

**Aufgabe 39** (2+2+2 Punkte)

Seien  $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$  beliebige Formeln.  $x$  eine Variable, so dass  $x \notin FV(\psi)$ . Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen:

a)  $\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \models (\psi \rightarrow \exists x\varphi)$

b)  $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models (\exists x\varphi \rightarrow \psi)$

c)  $\exists x(\varphi \rightarrow \psi) \models (\forall x\varphi \rightarrow \psi)$

**Aufgabe 40** (2+2 Punkte)

Formen Sie folgende Formeln schrittweise in pränex Normalform um (in  $\varphi, \psi, \sigma, \delta, \zeta$  kommen keine Quantoren vor!):

a)  $\neg((\forall x\varphi(x) \rightarrow (\forall y\psi(y) \rightarrow \exists x\varphi(x))) \rightarrow \exists x\forall y\sigma(x, y))$

b)  $\neg\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow \exists x\forall z(\delta(x, z) \rightarrow \zeta(x, z))$

**Aufgabe 41** (2+2+2+2+2+2 Punkte)

Zeigen Sie in NK':

a)  $\vdash \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x\varphi(x) \rightarrow \forall x\psi(x))$

b)  $\vdash \forall x\varphi(x) \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi(x)$

c)  $\vdash \forall x\varphi(x) \rightarrow \forall z\varphi(z)$ , sofern  $z$  nicht in  $\varphi$  vorkommt

d)  $\vdash \forall x\forall y\varphi(x, y) \rightarrow \forall x\varphi(x, x)$ , sofern  $x$  frei einsetzbar für  $y$  in  $\varphi(x, y)$

e)  $\vdash \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \rightarrow \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x)$

f)  $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x\psi(x))$ , sofern  $x \notin FV(\varphi)$