromagnetischen Felder zu vereinfachen. Selbstverständlich darf das Endergebnis nicht von der verwendeten Eichung abhängen.

10.10 Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes

Ausgangspunkt sind die in (6.28) und (6.43) hergeleiteten Bilanz-Gleichungen für Energiedichte und Impulsdichte (ohne Beiträge der polarisierbaren oder magnetisierbaren Materie), die wir jetzt in der folgenden Form schreiben wollen:

Rate der Änderung der Energiedichte (10.330)

$$-\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{div} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\varepsilon_0}{2} E_c(\mathbf{r}, t) E_c(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} B_c(\mathbf{r}, t) B_c(\mathbf{r}, t) \right]$$

Rate der Änderung der Impulsdichte (10.331)

$$a \in \{x, y, z\}$$

$$-f_a^{(L)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c^2} S_a(\mathbf{r}, t) \right] - \frac{\partial}{\partial r_b} t_{ab}(\mathbf{r}, t).$$

Hier ist $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ der Poynting-Vektor, $t_{ab}(\mathbf{r}, t)$ der elektromagnetische Spannungstensor und $\mathbf{f}^{(L)}(\mathbf{r}, t)$ die Lorentz-Kraftdichte:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\kappa\mu_0} \tag{10.332}$$

$$\mathbf{f}^{(L)}(\mathbf{r}, t) = \rho^{(f)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \kappa \mathbf{j}^{(f)}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

$$a, b \in \{x, y, z\}$$

$$t_{ab}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 E_b(\mathbf{r}, t) E_a(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} B_b(\mathbf{r}, t) B_a(\mathbf{r}, t) - \delta_{a,b} \left[\frac{\varepsilon_0}{2} E_c(\mathbf{r}, t) E_c(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0} B_c(\mathbf{r}, t) B_c(\mathbf{r}, t) \right].$$

In Analogie zur Definition der Vierer-Beschleunigung (10.79) suchen wir jetzt einen entsprechenden Vierer-Vektor für die Lorentz-Kraftdichte zu konstruieren. Dazu

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

definieren wir die Vierer-Kraftdichte f^μ zu

$$\begin{aligned} a &\in \{x, y, z\}; \text{ Summenkonvention} & (10.333) \\ \mu &\in \{0, 1, 2, 3\} \\ f^\mu &= \left(\frac{1}{c} j_a^{(f)} \cdot E_a, f_x^{(L)}, f_y^{(L)}, f_z^{(L)} \right)_\mu. \end{aligned}$$

Mit der Definition

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\varepsilon_0}{2} E_a E_a + \frac{1}{2\mu_0} B_a B_a\right) & -\frac{1}{c} S_x & -\frac{1}{c} S_y & -\frac{1}{c} S_z \\ -\frac{1}{c} S_x & t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ -\frac{1}{c} S_y & t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ -\frac{1}{c} S_z & t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{bmatrix}_{\mu\nu} \quad (10.334)$$

für den Tensor der elektromagnetischen Energie-Impuls-Dichte folgt, wenn die Bilanzgleichungen (10.330) und (10.331) in Vierer-Notation zusammengefasst werden, die folgende Darstellung der Vierer-Kraftdichte f^μ als Divergenz des Tensors $T^{\mu\nu}$:

$$f^\mu = \partial_\nu T^{\mu\nu}. \quad (10.335)$$

Dass dies stimmt, ist leicht durch eine explizite Rechnung zu zeigen. Mit

$$\begin{aligned} \nu &\in \{0, 1, 2, 3\} & (10.336) \\ \partial_\nu &= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial r_x}, \frac{\partial}{\partial r_y}, \frac{\partial}{\partial r_z} \right)_\nu \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} j_a^{(f)} \cdot E_a = f^0 &= \partial_0 T^{00} + \partial_1 T^{10} + \partial_2 T^{20} + \partial_3 T^{30} & (10.337) \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} T^{00} + \frac{\partial}{\partial r_x} T^{10} + \frac{\partial}{\partial r_y} T^{20} + \frac{\partial}{\partial r_z} T^{30} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\varepsilon_0}{2} E_c E_c + \frac{1}{2\mu_0} B_c B_c \right] - \frac{1}{c} \left[\frac{\partial}{\partial r_x} S_x + \frac{\partial}{\partial r_y} S_x + \frac{\partial}{\partial r_z} S_x \right] \end{aligned}$$

10.10 Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes

und

$$\begin{aligned}
 f^a &= \partial_0 T^{a0} + \partial_1 T^{a1} + \partial_2 T^{a2} + \partial_3 T^{a3} \\
 &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} S_a \right) + \frac{\partial}{\partial r_x} t_{ax} + \frac{\partial}{\partial r_y} t_{ay} + \frac{\partial}{\partial r_z} t_{az} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} S_a \right) + \frac{\partial}{\partial r_b} t_{ab},
 \end{aligned} \tag{10.338}$$

was zu zeigen war.

Wir können aus der angegebenen Gestalt von $T^{\mu\nu}$ aber noch nicht so leicht erkennen, wie sich $T^{\mu\nu}$ beim Übergang vom Inertialsystem S zum Inertialsystem S' transformiert, ob also $T^{\mu\nu}$ wirklich ein echter Vierer-Tensor ist.

Geleitet durch die Analogie zur Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld, siehe (10.233), drücken wir jetzt den Vierer-Vektor der Lorentz-Kraftdichte f^μ durch die Vierer-Stromdichte j_ν und den elektromagnetischen Feldtensors $F^{\mu\nu}$ aus:

$$f^\mu = \kappa j_\nu F^{\mu\nu}. \tag{10.339}$$

Zur Prüfung setzen wir die Definitionen der Vierer-Stromdichte und der Komponenten des elektromagnetischen Feldtensors, ein:

$$\begin{aligned}
 j_\nu &= \left(c\rho^{(f)}, -j_x^{(f)}, -j_y^{(f)}, -j_z^{(f)} \right)_\nu \\
 F^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{\kappa c} & -\frac{E_y}{\kappa c} & -\frac{E_z}{\kappa c} \\ \frac{E_x}{\kappa c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{\kappa c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{\kappa c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{10.340}$$

In der Tat ist

$$f^0 = \kappa (j_0 F^{00} + j_1 F^{01} + j_2 F^{02} + j_3 F^{03}) = \frac{j_a^{(f)} E_a}{c} = \frac{\mathbf{j}^{(f)} \cdot \mathbf{E}}{c} \tag{10.341}$$

$$\begin{aligned}
 f^1 &= \kappa (j_0 F^{10} + j_1 F^{11} + j_2 F^{12} + j_3 F^{13}) \\
 &= \kappa \left(c\rho^{(f)} \frac{E_x}{\kappa c} + j_y^{(f)} B_z - j_z^{(f)} B_y \right) \\
 &= \rho^{(f)} E_x + \kappa \left(\mathbf{j}^{(f)} \wedge \mathbf{B} \right)_x
 \end{aligned}$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

$$\begin{aligned}
 f^2 &= \kappa (j_0 F^{20} + j_1 F^{21} + j_2 F^{22} + j_3 F^{23}) \\
 &= \kappa \left(c\rho^{(f)} \frac{E_y}{\kappa c} - j_x^{(f)} B_z + j_z^{(f)} B_x \right) \\
 &= \rho^{(f)} E_y + \kappa (\mathbf{j}^{(f)} \wedge \mathbf{B})_y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^3 &= \kappa (j_0 F^{30} + j_1 F^{31} + j_2 F^{32} + j_3 F^{33}) \\
 &= \kappa \left(c\rho^{(f)} \frac{E_z}{\kappa c} + j_x^{(f)} B_y - j_z^{(f)} B_x \right) \\
 &= \rho^{(f)} E_z + \kappa (\mathbf{j}^{(f)} \wedge \mathbf{B})_z,
 \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Unter Verwendung der inhomogenen Maxwell-Gleichungen (10.143) folgt nun die Darstellung

$$\begin{aligned}
 f^\mu &= \kappa j_\nu F^{\mu\nu} & (10.342) \\
 &= \kappa (j^{\nu'} g_{\nu'\nu}) F^{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{\mu_0} (\partial_\sigma F^{\sigma\nu'} g_{\nu'\nu}) F^{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[\partial_\sigma \left(\underbrace{g^{\sigma\lambda} g_{\lambda\sigma'}}_{=g^{\sigma\sigma'}} F^{\sigma'\nu'} g_{\nu'\nu} \right) \right] F^{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left(\underbrace{\partial_\sigma g^{\sigma\lambda}}_{=\partial^\lambda} \underbrace{g_{\lambda\sigma'} F^{\sigma'\nu'} g_{\nu'\nu}}_{=F_{\lambda\nu}} \right) F^{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{\mu_0} (\partial^\lambda F_{\lambda\nu}) F^{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{\mu_0} [\partial^\lambda (F_{\lambda\nu} F^{\mu\nu}) - F_{\lambda\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu}].
 \end{aligned}$$

Der zweite Term in der letzten Zeile kann als Ableitung eines Skalars geschrieben werden. Um dies einzusehen, kommen wir auf die homogenen Maxwell-Gleichungen

10.10 Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes

(10.150) zurück und schreiben

$$\begin{aligned}
 0 &= F_{\lambda\nu} \underbrace{\left(\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} \right)}_{=0} & (10.343) \\
 &= F_{\lambda\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} + F_{\lambda\nu} \partial^\nu F^{\lambda\mu} + F_{\lambda\nu} \partial^\mu F^{\nu\lambda} \\
 &= F_{\lambda\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} + F_{\nu'\lambda'} \partial^{\lambda'} F^{\nu'\mu} + \frac{1}{2} \partial^\mu (F_{\lambda\nu} F^{\nu\lambda}) \\
 &= 2F_{\lambda\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu (F_{\lambda\nu} F^{\nu\lambda}).
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Identität

$$- F_{\lambda\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \partial^\mu (F_{\lambda\nu} F^{\nu\lambda}). \quad (10.344)$$

Setzen wir diese in (10.342) ein, so folgt jetzt

$$\begin{aligned}
 f^\mu &= \frac{1}{\mu_0} \left[\partial^\lambda (F_{\lambda\nu} F^{\mu\nu}) + \frac{1}{4} \partial^\mu (F_{\lambda'\nu'} F^{\nu'\lambda'}) \right] & (10.345) \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \partial^\lambda \left[F_{\lambda\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} g_{\lambda'}^{\mu'} (F_{\lambda'\nu'} F^{\nu'\lambda'}) \right] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \partial_\sigma g^{\sigma\lambda} \left[F_{\lambda\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} g_{\lambda'}^{\mu'} (F_{\lambda'\nu'} F^{\nu'\lambda'}) \right] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \partial_\sigma \left[g^{\sigma\lambda} F_{\lambda\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} g^{\sigma\lambda} g_{\lambda'}^{\mu'} (F_{\lambda'\nu'} F^{\nu'\lambda'}) \right] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \partial_\sigma \left[F^\sigma{}_\nu F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} g^{\sigma\mu} (F_{\lambda'\nu'} F^{\nu'\lambda'}) \right].
 \end{aligned}$$

Beachten wir noch die Antisymmetrie $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ so folgt das Resultat

$$\begin{aligned}
 f^\mu &= \frac{1}{\mu_0} \partial_\sigma \left[-F^\sigma{}_\nu F^{\nu\mu} + \frac{1}{4} g^{\sigma\mu} (F_{\lambda'\nu'} F^{\nu'\lambda'}) \right] & (10.346) \\
 &\stackrel{?}{=} \partial_\sigma T^{\mu\sigma}.
 \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der Bilanzgleichung (10.335) für den Vierer-Vektor f^μ der Lorentz-Kraftdichte ergibt dann für die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors das Resultat

$$\boxed{T^{\mu\sigma} = \frac{1}{\mu_0} \left[-F^\sigma{}_\nu F^{\nu\mu} + \frac{1}{4} g^{\sigma\mu} (F_{\lambda'\nu'} F^{\nu'\lambda'}) \right]}. \quad (10.347)$$

10 Elektrodynamik als relativistische Feldtheorie

Das Verhalten des Energie-Impuls-Tensors $T^{\mu\sigma}$ unter Lorentz-Transformationen ist somit identisch mit dem Transformationsverhalten des Feldstärketensors $F^{\nu\mu}$ unter Lorentz-Transformationen:

$$T'^{\mu\sigma} = L^\mu_\rho L^\sigma_\nu T^{\rho\nu}. \quad (10.348)$$

Der Tensor $T^{\mu\sigma}$ der Energie-Impuls-Dichte ist eine Messgröße, die zudem an das Einsteinsche Gravitationsfeld koppelt.

Dass (10.347) mit der oben aufgestellten Formel (10.334) für $T^{\mu\sigma}$ übereinstimmt, wird im Anhang I explizit gezeigt.

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

Die mit der Masse

$$M = \int d^3r' M(\mathbf{r}') \quad (11.1)$$

eines Planeten mit (räumlich begrenzter) Massendichte-Verteilungsfunktion $M(\mathbf{r}')$ verbundene *Gravitation* ist Ursache der Beschleunigung, die ein frei fallender Massenpunkt (Testteilchen mit Masse m) über der Planetenoberfläche erfährt, wenn außer der Gravitation keine weiteren Kräfte auf das Teilchen wirken. Ein *Gravitationsfeld*

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \int d^3r' M(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) \quad (11.2)$$

bewirkt unabhängig von der Masse m des Testteilchens die gleiche Beschleunigung (Isaac Newton, 1686):

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = m \mathbf{g}[\mathbf{r}(t)]. \quad (11.3)$$

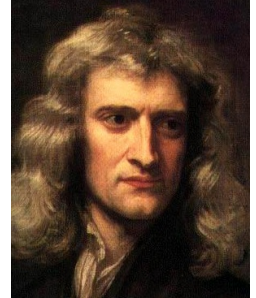
In SI-Einheiten ist die universelle Gravitationskonstante G gegeben zu

$$G = 6.674 \times 10^{-11} \left[\text{N} \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2} \right]. \quad (11.4)$$

Von allen Naturkonstanten ist die Gravitationskonstante G am wenigsten genau bekannt, was damit zusammenhängt, dass die Gravitationskraft im Vergleich zur Coulomb-Kraft sehr klein ist, so dass genaue Messungen sehr schwierig sind.

Das von einer Massenverteilung $M(\mathbf{r}')$ erzeugte Newtonsche Gravitationspotential ist demnach

$$\phi(\mathbf{r}) = -G \int d^3r' \frac{M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (11.5)$$



Isaac Newton
(1642–1727)

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

Die skalare Funktion $\phi(\mathbf{r})$ ist offensichtlich eine Lösung der Poisson-Gleichung

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}) = 4\pi GM(\mathbf{r}), \quad (11.6)$$

wenn als Randbedingung gefordert wird $\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{r}) = 0$.

In einem infinitesimal kleinen Gebiet kann auch ein inhomogenes Gravitationsfeld (z.B. das Gravitationsfeld des Planeten Erde an der Oberfläche) als *homogen* angesehen werden. Es gibt dann stets ein lokales Bezugssystem (Einsteins fallender Aufzug), in dem der Einfluss der Gravitation gar nicht nachweisbar ist, da *träge* Masse und *schwere* Masse exakt gleich sind, was experimentell sehr genau untersucht wurde. Somit kann prinzipiell die Wirkung eines Gravitationsfeldes *lokal* nicht von einem Beschleunigungsvorgang unterschieden werden. In Gegenwart von *inhomogenen* Gravitationsfeldern hat die spezielle Relativitätstheorie somit nur noch lokale Gültigkeit, da die Inertialsysteme der speziellen Relativitätstheorie selbst auch nur noch *lokal* realisierbar sind.

11.1 Einsteinsche Bewegungsgleichung

Die Idee von Albert Einstein war es, die Bahnkurve eines (ungeladenen) Testteilchens der Masse m in einem insbesondere auch *inhomogenen* Gravitationsfeld als *Paralleltransport* (eine Art Trägheitsbewegung) auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit entlang einer *Geodätenlinie* $x^\mu(s)$ im vierdimensionalen (gekrümmten) Raumzeitkontinuum zu beschreiben:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0. \quad (11.7)$$

Hier bezeichnen die $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ die sog. *Christoffel-Symbole 2. Art*

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} \right) \quad (11.8)$$
$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{\lambda\nu}^\mu,$$

die mit den Ableitungen der Komponenten des metrischen Tensors $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\sigma)$ verknüpft sind. Wegen $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ gibt es i.A. zehn unabhängige $g_{\mu\nu}$. Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ bestimmt die geometrischen Abstände ds (infinitesimal) benachbarter

11.1 Einsteinsche Bewegungsgleichung

Punkte x^μ und $y^\mu = x^\mu + dx^\mu$ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, die durch Koordinaten x^σ parametrisiert sei, zu

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = g_{\mu\nu}(x^\sigma) dx^\mu dx^\nu. \quad (11.9)$$

Physikalisch beschreiben die $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ den Einfluss der *Raumzeitkrümmung* und damit implizit das *Gravitationsfeld*, falls die Komponenten $g_{\mu\nu}$ des metrischen Tensors als Funktion der Koordinaten x^σ vorgegeben sind. Die $g_{\mu\nu}$ werden somit zu einem dynamischen Feld, analog zum Vierer-Potential der Elektrodynamik. Wie in der speziellen Relativitätstheorie gilt für die Ausbreitung von Licht $ds^2 = 0$.

Bemerkung

Auch in der gekrümmten Raumzeit kann man an jedem fest gewählten Punkt x^σ , aber eben *nicht global* für alle Punkte gemeinsam, neue Koordinaten $\xi^\kappa(x^\sigma)$ einführen, so dass am Punkt x^σ die Metrik $g_{\mu\nu}(x^\sigma)$, ausgedrückt durch die neuen Koordinaten $\xi^\kappa(x^\sigma)$, mit der Minkowski-Metrik der flachen Raumzeit übereinstimmt. Physikalische Aussagen über ein am Ereignispunkt x^σ der gekrümmten Raumzeit positioniertes kleines Objekt, entlang dessen Ausdehnung sich die Metrik nur infinitesimal ändert, und zeitliche Abläufe von Ereignissen, während derer sich die Metrik nur infinitesimal ändert, sind daher *lokal* kompatibel mit allen Aussagen der Speziellen Relativitätstheorie, wie sie für den flachen Raum gültig sind. Insbesondere ist die Lichtgeschwindigkeit in einer genügend kleinen Umgebung eines Ereignispunktes x^σ *lokal* als konstant anzusehen. In der gekrümmten Raumzeit gibt es *global* aber keine „konstante Lichtgeschwindigkeit“, z.B. wird ein Lichtstrahl durch das Gravitationsfeld eines Sterns abgelenkt.

Newtonsche Bewegungsgleichung als Grenzfall der Einsteinschen Bewegungsgleichung

Um das Gesagte besser zu verstehen, betrachten wir jetzt die Einsteinschen Bewegungsgleichungen (11.7) für ein Testteilchen mit *Ruhemasse* m , und zeigen, wie im Grenzfall *schwacher* Gravitationsfelder und *kleiner* Geschwindigkeiten aus den Einsteinschen Bewegungsgleichungen die Newtonschen Bewegungsgleichungen für das Testteilchen in einem (statischen) Gravitationspotential folgen.

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

Die Annahme *schwacher* Gravitationsfelder bedeutet, dass nur eine kleine Abweichung $\varepsilon h_{\mu\nu}(x^\sigma)$ mit einem Kontrollparameter $\varepsilon \ll 1$ von der konstanten, flachen Minkowski-Metrik

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mu\nu} \quad (11.10)$$

der speziellen Relativitätstheorie vorliegen soll. Wir postulieren daher die Existenz eines Koordinatensystems

$$x^\sigma = [ct, r_x, r_y, r_z]_\sigma, \quad (11.11)$$

in dem die Metrik $g_{\mu\nu}(x^\sigma)$ diagonal dominant ist, d.h. nur wenig von der Minkowski-Metrik des flachen Raums abweicht:

$$g_{\mu\nu}(x^\sigma) = g_{\mu\nu}^{(0)} + \varepsilon h_{\mu\nu}(x^\sigma). \quad (11.12)$$

Folglich ist in Bezug auf dieses Koordinatensystem das Abstandsquadrat gegeben zu

$$\begin{aligned} ds^2 &= [g_{\mu\nu}^{(0)} + \varepsilon h_{\mu\nu}(x^\sigma)] dx^\mu dx^\nu & (11.13) \\ &= c^2 dt^2 - dr_x^2 - dr_y^2 - dr_z^2 + \varepsilon h_{\mu\nu}(x^\sigma) dx^\mu dx^\nu \\ &= c^2 dt^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr_x}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr_y}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr_z}{dt} \right)^2 \right] + \varepsilon h_{\mu\nu}(x^\sigma) dx^\mu dx^\nu. \end{aligned}$$

Mit der Geschwindigkeit im flachen Raum,

$$\begin{aligned} a &\in \{x, y, z\} & (11.14) \\ v_a &= \frac{dx^a}{dt} = \frac{dr_a}{dt}, \end{aligned}$$

schreiben wir jetzt in führender Ordnung

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) + \varepsilon c^2 dt^2 \left[h_{00} + 2h_{0a} \frac{v_a}{c} + h_{aa'} \frac{v_a}{c} \frac{v_{a'}}{c} \right]. \quad (11.15)$$

11.1 Einsteinsche Bewegungsgleichung

Für Geschwindigkeiten v_a , die gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c klein sind, $\frac{|v|}{c} \ll 1$, folgt dann in führender Ordnung

$$ds^2 = c^2 dt^2 (1 + \varepsilon h_{00}) + \mathcal{O}\left(\varepsilon \frac{|v|}{c}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{|v|^2}{c^2}\right). \quad (11.16)$$

Dies impliziert für die räumlichen Komponenten der Tangentialableitung entlang der (noch zu bestimmenden) Geodäten in führender Ordnung

$$\begin{aligned} \lambda &\in \{0, x, y, z\} & (11.17) \\ \frac{dx^\lambda}{ds} &\simeq \frac{1}{c} \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2} h_{00}} \\ \frac{dx^0}{ds} &\simeq 1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ a &\in \{x, y, z\} \\ \frac{dx^a}{ds} &\simeq \frac{v_a}{c} \ll 1 \\ \frac{d^2 x^a}{ds^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^a}{dt^2} + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Einsetzen des Ausdrucks (11.12) für die Komponenten des metrischen Tensors in die Definitionsgleichung der Christoffel-Symbole (11.8) ergibt

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{\varepsilon}{2} [g^{(0)}]^{\mu\mu} \left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (11.18)$$

Hier wird nicht über μ summiert, da bereits ausgenutzt wurde, dass $g_{\mu\nu}^{(0)}$ Diagonalmatrix ist!

Die gekoppelten Einsteinschen Bewegungsgleichungen (11.7) lauten, wenn wir deren Komponenten nach Zeit und Ort sortieren:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^0}{ds^2} + \Gamma_{00}^0 \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} + (\Gamma_{b0}^0 + \Gamma_{0b}^0) \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^0}{ds} + \Gamma_{bb'}^0 \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^{b'}}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2 x^a}{ds^2} + \Gamma_{00}^a \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} + (\Gamma_{b0}^a + \Gamma_{0b}^a) \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^0}{ds} + \Gamma_{bb'}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^{b'}}{ds} &= 0. \end{aligned} \quad (11.19)$$

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

Für nicht relativistische Geschwindigkeit $\frac{v_a}{c} \ll 1$ des Testkörpers folgt dann in führender Ordnung, da nun bereits $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ proportional zu ε klein ist, für den räumlichen Anteil der Bewegungsgleichung

$$a, b, b' \in \{x, y, z\} \quad (11.20)$$

$$0 = \frac{d^2 x^a}{ds^2} + \Gamma_{00}^a \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} + \mathcal{O}\left(\varepsilon \frac{|\mathbf{v}|}{c}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}\right).$$

Für ein *statisches* Gravitationsfeld sind die $h_{\mu\nu}$ von der Koordinate $x^0 = ct$ unabhängig:

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0. \quad (11.21)$$

Dies impliziert unter Beachtung von $[g^{(0)}]^{aa} = -1$:

$$\Gamma_{00}^0 = 0 \quad (11.22)$$

$$a \in \{x, y, z\}$$

$$\Gamma_{00}^a = -\frac{\varepsilon}{2} \left(-\frac{\partial h_{00}}{\partial x^a} \right) = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^a}.$$

Wir setzen jetzt den Kontrollparameter $\varepsilon = 1$. Der räumliche Anteil der nicht relativistischen Bewegungsgleichung des Testteilchens ist somit in führender Ordnung gegeben zu

$$a \in \{x, y, z\} \quad (11.23)$$

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^a}.$$

Augenscheinlich entspricht dies der Newtonschen Bewegungsgleichung für ein Teilchen der Masse m , das sich im Gravitationsfeld $g^a(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial r_a} \phi(\mathbf{r})$ einer z.B. um den Ursprung des Koordinatensystems zentrierten (isotropen und homogenen) Massenverteilung mit Gesamtmasse M bewegt, wenn wir identifizieren

$$h_{00}(\mathbf{r}) = \frac{2\phi(\mathbf{r})}{c^2} \quad (11.24)$$

$$g_{00}(\mathbf{r}) = g_{00}^{(0)} + h_{00}(\mathbf{r}) = 1 + \frac{2\phi(\mathbf{r})}{c^2}.$$

11.2 Die Einsteinschen Feldgleichungen

Zu beachten ist, dass für großen Abstand $|\mathbf{r}|$ zum Schwerpunkt der Massenverteilung das Potential verschwindet, d.h. die Metrik geht asymptotisch für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ über in die flache Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}^{(0)}$ der speziellen Relativitätstheorie. Damit diese Identifikation wirklich zulässig ist, muss allerdings der Nachweis geführt werden, dass

$$\phi(\mathbf{r}) \equiv \frac{c^2}{2} h_{00}(\mathbf{r}) \quad (11.25)$$

eine Lösung der Laplace-Gleichung im *Außengebiet* $\mathcal{G}_A = \{\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3 \mid M(\mathbf{r}') = 0\}$ der Massenverteilung ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\in \mathcal{G}_A \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Dies ist tatsächlich der Fall, wie im folgenden am Beispiel der Schwarzschild-Metrik gezeigt wird.

Lorentz-Kraft

Wirkt auf ein Testteilchen mit Masse m und Ladung q neben der Gravitation zusätzlich noch ein elektromagnetisches Kraftfeld $F^{\mu\nu}$, so lautet die Einsteinsche Bewegungsgleichung für das Teilchen

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{ds}. \quad (11.27)$$

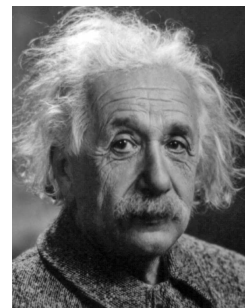
Der Term auf der rechten Seite ist die Lorentz-Kraft (10.233). Man kann diese Bewegungsgleichung auch umschreiben zu

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = \left(\frac{q}{m} F^\mu{}_\nu - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\lambda}{ds} \right) \frac{dx^\nu}{ds}. \quad (11.28)$$

In einem rotierenden Bezugssystem beschreibt der Term $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\lambda}{ds}$ (bei Beschränkung auf nicht relativistische Geschwindigkeiten) z.B. den Einfluss der Coriolis-Kräfte.

11.2 Die Einsteinschen Feldgleichungen

Albert Einstein gelang es im Jahr 1915, die von ihm zuvor im Jahr 1908 aufgestellte Frage nach den universellen dynamischen Bestimmungsgleichungen für die Felder



Albert Einstein
(1879–1955)

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

$g_{\mu\nu}$ zu beantworten, die das Gravitationsfeld festlegen. Dabei spielte der Tensor $T_{\mu\sigma}$ der gesamten Energie-Impuls-Dichte eines Systems für seine Überlegungen eine zentrale Rolle, insbesondere die Eigenschaft, dass die Vierer-Divergenz dieses Tensors gleich Null sein muss.

Wie bereits in den vorherigen Abschnitten dargelegt wurde, ist der Tensor $[T^{(\text{em})}]_{\mu\sigma}$ der elektromagnetischen Energie-Impuls-Dichte eine Messgröße. Jedoch nicht nur die elektromagnetischen Beiträge, sondern *alle* Formen der Energie wirken gemäß dem *Äquivalenzprinzip* als Quelle des Gravitationsfeldes. Für ein einfaches (nicht wechselwirkendes!) Modell der Materie, entsprechend einer *idealen Flüssigkeit*, ist z.B. der Tensor der Energie-Impuls-Dichte durch die Komponenten u_μ der Vierer-Geschwindigkeit gegeben zu

$$[T^{(\text{mat})}]_{\mu\sigma} = [\rho^{(0)} + p^{(0)}] u_\mu u_\sigma - p^{(0)} g_{\mu\sigma}, \quad (11.29)$$

wobei $\rho^{(0)}$ die Massendichte im Ruhesystem der Flüssigkeit und $p^{(0)}$ den Druck bezeichnen. Im allgemeinen gibt es natürlich eine thermische Zustandsgleichung $p^{(0)} = p(\rho^{(0)}, T^{(0)})$, die den Druck $p^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ mit der Dichte $\rho^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ und der (lokalen) Temperatur $T^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ im Ruhesystem der Materie verknüpft.

In der Gravitationstheorie von Einstein übernimmt deshalb ein allgemeiner (um den Beitrag des Materiefeldes erweiterter) Tensor

$$T_{\mu\sigma} = [T^{(\text{em})}]_{\mu\sigma} + [T^{(\text{mat})}]_{\mu\sigma} \quad (11.30)$$

die Rolle des Tensors der (gesamten) Energie-Impuls-Dichte. Dieser Tensor wirkt dann als *Quellterm* für die rechte Seite der allgemeinen *Einsteinschen Feldgleichungen*:

$$G_{\mu\sigma} = \kappa_g T_{\mu\sigma}. \quad (11.31)$$

Die Komponenten des Einstein-Tensors

$$G_{\mu\sigma} = R_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\sigma} R - \Lambda g_{\mu\sigma} \quad (11.32)$$

bestimmen die ortsabhängige Metrik $g^{\mu\sigma}(x^\lambda)$ im vierdimensionalen (gekrümmten) Raumzeitkontinuum, die durch den *Ricci-Krümmungstensor* $R_{\mu\nu}$ und den *Krümmungs-Skalar* R gemäß den Rechenvorschriften der Differentialgeometrie als

11.2 Die Einsteinschen Feldgleichungen

ein nicht lineares System partieller Differentialgleichungen für die 10 Komponenten $g^{\mu\sigma}(x^\lambda)$ des metrischen Tensors implizit gegeben ist:

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu} &= R_{\mu\lambda\nu}^\lambda & (11.33) \\
 R_{\mu\rho\nu}^\lambda &= \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\mu}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \\
 R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.
 \end{aligned}$$

Die Konstante Λ (insbesondere ihr Vorzeichen!) spielt in der modernen Kosmologie eine Rolle.

Der numerische Wert der Einsteinschen Kopplungskonstanten κ_g folgt aus einem *Korrespondenzprinzip*. Im flachen Raum soll das Einsteinsche Gravitationsfeld in das Newtonsche Gravitationsfeld übergehen. Diese Forderung (was wir hier nicht zeigen wollen) legt die Kopplungskonstante fest zu

$$\kappa_g = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (11.34)$$

Materieverteilung und Raumkrümmung bedingen sich gegenseitig. Die Materie mit ihrer Energie-Impulsdichte verursacht die Krümmung des Raumes, und der Raum bestimmt die Bewegung der Materie. Die durch den metrischen Tensor $g^{\mu\sigma}$ implizit definierte Raumzeit schreibt der Materie gemäß der Bewegungsgleichungen (11.7) die Bahnkurve vor, und die Materie wiederum bestimmt die Krümmung der Raumzeit gemäß den Einsteinschen Feldgleichungen (11.31). Das ist die Quintessenz der Gravitationstheorie von Einstein.

Da Sterne oder auch Planeten mit ihrer großen Masse eine Krümmung der Raumzeit verursachen, werden Photonen (Licht) oder auch massive Bausteine der Materie dazu gezwungen, auf ihrer Bahn der Raumkrümmung zu folgen. So wird der Effekt einer augenscheinlich anziehenden Kraft verständlich, die im Grenzfall schwacher Krümmung und langsamer Geschwindigkeit mit der „Schwerkraft“ der Newtonschen Theorie übereinstimmt.

Eine sehr gute Einführung in die Differentialgeometrie, wie sie zum präzisen Verständnis der Gravitationstheorie von Einstein erforderlich ist, enthält das bekannte Lehrbuch „Gravitation“ von Misner, Thorne und Wheeler [MTW73].

Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen sind im allgemeinen nur mit numerischen Methoden zu ermitteln. In einer Reihe hochsymmetrischer, aber physikalisch relevanter Spezialfälle existieren analytisch exakte Parametrisierungen für

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

die $g^{\mu\sigma}$. Wir wollen in dieser einführenden Vorlesung nur auf den Fall einer *kugelsymmetrischen* Raumzeit näher eingehen.

11.3 Schwarzschild-Metrik

Wir stellen uns eine kugelförmige isotrope (nicht rotierende) Materie-Verteilung am Ursprung des Koordinatensystems mit Ruhemasse M und Radius R_M vor, und fragen nach der Bewegung eines Testteilchens gemäß der Einsteinschen Gravitationstheorie im Abstand $r > 0$ zum Zentrum der Massenkugel. Demnach suchen wir im Außenraum der Materieverteilung, wo gilt $T_{\mu\sigma} = 0$, eine Lösung der homogenen Einstein-Gleichung

$$G_{\mu\sigma} = 0, \quad (11.35)$$

die mit der Annahme der Zentralsymmetrie kompatibel ist.

Zur Beschreibung eines isotropen Systems ist es naheliegend, Kugelkoordinaten zu verwenden:

$$\begin{aligned} \mu &\in \{0, 1, 2, 3\} \\ x^\mu &= [ct, \quad r, \quad \vartheta, \quad \alpha]_\mu. \end{aligned} \quad (11.36)$$

Mit zwei unbekanntenen Funktionen $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ kann man dann für das Quadrat des Abstands ds zweier infinitesimal benachbarter Punkte auf der gesuchten Mannigfaltigkeit den folgenden (*statischen*) Ansatz¹ machen

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}(r) dx^\mu dx^\nu \\ &= e^{\nu(r)} c^2 dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + d\alpha^2 \sin^2 \vartheta). \end{aligned} \quad (11.37)$$

Beiträge zum metrischen Tensor proportional zu $drdt$ würden die Symmetrie $t \rightarrow -t$ zwischen Vergangenheit und Zukunft brechen, entsprechend würden Beiträge proportional zu $drd\alpha$, $d\vartheta d\alpha$ und $drd\vartheta$ nicht vereinbar mit der postulierten Kugelsymmetrie sein. Um hervorzuheben, dass die Koeffizienten von $c^2 dt^2$ bzw. dr^2 immer positiv sein sollen, schreibt man $e^{\nu(r)}$ bzw. $e^{\lambda(r)}$ für die Koeffizienten

¹Dass der statische Ansatz (11.37) allgemein ist, belegt das Theorem von Birkhoff, das wir in dieser Vorlesung nicht beweisen wollen. Es besagt, dass jede kugelsymmetrische Lösung $g_{\mu\nu}$ der homogenen Einsteinschen Feldgleichungen notwendig statisch ist.

von $c^2 dt^2$ bzw. dr^2 mit reellen Funktionen $\nu(r)$ bzw. $\lambda(r)$. Für $r \rightarrow \infty$ ist als Randbedingung gefordert

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = 0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(r), \quad (11.38)$$

damit die Koeffizienten des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}(x)$ im Unendlichen mit der flachen Metrik des Minkowski-Raumes in Kugelkoordinaten übereinstimmen.

Aus dem Ansatz für ds^2 liest man unschwer die *kovarianten* Komponenten des metrischen Tensors ab:

$$g_{\mu\nu}(x) = \begin{bmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{bmatrix}_{\mu\nu}. \quad (11.39)$$

Die *kontravarianten* Komponenten sind dann die Elemente der zugeordneten inversen Matrix

$$g^{\mu\nu}(x) = \begin{bmatrix} e^{-\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{bmatrix}_{\mu\nu}. \quad (11.40)$$

Damit kann man jetzt die oben definierten Christoffel-Symbole $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ berechnen, und daran anschließend Differentialgleichungen für die Funktionen $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ aus der Forderung aufstellen, dass der Einstein-Tensor $G_{\mu\sigma}$ gleich Null ist (wir setzen die „kosmologische“ Konstante $\Lambda = 0$):

$$G_{\mu\sigma} = R_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\sigma} R \stackrel{!}{=} 0. \quad (11.41)$$

Nun bedingt das Verschwinden des Einstein-Tensors notwendig das Verschwinden des Ricci-Tensors, und umgekehrt, denn

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\mu\sigma} G_{\mu\sigma} = g^{\mu\sigma} \left(R_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\sigma} R \right) \\ &= R - 2R = -R. \end{aligned} \quad (11.42)$$

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

Die gesuchten Bestimmungsgleichungen für die Metrik können daher (im materiefreien Raum) genauso gut aus der (einfacheren!) Forderung

$$0 \stackrel{!}{=} R_{\mu\sigma} \equiv -\frac{\partial \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\varrho}^{\lambda} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\varrho} + \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\rho}^{\varrho} \quad (11.43)$$

hergeleitet werden. Die Feldgleichungen für die $g^{\mu\sigma}$ im materiefreien Raum sind das Analogon zur klassischen Laplace-Gleichung für das Newtonsche Gravitationspotential im *Außengebiet* einer Massenverteilung.

Da $g^{\mu\sigma}$ im vorliegenden Fall diagonal ist, können bei der Berechnung der Christoffel-Symbole nur solche $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ von Null verschieden sein, bei denen zwei Indizes übereinstimmen:

$$\begin{aligned} & \text{(keine Summenkonvention!)} \quad (11.44) \\ [\mu \neq \nu \ \& \ \nu \neq \sigma \ \& \ \sigma \neq \mu] \Rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = 0 \\ [\mu \neq \nu \ \& \ \nu = \sigma] \Rightarrow \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} &= \frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} \frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial x^{\mu}} \\ [\mu = \nu \ \& \ \nu \neq \sigma] \Rightarrow \Gamma_{\mu\mu}^{\sigma} &= -\frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\sigma}} \\ [\mu = \nu \ \& \ \nu = \sigma] \Rightarrow \Gamma_{\mu\mu}^{\mu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\mu} \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\mu}}. \end{aligned}$$

Wir schreiben im folgenden

$$\begin{aligned} \nu' &= \frac{\partial}{\partial r} \nu(r) \\ \lambda' &= \frac{\partial}{\partial r} \lambda(r). \end{aligned} \quad (11.45)$$

Es folgt durch Einsetzen der kovarianten und der kontravarianten Komponenten des metrischen Tensors für die von Null verschiedenen Christoffel-Symbole das

Ergebnis

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{10}^0 &= \frac{\nu'}{2} & (11.46) \\
 \Gamma_{00}^1 &= e^{\nu-\lambda} \frac{\nu'}{2} \\
 \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2} \\
 \Gamma_{22}^1 &= -e^{-\lambda} r \\
 \Gamma_{33}^1 &= -e^{-\lambda} r \sin^2 \vartheta \\
 \Gamma_{33}^2 &= -\sin \vartheta \cos \vartheta \\
 \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{23}^3 &= \cot \vartheta.
 \end{aligned}$$

Wir erhalten dann (nach einer längeren elementaren Rechnung) für die Diagonalelemente des Ricci-Tensors

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= e^{\nu-\lambda} \left(\frac{\nu'^2 + \nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) & (11.47) \\
 R_{11} &= -\frac{\nu'^2 + \nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} \\
 R_{22} &= 1 + r^2 e^{-\lambda} \left(-\frac{\nu' - \lambda'}{2r} - \frac{1}{r^2} \right) \\
 R_{33} &= R_{22} \sin^2 \vartheta.
 \end{aligned}$$

Die außerdiagonalen Komponenten $\mu \neq \sigma$ des Ricci-Tensors $R_{\mu\sigma}$ verschwinden im vorliegenden Fall identisch (längere elementare Rechnung):

$$\begin{aligned}
 \mu \neq \sigma & & (11.48) \\
 R_{\mu\sigma} &\equiv 0.
 \end{aligned}$$

Der tiefere Grund hierfür sind die sog. Bianchi-Identitäten, siehe [MTW73].

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

Für die Diagonalelemente des Ricci-Tensors ergeben die Forderungen

$$R_{\mu\mu} \stackrel{!}{=} 0 \quad (11.49)$$

jetzt insbesondere

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} e^{-\nu+\lambda} R_{00} + R_{11} &= \frac{\nu' + \lambda'}{r} \\ \nu' + \lambda' &= 0. \end{aligned} \quad (11.50)$$

Aufgrund der geforderten Asymptotik (11.38) beim Übergang zur flachen Minkowski-Metrik für $r \rightarrow \infty$ folgt hieraus

$$\nu(r) = -\lambda(r). \quad (11.51)$$

Es folgt zur Bestimmung der Funktion $\nu = \nu(r)$ nun die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} R_{11} &= -\frac{\nu'^2 + \nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} \\ &= -\frac{\nu'^2 + \nu''}{2} - \frac{\nu'}{r}. \end{aligned} \quad (11.52)$$

Eine elementare Umformung liefert

$$\begin{aligned} \nu'' &= -\frac{2\nu'}{r} - \nu'^2 \\ \Rightarrow \frac{\nu''}{\nu'} &= -\frac{2}{r} - \nu' \\ \Rightarrow \ln(r_0\nu') &= -2 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \nu \\ \Rightarrow r_0\nu' &= \frac{r_0}{r^2} e^{-\nu} \\ \Rightarrow e^\nu &= 1 - \frac{r_0}{r} \\ \Rightarrow \nu(r) &= \ln\left(1 - \frac{r_0}{r}\right). \end{aligned} \quad (11.53)$$

Somit folgt nach dem Gesagten jetzt

$$\begin{aligned} e^{\nu(r)} &= 1 - \frac{r_0}{r} \\ e^{\lambda(r)} &= \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}}, \end{aligned} \quad (11.54)$$

wobei die Integrationskonstante $r_0 > 0$ zunächst ein freier Parameter mit der Dimension einer Länge ist.

Die gefundene Lösung ist widerspruchsfrei:

$$r_0 = -e^{2\nu} R_{11} = 0 \tag{11.55}$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= 1 + r^2 e^{-\lambda} \left(-\frac{\nu' - \lambda'}{2r} - \frac{1}{r^2} \right) \\ &= 1 - r^2 e^\nu \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) \\ &= 1 - e^\nu - r \nu' e^\nu \\ &= 1 - e^\nu - r (e^\nu)' \\ &= \frac{r_0}{r} - r \frac{r_0}{r^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \vartheta = 0.$$

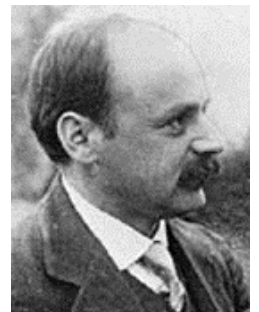
Das Resultat ist die berühmte *Schwarzschild-Metrik*:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\alpha^2). \tag{11.56}$$

Diese wurde 1916 von dem deutschen Astronomen Karl Schwarzschild entdeckt. Die Konstante r_0 ist der sog. *Schwarzschild-Radius*.

Die statische Schwarzschild-Metrik (11.56) ist eine exakte Lösung der *homogenen* Einsteinschen Feldgleichungen, und ist deshalb gültig im Außengebiet² einer homogenen (nicht geladenen und nicht rotierenden) Massenverteilung mit Kugelsymmetrie.

Im Limes schwacher Gravitationsfelder, d.h. in großer Entfernung zum Ursprung des Koordinatensystems, ist der Wert der Koordinate r gleich dem physikalischen



Karl Schwarzschild
(1873–1916)

²Das augenscheinlich singuläre Verhalten der Koeffizienten $g_{00}(r)$ und $g_{11}(r)$ in der Schwarzschildmetrik für $r \rightarrow r_0$ ist ein Artefakt der gewählten Koordinaten $(ct, r, \vartheta, \alpha)$, und kann bei geschickter Wahl von anderen Koordinatensystemen vermieden werden, siehe [MTW73]. Die Frage, ob zwei durch verschiedene Koordinatensysteme parametrisierte metrische Tensoren physikalisch äquivalent sind, ist allerdings nicht leicht zu entscheiden.

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

Radius $r = |\mathbf{r}|$, und es kommt gemäß (11.24) nur auf den Koeffizienten

$$g_{00}(r) = 1 - \frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \quad (11.57)$$

des metrischen Tensors an. Dieser ist mit dem Newtonschen Gravitationspotential

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|} \quad (11.58)$$

bei kleiner Abweichung von der flachen Minkowski-Metrik verknüpft gemäß

$$g_{00}(\mathbf{r}) = 1 + \frac{2\phi(\mathbf{r})}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 |\mathbf{r}|}. \quad (11.59)$$

Der Vergleich mit dem Newtonschen Gravitationspotential zeigt, dass der Schwarzschild-Radius r_0 durch die Ruhemasse M der Gravitationsquelle festgelegt ist:

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2}. \quad (11.60)$$

Für die Sonne erhält man mit $M_{\text{Sonne}} = 1.989 \times 10^{30}$ [kg] den Wert $r_{0,\text{Sonne}} = 2.952$ [km], ein sehr kleiner Wert im Vergleich zum Radius der Sonne $R_{\text{Sonne}} = 6.96 \times 10^5$ [km]. Der Schwarzschild-Radius des Planeten Erde mit $M_{\text{Erde}} = 5.9742 \times 10^{24}$ [kg] ergibt sich zu winzigen $r_{0,\text{Erde}} = 8.87$ [mm]. Das verdeutlicht, wie schwach die Effekte der Gravitationstheorie für die Himmelskörper in unserem Sonnensystem sind.

Schwarzes Loch

Bei einer mit einer inkompressiblen Flüssigkeit gefüllten Kugel (Modell-Stern) mit endlich großem Radius R , bei der der Druck an der Oberfläche $r = R$ verschwindet, existiert eine äußere und eine innere Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen. Die äußere Lösung ist im Außengebiet $R < r$ definiert und löst die *homogenen* Einstein-Gleichungen, die innere Lösung ist im Gebiet $r < R$ definiert und löst die *inhomogenen* Einstein-Gleichungen. Beide Lösungszweige sind über Stetigkeitsbedingungen für $g_{\mu\nu}$ und $\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda}$ an der Oberfläche $r = R$ der Massenverteilung miteinander verknüpft und definieren insgesamt die Schwarzschild-Metrik einer Massenkugel der beschriebenen Art.

Die innere Lösung, die wir in dieser Vorlesung nicht weiter diskutieren wollen, ist allerdings nicht notwendig statisch, denn man kann sich bei der inneren Lösung aufgrund des Einflusses des Energie-Impulsdichte-Tensors nicht auf das Theorem von Birkhoff berufen. Die äußere Schwarzschild-Metrik besitzt im Fall $r_0 < R$ nirgends eine Singularität, sie ist im Gebiet $R < r$ jetzt überall regulär.

Von besonderem Interesse ist der Fall $R < r_0$, wenn der Radius R der Materieverteilung *kleiner* ausfällt als der Schwarzschild-Radius r_0 . Für $r \rightarrow r_0$ hat die Komponente $g_{11}(r) = \frac{1}{1-\frac{r_0}{r}}$ des metrischen Tensors im gewählten Koordinatensystem eine Singularität. Bei Wahl anderer Koordinaten tritt im metrischen Tensor auf der Fläche $r = r_0$ allerdings *kein* *singuläres* Verhalten in Erscheinung (z.B. Kruskal-Lösung). Die Fläche $r = r_0$ (sog. Null-Hyperfläche) tritt bereits im Gebiet der äußeren Schwarzschild-Metrik als der geometrische Ort eines sog. *Ereignishorizontes* in der Raumzeit physikalisch in Erscheinung. Wenn man die radiale Fluchtgeschwindigkeit ausrechnet, die ein Projektil ausgehend von einer Position r_1 im Außengebiet $r > r_0$ *mindestens* haben muss, um aus der Einflusszone der Masse M in radialer Richtung ins Unendliche zu entkommen, so ist diese zwar immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c , aber sie nähert sich von unten der Lichtgeschwindigkeit an, wenn man die Startposition r_1 des Projektils (von außen kommend) in die Nähe des Ereignishorizontes bei $r = r_0$ verschiebt, $r_1 \rightarrow r_0 + 0^+$. Umgekehrt kann ein Projektil, das in der Zone $r < r_0$ abgefeuert wird, der Einflusszone der Masse M nie entkommen. Man spricht deshalb im Fall $R < r_0$ von einem „*Schwarzen Loch*“, weil sogar elektromagnetische Signale, insbesondere auch das Licht, nicht mehr entkommen können.

Hinter dem Horizont, in der innen liegenden Zone $r < r_0$, ist die Schwarzschild-Metrik zwar augenscheinlich frei von Singularitäten, allerdings verbirgt sich eine nicht behebbare *Singularität des Krümmungsverhaltens* am Ursprung, denn dort divergiert die Riemannsche Invariante³ bei Annäherung an das Zentrum. Für die innere Schwarzschild-Metrik berechnet man

$$R_{\mu\nu}{}^{\lambda\sigma} R^{\mu\nu}{}_{\lambda\sigma} \propto \frac{1}{r^6}. \quad (11.61)$$

Die durch die Raumkrümmung generierten Gezeitenkräfte steigen bei Annäherung an den Ort der Singularität extrem schnell an. Mit unseren alltäglichen, in schwach gekrümmten Räumen entwickelten physikalischen Vorstellungen können wir das,

³Eine Invariante ist von der Wahl von speziellen Koordinaten unabhängig!

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

was ein hinter den Ereignishorizont reisender Beobachter wahrnehmen würde, zwar mathematisch beschreiben, aber es ist sehr unanschaulich.

Hervorzuheben ist, dass weder der Ereignishorizont, noch die Singularität in einem Schwarzen Loch bis heute in einem Experiment überzeugend bestätigt werden konnten, obwohl es in der Astronomie viele Indizien dafür gibt, dass sehr kompakte, extrem massereiche, dunkle Objekte im Zentrum von Galaxien existieren. Diese „Schwarzen Löcher“ besitzen mit Sicherheit noch eine Reihe dunkler Geheimnisse, über die heutzutage in der Theorie der Quantengravitation nachgedacht wird. Tatsächlich können „Schwarze Löcher“ z.B. massive Elementarteilchen wie Elektronen bzw. Positronen emittieren, wenn aufgrund von energiereichen Fluktuationen der quantentheoretische Prozess der relativistischen Paarbildung nahe am Ereignishorizont $r = r_0$ stattfindet. Die von Stephen Hawking 1974 entwickelte Theorie besagt, dass eines der bei der Paarbildung erzeugten Teilchen ins Gravitationsfeld gerät und hinter den Ereignishorizont $r < r_0$ gezogen wird, während das Partner-Teilchen in den Raum $r > r_0$ entkommt. Dies ist der Mechanismus für die sog. *Hawking-Strahlung* von „Schwarzen Löchern“.

Bemerkung

Der Mathematiker und Astronom Pierre Simon de Laplace (1749–1827) vermutete in seiner Publikation aus dem Jahr 1795 mit dem Titel „Exposition du Système du Monde“ bereits die Existenz von derart massereichen Sternen, dass korpuskulares (teilchenartiges) Licht nicht entkommen kann. Seine Überlegungen basierten allerdings noch auf der Gravitationstheorie von Newton.

Erhaltungsgrößen bei der Bewegung in der Schwarzschild-Raumzeit

Für die zur Berechnung der Bahnkurve eines Massenpunktes in der Schwarzschild-Raumzeit benötigten Christoffel-Symbole erhalten wir nach dem Gesagten:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{10}^0 &= \frac{\nu'}{2} = \frac{r_0}{2r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}} = \frac{1}{2r} \frac{r_0}{r - r_0} & (11.62) \\
 \Gamma_{00}^1 &= e^{2\nu} \frac{\nu'}{2} = \frac{r_0}{2r^2} \frac{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2}{1 - \frac{r_0}{r}} = \frac{r_0}{2r^3} (r - r_0) \\
 \Gamma_{11}^1 &= -\frac{\nu'}{2} = -\frac{r_0}{2r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}} = -\frac{1}{2r} \frac{r_0}{r - r_0} \\
 \Gamma_{22}^1 &= -e^\nu r = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) r = -(r - r_0) \\
 \Gamma_{33}^1 &= -e^\nu r \sin^2 \vartheta = -(r - r_0) \sin^2 \vartheta \\
 \Gamma_{33}^2 &= -\sin \vartheta \cos \vartheta \\
 \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{23}^3 &= \cot \vartheta \\
 \Gamma_{\mu\nu}^\sigma &= \Gamma_{\nu\mu}^\sigma.
 \end{aligned}$$

Die Einsteinschen Bewegungsgleichungen (11.7) für die Komponenten der Trajektorie

$$x^\mu(s) = \left(ct(s), r(s), \vartheta(s), \alpha(s) \right)_\mu \quad (11.63)$$

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

in der Schwarzschild-Metrik schreiben wir jetzt:

$$\begin{aligned}
 & \text{Koordinate } t(s) && (11.64) \\
 0 &= \frac{d^2 x^0(s)}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^0 \frac{dx^\nu(s)}{ds} \frac{dx^\lambda(s)}{ds} \\
 &= \frac{d^2 x^0(s)}{ds^2} + (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{10}^0) \frac{dx^0(s)}{ds} \frac{dx^1(s)}{ds} \\
 &= c \left[\frac{d^2 t(s)}{ds^2} + \frac{1}{r(s)} \frac{r_0}{r(s) - r_0} \frac{dt(s)}{ds} \frac{dr(s)}{ds} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Koordinate } r(s) && (11.65) \\
 0 &= \frac{d^2 x^1(s)}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^1 \frac{dx^\nu(s)}{ds} \frac{dx^\lambda(s)}{ds} \\
 &= \frac{d^2 x^1(s)}{ds^2} + \Gamma_{00}^1 \left(\frac{dx^0(s)}{ds} \right)^2 + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{dx^1(s)}{ds} \right)^2 + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dx^2(s)}{ds} \right)^2 + \Gamma_{33}^1 \left(\frac{dx^3(s)}{ds} \right)^2 \\
 &= \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2 r(s)}{ds^2} + \frac{r_0}{2[r(s)]^3} [r(s) - r_0] \left(c \frac{dt(s)}{ds} \right)^2 - \frac{1}{2r} \frac{r_0}{r(s) - r_0} \left(\frac{dr(s)}{ds} \right)^2 \\ & - [r(s) - r_0] \left(\frac{d\vartheta(s)}{ds} \right)^2 - [r(s) - r_0] \sin^2[\vartheta(s)] \left(\frac{d\alpha(s)}{ds} \right)^2 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Koordinate } \vartheta(s) && (11.66) \\
 0 &= \frac{d^2 x^2(s)}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^2 \frac{dx^\nu(s)}{ds} \frac{dx^\lambda(s)}{ds} \\
 &= \frac{d^2 x^2(s)}{ds^2} + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2) \frac{dx^1(s)}{ds} \frac{dx^2(s)}{ds} + \Gamma_{33}^2 \frac{dx^3(s)}{ds} \frac{dx^3(s)}{ds} \\
 &= \frac{d^2 \vartheta(s)}{ds^2} + \frac{2}{r(s)} \frac{dr(s)}{ds} \frac{d\vartheta(s)}{ds} - \sin[\vartheta(s)] \cos[\vartheta(s)] \left(\frac{d\alpha(s)}{ds} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Koordinate } \alpha(s) & (11.67) \\
 0 &= \frac{d^2 x^3(s)}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^3 \frac{dx^\nu(s)}{ds} \frac{dx^\lambda(s)}{ds} \\
 &= \frac{d^2 x^3(s)}{ds^2} + (\Gamma_{13}^3 + \Gamma_{31}^3) \frac{dx^1(s)}{ds} \frac{dx^3(s)}{ds} + (\Gamma_{23}^3 + \Gamma_{32}^3) \frac{dx^2(s)}{ds} \frac{dx^3(s)}{ds} \\
 &= \frac{d^2 \alpha(s)}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr(s)}{ds} \frac{d\alpha(s)}{ds} + 2 \cot[\vartheta(s)] \frac{d\vartheta(s)}{ds} \frac{d\alpha(s)}{ds}.
 \end{aligned}$$

Wir wählen eine Ebene, in der sich der Koordinatenursprung befindet, als Äquatorialebene $\vartheta(s) \equiv \frac{\pi}{2}$ aus. Das ist wegen der Annahme der Kugelsymmetrie immer möglich. Offenbar wird die Differentialgleichung für $\vartheta(s)$ mit dem Ansatz $\vartheta(s) \equiv \frac{\pi}{2}$ identisch erfüllt, d.h. die Bewegung findet o.B.d.A. in der äquatorialen Bahnebene statt. Das entspricht dem Erhaltungssatz von der Orientierung des Bahn-Drehimpulses.

Man erhält aus der Differentialgleichung für $\alpha(s)$ dann sofort ein erstes Integral der Bewegung

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \alpha(s)}{ds^2} + \frac{2}{r(s)} \frac{dr(s)}{ds} \frac{d\alpha(s)}{ds} &= 0 & (11.68) \\
 \Rightarrow \frac{d}{ds} \ln \left[s_0 \frac{d\alpha(s)}{ds} \right] &= -2 \frac{d}{ds} \ln \left[\frac{r(s)}{\sqrt{l_0 s_0}} \right] \\
 \Rightarrow s_0 \frac{d\alpha(s)}{ds} &= \left[\frac{\sqrt{l_0 s_0}}{r(s)} \right]^2 \\
 \Rightarrow [r(s)]^2 \frac{d\alpha(s)}{ds} &= l_0 = \text{const.}
 \end{aligned}$$

Dies ist die Entsprechung zum Erhaltungssatz des Drehimpulses beim Kepler-Problem.

Die Differentialgleichung für die Zeitkoordinate $t(s)$ lässt sich ebenfalls integrie-

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

ren:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 t(s)}{ds^2} + \frac{1}{r(s)} \frac{r_0}{r(s) - r_0} \frac{d(r)}{ds} \frac{dt(s)}{ds} &= 0 & (11.69) \\
 \Rightarrow \frac{d^2 t(s)}{ds^2} + \frac{d\nu(s)}{ds} \frac{dt(s)}{ds} &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{d}{ds} \left[e^{\nu(s)} \frac{dt(s)}{ds} \right] &= 0 \\
 \Rightarrow e^{\nu(s)} \frac{dt(s)}{ds} &= b_0 = \text{const} \\
 \Rightarrow \frac{dt(s)}{ds} &= \frac{b_0}{1 - \frac{r_0}{r(s)}}.
 \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante b_0 kann im Prinzip jeden Wert annehmen. Für eine radiale Bahn $r(s)$, die für großen Abstand zum Zentrum asymptotisch in den flachen Minkowski-Raum mündet, so dass dort im Unendlichen die Bahngeschwindigkeit gleich v_∞ ist, folgt zwischen der Endgeschwindigkeit v_∞ und dem Parameter b_0 der Zusammenhang

$$b_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dt(s)}{ds} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_\infty^2}{c^2}}}. \quad (11.70)$$

Für Bahnen, die nicht bis ins Unendliche reichen, gilt das natürlich nicht.

Setzt man die erzielten Ergebnisse für $\frac{d\alpha(s)}{ds}$ und $\frac{d(ct)}{ds}$ in die Bewegungsgleichung für die Radialkoordinate $r(s)$ ein, so findet man unter Berücksichtigung des Umstands, dass die Bewegung in der Äquatorialebene $\vartheta(s) \equiv \frac{\pi}{2}$ stattfindet, nun die folgende Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
 0 &= \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2 r(s)}{ds^2} + \frac{r_0}{2[r(s)]^3} [r(s) - r_0] \left(\frac{d(ct)}{ds} \right)^2 \\ & - \frac{1}{2r(s)} \frac{r_0}{r(s) - r_0} \left(\frac{dr(s)}{ds} \right)^2 - [r(s) - r_0] \left(\frac{d\alpha(s)}{ds} \right)^2 \end{aligned} \right\} & (11.71) \\
 &= \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2 r(s)}{ds^2} + \frac{c^2 r_0}{2[r(s)]^3} [r(s) - r_0] \left(\frac{b_0 r(s)}{r(s) - r_0} \right)^2 \\ & - \frac{1}{2r} \frac{r_0}{r(s) - r_0} \left(\frac{dr(s)}{ds} \right)^2 - [r(s) - r_0] \left(\frac{l_0}{[r(s)]^2} \right)^2 \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\frac{d^2 r(s)}{ds^2} - \frac{1}{2r} \frac{r_0}{r(s) - r_0} \left(\frac{dr(s)}{ds} \right)^2 = - \frac{c^2 b_0^2 r_0}{2[r(s)][r(s) - r_0]} + l_0^2 \frac{r(s) - r_0}{[r(s)]^4}. \quad (11.72)$$

Nach Multiplikation mit dem integrierenden Faktor $\sqrt{\frac{r(s)}{r(s)-r_0}}$ folgt hieraus

$$\frac{d}{ds} \left[\sqrt{\frac{r(s)}{r(s)-r_0}} \frac{dr(s)}{ds} \right] = \sqrt{\frac{r(s)}{r(s)-r_0}} \left\{ -\frac{c^2 b_0^2 r_0}{2r(s)[r(s)-r_0]} + l_0^2 \frac{r(s)-r_0}{[r(s)]^4} \right\}, \quad (11.73)$$

und weiter

$$\begin{aligned} & 2 \left[\sqrt{\frac{r(s)}{r(s)-r_0}} \frac{dr(s)}{ds} \right] \frac{d}{ds} \left[\sqrt{\frac{r(s)}{r(s)-r_0}} \frac{dr(s)}{ds} \right] \\ &= \frac{d}{ds} \left\{ \left[\sqrt{\frac{r(s)}{r(s)-r_0}} \frac{dr(s)}{ds} \right]^2 \right\} \\ &= \frac{d}{ds} \left[\frac{r(s)}{r(s)-r_0} \left(\frac{dr(s)}{ds} \right)^2 \right] \\ &= 2 \left[\sqrt{\frac{r(s)}{r(s)-r_0}} \frac{dr(s)}{ds} \right] \sqrt{\frac{r(s)}{r(s)-r_0}} \left\{ -\frac{c^2 b_0^2 r_0}{2r(s)[r(s)-r_0]} + l_0^2 \frac{r(s)-r_0}{[r(s)]^4} \right\} \\ &= 2 \frac{dr(s)}{ds} \frac{r(s)}{r(s)-r_0} \left\{ -\frac{c^2 b_0^2 r_0}{2r(s)[r(s)-r_0]} + l_0^2 \frac{r(s)-r_0}{[r(s)]^4} \right\} \\ &= -\frac{c^2 b_0^2 r_0}{[r(s)-r_0]^2} \frac{dr(s)}{ds} + \frac{2l_0^2}{[r(s)]^3} \frac{dr(s)}{ds} \\ &= \frac{d}{ds} \left[\frac{c^2 b_0^2 r_0}{r(s)-r_0} - \frac{l_0^2}{[r(s)]^2} \right]. \end{aligned}$$

Also folgt mit der Integrationskonstanten k_0 der Erhaltungssatz für die radiale Funktion $r(s)$ zu

$$\begin{aligned} \frac{r(s)}{r(s)-r_0} \left(\frac{dr(s)}{ds} \right)^2 &= \left[k_0 + \frac{c^2 b_0^2 r_0}{r(s)-r_0} - \frac{l_0^2}{[r(s)]^2} \right] \quad (11.74) \\ \Rightarrow \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 &= k_0 + (c^2 b_0^2 - k_0) \frac{r_0}{r} - \frac{l_0^2}{r^2} + \frac{l_0^2 r_0}{r^3}. \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante k_0 kann im Prinzip jeden Wert annehmen. Für eine radiale Bahn $r(s)$, die für großen Abstand zum Zentrum asymptotisch in den flachen

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

Minkowski-Raum mündet, so dass dort im Unendlichen die Bahngeschwindigkeit gleich v_∞ ist, folgt zwischen der Endgeschwindigkeit v_∞ und dem Parameter k_0 der Zusammenhang

$$\begin{aligned} 0 < k_0 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{c} \frac{dr}{d\tau} \right)^2 \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{c} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \frac{\frac{v_\infty^2}{c^2}}{1 - \frac{v_\infty^2}{c^2}}. \end{aligned} \quad (11.75)$$

Mit (11.70) folgt somit im flachen Raum die Relation

$$\begin{aligned} r &\rightarrow \infty \\ k_0 &= -1 + c^2 b_0^2. \end{aligned} \quad (11.76)$$

Für Bahnen $r(s)$, die nicht bis ins Unendliche reichen, gilt die Aussage (11.76) aber ebenfalls! Das folgt aus einem Erhaltungssatz, der direkt aus der Schwarzschild-Metrik folgt, in dem wir (11.56) durch $ds^2 > 0$ „dividieren“. Unter Berücksichtigung der Erhaltungssätze (11.74), (11.69) und (11.68) folgt dann

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{ds}{ds} \right)^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \\ &= \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) c^2 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r^2 \left[\left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{ds} \right)^2 \sin^2 \vartheta \right] \\ &= \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \left(\frac{cb_0}{1 - \frac{r_0}{r(s)}} \right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_0}{r}} \left[k_0 + (c^2 b_0^2 - k_0) \frac{r_0}{r} - \frac{l_0^2}{r^2} + \frac{l_0^2 r_0}{r^3} \right] - r^2 \left(\frac{l_0}{r^2} \right)^2 \\ &= \frac{c^2 b_0^2 - k_0 - (c^2 b_0^2 - k_0) \frac{r_0}{r} + \frac{l_0^2}{r^2} - \frac{l_0^2 r_0}{r^3}}{1 - \frac{r_0}{r}} - \frac{l_0^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (11.77)$$

Diese Beziehung muss für jeden beliebigen Wert r gelten. Für $r \rightarrow \infty$ folgt hieraus

$$c^2 b_0^2 - k_0 = 1. \quad (11.78)$$

Für eine Bahnkurve $r(s)$, die nicht bis ins Unendliche reicht, ist allerdings im Unterschied zu (11.75) jetzt auch $k_0 \leq 0$ möglich.

Den Erhaltungssatz (11.74) für die radiale Koordinate $r(s)$ dürfen wir nach dem Gesagten umschreiben zu

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 &= k_0 + \frac{r_0}{r} - \frac{l_0^2}{r^2} + \frac{l_0^2 r_0}{r^3} & (11.79) \\ \Rightarrow k_0 &= \left[\frac{dr(s)}{ds}\right]^2 + V_{\text{eff}}(r; l_0, r_0) \\ V_{\text{eff}}(r; l_0, r_0) &\equiv \left(\frac{l_0^2}{r^2} + 1\right) \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) - 1. \end{aligned}$$

Für $r_0 \ll r$ ist eine enge Analogie zum Kepler-Problem erkennbar, doch für $r < r_0$ wird $V_{\text{eff}}(r; l_0, r_0) < 0$. Im letzteren Fall existiert kein stabiler Orbit mehr, das Testteilchen stürzt auf einer Art Spiralbahn bis ins Zentrum.

11.4 Perihel-Rotation

Von Interesse ist die parametrisch definierte Bahnkurve $[r(s), \alpha(s)]$ eines *stabilen* Orbits, den wir jetzt mit dem Erhaltungssatz (11.68) berechnen wollen, in dem wir den Parameter s eliminieren und die Radialfunktion $r = r(\alpha)$ auf der gesuchten Trajektorie als Funktion des Winkels α ausdrücken:

$$\frac{dr(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\frac{dr(s)}{ds}}{\frac{d\alpha(s)}{ds}} = \frac{\pm \sqrt{k_0 + \frac{r_0}{r} - \frac{l_0^2}{r^2} + \frac{l_0^2 r_0}{r^3}}}{\frac{l_0}{r^2}}. \quad (11.80)$$

Ein stabiler Orbit ist eine *gebundene* Bahnkurve $r(\alpha)$, charakterisiert durch eine untere Grenze r_1 und eine obere Grenze r_2 , so dass stets gilt

$$r_0 < r_1 \leq r(\alpha) \leq r_2. \quad (11.81)$$

Für jeden Wert $r(\alpha)$ gibt es zwei Werte von $\frac{dr(\alpha)}{d\alpha}$, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden. Somit schwankt $r(\alpha)$ *periodisch* zwischen seinem minimalen Wert r_1 und seinem maximalen Wert r_2 . An den Umkehrpunkten der Bahn, die durch die Forderung $r(\alpha_1) \stackrel{!}{=} r_1 > 0$ und $r(\alpha_2) \stackrel{!}{=} r_2 > 0$ zu bestimmen sind, verschwindet die erste Ableitung:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_1} \frac{dr(\alpha)}{d\alpha} = 0 = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_2} \frac{dr(\alpha)}{d\alpha}. \quad (11.82)$$

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

Es folgt so aus (11.80):

$$\begin{aligned}
 0 &= \left[\frac{dr(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1} \right]^2 = \frac{r_1^2}{l_0} \left(k_0 + \frac{r_0}{r_1} - \frac{l_0^2}{r_1^2} + \frac{l_0^2 r_0}{r_1^3} \right) \\
 0 &= \left[\frac{dr(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2} \right]^2 = \frac{r_2^2}{l_0} \left(k_\infty + \frac{r_0}{r_2} - \frac{l_0^2}{r_2^2} + \frac{l_0^2 r_0}{r_2^3} \right).
 \end{aligned} \tag{11.83}$$

Man erhält aus den Forderungen (11.83) für das Verschwinden der Ableitungen an den *Umkehrpunkten* r_1 und r_2 nun zwei lineare Gleichungen, die es erlauben, die Integrationskonstanten k_∞ und l_0^2 durch den minimalen Radius r_1 und den maximalen Radius r_2 auszudrücken:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{r_0}{r_1^3} - \frac{1}{r_1^2} \\ 1 & \frac{r_0}{r_2^3} - \frac{1}{r_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 \\ l_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{r_0}{r_1} \\ -\frac{r_0}{r_2} \end{pmatrix}. \tag{11.84}$$

Also

$$\begin{aligned}
 r_0 &< r_1 \leq r_2 < \infty \\
 k_0 &= -r_0 \frac{1 - r_0 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}{r_1 \left(1 - \frac{r_0}{r_2} \right) + r_2 \left(1 - \frac{r_0}{r_1} \right) - r_0} < 0 \\
 l_0^2 &= \frac{r_0 r_1 r_2}{r_1 \left(1 - \frac{r_0}{r_2} \right) + r_2 \left(1 - \frac{r_0}{r_1} \right) - r_0} > 0.
 \end{aligned} \tag{11.85}$$

Mit der im Kepler-Problem bewährten Substitution für den reziproken Radius

$$u(\alpha) = \frac{1}{r(\alpha)} \tag{11.86}$$

folgt dann

$$\frac{du}{d\alpha} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\alpha}. \tag{11.87}$$

Somit

$$\left(l_0 \frac{du}{d\alpha} \right)^2 = k_0 + r_0 u - l_0^2 u^2 + l_0^2 r_0 u^3. \tag{11.88}$$

Es gilt jetzt, den Einfluss der Raumkrümmung auf die Periode dieser *radialen* Oszillation abzuschätzen. Ableiten nach dem Winkel α ergibt nach Kürzen des Faktors $\frac{du(\alpha)}{d\alpha} \neq 0$ auf beiden Seiten der Differentialgleichung

$$2l_0^2 \frac{d^2 u}{d\alpha^2} = r_0 - 2l_0^2 u + 3l_0^2 r_0 u^2. \quad (11.89)$$

Umstellen liefert schließlich die zum Kepler-Problem analoge Differentialgleichung des Einkörperproblems für die Trajektorie eines Teilchens im Gravitationsfeld eines kugelförmigen Himmelskörpers nach der Theorie von Einstein zu

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} + u = \frac{r_0}{2l_0^2} + \frac{3r_0}{2} u^2. \quad (11.90)$$

Wir gehen zu *dimensionslosen* Größen über und schreiben

$$\begin{aligned} U(\alpha) &= r_1 u(\alpha) \\ a &= \frac{r_1 r_0}{2l_0^2} \\ \varepsilon &= \frac{3r_0}{2r_1}. \end{aligned} \quad (11.91)$$

Dann folgt

$$\frac{d^2 U}{d\alpha^2} + U = a + \varepsilon U^2. \quad (11.92)$$

Der nichtlineare Term proportional zur Konstanten ε auf der rechten Seite repräsentiert den Effekt der Raumkrümmung. Für $\varepsilon = 0$ beschreibt der Planet die bekannte Bahn einer Kepler-Ellipse mit Periode 2π :

$$U(\alpha, \varepsilon = 0) = a + b \cos \alpha = \frac{r_1}{r(\alpha, \varepsilon = 0)}. \quad (11.93)$$

Der Parameter b lässt sich leicht durch r_1 und r_2 ausdrücken. Für $\varepsilon \neq 0$ ist die Periode wegen des nichtlinearen Terms u^2 zunächst unbekannt. Ändert sich die Periode der radialen Oszillationen gegenüber dem Fall $\varepsilon = 0$, ist die Bahn zwar periodisch, aber nicht länger eine Ellipse.

Wir betrachten jetzt ausschließlich Bahnen, die zum Schwarzschildradius einen großen Abstand haben, also $\varepsilon = \frac{3r_0}{2r_1} \ll 1$. Dann kann die Abweichung der Bahn von

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

einer Kepler-Ellipse in Störungsrechnung nach dem Parameter ε näherungsweise berechnet werden. Mit einem noch zu bestimmenden Parameter p und einer noch zu bestimmenden beschränkten (!) Funktion $W(\alpha)$ machen wir den Ansatz:

$$U(\alpha, \varepsilon) = a + b \cos[\alpha(1 + \varepsilon p)] + \varepsilon W(\alpha) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (11.94)$$

Es folgt mit

$$\frac{d^2 U(\alpha, \varepsilon)}{d\alpha^2} = -(1 + \varepsilon p)^2 b \cos[\alpha(1 + \varepsilon p)] + \varepsilon \frac{d^2 W}{d\alpha^2} \quad (11.95)$$

und

$$\begin{aligned} \varepsilon [U(\alpha, \varepsilon)]^2 &= \varepsilon [a + b \cos[\alpha(1 + \varepsilon p)] + \varepsilon W]^2 \\ &= \varepsilon (a^2 + 2ab \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (11.96)$$

durch Einsetzen in die Differentialgleichung (11.92):

$$\frac{d^2 U}{d\alpha^2} + U = a + b [1 - (1 + \varepsilon p)^2] \cos[\alpha(1 + \varepsilon p)] + \varepsilon \left(\frac{d^2 W}{d\alpha^2} + W \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (11.97)$$

$$\stackrel{!}{=} a + \varepsilon (a^2 + 2ab \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (11.98)$$

Koeffizientenvergleich bzgl. der Potenzen von ε ergibt nun die gesuchte Differentialgleichung für die Funktion $W(\alpha)$:

$$\frac{d^2 W}{d\alpha^2} + W = \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right) + 2b(a + p) \cos \alpha + \frac{b^2}{2} \cos 2\alpha. \quad (11.99)$$

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2 w}{d\alpha^2} + w = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(\omega_n \alpha) \quad (11.100)$$

lautet

$$w(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{1 - \omega_n^2} \cos(\omega_n \alpha) + c_0 \cos(\alpha - \alpha_0). \quad (11.101)$$

Wenn der treibende Term mit einer Eigenfrequenz $\omega_m = 1$ der homogenen Lösung der Differentialgleichung oszilliert, kommt es bekanntlich zur „Resonanzkatastrophe“, d.h. es gibt im vorliegenden Fall für $a + p \neq 0$ eine linear mit dem Winkel α ansteigende Amplitude in der Lösungsfunktion $W(\alpha)$, letztere wäre dann unbeschränkt. Um das zu vermeiden, bestimmen wir den Parameter p aus der Forderung

$$p + a = 0, \quad (11.102)$$

so dass der gefährliche Term in (11.99) verschwindet. Somit lautet die Bestimmungsgleichung für $W(\alpha)$ jetzt

$$\begin{aligned} p &= -a & (11.103) \\ \frac{d^2 W}{d\alpha^2} + W &= a^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} \cos 2\alpha \\ \Rightarrow W(\alpha) &= a^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2(1-4)} \cos 2\alpha \\ &= a^2 + \frac{b^2}{2} \left(1 - \frac{\cos 2\alpha}{3}\right). \end{aligned}$$

Für Bahnen mit großem Abstand zum Schwarzschildradius ist $\varepsilon \ll 1$. Die gesuchte *periodische* Lösung lautet demnach in führender Ordnung, wenn wir die (nach Beseitigung der Resonanzkatastrophe) jetzt stets kleine Korrektur $\varepsilon W(\alpha)$ unberücksichtigt lassen:

$$U(\alpha, \varepsilon) = a + b \cos[\alpha(1 - \varepsilon a)] + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (11.104)$$

Aus der Forderung

$$U(\alpha + \Omega, \varepsilon) \stackrel{!}{=} U(\alpha, \varepsilon) \quad (11.105)$$

folgt somit die gesuchte Periode Ω der radialen Oszillationen in führender Ordnung zu

$$\begin{aligned} \Omega(1 - \varepsilon a) &= 2\pi & (11.106) \\ \Rightarrow \Omega &= \frac{2\pi}{1 - \varepsilon a} \simeq 2\pi(1 + \varepsilon a). \end{aligned}$$

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

Die gesuchte Bahnkurve $r(\alpha)$ nach der Gravitationstheorie von Einstein lautet dann in führender Ordnung

$$\begin{aligned} r(\alpha) &= \frac{r_1}{a + b \cos[\alpha(1 - \varepsilon a)]} + \mathcal{O}(\varepsilon) & (11.107) \\ \varepsilon &= \frac{3r_0}{2r_1} \\ a &= \frac{r_0 r_1}{2l_0^2}. \end{aligned}$$

In kartesischen Koordinaten ist die Position des Planeten in der Ebene $\vartheta = 0$ gegeben durch den Vektor

$$\mathbf{r}(\alpha) = \left[r(\alpha) \cos \alpha, \quad r(\alpha) \sin \alpha \right], \quad (11.108)$$

siehe Abbildung 11.1.

Aufgrund der Periodizitätseigenschaft der Radiusfunktion,

$$r(\alpha + \Omega) = r(\alpha), \quad (11.109)$$

ist die Verschiebung der Position des Planeten am Umkehrpunkt $r(\alpha_2) = r_2$ (dem sog. Perihel) nach einem Umlauf gegeben zu

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}(\alpha_2 + \Omega) - \mathbf{r}(\alpha_2) & (11.110) \\ &= r(\alpha_2 + \Omega) \left[\cos(\alpha_2 + \Omega), \quad \sin(\alpha_2 + \Omega) \right] - r(\alpha_2) \left[\cos(\alpha_2), \quad \sin(\alpha_2) \right] \\ &= r_2 [\cos(\alpha_2 + \Omega) - \cos(\alpha_2), \sin(\alpha_2 + \Omega) - \sin(\alpha_2)] \\ &= r_2 [\cos(\alpha_2 + 2\pi + 2\pi\varepsilon a) - \cos(\alpha_2), \sin(\alpha_2 + 2\pi + 2\pi\varepsilon a) - \sin(\alpha_2)] \\ &= r_2 [\cos(\alpha_2 + 2\pi\varepsilon a) - \cos(\alpha_2), \sin(\alpha_2 + 2\pi\varepsilon a) - \sin(\alpha_2)] \\ &= 2\pi\varepsilon a \cdot r_2 [-\sin \alpha_2, \cos \alpha_2] + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Der sog. *Perihelshift* ist demnach

$$\begin{aligned} \Delta s &= |\mathbf{r}(\alpha_2 + \Omega) - \mathbf{r}(\alpha_2)| = r_2 \Delta \alpha & (11.111) \\ \Delta \alpha &= \Omega - 2\pi = 2\pi a \varepsilon = \frac{3\pi}{2} \frac{r_0^2}{l_0^2}. \end{aligned}$$

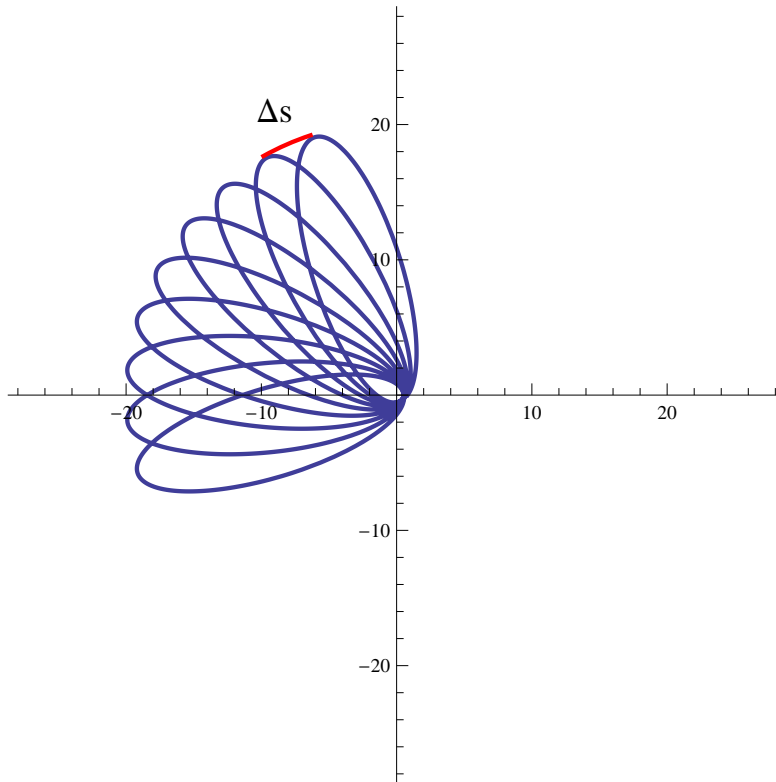


Abbildung 11.1: Ausschnitt der Bahn eines Planeten im Orbit um einen Stern nach der Gravitationstheorie von Einstein.

Bemerkung

Dass die Umlaufbahn von Merkur keine exakte Kepler-Ellipse ist, sondern eine Perihelrotation aufweist, das war in der Astronomie schon länger bekannt, und wurde zunächst gravitativen Einflüssen zugeschrieben, die insbesondere vom Quadrupolmoment der Massenverteilung des Nachbarplaneten Venus und den großen Planeten im Sonnensystem herrühren. Nach Abzug dieses konventionellen himmelsmechanischen Effekts, der etwa $532''$ pro 100 Jahre beträgt⁴, blieb aber noch

⁴Die in der Astronomie übliche Einheit für kleine Winkeländerungen ist

$$1 \text{ [Bogensekunde]} \equiv 1'' = \frac{2\pi}{360 \times 60 \times 60} = \frac{2\pi}{1.296} 10^{-6}.$$

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

eine Differenz von etwa $43''$ pro 100 Jahre übrig. Diese *Perihelanomalie* von zusätzlichen ca. $43''$ pro Jahrhundert beim Planeten Merkur kann überzeugend mit der Gravitationstheorie von Einstein erklärt werden.

11.5 Ablenkung eines Lichtstrahls im Schwerefeld einer Massenkugel

Die scheinbare Verschiebung der bekannten Position von Sternen am Nachthimmel, deren Lichtstrahl während einer Sonnenfinsternis dicht am Rand der Sonne vorbeigeht, lässt sich als die *Ablenkung* des Lichts im Schwerefeld der Sonne deuten. Um den Effekt zu beschreiben, betrachten wir zunächst ein massives Teilchen, das bereits im (fast) flachen Raum in großer Entfernung zur Sonne mit großer Geschwindigkeit $|\mathbf{v}_\infty| < c$ startet, wobei die Orientierung von \mathbf{v}_∞ so gewählt ist, dass die Bahn des Teilchens bis auf den Abstand $a \gg r_0$ an die Sonne herankommt, bevor es sich dann wieder von der Sonne entfernt und zurück in den flachen Raum fliegt, siehe Abbildung 11.2. Handelt es sich bei dem Teilchen um ein Photon, so ist am Ende der Rechnung der Limes $|\mathbf{v}_\infty| \rightarrow c$ zu bilden.⁵

Nach dem Gesagten gilt am Punkt des kürzesten Abstands der Bahnkurve $r(s)$ des Testteilchens zum Ursprung des Koordinatensystems

$$r(s_a) = a \tag{11.112}$$

$$0 = \left(\frac{dr}{ds} \right)_{s=s_a} = \sqrt{k_0 + \frac{r_0}{a} - \frac{l_0^2}{a^2} + \frac{l_0^2 r_0}{a^3}}.$$

Aus dieser Forderung bestimmt man unschwer den Parameter l_0^2 als Funktion von a zu

$$l_0^2 = a^2 \frac{k_0 + \frac{r_0}{a}}{1 - \frac{r_0}{a}}. \tag{11.113}$$

⁵Eigentlich müsste man auf Basis der (kovarianten) Maxwell-Gleichungen eine Rechnung machen, bei der sich elektromagnetische Signale in der gekrümmten Raumzeit der (äußeren) Schwarzschild-Metrik ausbreiten.

11.5 Ablenkung eines Lichtstrahls im Schwerfeld einer Massenkugel

An den übrigen durch $s \neq s_a$ gegebenen Punkten $r = r(s)$ der Bahn gilt dann

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 &= k_0 + \frac{r_0}{r} - \frac{l_0^2}{r^2} + \frac{l_0^2 r_0}{r^3} \\
 &= k_0 + \frac{r_0}{r} - \frac{l_0^2}{a^2} \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{r_0 a^2}{r^3} \right) \\
 &= k_0 + \frac{r_0}{r} - \frac{k_0 + \frac{r_0}{a}}{1 - \frac{r_0}{a}} \frac{a^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \\
 &= k_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \frac{1 - \frac{r_0}{r}}{1 - \frac{r_0}{a}} \right) + \frac{r_0}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \frac{1 - \frac{r_0}{r}}{1 - \frac{r_0}{a}} \right).
 \end{aligned} \tag{11.114}$$

Dem Erhaltungssatz (11.68) entnehmen wir jetzt für die Bahn des Winkels α als Funktion der Radialkoordinate r die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
 \frac{d\alpha}{dr} &= \frac{\frac{d\alpha(s)}{ds}}{\frac{dr}{ds}} = \frac{\frac{l_0}{r^2}}{\frac{dr}{ds}} \\
 &= \frac{1}{r^2} \frac{\sqrt{a^2 \frac{k_0 + \frac{r_0}{a}}{1 - \frac{r_0}{a}}}}{\sqrt{k_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \frac{1 - \frac{r_0}{r}}{1 - \frac{r_0}{a}} \right) + \frac{r_0}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \frac{1 - \frac{r_0}{r}}{1 - \frac{r_0}{a}} \right)}}.
 \end{aligned} \tag{11.115}$$

Gemäß (11.76) gilt aber $k_0 \rightarrow \infty$ für $|\mathbf{v}_\infty| \rightarrow c$. Demnach lautet die gesuchte Bahngleichung für ein an der Massenkugel M vorbeifliegendes *Photon* in der Schwarzschild-Metrik

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{v}_\infty| &\rightarrow c \\
 \frac{d\alpha}{dr} &= \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{a}}} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \frac{1 - \frac{r_0}{r}}{1 - \frac{r_0}{a}}}} \\
 &= \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{a}}} \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2 \frac{1 - \frac{r_0}{r}}{1 - \frac{r_0}{a}}}} \\
 &= \frac{a}{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 \left(1 - \frac{r_0}{a} \right) - a^2 \left(1 - \frac{r_0}{r} \right)}}
 \end{aligned} \tag{11.116}$$

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a}{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2 + r_0 a \left(\frac{a}{r} - \frac{r^2}{a^2} \right)}} \\
 &= \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0 a \left(\frac{a}{r} - \frac{r^2}{a^2} \right)}{r^2 - a^2}}} \\
 &= \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0 a a^2 r \left(\frac{a}{r} - \frac{r^2}{a^2} \right)}{a^2 r (r^2 - a^2)}}} \\
 &= \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0 a (a^3 - r^3)}{a^2 r (r^2 - a^2)}}} \\
 &= \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{a} \frac{r^3 - a^3}{r(r^2 - a^2)}}} \\
 &= \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{a} \frac{(r-a)(r^2 + ra + a^2)}{r(r-a)(r+a)}}} \\
 &= \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{a} \frac{r^2 + ra + a^2}{r(r+a)}}}.
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt insgesamt die Änderung des Winkels α zwischen der einlaufenden und der auslaufenden Bahn eines Photons (Orientierungsänderung des Lichtstrahls) im Schwerefeld einer Massenkugel M zu

$$\Delta\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} dr \frac{d\alpha}{dr} = \int_{-\infty}^{\infty} dr \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{a} \frac{\frac{r^2}{a^2} + \frac{r}{a} + 1}{\frac{r}{a} \left(\frac{r}{a} + 1 \right)}}}. \quad (11.117)$$

Mit der Substitution

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{a}{\cos \gamma} \\
 \frac{dr}{d\gamma} &= a \frac{\sin \gamma}{\cos^2 \gamma}
 \end{aligned} \quad (11.118)$$

11.5 Ablenkung eines Lichtstrahls im Schwerfeld einer Massenkugel

folgt dann

$$\begin{aligned}
 \Delta\alpha &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\gamma \frac{a \sin \gamma \cos \gamma}{\cos^2 \gamma} \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \gamma} - 1}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{a} \frac{\frac{1}{\cos^2 \gamma} + \frac{1}{\cos \gamma} + 1}{\frac{1}{\cos \gamma} (\frac{1}{\cos \gamma} + 1)}}} \quad (11.119) \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{a} \frac{1 + \cos \gamma + \cos^2 \gamma}{1 + \cos \gamma}}} \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{a} \left(\frac{1}{1 + \cos \gamma} + \cos \gamma \right)}}.
 \end{aligned}$$

Für $a \gg r_0$ ergibt sich der Wert des Integrals in führender Ordnung bzgl. des kleinen Parameters $\frac{r_0}{a}$ zu

$$\Delta\alpha = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\gamma \left[1 + \frac{r_0}{2a} \left(\frac{1}{1 + \cos \gamma} + \cos \gamma \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{r_0^2}{a^2} \right). \quad (11.120)$$

Die verbleibende Integration ergibt

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\gamma &= \pi \quad (11.121) \\
 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\gamma \left(\frac{1}{1 + \cos \gamma} + \cos \gamma \right) &= 4.
 \end{aligned}$$

Es folgt in führender Ordnung das Ergebnis

$$\Delta\alpha = \pi + \frac{2r_0}{a} + \mathcal{O} \left(\frac{r_0^2}{a^2} \right). \quad (11.122)$$

Die Größe des *Ablenkungswinkel* $\Delta\alpha - \pi$ eines vom flachen Raum her einfallenden Lichtstrahls (hin zum Zentrum der Sonne) ist demnach proportional zum Kehrwert des *kleinsten* Abstands a , den die Bahn des Lichtstrahls vom Zentrum der kugelförmigen Massenverteilung entfernt ist.

Für Photonen, die bei einer Sonnenfinsternis streifend am Rand der Sonne vorbeifliegen, gilt

$$a = R_{\text{Sonne}} = 6.96 \times 10^5 \text{ [km]}. \quad (11.123)$$

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

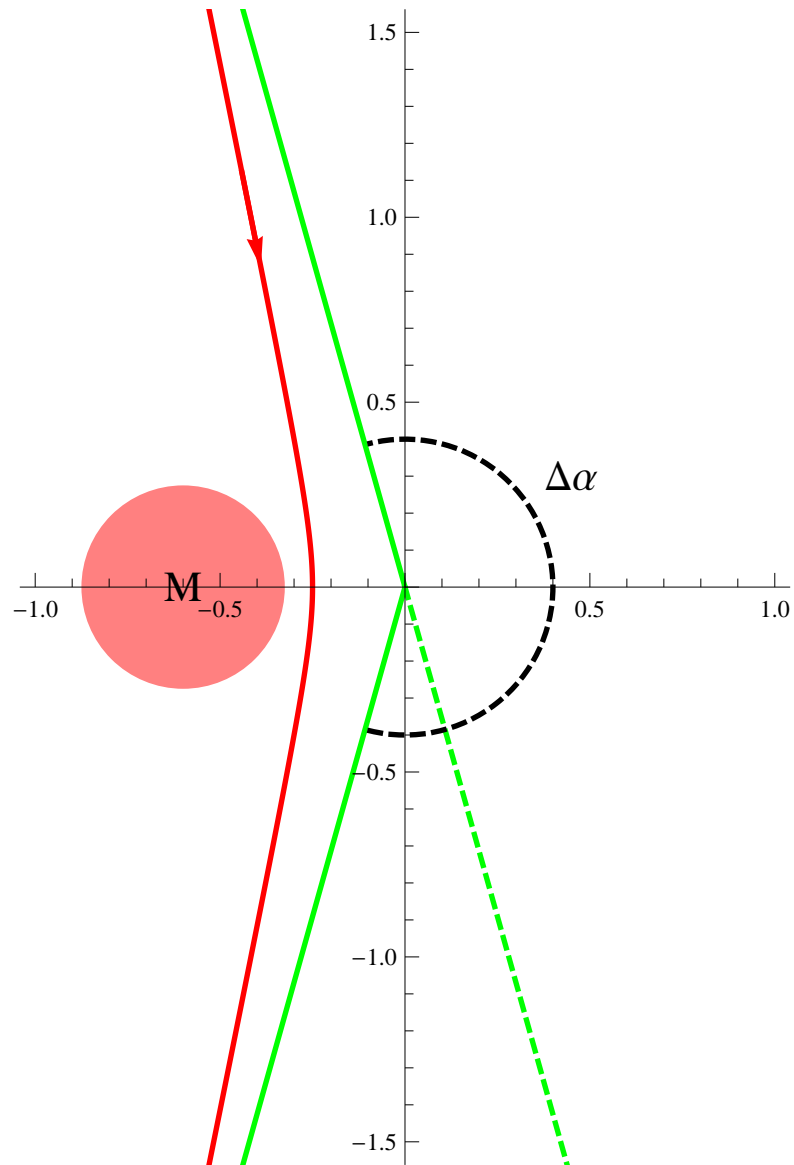


Abbildung 11.2: Ablenkung eines Lichtstrahls durch eine Massenkugel

Hieraus folgt mit dem Schwarzschild-Radius der (kugelförmigen!) Sonne

$$r_0 = r_{0,\text{Sonne}} = 2.952 \text{ [km]}, \quad (11.124)$$

11.6 Gravitative Rotverschiebung

dass in der Umgebung der Sonne ein den Rand der Sonne streifender Lichtstrahl um den Winkel

$$\Delta\alpha - \pi = \frac{2r_{0,\text{Sonne}}}{R_{\text{Sonne}}} = \frac{2 \times 2.952}{6.96 \times 10^5} \times \frac{1.296}{2\pi} 10^6 \times \left(\frac{2\pi}{1.296} 10^{-6} \right) = 1.75'' \quad (11.125)$$
$$1'' = 1[\text{Bogensekunde}] = \frac{2\pi}{360 \times 60 \times 60} = \frac{2\pi}{1.296} 10^{-6}$$

aus seiner ursprünglichen Flugrichtung abgelenkt erscheint.

Bemerkung

Zur Sonnenfinsternis am 29. Mai 1919 reisten englische Astronomen zur Vulkaninsel Príncipe vor der westafrikanischen Küste. Während der Phase der Sonnenfinsternis machten sie photographische Aufnahmen des sich zur damaligen Zeit in Sonnenumgebung befindlichen Sternhaufens der Hyaden, und es wurden die Positionen der darauf erkennbaren Sterne mit Aufnahmen des *gleichen* Himmelsausschnitts verglichen, die etwas *später* im Juli 1919 angefertigt wurden, als sich die Sonne aus der betreffenden Himmelsregion genügend weit entfernt hatte. Die Auswertung zeigte, dass das Sternenlicht tatsächlich vom Gravitationsfeld der Sonne abgelenkt worden war (damals mit einem Messfehler von ca. 20%), und wurde als in guter Übereinstimmung mit den Vorhersagen von Albert Einstein gewertet. Als um 1920 bekannt wurde, dass die Beobachtungen mit den Vorhersagen übereinstimmten, wurde Albert Einstein zum medialen Superstar.

Mit dem ESA Satelliten Hipparcos wurden zwischen 1989 und 1993 die Positionen von mehr 100 000 Sternen jeweils 100 Mal vermessen. Ein Ergebnis dieser Mission war die Bestätigung der Ablenkung des Sternenlichts im Gravitationsfeld der Sonne nach der Theorie von Einstein im Rahmen eines Fehlers von ca. 3%.

11.6 Gravitative Rotverschiebung

Im allgemeinen ist der *physikalische* Abstand ds_1 zweier Beobachter P_1 und P_2 , die sich zur Koordinatenzeit $t = 0$ auf der Kugelschale mit Radius $r = r_1$ bzw. $r = r_2 = r_1 + dr$ in der Schwarzschild-Metrik (11.56) am Ort $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = 0$

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

befinden, gegeben zu

$$dt = 0 \ \& \ d\vartheta = 0 \ \& \ d\alpha = 0 \quad (11.126)$$

$$ds_1 = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r_1}}}.$$

Die Koordinatendifferenz dr gibt jedoch in der Nähe von r_0 überhaupt nicht den tatsächlichen Abstand ds_1 der beiden benachbarten Kugelschalen am Ort $r = r_1$ an! Erst wenn die Kugelschale mit Radius $r = r_1$ einen großen Abstand zu r_0 besitzt, $r_0 \ll r_1$, strebt die Schwarzschild-Metrik gegen die flache Minkowski-Metrik, so dass gilt $ds_1 = dr$. In der gekrümmten Raumzeit müssen physikalische Abstände zwischen verschiedenen Ereignispunkten immer mittels der Metrik berechnet werden!

Entsprechend (11.56) muss zwischen einem Intervall Δt der *Koordinatenzeit* und einem Intervall $\Delta\tau_1$ der *Eigenzeit* auf der Kugelschale $r = r_1$ unterschieden werden. Für die Beobachter P_1 und P_2 gilt dann jeweils

$$dr = 0 \ \& \ d\vartheta = 0 \ \& \ d\alpha = 0 \quad (11.127)$$

$$\Delta\tau_1 = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r_1}} \Delta t$$

$$\Delta\tau_2 = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r_2}} \Delta t.$$

Man erhält nach Elimination der Koordinatenzeitspanne Δt für die beiden Eigenzeitintervalle $\Delta\tau_1$ und $\Delta\tau_2$ den Zusammenhang

$$\Delta\tau_2 = \frac{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r_2}}}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r_1}}} \Delta\tau_1 \quad (11.128)$$

$$r_2 > r_1 \Rightarrow \Delta\tau_2 > \Delta\tau_1.$$

Uhren in verschiedenen Entfernungen zum Zentrum einer Massenkugel ticken demnach unterschiedlich schnell. Eine weiter entfernt positionierte Uhr tickt schneller als eine näher am Zentrum liegende.

In einem Experiment sendet ein auf der Kugelschale $r = r_1$ *ruhender* Beobachter P_1 während eines Eigenzeitintervalls $\Delta\tau_1$ eine Anzahl N von Wellenzügen eines

11.6 Gravitative Rotverschiebung

monochromatischen Lichtsignals der Frequenz ν_1 in radialer Richtung hin zum Beobachter P_2 . Der auf der Kugelschale $r = r_2$ ebenfalls *ruhende* Beobachter P_2 registriert dann während der Zeit $\Delta\tau_2$ die gleiche Anzahl N von Wellenzügen wie der Beobachter P_1 , da der zeitliche Abstand Δt (ausgedrückt in der *Koordinatenzeit*) von zwei aufeinanderfolgenden Wellenbergen entlang der Trajektorie des Lichts von r_1 nach r_2 in einer statischen (!) Raumzeit konstant bleibt. Dann dürfen wir schreiben

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\frac{N}{\nu_1}}{\frac{N}{\nu_2}} = \frac{\Delta\tau_1}{\Delta\tau_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r_1}}}{\sqrt{1 - \frac{r_0}{r_2}}} \quad (11.129)$$

$$r_2 > r_1 \Rightarrow \nu_2 < \nu_1.$$

Die Frequenz einer am Ort r_1 in Ruhe befindlichen Strahlungsquelle (z.B. ein angeregtes ^{87}Rb -Atom) erscheint hin zu kleineren Frequenzen verschoben, $\nu_2 < \nu_1$, wenn man sich das ausgesendete Licht des Atoms von einem ruhenden Ort r_2 aus anschaut, für den gilt $r_2 > r_1$. Das ist der Effekt der *gravitativen Rotverschiebung*.

Befindet sich der Beobachter P_1 z.B. auf der Erdoberfläche, $r_1 = R_{\text{Erde}}$, und der Beobachter P_2 in der Höhe $z \ll R_{\text{Erde}}$ über dem Erdboden, $r_2 = R_{\text{Erde}} + z$, so gilt mit $r_{0,\text{Erde}}$ als Schwarzschild-Radius (11.60) der Massenkugel Erde:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{r_{0,\text{Erde}}}{r_1}}}{\sqrt{1 - \frac{r_{0,\text{Erde}}}{r_2}}} \quad (11.130)$$

$$= 1 + \frac{r_{0,\text{Erde}}}{2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{z^2}{R^2} \right)$$

$$= 1 - \frac{GM_{\text{Erde}}}{c^2} \frac{z}{R^2} + \mathcal{O} \left(\frac{z^2}{R^2} \right).$$

Mit der Erdbeschleunigung

$$g = \frac{GM_{\text{Erde}}}{R^2} \quad (11.131)$$

folgt dann

$$\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1} = \frac{gz}{c^2}. \quad (11.132)$$

Dieses Ergebnis ist anschaulich. Steigt ein Testteilchen mit Ruhemasse m im Schwerfeld der Erde vom Erdboden $r_1 = R$ auf zu einer Höhe $r_2 = R + z$, so muss

11 Ausblick auf die Gravitationstheorie von Einstein

dazu eine Energie

$$\Delta\mathcal{E} = mgz = \frac{\mathcal{E}_0}{c^2}gz \quad (11.133)$$

aufgewendet werden. Bei der letzten Umformung wurde die Äquivalenz von Masse und Energie verwendet (10.259). Handelt es sich bei dem Teilchen um ein Photon, das am Boden die Frequenz ν_1 besaß, so ist dessen Energie am Ort r_1 gemäß der Quantenmechanik mit der Planckschen Konstante h gegeben zu $\mathcal{E}_0 = h\nu_1$. Also folgt die Energieänderung eines bei $r = r_1$ emittierten Photons beim Aufstieg nach oben zu

$$h(\nu_1 - \nu_2) \equiv \Delta\mathcal{E} = \frac{h\nu_1}{c^2}gz, \quad (11.134)$$

was zu (11.132) äquivalent ist. Dieser gravitative Energieverlust eines im Schwerfeld der Erde aufsteigenden Photons (Gammastrahlung) wurde von Pound und Rebka 1959 mit dem Mössbauer-Effekt sehr genau gemessen, in völliger Übereinstimmung mit der Vorhersage von Einstein betreffend die *Rotverschiebung* von elektromagnetischer Strahlung im Gravitationsfeld.

Gravitationswellen

Kleine zeitlich veränderliche Fluktuationen der Raumzeit-Krümmung mit Bezug auf eine *flache* Hintergrundmetrik, breiten sich, wie man durch Linearisieren der Einsteinschen Feldgleichungen (11.31) zeigen kann, mit der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c aus. Dies sind die von Einstein vorhergesagten *Gravitationswellen*. Diese experimentell nachzuweisen ist ein hochaktuelles Thema in der astrophysikalischen Forschung.

Anhang

A Maßsysteme der Elektrodynamik

Der Betrag der *elektrostatischen* Kraft, die zwei Punktladungen q_1 und q_2 im Abstand $|r_{12}|$ aufeinander ausüben, ist gemäß dem Coulomb-Gesetz gegeben zu

$$|\mathbf{F}^{(\text{el})}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{|r_{12}|^2}. \quad \begin{array}{c} q_1 \quad \quad \quad q_2 \\ \bullet \quad \quad \quad \bullet \\ |r_{12}| \end{array} \quad (\text{A.1})$$

Der entsprechende Betrag $|\mathbf{F}^{(\text{mag})}|$ der *magnetostatischen* Kraft, die zwei dünne geradlinige, sehr lange und strikt *parallel* orientierte Drähte im Abstand $|r_{12}|$ aufeinander ausüben, wenn der eine Draht einen Gleichstrom I_1 und der andere Draht einen Gleichstrom I_2 trägt, ist pro Länge L der beiden Drähte gegeben zu

$$|\mathbf{F}^{(\text{mag})}| = \frac{\kappa^2 \mu_0}{4\pi} 2L \frac{|I_1 I_2|}{|r_{12}|}. \quad \begin{array}{c} I_1 \uparrow \quad \quad \quad \downarrow I_2 \\ |r_{12}| \end{array} \quad (\text{A.2})$$

Der Quotient dieser beiden Kräfte ist eine *dimensionslose* Zahl, ganz unabhängig davon, auf welches Einheitensystem zur Messung einer Kraft oder einer Ladung man sich verständigt hat,

$$\frac{|\mathbf{F}^{(\text{mag})}|}{|\mathbf{F}^{(\text{el})}|} = \kappa^2 \mu_0 \epsilon_0 \times \frac{2L \frac{|I_1 I_2|}{|r_{12}|}}{\frac{|Q_1 Q_2|}{|r_{12}|^2}}. \quad (\text{A.3})$$

Da die Dimension des elektrischen Stroms I bekanntlich als elektrische Ladung q pro Zeit t gegeben ist, hat das Produkt $\kappa\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ notwendig die Dimension einer inversen Geschwindigkeit:

$$\kappa^2 \mu_0 \epsilon_0 \equiv \frac{1}{c^2}. \quad (\text{A.4})$$

Die Geschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\kappa\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \quad (\text{A.5})$$

ist dabei eine universelle, vom Maßsystem *unabhängige* charakteristische Konstante. Wie wir den Ausführungen in Kapitel 7 entnehmen können (siehe (7.9)), ist c gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen im Vakuum.

Unter Zugrundelegung dieser Erkenntnis kann man die gebräuchlichen Einheitensysteme in zwei Klassen einteilen.

- Bei den *symmetrischen* Maßsysteme wählt man

$$\begin{aligned} \kappa &= 1 \\ \mu_0\varepsilon_0 &= \frac{1}{c^2}. \end{aligned}$$

Das hat augenscheinlich den Vorteil, dass der Ausdruck für die Lorentz-Kraft und auch das Faradaysche Induktionsgesetz die in der Experimentalphysik übliche Gestalt besitzen. Nachteilig ist allerdings, dass die elektromagnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} unterschiedliche physikalische Dimensionen haben. Das Transformationsverhalten der elektromagnetischen Felder in der Relativitätstheorie sieht dann leider in symmetrischen Maßsystemen nicht so elegant aus.

- Bei den *asymmetrischen* Maßsystemen wählt man

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{c} \\ \mu_0\varepsilon_0 &= 1. \end{aligned}$$

Dann haben die elektromagnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} die *gleiche* physikalische Dimension, alle Geschwindigkeiten werden in Einheiten von c gemessen. Alle zeitlichen Ableitungen der elektromagnetischen Felder erhalten einen Faktor $\frac{1}{c}$, so dass sie die gleiche Dimension wie die räumlichen Ableitungen der elektromagnetischen Felder haben. In der Technik übliche Geschwindigkeiten v sind allerdings selten relativistisch, so dass gilt $\frac{v}{c} \ll 1$. Die Verwendung so extrem kleiner Zahlen wird in der technisch orientierten Physik allerdings eher als unpraktisch angesehen.

SI-Einheiten

Das allgemein übliche Maßsystem in der technisch orientierten Physik sind die SI-Einheiten (Système International), ein symmetrisches Maßsystem. Die Einheit des elektrischen Stroms ist das Ampère [A], gemessen als Kraft der Stärke 2×10^{-7} [N], die ein zeitlich unveränderlicher elektrischer Strom in zwei geradlinigen, unendlich langen Leitern mit einem vernachlässigbar kleinen, kreisförmigen Querschnitt elektrodynamisch erzeugt, wenn die beiden Leiter strikt parallel orientiert sind und einen Abstand von 1 [m] zueinander haben. Zur Erinnerung: $1 \text{ [N]} = 1 \left[\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$. Die Einheit der Ladung ist dann abgeleitet, d.h. das Coulomb [C] wird gemessen als Ampère-Sekunde

$$1 \text{ [C]} = 1 \text{ [A} \cdot \text{s]}.$$

Gemäß der Definition der Einheit [A] gilt somit

$$\begin{aligned}\kappa &= 1 \\ \varepsilon_0 &= \frac{10^7}{4\pi} \frac{1}{c^2} \left[\frac{\text{A}^2}{\text{N}} \right] \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7}.\end{aligned}$$

Gaußsche Einheiten

In der theoretischen Physik wird oft das Einheitensystem von Gauß verwendet, ein asymmetrisches Maßsystem. Es gilt vereinbarungsgemäß

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{1}{c} \\ \varepsilon_0 &= \frac{1}{4\pi} \\ \mu_0 &= 4\pi.\end{aligned}$$

Als Dimension der elektrischen Ladung Q ergibt sich $\left[(\text{Kraft})^{\frac{1}{2}} \text{ Länge} \right]$.

Heaviside-Lorentz-Einheiten

Dieses elegante Einheitensystem, das ursprünglich auf Heaviside und Lorentz zurück geht, wird oft in der Quantenfeldtheorie verwendet:

$$\begin{aligned}\kappa &= 1 \\ \varepsilon_0 &= 1 \\ \mu_0 &= 1.\end{aligned}$$

Konversionsfaktoren $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ bei den Feldern und $\sqrt{4\pi}$ bei den Quelltermen bei der Umrechnung von Gauß-Einheiten auf Heaviside-Lorentz-Einheiten führen allerdings dazu, dass z.B. die Kapazität C eines Plattenkondensators mit Fläche $|A|$ und Abstand d zwischen den beiden parallelen Platten (Zwischenraum sei Vakuum) unterschiedliche Darstellungen besitzt. Zum Vergleich

$$\begin{array}{ll} \text{SI} & C = \varepsilon_0 \frac{|A|}{d} \\ \text{Gauß} & C = \frac{|A|}{4\pi d} \\ \text{Heaviside-Lorentz} & C = \frac{|A|}{d} \end{array}$$

In Gaußschen Einheiten hat die Kapazität die Dimension einer Länge! Die Umrechnung in das SI-System erfolgt mit dem Faktor $4\pi\varepsilon_0$. Somit $1\text{cm} \hat{=} \frac{1}{9} \cdot 10^{-11} \left[\frac{\text{A}\cdot\text{s}}{\text{Volt}} \right] = \frac{10}{9} [\text{pF}]$.

B Zur Eindeutigkeit eines Vektorfeldes aus gegebener Rotation und Divergenz

In den Maxwell'schen Gleichungen wird die Divergenz und Rotation der Vektorfelder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ durch deren erste zeitliche Ableitung sowie durch die gegebenen Quellen $\rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ ausgedrückt. Ein solches Gleichungssystem legt $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ eindeutig fest.

Der Grund hierfür ist, dass ein Vektorfeld $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ (mit genügend schnellem Verschwinden für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$) allein durch Vorgabe seiner Divergenz $n(\mathbf{r}) = \text{div } \mathbf{C}(\mathbf{r})$ und seiner Rotation $\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{C}(\mathbf{r})$ eindeutig bestimmt ist.

Angenommen es gäbe zwei verschiedene Lösungen $\mathbf{C}^{(1)}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{C}^{(2)}(\mathbf{r})$ mit

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{C}^{(1)}(\mathbf{r}) &= n(\mathbf{r}) = \text{div } \mathbf{C}^{(2)}(\mathbf{r}) \\ \text{rot } \mathbf{C}^{(1)}(\mathbf{r}) &= \mathbf{m}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{C}^{(2)}(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{B.1}$$

B Zur Eindeutigkeit eines Vektorfeldes aus gegebener Rotation und Divergenz

Dann erfüllt die Differenz

$$\mathbf{C}^{(1,2)}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}^{(1)}(\mathbf{r}) - \mathbf{C}^{(2)}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.2})$$

die homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{C}^{(1,2)}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{C}^{(1,2)}(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Letzteres bedeutet, es gibt eine skalare Potentialfunktion $\phi^{(1,2)}(\mathbf{r})$ mit der Eigenschaft

$$\mathbf{C}^{(1,2)}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi^{(1,2)}(\mathbf{r}). \quad (\text{B.4})$$

Zugleich löst $\phi^{(1,2)}(\mathbf{r})$ aufgrund der ersten der beiden Gleichungen in (B.3) nun die Laplace-Gleichung:

$$\operatorname{div} \mathbf{C}^{(1,2)}(\mathbf{r}) = -\nabla^2\phi^{(1,2)}(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Eine im ganzen Raum reguläre Lösung $\phi^{(1,2)}(\mathbf{r})$ der homogenen Laplace-Gleichung, die im Unendlichen nicht ansteigt, ist aber eine Konstante. Um dies einzusehen verwenden wir den Satz von Gauß für eine Kugel mit Radius R_c und betrachten anschließend den Grenzwert $R_c \rightarrow \infty$. Es gilt nämlich immer

$$\int_{|\mathbf{r}| < R_c} d^3r \operatorname{div} [\phi^{(1,2)}(\mathbf{r}) \nabla\phi^{(1,2)}(\mathbf{r})] = \int_{|\mathbf{r}'| = R_c} d^2r' \mathbf{n}' \cdot [\phi^{(1,2)}(\mathbf{r}') \nabla\phi^{(1,2)}(\mathbf{r}')]. \quad (\text{B.6})$$

Andererseits ist im vorliegenden Fall

$$\operatorname{div} [\phi^{(1,2)}(\mathbf{r}) \nabla\phi^{(1,2)}(\mathbf{r})] = \phi^{(1,2)}(\mathbf{r}) \underbrace{\nabla^2\phi^{(1,2)}(\mathbf{r})}_{=0, \text{ siehe (B.5)}} + \underbrace{\nabla\phi^{(1,2)}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\phi^{(1,2)}(\mathbf{r})}_{\geq 0}. \quad (\text{B.7})$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{R_c \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{r}| < R_c} d^3r \underbrace{\nabla\phi^{(1,2)}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\phi^{(1,2)}(\mathbf{r})}_{\geq 0} \\ &= \lim_{R_c \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{r}'| = R_c} d^2r' \mathbf{n}' \cdot [\phi^{(1,2)}(\mathbf{r}') \nabla\phi^{(1,2)}(\mathbf{r}')] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Es bleibt nur der Schluss $\phi^{(1,2)}(\mathbf{r}) = \text{const}$, anderenfalls wäre die linke Seite der Gleichung positiv, während die rechte Seite den Wert Null liefert. Nach dem Gesagten ist

$$\mathbf{0} = -\nabla\phi^{(1,2)}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}^{(1,2)}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}^{(1)}(\mathbf{r}) - \mathbf{C}^{(2)}(\mathbf{r}), \quad (\text{B.9})$$

womit die Eindeutigkeit der Lösung gezeigt ist. Viel schwieriger ist der Nachweis zu führen, dass eine Lösung überhaupt existiert. Aber immerhin, wenn eine Lösung existiert, dann ist sie eindeutig.

Ausgehend von der bereits bewiesenen Identität (2.14) folgt für ein Vektorfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{C}(\mathbf{r}') \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{r}' = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}(\mathbf{r}') = \text{const},$$

dargestellt in kartesischen Koordinaten, die Relation

$$-\nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{C}(\mathbf{r}'). \quad (\text{B.11})$$

Mit der Identität

$$\text{rot rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \nabla_{\mathbf{r}} [\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{r})] \quad (\text{B.12})$$

folgt sofort durch Umstellen der Terme

$$4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{C}(\mathbf{r}') = \text{rot rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) - \nabla_{\mathbf{r}} [\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{r})]. \quad (\text{B.13})$$

Elementares Differenzieren nach den kartesischen Komponenten r_a des Vektors \mathbf{r} liefert

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}(\mathbf{r}') \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{C}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Also erhalten wir

$$4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{C}(\mathbf{r}') = \text{rot} \left[\mathbf{C}(\mathbf{r}') \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] + \nabla_{\mathbf{r}} \left[\mathbf{C}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right]. \quad (\text{B.14})$$

Sei jetzt

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \mathbf{C}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \mathbf{C}(\mathbf{r}') \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

C Nachweis, dass ein Verschiebungsfeld notwendig solenoidal ist

Wir wollen annehmen, dass das Vektorfeld $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ genügend rasch abfällt, so dass die Integrale existieren. Es folgt gemäß (B.14) durch Integration über die Variable \mathbf{r}' eine Darstellung von $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ als Linearkombination von zwei Vektorfeldern:

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}) + \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (\text{B.15})$$

Das erste Vektorfeld hat verschwindende Rotation, das zweite eine verschwindende Divergenz:

$$\begin{aligned} \text{rot} [-\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r})] &= \mathbf{0} \\ \text{div } \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned}$$

Gleichung (B.15) liefert die gewünschte Zerlegung eines für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ genügend rasch abfallenden Vektorfeldes $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ in ein rotationsfreies und einen divergenzfreies Vektorfeld. Wie eingangs gezeigt wurde, ist diese Darstellung eindeutig, wenn wir setzen

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}) &= -\nabla_{\mathbf{r}}^2\phi(\mathbf{r}) \\ \mathbf{m}(\mathbf{r}) &= \text{rot } \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

C Nachweis, dass ein Verschiebungsfeld notwendig solenoidal ist

Sei $n^{(\Omega)}(\mathbf{r})$ die Teilchendichte eines elastischen Körpers Ω in Abwesenheit von äußeren Kräften. Wirken nun (im adiabatischen Prozess) äußere Kräfte, so wird jeder Punkt im Inneren des Körpers von der Gleichgewichtsposition \mathbf{r} nach $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}')$ verschoben, wobei sich dann auch das Gebiet Ω zum Gebiet Ω' deformiert, d.h. die Teilchendichte $n^{(\Omega)}(\mathbf{r})$ im Gebiet Ω geht über in die Teilchendichte $n^{(\Omega')}(\mathbf{r}') = n^{(\Omega)}[\mathbf{r}' - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}')] im Gebiet Ω' . Da bei der betreffenden Verschiebung keine neuen Teilchen entstehen können, gilt für die Teilchenzahl N_{Ω} im Gebiet $\Omega$$

$$N_{\Omega} = \int_{\Omega} d^3r n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega'} d^3r' n^{(\Omega')}(\mathbf{r}') = N_{\Omega'}. \quad (\text{C.1})$$

Außerhalb des Gebietes Ω ist die Teilchendichte $n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \equiv 0$, entsprechend ist außerhalb des Gebietes Ω' die Teilchendichte $n^{(\Omega')}(\mathbf{r}') \equiv 0$. Somit folgt jetzt mit

der Stufenfunktion $\Theta_H(x)$

$$\Theta_H(x) = \frac{1 + \operatorname{sgn}(x)}{2} \quad (\text{C.2})$$

die Identität

$$\begin{aligned} 0 &= N_{\Omega'} - N_{\Omega} & (\text{C.3}) \\ &= \int_{\Omega'} d^3r' n^{(\Omega')}(\mathbf{r}') - \int_{\Omega} d^3r n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \\ &= \int d^3r \left\{ n^{(\Omega')}(\mathbf{r}) \Theta_H \left[n^{(\Omega')}(\mathbf{r}) \right] - n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \Theta_H \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Bei einer kleinen Amplitude $|\boldsymbol{\eta}|$ der Verschiebung $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$ ist

$$\begin{aligned} n^{(\Omega')}(\mathbf{r}) &= n^{(\Omega)}[\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})] = n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(|\boldsymbol{\eta}|^2) & (\text{C.4}) \\ \Theta_H \left[n^{(\Omega')}(\mathbf{r}) \right] &= \Theta_H \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(|\boldsymbol{\eta}|^2) \right]. \end{aligned}$$

Mit der Relation

$$\frac{d}{dx} \Theta_H(x) = \delta(x) \quad (\text{C.5})$$

entwickeln wir die Stufenfunktion formal in eine Taylor-Reihe und schreiben

$$\Theta_H \left[n^{(\Omega')}(\mathbf{r}) \right] = \Theta_H \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right] - \left[\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right] \delta \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right] + \mathcal{O}(|\boldsymbol{\eta}|^2). \quad (\text{C.6})$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &= N_{\Omega'} - N_{\Omega} = \int d^3r \left\{ n^{(\Omega')}(\mathbf{r}) \Theta_H \left[n^{(\Omega')}(\mathbf{r}) \right] - n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \Theta_H \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right] \right\} \\ &= \int d^3r \left\{ \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(|\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})|^2) \right] \right. \\ &\quad \times \left[\Theta_H \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right] - \left[\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right] \delta \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right] + \mathcal{O}(|\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})|^2) \right] \\ &\quad \left. - n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \Theta_H \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right] \right\} \\ &= \int d^3r \left\{ n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \Theta_H \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right] - \underbrace{\left[\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right] n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \delta \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right]}_{\equiv 0} \right. \\ &\quad \left. - \left[\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right] \Theta_H \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right] + \mathcal{O}(|\boldsymbol{\eta}|^2) - n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \Theta_H \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right] \right\} \\ &= - \int d^3r \left[\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right] \Theta_H \left[n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \right] + \mathcal{O}(|\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})|^2). \quad (\text{C.7}) \end{aligned}$$

D Berechnung zweier Integrale für die Bestimmung der Gegeninduktivität

Es folgt in führender Ordnung für ein Verschiebungsfeld $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$ mit infinitesimaler Amplitude

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega} d^3r \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}} n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) && \text{(C.8)} \\ &= - \int_{\Omega} d^3r \operatorname{div} [\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) n^{(\Omega)}(\mathbf{r})] + \int_{\Omega} d^3r n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \operatorname{div} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \\ &= - \int_{\partial\Omega} d^2r' [\mathbf{n}' \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}')] \underbrace{n^{(\Omega)}(\mathbf{r}')}_{\equiv 0 \text{ für } \mathbf{r}' \in \partial\Omega} + \int_{\Omega} d^3r n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \operatorname{div} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) \\ &= \int_{\Omega} d^3r n^{(\Omega)}(\mathbf{r}) \operatorname{div} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Die Aussage gilt für beliebige Gebiete Ω mit endlich großen Teilchendichten $n^{(\Omega)}(\mathbf{r})$. Hieraus folgt, wie eingangs behauptet, dass das Vektorfeld $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$ solenoidal sein muss:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) = 0.$$

Der Grund hierfür ist die Teilchenzahlerhaltung.

D Berechnung zweier Integrale für die Bestimmung der Gegeninduktivität

D.1 Erstes Integral

Wir berechnen das Integral in (5.111), nämlich

$$\begin{aligned} 0 < a < b &&& \text{(D.1)} \\ I(a, b) &= \int_{-a}^a dx \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{b + x} = \left(\int_0^a + \int_{-a}^0 \right) dx \sqrt{a^2 - x^2} \frac{1}{b + x} \\ &= \int_0^a dx \sqrt{a^2 - x^2} \left(\frac{1}{b + x} + \frac{1}{b - x} \right) \\ &= 2b \int_0^a dx \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{b^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Anhang

Substitution:

$$\begin{aligned}x &= a \cdot \sin \vartheta, & dx &= a \cos \vartheta \cdot d\vartheta \\0 < x < a & \Leftrightarrow & 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}.\end{aligned}\tag{D.2}$$

Es folgt

$$I(a, b) = 2b \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \frac{\cos^2 \vartheta}{\frac{b^2}{a^2} - \sin^2 \vartheta}.\tag{D.3}$$

Verdopplung des Winkels durch

$$\cos^2 \vartheta = \frac{1 + \cos(2\vartheta)}{2}, \quad \sin^2 \vartheta = \frac{1 - \cos(2\vartheta)}{2}.\tag{D.4}$$

Somit

$$\begin{aligned}I(a, b) &= 2b \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \frac{1 + \cos(2\vartheta)}{2\frac{b^2}{a^2} - [1 - \cos(2\vartheta)]} \\&\stackrel{\vartheta' = 2\vartheta}{=} b \int_0^{\pi} d\vartheta' \frac{1 + \cos(\vartheta')}{2\frac{b^2}{a^2} - 1 + \cos(\vartheta')} \\&= \frac{b}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta' \frac{1 + \cos(\vartheta')}{\left(2\frac{b^2}{a^2} - 1\right) + \cos(\vartheta')}.\end{aligned}\tag{D.5}$$

Das Integral berechnen wir mit Hilfe des *Residuensatzes* zu

$$z = e^{i\vartheta'}\tag{D.6}$$

$$I(a, b) = \frac{b}{2} \cdot 2\pi \sum_l \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z} \frac{1 + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)}{\left(2\frac{b^2}{a^2} - 1\right) + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)}; z = z_l \right]$$

$z_l \equiv$ Pol im Inneren des Einheitskreises $|z| = 1$.

Wir erhalten nach elementaren Umformungen

$$\begin{aligned}r(z) &= \frac{1}{z} \frac{1 + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)}{\left(2\frac{b^2}{a^2} - 1\right) + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)} \\&= \frac{1}{z} \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 + \left(2\frac{b^2}{a^2} - 1\right) 2z + 1} \\&= \frac{1}{z} \frac{(z + 1)^2}{(z - z_1)(z - z_2)}.\end{aligned}\tag{D.7}$$

D Berechnung zweier Integrale für die Bestimmung der Gegeninduktivität

Die betrachtete rationale Funktion $r(z)$ hat für $0 < a < b$ drei einfache Pole

$$\begin{aligned}
 z_0 &= 0 & (D.8) \\
 z_1 &= -\left(2\frac{b^2}{a^2} - 1\right) + \sqrt{\left(2\frac{b^2}{a^2} - 1\right)^2 - 1} \\
 z_2 &= -\left(2\frac{b^2}{a^2} - 1\right) - \sqrt{\left(2\frac{b^2}{a^2} - 1\right)^2 - 1} \\
 z_1 - z_2 &= 2\sqrt{\left(2\frac{b^2}{a^2} - 1\right)^2 - 1} \\
 z_1 z_2 &= 1.
 \end{aligned}$$

Die Polstellen z_0 und z_1 sind wegen unserer Annahme $0 < a < b$ im Inneren des Einheitskreises positioniert, z_2 liegt außen. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}[r(z); z = z_0] &= \left[\frac{(z+1)^2}{(z-z_1)(z-z_2)} \right]_{z=z_0} = 1 & (D.9) \\
 \operatorname{Res}[r(z); z = z_1] &= \left[\frac{1(z+1)^2}{z(z-z_2)} \right]_{z=z_1} = \frac{z_1 + 2 + \frac{1}{z_1}}{z_1 - z_2} \\
 &= \frac{\frac{1}{z_1} = z_2}{z_1 - z_2} \frac{z_1 + 2 + z_2}{z_1 - z_2} \\
 &= \frac{-2\left(2\frac{b^2}{a^2} - 1\right) + 2}{2\sqrt{\left(2\frac{b^2}{a^2} - 1\right)^2 - 1}} \\
 &= -\frac{\left(2\frac{b^2}{a^2} - 1\right) - 1}{\sqrt{\left[\left(2\frac{b^2}{a^2} - 1\right) - 1\right] \left[\left(2\frac{b^2}{a^2} - 1\right) + 1\right]}} \\
 &= -\frac{2\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) 4\frac{b^2}{a^2}}} = -\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}.
 \end{aligned}$$

Anhang

Für die Summe der Residuen der rationalen Funktion $r(z)$ über alle Polstellen im Inneren des Einheitskreises folgt somit

$$\sum_{l \in \{0,1\}} \operatorname{Res}[r(z); z = z_l] = 1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}. \quad (\text{D.10})$$

Das Integral hat demnach den Wert

$$I(a, b) = \pi \left(b - \sqrt{b^2 - a^2} \right), \quad (\text{D.11})$$

was zu zeigen war.

D.2 Zweites Integral

Zur Berechnung des Integrals in (5.129)

$$I_0 = \frac{1}{(\pi r_0^2)^2} \int_{\mathcal{K}_0} d^2 r \int_{\mathcal{K}_0} d^2 r' \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

verwenden wir die oben definierten Toruskordinaten (5.125) und schreiben

$$\begin{aligned} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \ln \sqrt{[r_z(\rho, \alpha, 0) - r_z(\rho', \alpha', 0)]^2 + [r_x(\rho, \alpha, 0) - r_x(\rho', \alpha', 0)]^2} \\ &= \ln \sqrt{[\rho \sin \alpha - \rho' \sin \alpha']^2 + [(a + \rho \cos \alpha) - (a + \rho' \cos \alpha')]^2} \\ &= \ln \sqrt{\rho^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \rho'^2 (\cos^2 \alpha' + \sin^2 \alpha') - 2\rho\rho' (\sin \alpha \sin \alpha' + \cos \alpha \cos \alpha')} \\ &= \ln \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\alpha - \alpha')}. \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{(\pi r_0^2)^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{r_0} d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\alpha' \int_0^{r_0} d\rho' \rho' \ln \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\alpha - \alpha')} \\ &= \frac{1}{(\pi r_0^2)^2} \int_0^{r_0} d\rho \rho \int_0^{r_0} d\rho' \rho' \cdot 2\pi \int_0^{2\pi} d\chi \ln \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\chi)}. \end{aligned}$$

D Berechnung zweier Integrale für die Bestimmung der Gegeninduktivität

Nun gilt

$$\begin{aligned}
 & \rho > \rho' \\
 \ln \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\chi)} &= \ln \left[\rho \cdot \sqrt{1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2} - 2\frac{\rho'}{\rho} \cos(\chi)} \right] \\
 &= \ln \left[\rho \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{\rho'}{\rho} e^{i\chi}\right) \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} e^{-i\chi}\right)} \right] \\
 &= \ln \rho + \underbrace{\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} e^{i\chi}\right) + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} e^{-i\chi}\right)}_{=\operatorname{Re} \ln \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} e^{i\chi}\right)} \\
 &= \ln \rho + \operatorname{Re} \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho'}{\rho} e^{i\chi}\right)^n}{n} \right] \\
 &= \ln \rho - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^n \frac{\cos(n\chi)}{n}.
 \end{aligned}$$

Es folgt mit

$$\int_0^{2\pi} d\chi \cos(n\chi) = 0 \text{ für } n = 1, 2, \dots$$

für das Winkelintegral

$$\int_0^{2\pi} d\chi \ln \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\chi)} = 2\pi \begin{cases} \ln \rho & \text{für } \rho > \rho', \\ \ln \rho' & \text{für } \rho < \rho'. \end{cases}$$

Nach dem Gesagten erhalten wir

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{4}{r_0^4} \int_0^{r_0} d\rho \rho \int_0^{r_0} d\rho' \rho' \ln \max(\rho, \rho') \\
 &= \frac{4}{r_0^4} \int_0^{r_0} d\rho \rho \left[\int_0^\rho d\rho' \rho' \ln \max(\rho, \rho') + \int_\rho^{r_0} d\rho' \rho' \ln \max(\rho, \rho') \right] \\
 &= \frac{4}{r_0^4} \int_0^{r_0} d\rho \rho \left[\ln \rho \cdot \int_0^\rho d\rho' \rho' + \int_\rho^{r_0} d\rho' \rho' \ln \rho' \right]
 \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{4}{r_0^4} \int_0^{r_0} d\rho \rho \left\{ \frac{\rho^2}{2} \ln \rho + \left[\frac{\rho'^2}{2} \ln \rho' - \frac{\rho'^2}{4} \right]_{\rho'=\rho}^{\rho'=r_0} \right\} \\
 &= \frac{4}{r_0^4} \int_0^{r_0} d\rho \rho \left\{ \frac{\rho^2}{2} \ln \rho + \frac{r_0^2}{2} \ln r_0 - \frac{r_0^2}{4} - \frac{\rho^2}{2} \ln \rho + \frac{\rho^2}{4} \right\} \\
 &= \frac{4}{r_0^4} \int_0^{r_0} d\rho \rho \left\{ \left(\frac{r_0^2}{2} \ln r_0 - \frac{r_0^2}{4} \right) + \frac{\rho^2}{4} \right\} \\
 &= \frac{4}{r_0^4} \left[\left(\frac{r_0^2}{2} \ln r_0 - \frac{r_0^2}{4} \right) \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{16} \right]_{\rho=0}^{\rho=r_0} \\
 &= \frac{4}{r_0^4} \left[\frac{r_0^4}{4} \ln r_0 - \frac{r_0^4}{16} \right] \\
 &= \ln r_0 - \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

E Berechnung der E- und B-Felder mithilfe der Liénard-Wiechert-Potentiale

Aus den Liénard-Wiechert-Potentiale (7.127) berechnen wir die Felder einer bewegten Punktladung. Zunächst ist

$$\begin{aligned}
 a &\in \{x, y, z\} && \text{(E.1)} \\
 E_a(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial r_a} \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} A_a(\mathbf{r}, t) \\
 &= -\frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial r_a} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')| - \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{v_a^{(0)}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')| - \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}} \right\}_{t'=t'(\mathbf{r}, t)}
 \end{aligned}$$

E Berechnung der E- und B-Felder mithilfe der Liénard-Wiechert-Potentiale

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{q^{(0)}}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\left(\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t') \right| - \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right)^2} \right. \\
 &\quad \times \frac{\partial}{\partial r_a} \left[\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t') \right| - \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{c^2} \frac{\partial v_a^{(0)}(t')}{\partial t} \frac{1}{\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t') \right| - \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}} \\
 &\quad - \frac{1}{c^2} \frac{v_a^{(0)}(t')}{\left[\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t') \right| - \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right]^2} \\
 &\quad \left. \times \frac{\partial}{\partial t} \left[\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t') \right| - \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right] \right\}_{t'=t'(\mathbf{r},t)}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 B_a(\mathbf{r}, t) &= [\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]_a = \varepsilon_{abc} \frac{\partial}{\partial r_b} A_c(\mathbf{r}, t) & (E.2) \\
 &= \frac{\kappa \mu_0 q^{(0)}}{4\pi} \varepsilon_{abc} \frac{\partial}{\partial r_b} \left\{ \frac{v_c^{(0)}(t')}{\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t') \right| - \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}} \right\}_{t'=t'(\mathbf{r}, t)} \\
 &= \frac{\kappa \mu_0 q^{(0)}}{4\pi} \left\{ \left[\varepsilon_{abc} \frac{\partial}{\partial r_b} v_c^{(0)}(t') \right] \frac{1}{\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t') \right| - \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}} \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon_{abc} \left[\frac{\partial}{\partial r_b} \frac{1}{\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t') \right| - \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}} \right] v_c^{(0)}(t') \right\}_{t'=t'(\mathbf{r}, t)} \\
 &= \frac{\kappa \mu_0 q^{(0)}}{4\pi} \left\{ \left[\varepsilon_{abc} \frac{\partial v_c^{(0)}(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial r_b} \right] \frac{1}{\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t') \right| - \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}} \right. \\
 &\quad \left. - \varepsilon_{abc} \frac{\frac{\partial}{\partial r_b} \left[\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t') \right| - \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right]}{\left[\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t') \right| - \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right]^2} v_c^{(0)}(t') \right\}_{t'=t'(\mathbf{r}, t)}.
 \end{aligned}$$

Eine Überlegung analog zu (7.125) ergibt

$$\begin{aligned}
 a &\in \{x, y, z\} & (E.3) \\
 \frac{\partial t'}{\partial r_a} &= - \frac{\frac{n_a^{(0)}(t')}{c}}{1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}}.
 \end{aligned}$$

E Berechnung der E- und B-Felder mithilfe der Liénard-Wiechert-Potentiale

Folglich ist (Summenkonvention beachten)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial r_a} \left[\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t') \right| - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')) \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right]_{t'=t'(\mathbf{r},t)} \quad (\text{E.4}) \\
 &= \left\{ \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial r_a} \left[(r_c - r_c^{(0)}(t')) (r_c - r_c^{(0)}(t')) \right]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|} - \frac{\partial}{\partial r_a} \left[(r_c - r_c^{(0)}(t')) \frac{v_c^{(0)}(t')}{c} \right] \right\}_{t'=t'(\mathbf{r},t)} \\
 &= \left\{ \frac{(r_c - r_c^{(0)}(t')) \left(\delta_{a,c} - \frac{\partial r_c^{(0)}(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial r_a} \right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|} - \left(\delta_{a,c} - \frac{\partial r_c^{(0)}(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial r_a} \right) \frac{v_c^{(0)}(t')}{c} \right. \\
 &\quad \left. - (r_c - r_c^{(0)}(t')) \frac{1}{c} \frac{\partial v_c^{(0)}(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial r_a} \right\}_{t'=t'(\mathbf{r},t)} \\
 &= \left\{ \left[n_c^{(0)}(t') - \frac{v_c^{(0)}(t')}{c} \right] \left(\delta_{a,c} - v_c^{(0)}(t') \frac{\partial t'}{\partial r_a} \right) \right. \\
 &\quad \left. - (r_c - r_c^{(0)}(t')) \frac{1}{c} \frac{\partial v_c^{(0)}(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial r_a} \right\}_{t'=t'(\mathbf{r},t)} \\
 &= \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}} \left[\left(1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}(t')]^2}{c^2} + \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}}{c^2} \right) \mathbf{n}^{(0)}(t') \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right) \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right] \right\}_{t'=t'(\mathbf{r},t)}.
 \end{aligned}$$

Entsprechend

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t') \right| - \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right]_{t'=t'(\mathbf{r},t)} \quad (\text{E.5}) \\
 &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t'} \left[\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t') \right| - \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right] \frac{\partial t'}{\partial t} \right\}_{t'=t'(\mathbf{r},t)} \\
 &= \left\{ - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t') + \frac{[\mathbf{v}^{(0)}(t')]^2}{c} + [\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')] \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'}}{1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}} \right\}_{t'=t'(\mathbf{r},t)}.
 \end{aligned}$$

Ebenso

$$\begin{aligned}\varepsilon_{abc} \frac{\partial}{\partial r_b} v_c^{(0)}(t') &= \varepsilon_{abc} \frac{\partial v_c^{(0)}(t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial r_b} \\ &= -\varepsilon_{abc} \frac{n_b^{(0)}(t') \frac{1}{c} \frac{\partial v_c^{(0)}(t')}{\partial t'}}{1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}}.\end{aligned}\quad (\text{E.6})$$

Einsetzen der berechneten Ableitungen (E.4), (E.5) und (E.6) in die Ausdrücke (E.1) und (E.2) ergibt nach weiteren elementaren Umstellungen für die elektromagnetischen Felder einer bewegten und beschleunigten Punktladung das Ergebnis

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{q^{(0)}}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|^2} \frac{1 - \frac{[\mathbf{v}^{(0)}(t')]^2}{c^2}}{\left[1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}\right]^3} \left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{c} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t')|} \frac{1}{\left[1 - \frac{\mathbf{n}^{(0)}(t') \cdot \mathbf{v}^{(0)}(t')}{c}\right]^3} \\ &\quad \left. \times \mathbf{n}^{(0)}(t') \wedge \left[\left(\mathbf{n}^{(0)}(t') - \frac{\mathbf{v}^{(0)}(t')}{c} \right) \wedge \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}(t')}{\partial t'} \right] \right\}_{t'=t'(\mathbf{r}, t)} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \mathbf{n}^{(0)}[t'(\mathbf{r}, t)] \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\quad (\text{E.7})$$

F Fourier-Transformation einer Faltung

Wir betrachten quadratintegrale Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ auf der reellen Achse. Das Integral

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) \quad (\text{F.1})$$

heißt Fourier-Transformierte der Funktion $f(t)$. Wir berechnen jetzt die sog. Fourier-Rücktransformierte Funktion. Dazu betrachten wir das Integral

$$F(t; \omega_c) = \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \hat{f}(\omega). \quad (\text{F.2})$$

F Fourier-Transformation einer Faltung

Einsetzen der Definition (F.1) für die Fourier-Transformierte und anschließende Vertauschung der Reihenfolge bei der Integration ergibt

$$\begin{aligned} F(t; \omega_c) &= \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega t'} f(t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left[\int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \right] f(t'). \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} d\omega \cos[\omega(t-t')] \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(t-t')]}{t-t'}. \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Mit der Darstellung

$$\lim_{\omega_c \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(t-t')]}{t-t'} = \delta(t-t') \quad (\text{F.5})$$

für die Dirac-Deltadistribution erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_c \rightarrow \infty} F(t; \omega_c) &= \lim_{\omega_c \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(t-t')]}{t-t'} f(t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta(t-t') f(t') \\ &= f(t). \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Demnach ist die Fourier-Rücktransformierte der Fourier-Transformierten Funktion $\hat{f}(\omega)$ wieder gleich der ursprüngliche Funktion $f(t)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \hat{f}(\omega). \quad (\text{F.7})$$

Eine nützliche Eigenschaft der Fourier-Transformation betrifft die Fourier-Transformierte des Faltungsintegrals (convolution) von zwei Funktionen $f(t)$ und $g(t)$:

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t-t') g(t'). \quad (\text{F.8})$$

Die Fourier-Transformierte $\widehat{C}(\omega)$ einer Faltung $C(t)$ ist dann gegeben zu

$$\begin{aligned}
 \widehat{C}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} C(t) & (F.9) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t-t') g(t') \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega'(t-t')} \widehat{f}(\omega) g(t') \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega-\omega')t} \right] \widehat{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega' t'} g(t').
 \end{aligned}$$

Das Integral über die Variable t' ist gerade die Fourier-Transformierte $\widehat{g}(\omega')$ der Funktion $g(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega' t'} g(t') = \widehat{g}(\omega'). \quad (F.10)$$

Für das Integral über die Variable t folgt in völliger Analogie zu (F.5):

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega-\omega')t} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T dt e^{i(\omega-\omega')t} & (F.11) \\
 &= 2\pi \delta(\omega - \omega').
 \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt dann

$$\begin{aligned}
 \widehat{C}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \delta(\omega - \omega') \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega') & (F.12) \\
 &= \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega).
 \end{aligned}$$

Nach dem Gesagten gilt somit

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t-t') g(t') \right] &= \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega) & (F.13) \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \widehat{f}(\omega) \widehat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t-t') g(t').
 \end{aligned}$$

Dies ist der *Faltungssatz* für Fourier-Transformierte.

G Nebenrechnung zur Reflektion und Transmission elektromagnetischer Wellen

Im Folgenden holen wir die Berechnung einiger trigonometrischer Identitäten aus Kapitel 8.7 nach. Als Erstes zeigen wir (8.105) und (8.106):

s-polarisiert (G.1)

$$\begin{aligned}
 \widehat{E}_y^{(0,t)} &= \frac{-\frac{\omega}{c}n_A \cos(\vartheta^{(r)}) - \frac{\omega}{c}n_A \cos(\vartheta^{(in)})}{-\frac{\omega}{c}n_A \cos(\vartheta^{(r)}) - \frac{\mu_A \omega}{\mu_B c}n_B \cos(\vartheta^{(t)})} \widehat{E}_y^{(0,in)} \\
 &= \frac{2 \cos(\vartheta^{(in)})}{\cos(\vartheta^{(in)}) + \frac{\mu_A n_B}{\mu_B n_A} \cos(\vartheta^{(t)})} \widehat{E}_y^{(0,in)} \\
 &= \frac{2 \sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(in)})}{\sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(in)}) + \frac{\mu_A n_B}{\mu_B n_A} \sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(t)})} \widehat{E}_y^{(0,in)} \\
 &= \frac{2 \sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(in)})}{\sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(in)}) + \frac{\mu_A}{\mu_B} \sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(t)})} \widehat{E}_y^{(0,in)} \\
 \\
 \widehat{E}_y^{(0,r)} &= \frac{\frac{\omega}{c}n_A \cos(\vartheta^{(in)}) - \frac{\mu_A \omega}{\mu_B c}n_B \cos(\vartheta^{(t)})}{-\frac{\omega}{c}n_A \cos(\vartheta^{(r)}) - \frac{\mu_A \omega}{\mu_B c}n_B \cos(\vartheta^{(t)})} \widehat{E}_y^{(0,in)} \\
 &= \frac{\cos(\vartheta^{(in)}) - \frac{\mu_A n_B}{\mu_B n_A} \cos(\vartheta^{(t)})}{\cos(\vartheta^{(in)}) + \frac{\mu_A n_B}{\mu_B n_A} \cos(\vartheta^{(t)})} \widehat{E}_y^{(0,in)} \\
 &= \frac{\sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(in)}) - \frac{\mu_A n_B}{\mu_B n_A} \sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(t)})}{\sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(in)}) + \frac{\mu_A n_B}{\mu_B n_A} \sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(t)})} \widehat{E}_y^{(0,in)} \\
 &= \frac{\sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(in)}) - \frac{\mu_A}{\mu_B} \sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(t)})}{\sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(in)}) + \frac{\mu_A}{\mu_B} \sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(t)})} \widehat{E}_y^{(0,in)}
 \end{aligned}$$

p-polarisiert (G.2)

$$\widehat{H}_y^{(0,t)} = \frac{-\frac{\omega}{c}n_A \cos(\vartheta^{(r)}) - \frac{\omega}{c}n_A \cos(\vartheta^{(in)})}{-\frac{\omega}{c}n_A \cos(\vartheta^{(r)}) - \frac{\varepsilon_A \omega}{\varepsilon_B c}n_B \cos(\vartheta^{(t)})} \widehat{H}_y^{(0,in)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(in)})}{\sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(in)}) + \frac{\mu_B n_A}{\mu_A n_B} \sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(t)})} \widehat{H}_y^{(0,in)} \\
&= \frac{2 \sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(in)})}{\sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(in)}) + \frac{\mu_B}{\mu_A} \sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(t)})} \widehat{H}_y^{(0,in)} \\
&= \frac{\sin(2\vartheta^{(in)})}{\frac{1}{2} \sin(2\vartheta^{(in)}) + \frac{\mu_B}{\mu_A} \frac{1}{2} \sin(2\vartheta^{(t)})} \widehat{H}_y^{(0,in)} \\
\widehat{H}_y^{(0,r)} &= \frac{\cos(\vartheta^{(in)}) - \frac{\varepsilon_A n_B}{\varepsilon_B n_A} \cos(\vartheta^{(t)})}{\cos(\vartheta^{(r)}) + \frac{\varepsilon_A n_B}{\varepsilon_B n_A} \cos(\vartheta^{(t)})} \widehat{H}_y^{(0,in)} \\
&= \frac{\sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(in)}) - \frac{\mu_B n_A}{\mu_A n_B} \sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(t)})}{\sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(in)}) + \frac{\mu_B n_A}{\mu_A n_B} \sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(t)})} \widehat{H}_y^{(0,in)} \\
&= \frac{\sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(in)}) - \frac{\mu_B}{\mu_A} \sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(t)})}{\sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(in)}) + \frac{\mu_B}{\mu_A} \sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(t)})} \widehat{H}_y^{(0,in)} \\
&= \frac{\sin(2\vartheta^{(in)}) - \frac{\mu_B}{\mu_A} \sin(2\vartheta^{(t)})}{\sin(2\vartheta^{(in)}) + \frac{\mu_B}{\mu_A} \sin(2\vartheta^{(t)})} \widehat{H}_y^{(0,in)}.
\end{aligned}$$

Als nächstes berechnen wir (8.114) und (8.115):

s-Polarisation

(G.3)

$$\begin{aligned}
R^{(s)} &= \frac{\operatorname{Re}(E_y^{(0,r)} H_x^{(0,r)\dagger})}{\operatorname{Re}(E_y^{(0,in)} H_x^{(0,in)\dagger})} = \frac{|E_y^{(0,r)}|^2}{|E_y^{(0,in)}|^2} = \frac{\sin^2(\vartheta^{(t)} - \vartheta^{(in)})}{\sin^2(\vartheta^{(t)} + \vartheta^{(in)})} \\
T^{(s)} &= \frac{\operatorname{Re}(E_y^{(0,t)} H_x^{(0,t)\dagger})}{\operatorname{Re}(E_y^{(0,in)} H_x^{(0,in)\dagger})} = \frac{k_z^{(t)} |E_y^{(0,t)}|^2}{k_z^{(in)} |E_y^{(0,in)}|^2} \\
&= \frac{n_B \cos(\vartheta^{(t)}) [2 \sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(in)})]^2}{n_A \cos(\vartheta^{(in)}) [\sin(\vartheta^{(t)} + \vartheta^{(in)})]^2} \\
&= \frac{\sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(t)}) [2 \sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(in)})]^2}{\sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(in)}) [\sin(\vartheta^{(t)} + \vartheta^{(in)})]^2}
\end{aligned}$$

G Nebenrechnung zur Reflektion und Transmission elektromagnetischer Wellen

$$\begin{aligned}
 &= \frac{[2 \sin(\vartheta^{(in)}) \cos(\vartheta^{(in)})][2 \sin(\vartheta^{(t)}) \cos(\vartheta^{(t)})]}{[\sin(\vartheta^{(t)} + \vartheta^{(in)})]^2} \\
 &= \frac{\sin(2\vartheta^{(in)}) \sin(2\vartheta^{(t)})}{\sin^2(\vartheta^{(t)} + \vartheta^{(in)})},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R^{(s)} + T^{(s)} &= \frac{\sin^2(\vartheta^{(t)} - \vartheta^{(in)}) + \sin(2\vartheta^{(in)}) \sin(2\vartheta^{(t)})}{\sin^2(\vartheta^{(t)} + \vartheta^{(in)})} \quad (\text{G.4}) \\
 &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\vartheta^{(t)} - 2\vartheta^{(in)}) + \sin(2\vartheta^{(in)}) \sin(2\vartheta^{(t)})}{\sin^2(\vartheta^{(t)} + \vartheta^{(in)})} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\vartheta^{(t)}) \cos(2\vartheta^{(in)}) - \frac{1}{2} \sin(2\vartheta^{(t)}) \sin(2\vartheta^{(in)}) + \sin(2\vartheta^{(in)}) \sin(2\vartheta^{(t)})}{\sin^2(\vartheta^{(t)} + \vartheta^{(in)})} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\vartheta^{(t)}) \cos(2\vartheta^{(in)}) + \frac{1}{2} \sin(2\vartheta^{(t)}) \sin(2\vartheta^{(in)})}{\sin^2(\vartheta^{(t)} + \vartheta^{(in)})} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\vartheta^{(t)} + 2\vartheta^{(in)})}{\sin^2(\vartheta^{(t)} + \vartheta^{(in)})} \\
 &= \frac{\sin^2(\vartheta^{(t)} + \vartheta^{(in)})}{\sin^2(\vartheta^{(t)} + \vartheta^{(in)})} = 1.
 \end{aligned}$$

Nun zeigen wir (8.116) und (8.117):

$$\begin{aligned}
 &p\text{-Polarisation} \quad (\text{G.5}) \\
 R^{(p)} &= \frac{\operatorname{Re}(E_x^{(0,r)} H_y^{(0,r)\dagger})}{\operatorname{Re}(E_x^{(0,in)} H_y^{(0,in)\dagger})} = \frac{|\widehat{H}_y^{(0,r)}|^2}{|\widehat{H}_y^{(0,in)}|^2} = \frac{\tan^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)})}{\tan^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)})} \\
 T^{(p)} &= \frac{\operatorname{Re}(E_x^{(0,t)} H_y^{(0,t)\dagger})}{\operatorname{Re}(E_x^{(0,in)} H_y^{(0,in)\dagger})} = \frac{\frac{k_z^{(t)}}{\varepsilon_B} |\widehat{H}_y^{(0,t)}|^2}{\frac{k_z^{(in)}}{\varepsilon_A} |\widehat{H}_y^{(0,in)}|^2} \\
 &= \frac{\varepsilon_A n_B \cos(\vartheta^{(t)})}{\varepsilon_B n_A \cos(\vartheta^{(in)})} \frac{\sin^2(2\vartheta^{(in)})}{\sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)}) \cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n_A \cos(\vartheta^{(t)})}{n_B \cos(\vartheta^{(in)})} \frac{\sin^2(2\vartheta^{(in)})}{\sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)}) \cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)})} \\
 &= \frac{2 \sin \vartheta^{(t)} \cos(\vartheta^{(t)})}{2 \sin \vartheta^{(in)} \cos(\vartheta^{(in)})} \frac{\sin^2(2\vartheta^{(in)})}{\sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)}) \cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)})} \\
 &= \frac{\sin(2\vartheta^{(in)}) \sin(2\vartheta^{(t)})}{\sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)}) \cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)})},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R^{(p)} + T^{(p)} &= \frac{\tan^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)})}{\tan^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)})} + \frac{\sin(2\vartheta^{(in)}) \sin(2\vartheta^{(t)})}{\sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)}) \cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)})} \quad (\text{G.6}) \\
 &= \frac{\sin^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)}) \cos^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)}) + \sin(2\vartheta^{(in)}) \sin(2\vartheta^{(t)})}{\sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)}) \cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)})} \\
 &= \frac{[1 - \cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)})] [1 - \sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)})] + \sin(2\vartheta^{(in)}) \sin(2\vartheta^{(t)})}{\cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)}) \sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)})} \\
 &= \frac{\left\{ \begin{array}{l} \cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)}) \sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)}) \\ + 1 - \sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)}) - \cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)}) \\ + \sin(2\vartheta^{(in)}) \sin(2\vartheta^{(t)}) \end{array} \right\}}{\cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)}) \sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)})} \\
 &= \frac{\left\{ \begin{array}{l} \cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)}) \sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)}) \\ + 1 - \frac{1}{2} [1 - \cos(2\vartheta^{(in)} + 2\vartheta^{(t)})] - \frac{1}{2} [1 + \cos(2\vartheta^{(in)} - 2\vartheta^{(t)})] \\ + \sin(2\vartheta^{(in)}) \sin(2\vartheta^{(t)}) \end{array} \right\}}{\cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)}) \sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)})} \\
 &= \frac{\left\{ \begin{array}{l} \cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)}) \sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)}) \\ \frac{1}{2} \cos(2\vartheta^{(in)} + 2\vartheta^{(t)}) - \frac{1}{2} \cos(2\vartheta^{(in)} - 2\vartheta^{(t)}) \\ + \sin(2\vartheta^{(in)}) \sin(2\vartheta^{(t)}) \end{array} \right\}}{\cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)}) \sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\begin{pmatrix} \cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)}) \sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)}) \\ \frac{1}{2} \cos(2\vartheta^{(in)}) \cos(2\vartheta^{(t)}) - \frac{1}{2} \sin(2\vartheta^{(in)}) \sin(2\vartheta^{(t)}) \\ -\frac{1}{2} \cos(2\vartheta^{(in)}) \cos(2\vartheta^{(t)}) - \frac{1}{2} \sin(2\vartheta^{(in)}) \sin(2\vartheta^{(t)}) \\ + \sin(2\vartheta^{(in)}) \sin(2\vartheta^{(t)}) \end{pmatrix}}{\cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)}) \sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)})} \\
 &= \frac{\cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)}) \sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)})}{\cos^2(\vartheta^{(in)} - \vartheta^{(t)}) \sin^2(\vartheta^{(in)} + \vartheta^{(t)})} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

H Levi-Civita-Symbol

Die Determinante einer $(n \times n)$ -Matrix $M = (M_{j,j'})$ kann mit dem n -dimensionalen (euklidischen) *Levi-Civita-Symbol* $\varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n}$ dargestellt werden. Dieses Symbol hängt eng mit der Signatur $\text{sgn}(\pi)$ der insgesamt $n!$ verschiedenen Permutationen π der symmetrischen Gruppe S_n von n Objekten $\{1, 2, \dots, n\}$ zusammen:

$$\begin{aligned}
 \det(M) &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) M_{1,\pi(1)} M_{2,\pi(2)} \cdots M_{n,\pi(n)} & (H.1) \\
 &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n \in \{1, 2, \dots, n\}} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} M_{1, j_1} M_{2, j_2} \cdots M_{n, j_n}.
 \end{aligned}$$

Hier ist verabredet

$$\varepsilon_{1, 2, \dots, n} = 1 \quad (H.2)$$

und unter Vertauschung zweier beliebiger Indizes $j_k, j_l \in \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ ändert $\varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n}$ das Vorzeichen:

$$\varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_k \dots j_l \dots j_n} = -\varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_l \dots j_k \dots j_n}.$$

Demnach

$$\sum_{j_1, j_2, \dots, j_n \in \{1, 2, \dots, n\}} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} M_{k_1, j_1} M_{k_2, j_2} \cdots M_{k_n, j_n} = \det(M) \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n}. \quad (H.3)$$

Anhang

Setzt man in diese Beziehung für die Matrix M die Einheitsmatrix ein, $M_{k_1, j_1} = \delta_{k_1, j_1}$, so folgt wegen $\det(M) = 1$ sofort

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n \in \{1, 2, \dots, n\}} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} \delta_{k_1, j_1} \delta_{k_2, j_2} \cdots \delta_{k_n, j_n} \\ &= \det \begin{pmatrix} \delta_{1, k_1} & \cdots & \delta_{1, k_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n, k_1} & \cdots & \delta_{n, k_n} \end{pmatrix} \\ &= \det(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_n}). \end{aligned} \quad (\text{H.4})$$

Hier ist $\mathbf{e}_{k_j} \in \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, wobei $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ die Menge der kartesischen, orthogonalen, linear unabhängigen, auf Eins normierten Basisvektoren bezeichnet, die den euklidischen n -dim Raum aufspannen (kartesische Standardbasis):

$$\mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_j = \delta_{k, j}. \quad (\text{H.5})$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n} &= \det(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_n}) \det(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_n}) \\ &= \det \left[(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_n})^T (\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_n}) \right] \\ &= \det \begin{pmatrix} \delta_{j_1, k_1} & \cdots & \delta_{j_1, k_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_n, k_1} & \cdots & \delta_{j_n, k_n} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{H.6})$$

Mit dem Determinanten-Entwicklungssatz folgt dann die nützliche Beziehung unter Beachtung der Summenkonvention

$$\varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_m, j_{m+1}, \dots, j_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_m, k_{m+1}, \dots, k_n} = m! \det \begin{pmatrix} \delta_{j_{m+1}, k_{m+1}} & \cdots & \delta_{j_{m+1}, k_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_n, k_{m+1}} & \cdots & \delta_{j_n, k_n} \end{pmatrix}.$$

I Berechnung der Komponenten des Energie-Impuls-Tensors

Als nützliches Werkzeug zur Formulierung der relativistischen Theorie hat sich das *vierdimensionale* kontravariante *Levi-Civita-Symbol* bewährt

$$\mu, \nu, \sigma, \lambda \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (\text{H.7})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{falls zwei oder mehr Indizes gleich sind,} \\ 1 & \text{falls } \mu, \nu, \sigma, \lambda \text{ eine } \textit{gerade} \text{ Permutation von } 0, 1, 2, 3 \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } \mu, \nu, \sigma, \lambda \text{ eine } \textit{ungerade} \text{ Permutation von } 0, 1, 2, 3 \text{ ist,} \end{cases}$$

$$\epsilon^{0123} = 1.$$

Dieses bleibt unter eigentlichen Lorentz-Transformationen $S \rightarrow S'$ invariant

$$\begin{aligned} L^{00} &> 0, \\ \det L &= 1, \\ \epsilon'^{\mu\nu\sigma\lambda} &= L^\mu_{\mu'} L^\nu_{\nu'} L^\sigma_{\sigma'} L^\lambda_{\lambda'} \epsilon^{\mu'\nu'\sigma'\lambda'} = \underbrace{\det(L)}_{=1} \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}, \end{aligned} \quad (\text{H.8})$$

d.h. die Komponente $\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}$ des vierdimensionalen kontravarianten Levi-Civita-Symbols transformiert sich für diese eingeschränkte Klasse von Lorentz-Transformationen zwischen Bezugssystemen S und S' (beide mit kartesischer Orthonormalbasis und positiver Orientierung) wie ein Viererskalar. Zu erwähnen sind die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} &= 4! \\ \epsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} &= g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} g_{\sigma\sigma'} g_{\lambda\lambda'} \epsilon^{\mu'\nu'\sigma'\lambda'} = \det(g) \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} = -\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

I Berechnung der Komponenten des Energie-Impuls-Tensors

Zur expliziten Berechnung der Komponenten des Energie-Impuls-Tensors setzen wir die in (10.137) gegebene Darstellung für die Komponenten $F^{\nu\mu}$ und F^σ_ν ein. Außerdem verwenden wir die Identität (10.161):

$$\frac{1}{4} F_{\lambda'\nu'} F^{\nu'\lambda'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa^2 c^2} E_a \cdot E_a - B_a \cdot B_a \right). \quad (\text{I.1})$$

$$\begin{aligned}
 T^{00} &= \frac{1}{\mu_0} \left[-F^0{}_\nu F^{\nu 0} + \frac{1}{4} (F_{\lambda'\nu'} F^{\nu'\lambda'}) \right] & (I.2) \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[-F^0{}_\nu F^{\nu 0} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa^2 c^2} E_a \cdot E_a - B_a \cdot B_a \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \left(-\frac{1}{\kappa^2 c^2} E_a \cdot E_a - B_a \cdot B_a \right) \\
 &= - \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E_a \cdot E_a + \frac{1}{2\mu_0} B_a \cdot B_a \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{01} &= \frac{1}{\mu_0} [-F^0{}_\nu F^{\nu 1}] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[\left(-\frac{E_y}{c\kappa} \right) B_z + \left(-\frac{E_z}{c\kappa} \right) (-B_y) \right] \\
 &= -\frac{1}{c} \left(\mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\kappa\mu_0} \right)_x = -\frac{S_x}{c},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{10} &= \frac{1}{\mu_0} [-F^1{}_\nu F^{\nu 0}] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[-B_z \left(\frac{E_y}{c\kappa} \right) + B_y \left(\frac{E_z}{c\kappa} \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{c} \left(\mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\kappa\mu_0} \right)_x = -\frac{S_x}{c},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{02} &= \frac{1}{\mu_0} [-F^0{}_\nu F^{\nu 2}] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[-\left(\frac{1}{c\kappa} E_x \right) (-B_z) - \left(\frac{1}{c\kappa} E_z \right) B_x \right] \\
 &= -\frac{1}{c} \left(\mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\kappa\mu_0} \right)_y = -\frac{S_y}{c},
 \end{aligned}$$

I Berechnung der Komponenten des Energie-Impuls-Tensors

$$\begin{aligned}
 T^{20} &= \frac{1}{\mu_0} [-F^2_{\nu} F^{\nu 0}] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[B_z \frac{E_x}{\kappa c} - B_x \frac{E_z}{\kappa c} \right] \\
 &= -\frac{1}{c} \left(\mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\kappa \mu_0} \right)_y = -\frac{S_y}{c},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{03} &= \frac{1}{\mu_0} [-F^0_{\nu} F^{\nu 3}] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[-\left(\frac{1}{c\kappa} E_x \right) B_y - \left(\frac{1}{c\kappa} E_y \right) (-B_x) \right] \\
 &= -\frac{1}{c} \left(\mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\kappa \mu_0} \right)_z = -\frac{S_z}{c},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{30} &= \frac{1}{\mu_0} [-F^3_{\nu} F^{\nu 0}] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[-B_y \left(\frac{E_x}{\kappa c} \right) - (-B_x) \frac{E_y}{\kappa c} \right] \\
 &= -\frac{1}{c} \left(\mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\kappa \mu_0} \right)_z = -\frac{S_z}{c},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{11} &= \frac{1}{\mu_0} \left[-F^1_{\nu} F^{\nu 1} - \frac{1}{4} (F_{\lambda' \nu'} F^{\nu' \lambda'}) \right] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{E_x}{c\kappa} \frac{E_x}{\kappa c} - B_z B_z - (-B_y) (-B_y) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa^2 c^2} E_a \cdot E_a - B_a \cdot B_a \right) \right] \\
 &= \varepsilon_0 E_x E_x + \frac{1}{\mu_0} B_x B_x - \left[\frac{\varepsilon_0}{2} E_a E_a + \frac{1}{2\mu_0} B_a B_a \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{12} &= \frac{1}{\mu_0} [-F^1_{\nu} F^{\nu 2}] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[-\frac{1}{c\kappa} E_x \left(-\frac{E_y}{\kappa c} \right) - (-B_y) B_x \right] \\
 &= \varepsilon_0 E_x E_y + \frac{1}{\mu_0} B_x B_y,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{21} &= \frac{1}{\mu_0} [-F^2{}_{\nu} F^{\nu 1}] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[-\frac{E_y}{c\kappa} \left(-\frac{E_x}{\kappa c} \right) - B_x (-B_y) \right] \\
 &= \varepsilon_0 E_x E_y + \frac{1}{\mu_0} B_x B_y,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{13} &= \frac{1}{\mu_0} [-F^1{}_{\nu} F^{\nu 3}] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[-\frac{E_x}{c\kappa} \left(-\frac{E_z}{\kappa c} \right) - B_z (-B_x) \right] \\
 &= \varepsilon_0 E_x E_z + \frac{1}{\mu_0} B_x B_z,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{31} &= \frac{1}{\mu_0} [-F^3{}_{\nu} F^{\nu 1}] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[-\frac{1}{c\kappa} E_z \left(-\frac{E_x}{\kappa c} \right) - (-B_x) B_z \right] \\
 &= \varepsilon_0 E_x E_z + \frac{1}{\mu_0} B_x B_z,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{22} &= \frac{1}{\mu_0} \left[-F^2{}_{\nu} F^{\nu 2} - \frac{1}{4} (F_{\lambda\nu'} F^{\nu\lambda'}) \right] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[-\frac{E_y}{c\kappa} \left(-\frac{E_y}{\kappa c} \right) - (-B_z) (-B_z) - B_x B_x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa^2 c^2} E_a \cdot E_a - B_a \cdot B_a \right) \right] \\
 &= \varepsilon_0 E_y E_y + \frac{1}{\mu_0} B_y B_y - \left[\frac{\varepsilon_0}{2} E_a E_a + \frac{1}{2\mu_0} B_a B_a \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{23} &= \frac{1}{\mu_0} [-F^2{}_{\nu} F^{\nu 3}] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[-\left(\frac{E_y}{c\kappa} \right) \left(-\frac{E_z}{\kappa c} \right) - (-B_z) B_y \right] \\
 &= \varepsilon_0 E_y E_z + \frac{1}{\mu_0} B_y B_z,
 \end{aligned}$$

I Berechnung der Komponenten des Energie-Impuls-Tensors

$$\begin{aligned}
 T^{32} &= \frac{1}{\mu_0} \left[-F^3{}_{\nu} F^{\nu 2} \right] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[-\frac{E_z}{c\kappa} \left(-\frac{E_y}{\kappa c} \right) - B_y (-B_z) \right] \\
 &= \varepsilon_0 E_y E_z + \frac{1}{\mu_0} B_y B_z,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{33} &= \frac{1}{\mu_0} \left[-F^3{}_{\nu} F^{\nu 3} - \frac{1}{4} (F_{\lambda'\nu'} F^{\nu'\lambda'}) \right] \\
 &= \frac{1}{\mu_0} \left[-\frac{E_z}{c\kappa} \left(-\frac{E_z}{\kappa c} \right) - B_y B_y - (-B_x)(-B_x) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa^2 c^2} E_a \cdot E_a - B_a \cdot B_a \right) \right] \\
 &= \varepsilon_0 E_z E_z + \frac{1}{\mu_0} B_z B_z - \left[\frac{\varepsilon_0}{2} E_a E_a + \frac{1}{2\mu_0} B_a B_a \right].
 \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $T^{\mu\sigma} = T^{\sigma\mu}$. Diese Symmetrie hätte man natürlich auch direkt aus (10.347) ersehen können, was eine instruktive Übung ist.

Literatur

- [Bec82] Richard Becker. *Electromagnetic Fields and Interactions*. New York: Dover Publications Inc., 1982 (siehe S. iii, 195).
- [Ili08] Bozhidar Z. Iliev. *The “Lorenz gauge” is named in honour of L. V. Lorenz!* 2008. URL: <http://arxiv.org/abs/0803.0047v1> (siehe S. 219).
- [Jac98] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley Verlag, 1998 (siehe S. iii).
- [LL09] L. D. Landau und E. M. Lifschitz. *Lehrbuch der Theoretischen Physik (Band 2) Klassische Feldtheorie*. Harri Deutsch Verlag, 2009 (siehe S. iii).
- [LLP84] L. D. Landau, E. M. Lifschitz und L. P. Pitaevskii. *Electrodynamics of Continuous Media*. 2. Aufl. Pergamon Press, 1984 (siehe S. iii, 104, 195, 315, 353).
- [MTW73] Charles W. Misner, Kip S. Thorne und John A. Wheeler. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973 (siehe S. iii, 451, 455, 457).
- [Pre88] William H. Press. *Numerical recipes : the art of scientific computing*. Cambridge University Press, 1988 (siehe S. 34, 166).
- [Sch98] Julian Schwinger. *Classical Electrodynamics*. Perseus Books, Juli 1998 (siehe S. iii).

Die Abbildungen der Physiker auf den Seiten 1, 3, 18, 29, 113, 147, 147 157, 194, 219, 232, 414, 443, 449 und 457 sind aus <http://en.wikipedia.org/> entnommen.