Übungen zur Mathematischen Logik I
Blatt 13

DEF (Isomorphismus): Eine Abbildung $\Phi : A \to B$ zwischen den Universen zweier $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots\rangle$ und $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots\rangle$ ist ein *Isomorphismus*, falls Φ bijektiv und strukturerhaltend ist. Letzteres bedeutet:

(1) Sind c^A und c^B die Interpretationen einer Konstante $\dot{c}$ in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, dann gilt: $\Phi(c^A) = c^B$.

(2) Sind f^A und f^B die Interpretation eines Funktionszeichens $\dot{f}$ in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, dann gilt für alle $a_1, \ldots a_n \in A$:
$$\Phi(f^A(a_1, \ldots a_n)) = f^B(\Phi(a_1), \ldots \Phi(a_n)).$$

(3) Sind R^A und R^B die Interpretation eines Relationszeichens $\dot{R}$ in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, dann gilt für alle $a_1, \ldots a_n \in A$:
$$\langle a_1, \ldots a_n\rangle \in R^A \quad \Leftrightarrow \quad \langle \Phi(a_1), \ldots \Phi(a_n)\rangle \in R^B$$

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind *isomorph* ($\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$), falls es einen Isomorphismus von A nach B gibt.

Aufgabe 52: Seien $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots\rangle$ und $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots\rangle$ zwei isomorphe $\mathcal{L}$-Strukturen. Finden Sie zunächst für eine beliebige Belegung v nach A eine Belegung w nach B und zeigen Sie, dass für jede $\mathcal{L}$-Formel ϕ gilt:
$$[\![\phi]\!]_v^{\mathfrak{A}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad [\![\phi]\!]_w^{\mathfrak{B}} = 1$$
Schließen sie daraus: $\mathfrak{A} \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi$

Hinweis: Sie dürfen für erstere Behauptung eine analoge Aussage für Terme unbewiesen verwenden.

Aufgabe 53: Geben Sie eine formale Sprache $\mathcal{L}$ an, mit der ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}^n, \ldots\rangle$ (für ein $n \in \mathbb{N}$) axiomatisiert werden kann. Beachten Sie dabei, dass Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ für die Multiplikation mit einer Skalaren kein Element der $\mathcal{L}$-Struktur sein können. Geben Sie eine Axiomatisierung von Vektorräumen in $\mathcal{L}$ an. Wieviele Axiome werden benötigt?

Aufgabe 54: Bearbeiten Sie die folgenden Punkte:

(1) Geben Sie geeignete Schlussregeln für den Kein-Quantor (Kx) an.

(2) Kann der Fast-Alle-Quantor ($\urcorner x$) in der üblichen formalen Sprache $\mathcal{L}$ ausgedrückt werden?

(3) Zeigen Sie, dass eine Sprache mit den logischen Zeichen Kx, $\to$ und $=$ genauso ausdrucksstark ist, wie die übliche formale Sprache.

Hinweis: Verwenden Sie für (2) den Kompaktheitssatz und Aufgabe 44; in (3) müssen die relevanten logischen Zeichen gegenseitig ausgedrückt werden (samt Nachweis, dass das funktioniert).

Abgabe der Aufgaben am Do. 11.2.2010 nach der Vorlesung

Aufgabe 55: Seien $\Delta, \Gamma \subseteq \mathcal{L}$ Aussagenmengen und $\mathfrak{K}$ Klasse von $\mathcal{L}$-Strukturen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathfrak{K} \subseteq \mathrm{MOD}(\Gamma) \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{K})$

(b) $\Delta \subseteq \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathrm{MOD}(\Gamma) \subseteq \mathrm{MOD}(\Delta)$

(c) $\mathrm{MOD}(\Delta \cap \Gamma) \supseteq \mathrm{MOD}(\Delta) \cup \mathrm{MOD}(\Gamma)$
Die Umkehrung der Inklusion gilt im Allgemeinen nicht.

Hinweis: $\mathfrak{K}$ ist im Allgemeinen eine echte Klasse; für die Belange dieser Aufgabe kann man aber $\mathfrak{K}$ wie eine echte Menge behandeln.