

# Physik III: Optik, 2018

Claus Zimmermann

February 2, 2018

# Contents

1. Wellen . . . . .	2
1.1 Wellenfunktion und Wellengleichung . . . . .	2
1.2 Harmonische Wellen . . . . .	6
1.3 Dispersion . . . . .	9
1.4 Randbedingungen und stationäre Lösungen . . . . .	14
1.5 Energietransport und Wellenwiderstand . . . . .	18
1.6 Komplexe Darstellung harmonischer Wellen . . . . .	22
1.7 Formale Behandlung stationärer Wellenfunktionen . . . . .	24
1.8 Überlagerung von Wellen unterschiedlicher Frequenz, Fourier Transformation	26
1.9 Lichtpulse in Materie . . . . .	31
1.10 Die Trommel . . . . .	35
2. Lichtwellen . . . . .	41
2.1 Wellengleichung für elektromagnetische Wellen . . . . .	41
2.2 Ebene Wellen und Lichtgeschwindigkeit . . . . .	44
2.3 Vektorstruktur elektromagnetischer Wellen . . . . .	48
2.4 Intensität von Lichtwellen . . . . .	49
2.5 Optische Resonatoren . . . . .	52
2.6 Interferometer . . . . .	60
2.7 Fermatsche Prinzip . . . . .	65
3. Beugung . . . . .	69
3.1 Huygensches Prinzip . . . . .	70
3.2 Antennen-Arrays . . . . .	74
3.3 Beugung am Gitter . . . . .	81
3.4 Beugung am Spalt . . . . .	84
4. Licht in Materie . . . . .	89
4.1 Lorentz-Modell in Dielektrika . . . . .	90
4.2 Metalle . . . . .	98
5. Polarisation . . . . .	100
5.1 Lineare und zirkulare Polarisation . . . . .	100
5.2 Manipulieren und Beobachten der Polarisation . . . . .	103
5.3 Photonen . . . . .	108
5.4 Polarisationsabhängige Reflektion: Fresnell-Gleichungen . . . . .	112
5.5 Reflexion und Transmission der Intensität . . . . .	120

Anhang: Herleitung der Fresnelschen Gleichungen . . . . .	125
6. Geometrisch Optik: Spiegel, Linsen und Abbildungen . . . . .	129
6.1 Abbildung von Punkten . . . . .	130
6.2 Linsen . . . . .	133
6.3 Abbildung von Objekten in paraxialer Näherung . . . . .	137
6.4 Lupe und Fernrohr . . . . .	140
6.5 Prismen . . . . .	142

## 1. Wellen

In diesem Kapitel wiederholen wir Wellen als allgemeines Phänomen. Als Beispiel betrachten wir zunächst Wellen auf einem gespannten Draht und die Differentialgleichung, deren Lösungen sie sind. Wir diskutieren harmonische Wellen, Dispersionsrelationen, Randbedingungen und Energietransport. Besonders interessant sind die stationären Lösungen, bei denen die räumliche und die zeitliche Form der Wellenfunktion faktorisieren. Solche stationären harmonischen Wellen bilden eine Basis: Allgemeine, räumlich und zeitlich begrenzte Wellen lassen sich als Überlagerungen von harmonischen Wellen verstehen. Dies führt uns dann zu den Unschärferelationen. Als abschließendes Beispiel berechnen wir die Töne einer Trommelmembran.

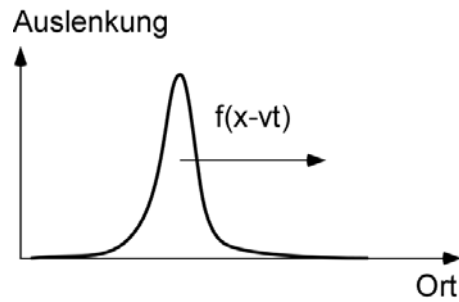
### 1.1 Wellenfunktion und Wellengleichung

- Wellenfunktion

Wir betrachten in diesem Kapitel eindimensionale skalare Wellen, also eine orts- und zeitabhängige skalare Größe  $\psi$  z.B. Auslenkung eines Seils oder einer Gitarrensaite, die sich nur in eine bestimmte Raumrichtung nämlich entlang des Seils bzw. der Saite ausbreiten kann. Wir machen einen Ansatz für die Funktion, die die transversale Auslenkung beschreiben:

$$\psi(x, t) = f(x \pm vt).$$

Die Wellenfunktion  $\psi(t, x)$  gibt die Größe der Auslenkung zur Zeit  $t$  am Ort  $x$  an. Eine Welle erhält man gemäß dieses Ansatzes also dadurch, dass man eine beliebige (vernünftige) reellwertige Funktion  $f(x)$  als Ganzes mit der Geschwindigkeit  $v$  nach rechts (oder links) bewegt. Der Parameter  $v$  ist also die Geschwindigkeit mit der sich die Welle bewegt.

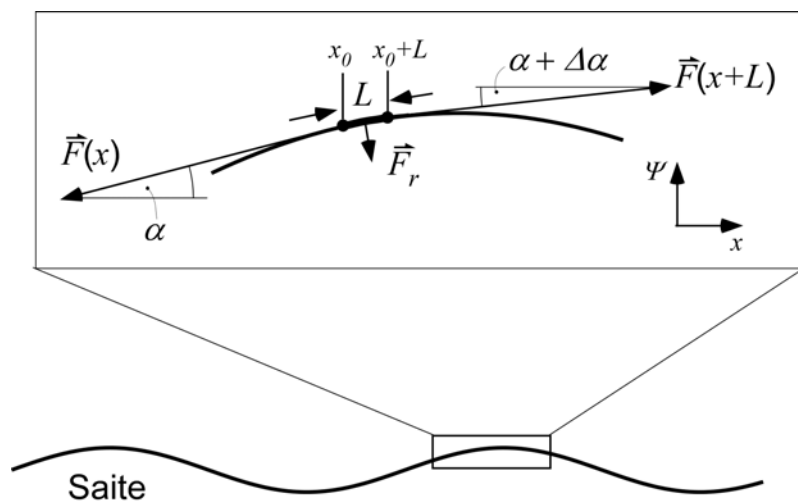


Können wir diesen Ansatz rechtfertigen?

- Beispiel für transversale Wellen: Das gespannte Seil

Wir betrachten ein gespanntes Seil im Gleichgewicht. Es bildet also zunächst eine horizontale gerade Linie. Entlang des Seils kompensiert sich die Kraft, die ein kurzes Seilstück der Länge  $L$  am linken Ende nach links zieht mit der Kraft, die das Seilstück am anderen Ende nach rechts zieht. Andernfalls würde das Seilstück sich entlang des Seils bewegen und das Seil wäre nicht im Gleichgewicht.

Jetzt lassen wir eine kleine transversale Auslenkungen  $\psi$  aus der Gleichgewichtslage zu.



Das kleine Seilstückchen kann jetzt gekrümmt sein. Die Beträge  $F$  der beiden Kräfte, die am Seilstück ziehen, sind dann immer noch gleich, nicht aber die Richtungen. Sie werden durch die Winkel  $\alpha$  und  $\alpha + d\alpha$  gegeben. Dadurch entsteht eine Kraft quer zum Seil, die einer Auslenkung entgegenwirkt und das Seil in die Ruhelage zurücktreibt.

Für kleine Auslenkungen eines horizontalen Seils kann man die Richtung der rücktreibenden Kraft näherungsweise als vertikal annehmen. Die Projektion der beiden am

Seil ziehenden Kräfte auf die vertikale Richtung liefert die Rückstellkraft

$$\begin{aligned} F_r &\simeq F \sin(\alpha + \Delta\alpha) - F \sin(\alpha) \\ &\simeq F \cdot (\alpha + \Delta\alpha) - F \cdot \alpha \\ &= F \cdot \Delta\alpha. \end{aligned}$$

Hier wurde für kleine Auslenkungen genähert,  $\sin \alpha \simeq \alpha$  und  $\sin(\alpha + \Delta\alpha) \simeq (\alpha + \Delta\alpha)$ . Um  $\Delta\alpha$  zu berechnen, entwickeln wir  $\alpha(x)$  bis zu ersten Ordnung

$$\alpha(x) = \alpha(x_0) + \frac{d\alpha}{dx}(x - x_0) + \dots$$

Wenn  $x_0$  das linke Ende des Seilstückchens markiert und  $x$  das rechte ist  $x - x_0 = L$  und man erhält

$$\Delta\alpha = \alpha(x) - \alpha(x_0) = \frac{d\alpha}{dx}L.$$

Die verbleibende Ableitung erhält man aus dem Zusammenhang zwischen  $\alpha$  und der Auslenkung  $\psi$ :

$$\tan \alpha = \frac{d\psi}{dx} \simeq \alpha$$

mit der Kleinwinkelnäherung  $\tan \alpha \simeq \alpha$ . Ableiten nach  $x$  liefert

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

und damit

$$F_r = F \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2}L.$$

Die Rückstellkraft wirkt auf die Masse des Seilstückchens

$$m = \rho \cdot S \cdot L,$$

wobei  $\rho$  die Dichte und  $S$  der Seilquerschnitt ist. Für die transversale Beschleunigung des Seilstückchens erhält man eine Trägheitskraft

$$F_t = -m \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} = -\rho \cdot S \cdot L \frac{d^2\psi}{dt^2}$$

Actio gleich Reactio liefert

$$\begin{aligned} F_r &= -F_t \\ F \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2}L &= \rho \cdot S \cdot L \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= \frac{\rho \cdot S}{F} \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2}. \end{aligned}$$

Die Länge des Seilstückchens fällt raus. Allerdings muss das Seilstückchen so kurz sein, dass die Entwicklung von  $\alpha(x)$  noch gilt.

Die Gleichung hat die Form der d'Alembertschen Wellengleichung

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2}$$

mit der Abkürzung

$$c := \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot S}}$$

- Lösung der d'Alembert-Gleichung

Wir wollen überprüfen, ob der Ansatz

$$\psi = f(x - vt)$$

der d'Alembertschen Wellengleichung gehorcht. Wir berechnen dazu die Ableitungen von  $\psi$ . Zunächst die Zeitableitung:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{d}{dt} f(x - vt) = \frac{d}{d(x - vt)} f(x - vt) \cdot \frac{d}{dt} (x - vt) \\ &= -v \cdot \frac{df(x - vt)}{d(x - vt)} \end{aligned}$$

(Kettenregel) und analog die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dt^2} &= -v \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{df(x - vt)}{d(x - vt)} \right) = -v \cdot \frac{d}{d(x - vt)} \left( \frac{df(x - vt)}{d(x - vt)} \right) \cdot \frac{d}{dt} (x - vt) \\ &= v^2 \cdot \frac{d^2 f(x - vt)}{(d(x - vt))^2}. \end{aligned}$$

Die erste Ortsableitung lautet entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} &= \frac{d}{dx} f(x - vt) = \frac{d}{d(x - vt)} f(x - vt) \cdot \frac{d}{dx} (x - vt) \\ &= \frac{df(x - vt)}{d(x - vt)} \end{aligned}$$

und die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{df(x - vt)}{d(x - vt)} \right) = \frac{d}{d(x - vt)} \left( \frac{df(x - vt)}{d(x - vt)} \right) \cdot \frac{d}{dx} (x - vt) \\ &= \frac{d^2 f(x - vt)}{(d(x - vt))^2}. \end{aligned}$$

Eliminieren der rechten Seite durch die zweifache Zeitableitung von oben ergibt die d'Alembertsche Gleichung:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2}$$

Der Ansatz ist für ein eingespanntes Seil also korrekt und der Parameter  $v$  in der d'Alembertschen Wellengleichung ist gerade die Geschwindigkeit der Welle für die wir jetzt einen expliziten Ausdruck haben:

$$v = c = \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot S}}$$

Für größere Spannungen wächst die Kraft  $F$  und damit die Wellengeschwindigkeit (z.B. Gitarrensaite). Bei schweren Seilen mit großer Dichte oder großem Querschnitt sind die Wellen langsamer (z.B. Kletterseil). Die Geschwindigkeit  $v$  taucht quadratisch in der Wellengleichung auf, so dass beide Vorzeichen möglich sind. Rechts- und linkslaufende Wellen sind also beides Lösungen der Wellengleichung.

- Wellen auf linearen Medien

die d'Alembertsche Wellengleichung ist eine "lineare" Wellengleichung, d.h. die Wellenfunktion und ihre Ableitungen kommen in der Wellengleichung linear und nicht in höheren Potenzen vor. Ableitungen sind lineare Operationen, so dass eine Linearkombination  $h(x, t) = \alpha \cdot g(x, t) + \beta \cdot f(x, t)$  zweier Lösungen  $g(x, t)$  und  $f(x, t)$  ebenfalls die Wellengleichung erfüllt. Wir demonstrieren das am Beispiel der d'Alembertschen Gleichung:

$$h'' = \alpha g'' + \beta f'' = \frac{1}{v^2} \alpha \ddot{g} + \frac{1}{v^2} \beta \ddot{f} = \frac{1}{v^2} (\alpha \ddot{g} + \beta \ddot{f}) = \frac{1}{v^2} \ddot{h}$$

Die Medien, in denen sich Licht ausbreitet sind in der Regel linear. Bei hohen Intensitäten, wie man sie mit Laserlicht erreicht, werden allerdings die meisten Materialien nichtlinear. In nichtlinearen Medien kann man Lösungen nicht einfach addieren um neue Lösungen zu erzeugen und viele Begriffe der "linearen" Optik sind nicht mehr anwendbar. Wir beschränken uns in dieser Vorlesung auf die lineare Optik im Gegensatz zur "nichtlinearen" Optik.

## 1.2 Harmonische Wellen

Der gespannten Draht ist ein spezielles Beispiel für ein "lineares", "nicht dispersiven" Medium. Die auftretenden Wellen können durch eine einfache Wellengleichung beschrieben werden. Es gibt in der Physik sehr viele verschiedene Wellenphänomene mit entsprechenden Wellengleichungen, deren Lösungen sehr unterschiedliche Eigenschaften haben können. Es gibt sogar Wellen, die sich gar nicht durch eine einzige Differenzialgleichung beschreiben lassen. Ein Beispiel sind Wasserwellen, die als Brandung, Tsunamis oder Monsterwellen deutlich komplizierteren Gleichungen gehorchen. In der Optik haben wir es mit Lichtwellen zu tun, die

zwar komplizierter sind als Seilwellen aber doch deutlich einfacher als Wasserwellen. Zwei wichtige Begriffe zur Analyse von Wellen sind die "Wellenlänge" und die "Frequenz". Sie sind exakt nur für harmonische Wellen definiert, die daher eine zentrale Rolle spielen.

- Harmonische Wellen

Harmonische Wellen sind periodisch sich wiederholende Sinus-Wellen, die weder Anfang noch Ende haben sowohl im Ort als auch in der Zeit. Sie sind also Idealisierungen von real auftretenden Wellen. Trotzdem sind sie sehr anschaulich, da man sich periodische Vorgänge leicht ins Unendliche fortgesetzt denken kann. Sie nehmen eine Sonderrolle auch deshalb ein, weil man die meisten Wellenphänomene aus harmonischen Wellen zusammensetzen kann. Schließlich erlauben sie die Definition von Frequenz und Wellenzahl, Begriffe, die in der Quantenmechanik eine entscheidende Rolle spielen werden.

Harmonische Wellen haben die Form

$$\psi_k(x, t) = A \cdot \sin(k \cdot (x \pm vt))$$

$A$  ist die "Amplitude" der Welle und  $k$  ist die "Wellenzahl". Sie hat die Einheit  $[k] = 1/\text{m}$ . Die Wellenzahl numeriert als kontinuierlicher Index die Menge der harmonischen Wellen. Sie ist sozusagen der "Name" der Welle. Bei quantenmechanischen harmonischen Wellen ist  $k$  "Quantenzahl" der Wellenfunktion.

Die harmonischen Wellen sind vernünftige Funktionen von  $x \pm vt$  und damit Lösungen einer d'Alembertschen Wellengleichung mit entsprechendem Parameter  $v$ .

Üblich ist oft eine andere Schreibweise:

$$\psi_k(x, t) = A \cdot \sin(kx \pm kv t) = A \cdot \sin(kx \pm \omega(k) t)$$

Als dritten Parameter neben der Wellenzahl  $k$  und der Amplitude  $A$  benutzt man jetzt anstelle der Wellengeschwindigkeit  $v$  die "Kreisfrequenz"

$$\omega(k) := kv.$$

Sie ist offenbar eine Funktion von  $k$ . Die Funktion  $\omega(k)$  heißt "Dispersionsrelation". Für konstantes  $v$  ist die Dispersionsrelation eine Gerade mit Steigung  $v$ . Die Geschwindigkeit  $v$ , mit der sich eine harmonische Welle bewegt, nennt man "Phasengeschwindigkeit".

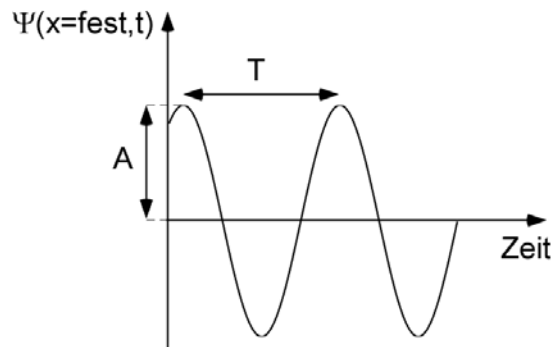
$$v = \frac{\omega(k)}{k}.$$

- Periode, Frequenz und Wellenlänge

Für einen festen Ort erhält man eine zeitliche Schwingung mit einer "Periode" also der Zeitdauer zwischen zwei Maxima von

$$T := \frac{2\pi}{\omega}.$$



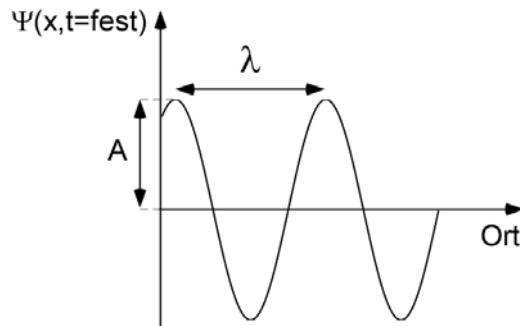


Nach dieser Zeit ist das Argument des Sinus um  $T\omega = 2\pi$  größer geworden und der Sinus auf seinen Startwert zurückgeschwungen. Der Kehrwert der Periode heißt Frequenz

$$\nu := \frac{\omega}{2\pi}.$$

Stop man die zeitliche Dynamik bei einer Zeit  $t = t_0$ , erhält man einen Schnappschuss der Auslenkungen  $\psi(x, t = t_0)$  an den verschiedenen Orten  $x$ . Der räumliche Abstand zwischen zwei Maxima ist die "Wellenlänge"

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$



Die räumliche Analogie zur Frequenz wäre der Kehrwert der Wellenlänge  $1/\lambda$ , der manchmal in der Spektroskopie verwendet wird und dort in "reziproken Zentimetern",  $\text{cm}^{-1}$ , oder "Kayser" gemessen wird. Statt der Sinus-Funktion kann man auch die Kosinus-Funktion benutzen. Dies entspricht einer Verschiebung des Zeitnullpunktes.

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= A \cdot \sin(kx \pm \omega t) \\ &= A \cdot \cos\left(kx \pm \omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= A \cdot \cos(kx \pm \omega(t - t_0)) \end{aligned}$$

mit

$$t_0 := -\frac{\pi}{2\omega}.$$

Analog kann man auch den Ortsnullpunkt um  $x_0 = \pi/2k$  verschieben. Sinus oder Kosinus ist eine Frage der Wahl des Nullpunkts und liefert hier noch nichts grundsätzlich Neues.

- Phase

Das Argument der Sinus bzw. Kosinus-Funktion heißt "Phase":

$$\varphi = kx \pm \omega t.$$

Je nach Wahl der Nullpunkte für Ort und Zeit ist der absolute Wert der Phase für die gleiche physikalische Wellenerscheinung unterschiedlich. Daher meint man mit Phase meist die Differenz zweier Argumente. (Typische Sprechweisen sind z.B.: "In 1 ms hat sich die Phase der Welle um  $2\pi$  geändert" oder "Über die Dicke des Glasplättchens ändert sich die Phase um  $\pi/8$ " oder "Die beiden Wellen überlagern sich mit einer Phase von  $\pi/2$ "). Die Wellenzahl  $k$  ist offenbar die Ortsableitung der Phase

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx}(kx \pm \omega t) = k$$

Sie ist Rate mit dem sich die Phase mit dem Ort ändert. Entsprechend ist die Kreisfrequenz die Rate mit der sich die Phase zeitlich ändert.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(kx \pm \omega t) = \pm\omega$$

### 1.3 Dispersion

- Wellenlängenabhängige Phasengeschwindigkeit

In manchen Medien hängt die Phasengeschwindigkeit harmonischer Wellen von der Wellenzahl  $k$  ab,

$$v = v(k).$$

Solche Medien heißen dispersiv. Jede harmonische Welle mit Wellenzahl  $k$  hat dann eine andere Geschwindigkeit und gehorcht einer eigenen d'Alembert-Gleichung mit entsprechendem Parameter

$$v_k = v(k).$$

- Allgemeine Dispersionsrelation

Für die Kreisfrequenz gilt immer noch, dass

$$\omega = k \cdot v.$$

Um das zu sehen, setzen wir die Harmonische Welle in die d'Alembertsche Gleichung ein

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2} A \cdot \sin(kx \pm \omega t) &= \frac{1}{v_k^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} A \cdot \sin(kx \pm \omega t) \\ -k^2 A \cdot \sin(kx \pm \omega t) &= -\omega^2 \frac{1}{v_k^2} \cdot A \cdot \sin(kx \pm \omega t) \\ k^2 &= \omega^2 \frac{1}{v_k^2} \\ \omega &= k \cdot v_k\end{aligned}$$

Die Dispersionsrelation lautet also

$$\omega(k) = k \cdot v(k).$$

Sie ist im Allgemeinen nicht mehr linear in  $k$ .

Das Medium wird also nicht mehr von einer einzigen d'Alembert-Gleichung beschrieben, die das Medium komplett beschreibt. Die Wellengleichung verliert dadurch an Bedeutung. Das Medium wird statt dessen durch die Dispersionsrelation beschrieben, die an Wichtigkeit gewinnt. Manchmal gibt es allerdings auch für dispersive Medien eine Wellengleichung, die alle Wellenphänomene des Mediums beschreibt. Die allgemeine Lösungen hat aber dann in der Regel nicht mehr die einfache Form  $f(x \pm vt)$ . Die Schrödingergleichung ist ein Beispiel für eine Wellengleichung mit Dispersion. In der Literatur laufen neben  $\omega(k)$  auch andere äquivalente Formen wie z.B.  $v(k)$ ,  $\omega(v)$ ,  $v(\omega)$ ,  $k(\omega)$ ,  $\lambda(v)$  etc. unter dem Begriff "Dispersionsrelation".

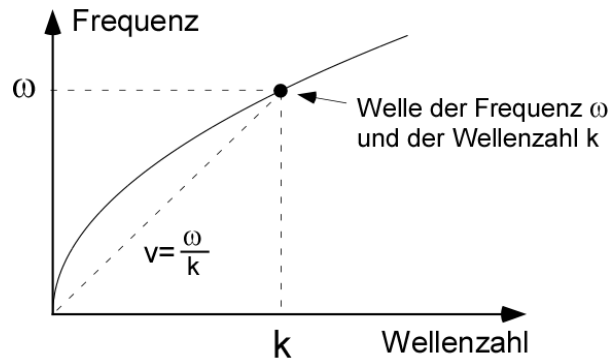
- Beispiel: Schwerewellen in Wasser

Wir betrachten als Beispiel Wasserwellen. Bei so genannten Schwerewellen ist die rücktreibende Kraft die Schwerkraft. Für solche Wellen lautet die Phasengeschwindigkeit für eine harmonische Welle mit Wellenzahl  $k$  (Herleitung z. B. im Gerthsen "Physik")

$$v = v(k) = \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

wobei  $g$  die Erdbeschleunigung ist. Die Geschwindigkeit hängt von der Wellenzahl ab d.h. Wasser ist ein dispersives Medium mit der Dispersionsrelation

$$\omega(k) = \sqrt{k \cdot g}$$



Für Schwerewellen nimmt die Phasengeschwindigkeit  $\omega/k$  für steigende Wellenzahlen  $k$  ab. Lange Wellen sind also schneller als kurze. Dieses Verhalten heißt "Normale Dispersion".

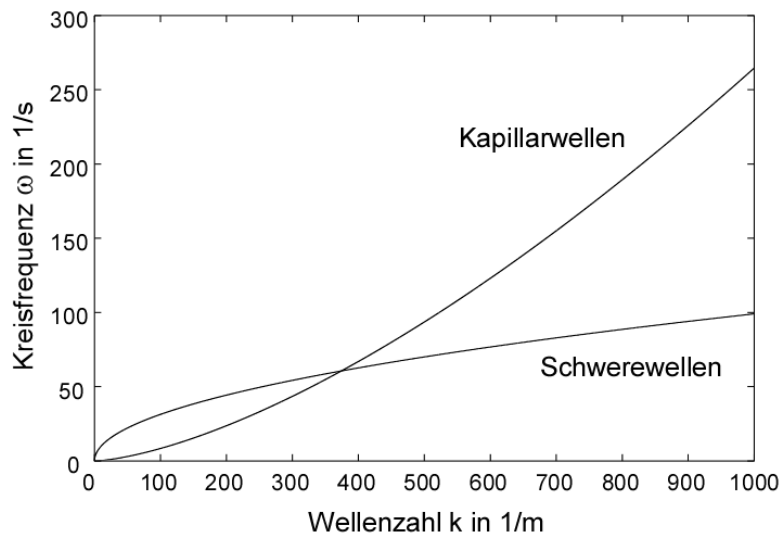
- Kapillarwellen

Neben den Schwerewellen gibt es auch die Kapillarwellen. Besonders bei kurzen Wellenlängen wird die Oberflächenspannung  $\sigma$  als rücktreibende Kraft wichtiger als die Schwerkraft. Die entsprechende Theorie liefert für die Phasengeschwindigkeit

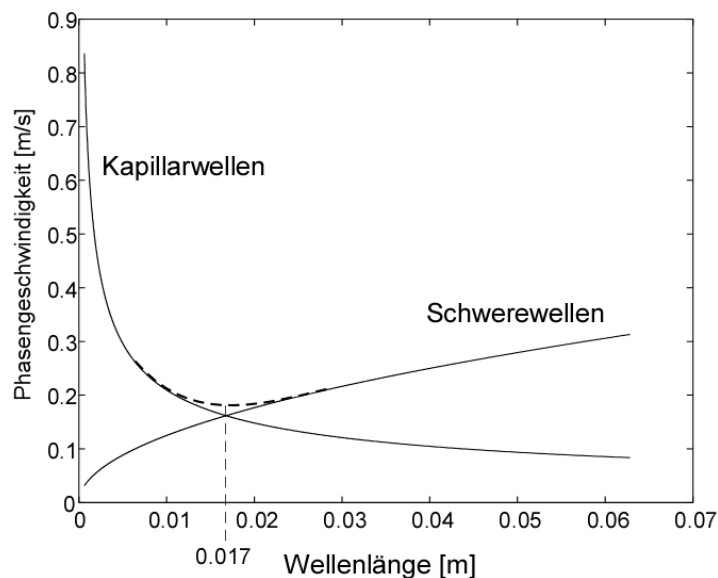
$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} k}.$$

Hier nimmt die Phasengeschwindigkeit mit der Wellenzahl zu. Kurze Wellen sind schneller als lange. Dies ist die "anomale Dispersion". Die Frequenz ist eine positiv gekrümmte Funktion der Wellenzahl.

$$\omega(k) = v \cdot k = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} k} \cdot k = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \cdot k^{3/2}.$$



Die Phasengeschwindigkeit folgt für kleine Wellenlängen der Dispersion von Kapillarwellen und geht bei großen Wellenlängen in die Dispersionsfunktion für Schwerewellen über.



Im Übergangsbereich (gestrichelte Linie) erhält man ein Minimum der Geschwindigkeit von etwa 20 cm/s bei einer Wellenlänge von 17 mm. Im Bereich um das Minimum verläuft die Kurve horizontal, d.h. Wellen mit leicht unterschiedlichen Längen haben die gleiche Geschwindigkeit. Während die Wellen mit Längen weit weg vom Minimum alle unterschiedlich schnell sind und daher schnell auseinanderlaufen, bewegen sich die Wellen mit Längen in der Nähe des Minimums zusammen als Puls. Sie bilden ein gemeinsames Wellenpaket, das sich eine ganze Weile hält. Wenn also alle harmonischen Wellen im Wasser mit gleicher Stärke angeregt werden, entsteht vor allem ein feines 17 mm-Gekäusel.

- Dispersionsrelation von Licht

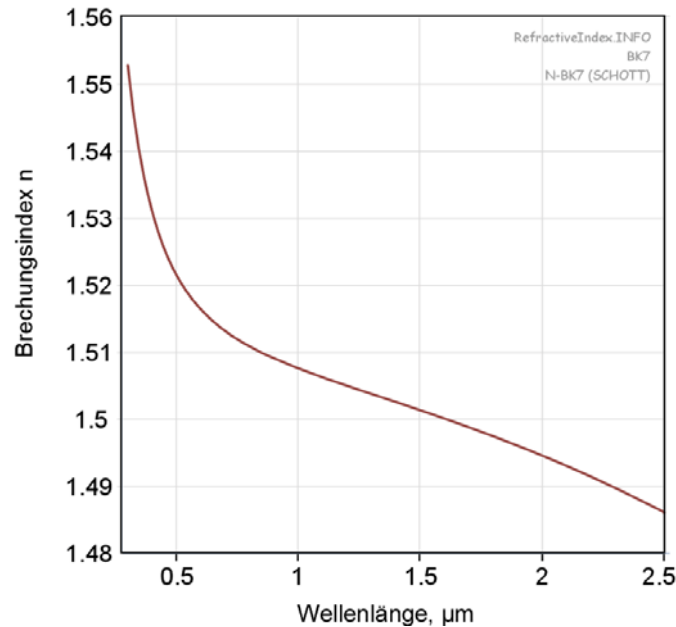
Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, ist die Dispersionsrelation von Licht im Vakuum eine Gerade:

$$\omega(k) = v(k) \cdot k = c \cdot k.$$

Die Steigung  $c$  ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Vakuum ist also ein nicht dispersives Medium. In Glas zeigt Licht allerdings dispersives Verhalten. Die Lichtgeschwindigkeit  $v$  im Medium ist um den Brechungsindex gegenüber der Vakuumlichtgeschwindigkeit reduziert:

$$v(k) = \frac{c}{n(k)}.$$

Der Brechungsindex  $n(k)$  wird in Kapitel 5 ausführlich diskutiert. Im sichtbaren Bereich sind transparente Medien (Luft, Wasser, Glas, Kristalle) normal dispersiv, d.h. kurze Wellen sind langsamer. Hier der Brechungsindex von Fensterglas (BK7 der Firma Schott):



- Dispersionsrelation freier Teilchen

Teilchen werden in der Quantenmechanik durch die Schrödingergleichung beschrieben mit harmonischen Wellen als Lösung. Auch hier gibt es eine Dispersionsrelation. Eine zentrale Hypothese der Quantenphysik ist der Zusammenhang zwischen der Frequenz der Welle, die das Teilchen beschreibt und der Energie des Teilchens:

$$E = \hbar\omega$$

Ein ähnlicher Zusammenhang besteht zwischen dem Impuls des Teilchens mit dem Wellenvektor

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}.$$

Der Wellenvektor  $\vec{k}$  ist die Erweiterung der Wellenzahl für Wellen, die sich in allen drei Dimensionen ausbreiten können (siehe Kapitel 2.2). Für ein freies Teilchen liefert lautet die kinetische Energie

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

Man erhält also eine quadratische Dispersionsrelation

$$\begin{aligned}\hbar\omega &= \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} \\ \omega &= \frac{\hbar}{2m} k^2\end{aligned}$$

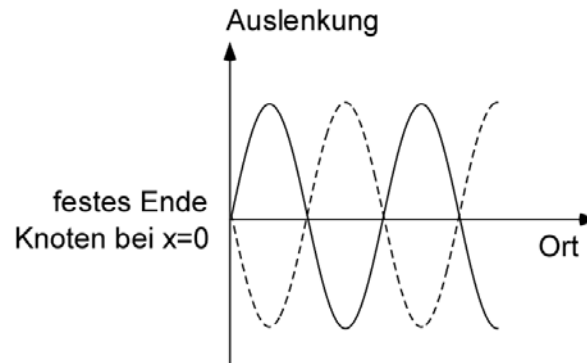
mit anomaler Dispersion.

## 1.4 Randbedingungen und stationäre Lösungen

Bisher haben wir harmonische Wellen in einem homogenen Medium betrachtet. Das Medium füllt also gleichmäßig den ganzen Raum aus und es gibt keine Begrenzungen. Die Wellenzahl kann dann beliebige positive reelle Werte annehmen. In einer realistischen Situation gibt es natürlich Randbedingungen, die die Welle räumlich begrenzen. Laufende Wellen werden dort reflektiert und bilden einen neuen Typ Wellen: die Stehwellen. Die Randbedingungen bestimmen außerdem welche Wellenzahlen realisiert werden können. Wir betrachten als Beispiel wieder des Seil.

- Reflektion am festen Seilende

Die Welle kommt von rechts und trifft auf die Wand, an der das Seil befestigt ist.



Wenn wir eine Dämpfung der Welle durch die Wand ausschließen, muss eine von rechts einfallende Welle am Seilende bei  $x = 0$  reflektiert werden, denn sie kann sonst nirgendwo hin. Es gibt dann auf dem Seil eine Überlagerung von zwei Wellen, der einfallenden (incident) und der reflektierten (reflected). Da das Seilende fest eingespannt ist, muss die Auslenkung am Seilende für alle Zeiten Null sein, d.h. die einfallende und die reflektierte Welle müssen sich dort auslöschen. Für die nach links laufende einfallende harmonische Welle

$$\psi_{inc}(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$$

und der nach rechts reflektierten Welle mit unbekannter Amplitude  $B$  und Relativphase  $\varphi$

$$\psi_{ref}(x, t) = B \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

lautet die Überlagerung

$$\psi(x, t) = A \sin(kx + \omega t) + B \sin(kx - \omega t + \varphi).$$

Am Seilende bei  $x = 0$  muss die Gesamtwelle für alle Zeiten Null sein,

$$\psi(x = 0, t) = A \sin(kx + \omega t) + B \sin(kx - \omega t + \varphi) = 0.$$

Das lässt sich machen, wenn  $A = B$ , und  $\varphi = 0$ :

$$A \sin(\omega t) + A \sin(-\omega t + 0) = A \sin(\omega t) - A \sin(\omega t) = 0$$

Die Gesamtwellenfunktion lautet also:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= A \sin(kx + \omega t) + A \sin(kx - \omega t) \\ &= A (\sin(kx) \cos(\omega t) - \cos(kx) \sin(\omega t) + \sin(kx) \cos(\omega t) + \cos(kx) \sin(\omega t)) \\ &= 2A \cos(\omega t) \sin(kx). \end{aligned}$$

Man erhält das Produkt einer Funktion, die nur vom Ort abhängt und einer, die nur von der Zeit abhängt. Man sagt, dass der Ortsanteil und der Zeitanteil "faktorisieren". Die Welle läuft nun nicht mehr. Stattdessen oszilliert die Amplitude der Ortsfunktion  $\sin(kx)$ . Man erhält eine stehende Welle.

- Reflektion am offenen Seilende

Wir betrachten eine Welle auf einem Medium das plötzlich endet. Das Seilende oszilliert am Seilende zeitlich mit maximaler Amplitude und hat daher dort einen Bauch. Im Bauch verschwindet die Ortsableitung der Wellenfunktion

$$\frac{d}{dx} \psi(x = 0, t) = 0.$$

Wir verwenden denselben Ansatz wie oben,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \psi(x, t) &= \frac{d}{dx} (A \sin(kx + \omega t) + B \sin(kx - \omega t + \varphi)) \\ &= kA \cos(kx + \omega t) + kB \cos(kx - \omega t + \varphi) \end{aligned}$$

und fordern, dass die Ableitung bei  $x = 0$  verschwindet:

$$kA \cos(\omega t) + kB \cos(-\omega t + \varphi) = 0$$

was mit  $A = -B$  und  $\varphi = 0$  erfüllt wird. Damit lautet die Gesamtwellenfunktion

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= A \sin(kx + \omega t) - A \sin(kx - \omega t) \\ &= 2A \sin(\omega t) \cos(kx) \end{aligned}$$

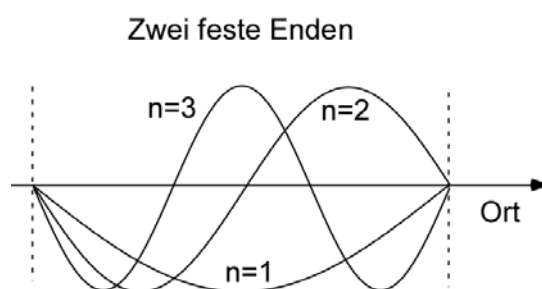
Wieder erhält man eine stehende Welle, diesmal mit der Ortsfunktion  $\cos(kx)$ .



- Stationäre Wellenfunktionen mit kontinuierlichem Spektrum

Orts- und zeitabhängiger Teil faktorisieren bei einer Stehwelle. Solche Lösungen der Wellengleichung heißen "stationär". Der ortsabhängige Teil hat bei  $x = 0$  einen Knoten oder einen Bauch, es gibt aber keine Einschränkung für die Wellenzahl und damit für die Frequenz oder die Wellenlänge. Alle Frequenzen sind möglich und das Spektrum ist "kontinuierlich".

- Endliche Seillänge und diskretes Spektrum



Bei endlichen Seillängen muss man beide Enden behandeln. Bei zwei festen Enden müssen dort Knoten sein. Man nimmt also die Lösung für ein Seil mit einem festen Ende

$$\psi(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

und fordert, dass auch am anderen Ende des Seils bei  $x = l$  ein Knoten sitzt:

$$\begin{aligned} \psi(l, t) &= 2A \sin(kl) \cos(\omega t) = 0 \\ \sin(kl) &= 0 \\ kl &= n\pi. \end{aligned}$$

wobei  $n$  eine natürliche Zahl ist (nicht zu verwechseln mit dem Brechungsindex  $n$ ). Diesmal kann es nur bestimmte Werte für  $k$  geben

$$k_q = n \cdot \frac{\pi}{l}$$

Mit Hilfe der Phasengeschwindigkeit  $v = \omega/k$  erhält man die Frequenzen, mit denen das Seil oder die Saite eines Musikinstruments schwingen kann.

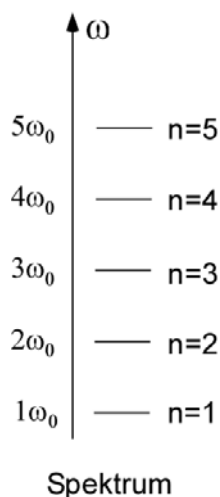
$$\begin{aligned} \omega_q &= n \cdot \omega_0 \\ \omega_0 &: = 2\pi \cdot \frac{v}{2l}. \end{aligned}$$

Die entsprechenden Wellenfunktionen lauten

$$\psi_n(x, t) = 2A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$$

Aus der gemessenen Länge einer Saite für den Kammerton  $a = 440$  Hz kann man z.B. die Phasengeschwindigkeit der Saite bestimmen (Übung).

Man kann die möglichen Frequenzen entlang eines vertikalen Zahlenstrahls auftragen und erhält das Spektrum in folgender Form:



Solche Darstellungen gibt es auch in der Atomphysik. Sie heißen dort "Termschema". Anders als in der gängigen Literatur verwenden wir in diesem Skript den Begriff "Termschema" und "Quantenzahlen" auch für mechanische Wellen.

Welches Spektrum erhält man für zwei offenen Enden? Blasinstrumente und Orgelpfeifen haben ein offenes und ein festes Ende. Welches Spektrum ergibt sich dann? Wie sieht das Termschema für einen Stahlring aus, also einen Ring bei dem Anfang und Ende verbunden sind? Hier gibt es zwar auch nur eine abzählbare Menge von Lösungen mit äquidistantem Spektrum. Sie können aber sowohl zu laufenden als auch zu stehenden Wellen kombiniert werden (Übung).

- Laufende Wellen und Stehende Wellen

So wie sich laufende Wellen zu stehenden Wellen überlagern, so können sich auch zwei stehende Wellen zu laufenden Wellen überlagern:

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= A \sin(kx) \cos(\omega t) + B \cos(kx) \sin(\omega t) \\ &= \frac{A}{2} (\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)) + \frac{B}{2} (\sin(kx + \omega t) - \sin(kx - \omega t))\end{aligned}$$

Mit  $A = B$  erhält man eine linkslaufende Welle

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \frac{A}{2} (\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t) + \sin(kx + \omega t) - \sin(kx - \omega t)) \\ &= A \sin(kx + \omega t)\end{aligned}$$

und mit  $A = -B$  eine rechtslaufende Welle

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \frac{A}{2} (\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t) - \sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)) \\ &= A \sin(kx - \omega t)\end{aligned}$$

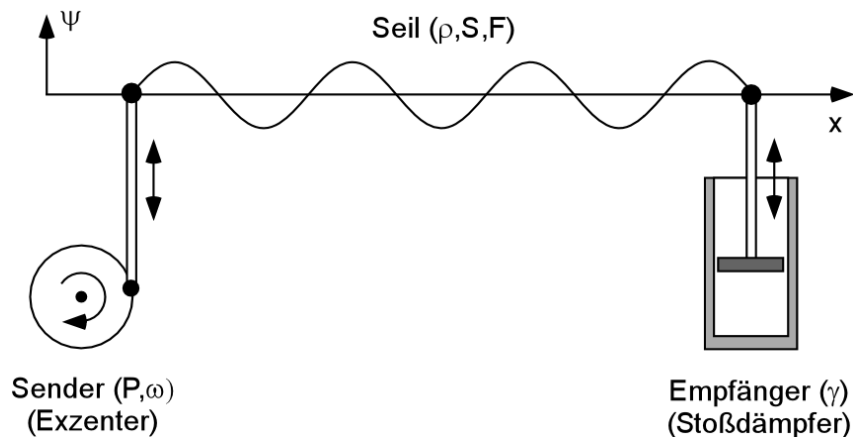
- Überlagerung stationärer Wellen ergeben nichtstationäre Wellen.

Zwei stationäre Wellen überlagern sich zu einer laufenden Welle. Diese ist dann nicht mehr stationär, d.h. orts- und zeitabhängiger Teil faktorisieren nicht mehr! Einen laufenden Puls kann man z.B. erzeugen wenn man stationäre Lösungen mit verschiedenen Frequenzen überlagern. Mit solchen Überlagerungen lassen sich dann beliebige laufende Wellen erzeugen. Sie haben dann aber keine festgelegte Frequenz mehr (später dazu mehr).

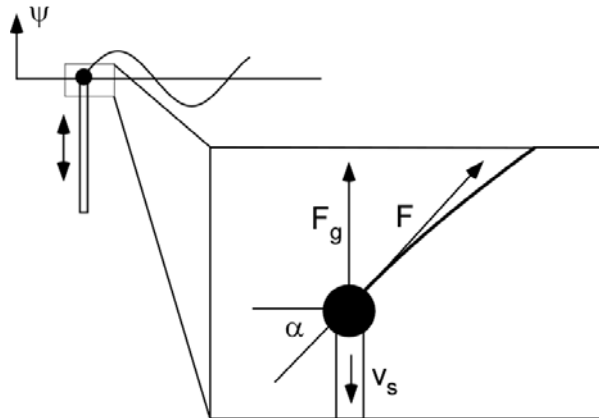
## 1.5 Energietransport und Wellenwiderstand

- Wellenwiderstand

Wellen können Energie transportieren. Der Sender, der die Schwingung erzeugt, gibt dabei Energie ab, die am anderen Ende des Seils von einem Empfänger absorbiert wird.



Wir betrachten die Energieabgabe eines Senders, der links vom Seil steht und auf dem Seil eine nach rechts laufende Welle erzeugt. Dazu benötigen wir die Kraft, mit der das Seil am Sender zieht.



Das mit der Kraft  $F$  gespannte Seil führt während der Schwingung die Kraft immer parallel zum Seil, so dass das Seilende eine Kraft  $F_g$  auf den Aufhängepunkt ausübt, die parallel zur Steigung der Wellenfunktion am Aufhängepunkt ist. Auf den Sender wirkt die vertikale Komponente dieser Kraft, die bei kleinen Winkeln proportional zu Steigung der Wellenfunktion ist:

$$F_g = F \cdot \sin \alpha \simeq F \cdot \frac{d\psi}{dx}.$$

Bei harmonischen Wellen kann man die Steigung des Seils in die Geschwindigkeit des Seils umrechnen:

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{1}{v} \frac{d\psi}{dt}$$

(selber nachrechnen: setzen Sie für  $\psi$  eine harmonische Welle ein und bilden sie die Ableitungen). Damit zieht das Seilende am Sender mit einer Kraft

$$F_g(t) = F \frac{d\psi}{dx} = -F \frac{1}{v} \frac{d\psi}{dt} = -Z \frac{d\psi}{dt}$$

Die Kraft  $F_g$ , die der Sender spürt, ist also proportional zur transversalen Geschwindigkeit  $\dot{\psi}$  des Seilendes mit der Proportionalitätskonstanten

$$Z := \frac{F}{v}.$$

Eine solche Kraft entspricht der einer Stokeschen Reibung. Der Sender spürt dieselbe Art Kraft, wenn er ein Objekt durch eine Flüssigkeit bewegen müsste. Bei Wellen nennt man die Dämpfungskonstante dieser effektiven Stokeschen Reibung "Wellenwiderstand  $Z$ " oder auch "Impedanz  $Z$ ". Er ist eine Eigenschaft des Mediums. Für das Seil erhält man

$$Z = \frac{F}{v} = \frac{F}{\sqrt{\frac{F}{\rho S}}} = \sqrt{F \rho S}$$

Je größer die Kraft  $F$  ist, mit der das Seil gespannt ist, und je schwerer das Seil ist, umso größer der Wellenwiderstand.

- Mittlere übertragene Leistung

Aus Physik I wissen wir, dass die mechanisch übertragene Leistung gerade Kraft mal Geschwindigkeit ist

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d(F \cdot x)}{dt} = F \frac{dx}{dt} = F \cdot v.$$

Hier bewegt sich das Seilende mit der transversalen Geschwindigkeit  $v_s$  gegen die Kraft des Senders  $F_s$ . Sie ist gleich groß wie Kraft  $F_g$ , die das Seil auf den Sender ausübt aber mit umgekehrten Vorzeichen,  $F_s = -F_g$  (actio gleich reactio). Das Seil nimmt also eine Leistung  $P$  auf von:

$$P(t) = F_s(t) \cdot v_s(t) = -F_g(t) \cdot \frac{d\psi}{dt} = Z \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2$$

Im zeitlichen Mittel erhält man für harmonische Wellen

$$\begin{aligned} \langle P(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T Z \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 dt = Z \frac{1}{T} \int_0^T (A\omega \sin(\omega t))^2 dt \\ &= Z (A\omega)^2 \frac{1}{T} \int_0^T (\sin(\omega t))^2 dt = \frac{1}{2} \cdot Z \cdot A^2 \cdot \omega^2. \end{aligned}$$

Die übertragene Leistung ist proportional zum Wellenwiderstand und wächst quadratisch mit der Frequenz und der Amplitude der Welle.

- Idealer Abschluss

Auf der Empfängerseite wollen wir die Leistung möglichst vollständig absorbieren. Dazu benötigen wir einen Stoßdämpfer, der auf das Seil ebenfalls eine geschwindigkeitsabhängige Kraft ausübt.

$$F_E(t) = -\gamma \frac{d\psi}{dt}$$

Dagegen wirkt die Kraft des Seils, das von links kommt und auf den rechts stehenden Stoßdämpfer mit der Kraft

$$F_g = -Z \frac{d\psi}{dt}.$$

Um die Leistung komplett zu absorbieren, muss die Kraft des Stoßdämpfers die Kraft des Seils gerade kompensieren

$$\begin{aligned} F_E &= F_r \\ -\gamma \frac{d\psi}{dt} &= -Z \frac{d\psi}{dt} \\ \gamma &= Z \end{aligned}$$

also muss die Dämpfungskonstante des Stoßdämpfers gerade dem Wellenwiderstand entsprechen.

- Reflektion

Ist die Dämpfungskonstante des Empfängers falsch eingestellt, wird ein Teil der Welle am Stoßdämpfer reflektiert und läuft zum Sender zurück. Den Reflektionskoeffizient kann man mit Hilfe des Wellenwiderstands berechnen. Am Empfänger setzt sich die Auslenkung des Seils aus der Auslenkung der einfallenden Welle und der Auslenkung der reflektierten Welle zusammen.

$$\psi = \psi_{inc} + \psi_{ref}$$

Von der Kraft des Empfängers auf das Seil

$$F_E(t) = -\gamma \frac{d\psi}{dt} = -\gamma \frac{d\psi_{inc}}{dt} - \gamma \frac{d\psi_{ref}}{dt}$$

ziehen wir die Kraft ab, die der Empfänger braucht, um die einfallende Welle komplett wegzudämpfen. Was übrigbleibt ist eine Überschusskraft  $F_u$ , mit der die reflektierte Welle erzeugt wird

$$F_u = F_E - \left( -Z \frac{d\psi_{inc}}{dt} \right) = -\gamma \frac{d\psi_{inc}}{dt} - \gamma \frac{d\psi_{ref}}{dt} + Z \frac{d\psi_{inc}}{dt}$$

Mit dieser Kraft kann man jetzt die reflektierte Welle erzeugen:

$$F_u = Z \frac{d\psi_{ref}}{dt}$$

also

$$\begin{aligned} Z \frac{d\psi_{ref}}{dt} &= -\gamma \frac{d\psi_{inc}}{dt} - \gamma \frac{d\psi_{ref}}{dt} + Z \frac{d\psi_{inc}}{dt} \\ \frac{d\psi_{ref}}{dt} (Z + \gamma) &= \frac{d\psi_{inc}}{dt} (Z - \gamma) \\ \frac{d\psi_{ref}}{dt} &= \frac{(Z - \gamma)}{(Z + \gamma)} \frac{d\psi_{inc}}{dt} \\ \int \frac{d\psi_{ref}}{dt} dt &= \frac{(Z - \gamma)}{(Z + \gamma)} \int \frac{d\psi_{inc}}{dt} dt \\ A_{ref} &= \frac{Z - \gamma}{Z + \gamma} A_{inc} \end{aligned}$$

Man erhält also den Reflektionskoeffizient für die Amplituden

$$r_A := \frac{A_{ref}}{A_{inc}} = \frac{Z - \gamma}{Z + \gamma}$$

(Für die Integration in der vorletzten Zeile wurden harmonische Wellen einsetzen und am Ort des Absorbers ausgewertet).

Wenn man zwei Seile mit unterschiedlichen Wellenwiderstand verbindet, gilt ganz analog

$$r_A = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Der Reflektionskoeffizient kann positiv oder negativ sein:

$$Z_1 > Z_2 \rightarrow r_A > 0$$

$$Z_1 < Z_2 \rightarrow r_A < 0$$

Bei Reflektion am "dichteren" Medium gibt es also einen Phasensprung um  $\pi$ . Außerdem erhält man sowohl für ein festes Ende als auch für ein offenes Ende vollständige Reflektion:

$$Z_1 \gg Z_2 \rightarrow r_A = 1$$

$$Z_1 \ll Z_2 \rightarrow r_A = -1$$

- Impedanzanpassung

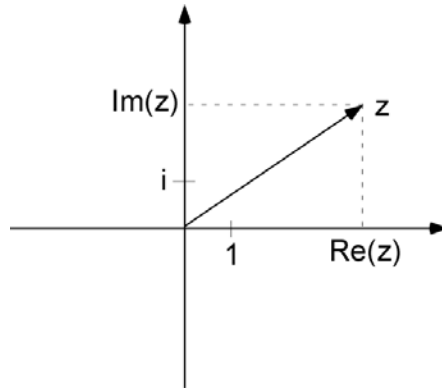
Optimale Anpassung, d.h. völliges Verschwinden der Reflektion beim Übergang zwischen zwei Medien erhält man bei exponentiellem Übergang der Wellenwiderstände. Eine gute Kompromisslösung ist das Einfügen einer Schicht mit Wellenwiderstand  $Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}$  und einer Länge  $l = \lambda/2$ . Impedanzanpassung von akustischen Wellen spielt eine Rolle bei Lautsprechern und Blasinstrumenten da die Schallgeschwindigkeit von den Wänden abhängt und z.B. in Röhren kleiner ist als in Luft. Elektronische Impedanzanpassung findet man bei BNC-Kabeln oder Mikrowellenleitern und optische Impedanzanpassung in Vergütungen von Linsen und Fenstern.

## 1.6 Komplexe Darstellung harmonischer Wellen

Wellenfunktionen werden oft ins Komplexe erweitert. In dieser Form lassen sich Überlagerungen von Wellen wesentlich einfacher rechnen.

- Komplexe Darstellung

Stellt man eine Schachfigur auf einen Plattenteller und beleuchtet sie von der Seite, so bewegt sich der Schatten der Figur an der Wand gemäß einer Sinusfunktion. Man kann also eine harmonische Funktion formal auch als die Projektion einer Drehung auffassen. Dazu benutzt man am besten die komplexe Ebene. Jede komplexe Zahl kann man als Produkt einer Amplitude und einer komplexen Exponentialfunktion schreiben.



Die komplexe Zahl

$$z = e^{i\varphi_z}$$

entspricht einem Punkt (Position der Schachfigur) in der Gaußschen Zahlenebene (Plattenteller) im Abstand 1 vom Ursprung. Ersetzt man das Argument der Exponentialfunktion durch die Phase der Welle

$$\varphi_z = \varphi = kx \pm \omega t$$

so bewegt sich der Punkt im Kreis um den Ursprung. Die Projektion auf die reelle Achse entspricht dem Schattenwurf

$$\text{Re}(z) = \text{Re}(e^{i(kx \pm \omega t)}) = \cos(kx \pm \omega t).$$

Die Wellenfunktion einer harmonischen Welle kann man also schreiben als

$$\psi(x, t) = \text{Re}(A \cdot e^{i(kx \pm \omega t)})$$

- Komplexe Amplitude

Die Amplitude  $A$  der Welle kann man jetzt auch komplexwertig zulassen. Neben der Auslenkung beschreibt sie dann auch eine etwaige zusätzliche Phasenverschiebung um  $\varphi_A$  :

$$\begin{aligned} A \cdot e^{i(kx \pm \omega t)} &= |A| \cdot e^{i\varphi_A} \cdot e^{i(kx \pm \omega t)} \\ &= |A| \cdot e^{i(kx \pm \omega t + \varphi_A)} \end{aligned}$$

Der Betrag der komplexen Amplitude ist die Amplitude der Welle und ihre komplexe Phase ist eine Phasenverschiebung der Welle. Ersetzt man z.B. in der Kosinuswelle  $\text{Re}(|A| \cdot e^{i(kx \pm \omega t)})$  die Amplitude  $|A|$  durch die rein imaginäre Amplitude

$$A = -i|A| = |A| e^{-i(\pi/2)}$$



erhält man eine Sinuswelle

$$\begin{aligned}
 \psi(x, t) &= \operatorname{Re} (A \cdot e^{i(kx \pm \omega t)}) \\
 &= \operatorname{Re} (-i |A| \cdot e^{i(kx \pm \omega t)}) \\
 &= |A| \operatorname{Re} (e^{i(kx \pm \omega t - \pi/2)}) \\
 &= |A| \cos (kx \pm \omega t - \pi/2) \\
 &= |A| \sin (kx \pm \omega t).
 \end{aligned}$$

Durch die Einführung der komplexen Amplitude hat man also sowohl Sinus als auch Kosinuswellen erfasst.

- Oft betrachtet man Summen von Wellen. Da für komplexe Zahlen gilt, dass

$$\operatorname{Re} (z_1 + z_2) = \operatorname{Re} (z_1) + \operatorname{Re} (z_2)$$

macht man dabei keinen Fehler, wenn man zuerst die Summe und dann den Realteil bildet.

- Komplexe und reelle Theorien

Die Maxwellsche Theorie des Lichts kennt nur reelle Felder. Die Wellenmechanik quantenmechanischer Teilchen erfordert dagegen im allgemeinen komplexwertig Wellenfunktionen. Allerdings kann man auch Licht als ein Ensemble von quantenmechanischen Teilchen auffassen, den so genannten Photonen. Die Photonen bilden allerdings in sofern eine Ausnahme, als sie keine Antiteilchen haben (bzw. Photonen ihre eigenen Antiteilchen sind). Dies ist der tiefere Grund dafür, dass die Felder der Maxwelltheorie reell sind. Teilchen, die sich von ihren Antiteilchen unterscheiden (z.B. durch ihre Ladung) erfordern eine komplexe Theorie. Die mathematischen Ausdrücke einer komplexen oder reellen Theorie (in komplexer Schreibweise) sind manchmal sehr ähnlich. Daher ist es wichtig zu wissen, dass es hier dennoch grundsätzliche physikalische Unterschiede gibt.

## 1.7 Formale Behandlung stationärer Wellenfunktionen

Die stationären Lösungen sind besonders wichtig, da sich aus ihnen alle anderen Lösungen durch Überlagerung zusammensetzen lassen. Es wäre gut, ein Verfahren zu haben, mit dem man die stationäre Lösungen einer Wellengleichung berechnen kann.

- Eigenschwingungen und Separationsansatz

Um die stationären Lösungen einer Wellengleichung zu finden, macht man einen Separationsansatz für die Wellenfunktion,

$$\psi(x, t) = u(x) \cdot \chi(t)$$

mit den komplexwertigen Funktionen  $u(x)$  für den ortsabhängigen und  $\chi(t)$  für den zeitabhängigen Teil der Wellenfunktion.

- stationäre Wellengleichung

Setzt man den Ansatz in die Wellengleichung

$$\frac{d^2\psi(x,t)}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2\psi(x,t)}{dt^2}$$

ein und dividiert dann durch  $u(x) \cdot \chi(t)$  erhält man

$$\begin{aligned} \chi(t) \frac{d^2u(x)}{dx^2} &= \frac{1}{v^2} u(x) \frac{d^2\chi(t)}{dt^2} \\ \frac{1}{u(x)} \frac{d^2u(x)}{dx^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{1}{\chi(t)} \frac{d^2\chi(t)}{dt^2} \end{aligned}$$

Der linke Teil hängt nur vom Ort und der rechte Teil nur von der Zeit ab. Die Gleichung lässt sich für alle Orte und alle Zeiten nur erfüllen, wenn beide Teile konstant sind. Wir nennen die Konstante  $E$  und erhalten die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u(x)} \frac{d^2u(x)}{dx^2} &= E \\ \frac{1}{v^2} \frac{1}{\chi(t)} \frac{d^2\chi(t)}{dt^2} &= E \end{aligned}$$

Die erste Gleichung

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = Eu(x)$$

nennt man stationäre Wellengleichung. Die stationären Lösungen haben die Form

$$u(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

wobei

$$k^2 := -E.$$

Die zweite Gleichung beschreibt die Zeitabhängigkeit und hat die allgemeine Lösung

$$\chi(t) = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}$$

mit

$$\omega^2 = -Ev^2 = k^2v^2$$

oder

$$|\omega| = |v| |k|$$

Frequenz und Wellenzahl hängen also wie oben über die Wellengeschwindigkeit  $v$  zusammen und können beliebige Vorzeichen haben. Je nach Wahl der Koeffizienten  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  kann die allgemeine Lösung

$$\psi(x,t) = (Ae^{ikx} + Be^{-ikx}) (\alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t})$$

eine Stehwelle sein (z.B.  $A = B = \alpha = \beta$ )

$$\psi(x, t) = \alpha A (e^{ikx} + e^{-ikx}) (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = 4A^2 \cos(kx) \cos(\omega t)$$

oder eine komplexe laufende Welle (z.B.  $B = 0$  und  $\beta = 0$ )

$$\psi(x, t) = A\alpha e^{ikx} e^{i\omega t} = A\alpha e^{i(kx + \omega t)}$$

In der Quantenmechanik sind solche komplexen stationären Zustände die Regel. Eine reelle laufende Welle bekommt man mit dem Separationsansatz allerdings nicht zustande, d.h. für reelle Wellenfunktionen sind stationäre Zustände stehende Wellen.

## 1.8 Überlagerung von Wellen unterschiedlicher Frequenz, Fourier Transformation

Man kann die räumliche Form und die zeitliche Entwicklung beliebiger Wellen als Überlagerungen aus harmonischen Wellen unterschiedlicher Wellenzahlen verstehen. Dazu benötigen wir das Fourier-Theorem. Zuvor einige Überlegungen, die den entscheidenden Gedanken klarmachen.

1. ein Vektor ist eine nummerierte Folge von Zahlen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \end{pmatrix} = x_i$$

2. Eine stetige Funktion  $f$  ist ebenfalls eine "nummerierte" Folge von Zahlen, nur das der Index  $i$  keine natürliche sondern eine reelle Zahl  $t$  ist.

$$\begin{aligned} i &\rightarrow t \\ x &\rightarrow f \\ x_i &\rightarrow f_t = f(t) \end{aligned}$$

3. Vektoren kann man als Linearkombination von anderen Vektoren schreiben.

$$\vec{x} = \sum_n \alpha_n \vec{b}_n$$

Optimalerweise bilden diese anderen Vektoren eine Basis, d.h. sie stehen senkrecht aufeinander und haben die Länge eins. Das Skalarprodukt der Basisvektoren ist das Kronecker-Delta

$$\vec{b}_n \cdot \vec{b}_m = \delta_{mn}.$$

Die Entwicklungskoeffizienten lauten dann

$$\alpha_n = \vec{x} \cdot \vec{b}_n.$$

4. Das Skalarprodukt ist die Summe über das Produkt der Komponenten zweier Vektoren.

$$\vec{y} \cdot \vec{z} = \sum_n y_n z_n.$$

Entsprechend kann man ein Skalarprodukt für zwei Funktionen  $f$  und  $g$  als Integral über das Produkt definieren:

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t) dt.$$

5. Kann man also, in Analogie zu Vektoren, beliebige Funktionen als Linearkombination einer bestimmten "Funktionenbasis" schreiben?

- Fourier Theorem

Das Fouriersche Theorem besagt, dass man jede Funktion als Überlagerung von harmonischen Funktionen schreiben kann. Es ist wie gemacht dafür, Überlagerungen von Wellen zu analysieren. Wir zitieren das Theorem hier nur und leiten es nicht her. Wir betrachten eine beliebige Funktion  $f(x)$ . Sie muss nicht periodisch sein sondern kann einen beliebigen "vernünftigen" Verlauf haben. Das Fourier-Theorem besagt, dass man die Funktion  $f(x)$  als Überlagerungen von Sinus- und Kosinus-Funktionen schreiben kann (Bronstein):

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(k) \cos(kx) + b(k) \sin(kx)) dk$$

Die Koeffizienten berechnen sich nach den Gleichungen

$$a(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(kx) dx$$

und

$$b(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(kx) dx.$$

Die Funktionen  $a(k)$  und  $b(k)$  heißen (Kosinus bzw. Sinus-) "Fourier-Transformierte" der Funktion  $f(x)$ . Sie werden manchmal auch die Spektren der Funktion  $f(x)$  genannt. Oft verwendet man nicht das Sinus- und das Kosinus-Spektrum sondern das Amplitudenspektrum zusammen mit dem Phasenspektrum. Man verwendet dazu den allgemeinen Zusammenhang für die Linearkombination einer Sinus- und einer Kosinus-Funktion mit gleichem Argument:

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos\left(x - \arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

Statt des Sinus- und des Kosinusspektrums kann man auch das Amplitudenspektrum

$$A(k) = \sqrt{a(k)^2 + b(k)^2}$$

und das Phasenspektrum angeben

$$\varphi(k) = \arctan\left(\frac{b(k)}{a(k)}\right).$$

Die ursprüngliche Funktion ist dann das Integral

$$f(x) = \int_0^\infty A(k) \cos(kx + \varphi(k)) dk$$

Als Leistungsspektrum bezeichnet man das Quadrat des Amplitudenspektrums,

$$P(k) = A(k)^2 = a(k)^2 + b(k)^2.$$

- komplexe Darstellung des Fourierschen Theorems

Man kann die Fourier-Transformation auch ins Komplexe erweitern. Für komplexe Funktionen  $f(x)$  und  $g(k)$  gilt

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{-ikx} dk,$$

wobei sich die Fourier-Transformierte  $g(k)$  aus  $f(x)$  berechnet durch

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx.$$

- Exponentieller Zerfall und Lorentz-Spektrum

Als Beispiel betrachten wir die Dämpfung eines Pendels. Nach Anregung einer Schwingung gerät das Pendel durch die Stöße mit den umgebenden Luftmolekülen langsam wieder in Ruhe. Die mechanische Schwingungsenergie wird als ungeordnete Bewegungsenergie an die Moleküle abtransportiert und die Luft wird wärmer. Die abklingende Schwingung kann nach Fourier durch eine Überlagerung von harmonischen Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen beschreiben. Wie fragen nach dem Spektrum des Pendels also nach der Stärke, mit der die einzelnen Schwingungen beitragen.

Der zeitliche Verlauf der Grundschiwingung mit ungedämpfter Frequenz  $\omega_0$  ist durch die Funktion

$$f(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t)$$

gegeben. Die Exponentialfunktion mit der Dämpfungskonstanten  $\gamma$  beschreibt das Abklingen der Schwingungsamplitude. Die Funktion  $f(t)$  wollen wir als Überlagerung harmonischer Schwingungen darstellen. Dazu berechnen wir das Kosinus-Spektrum:

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \\ &= A_0 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t) \cos(\omega t) dt \\ &= A_0 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma t} \left( \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t + \omega t) + \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t - \omega t) \right) dt \end{aligned}$$

und entsprechend das Sinus-Spektrum

$$\begin{aligned}
 b(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \\
 &= A_0 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t) \sin(\omega t) dt \\
 &= A_0 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma t} \left( \frac{1}{2} \sin(\omega_0 t + \omega t) + \frac{1}{2} \sin(-\omega_0 t + \omega t) \right) dt.
 \end{aligned}$$

Das Pendel wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  angeregt und ruht vorher,  $f(t < 0) = 0$ . Daher können wir von Null ab integrieren

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_0^{\infty}$$

und die Integrale auswerten. Man erhält (selber rechnen)

$$\begin{aligned}
 a(\omega) &= A_0 \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega_0 - \omega)^2} + A_0 \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega_0 + \omega)^2} \\
 b(\omega) &= A_0 \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_0 - \omega}{\gamma^2 + (\omega_0 - \omega)^2} + A_0 \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_0 + \omega}{\gamma^2 + (\omega_0 + \omega)^2}.
 \end{aligned}$$

Da die Dämpfung typischerweise wesentlich kleiner ist als die Frequenz,  $\gamma \ll \omega$ , wird in der Nähe der Resonanz, also für  $\omega \simeq \omega_0$ , der erste Term viel größer als der zweite Term, den man deshalb vernachlässigen kann. Das Amplitudenspektrum  $A(\omega)$  eines exponentiellen Zerfalls lautet also:

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= A_0 \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{A_0}{2\pi} \sqrt{\left( \frac{\gamma}{\gamma^2 + \delta^2} \right)^2 + \left( \frac{\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \right)^2} \\
 &= \frac{A_0}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}}
 \end{aligned}$$

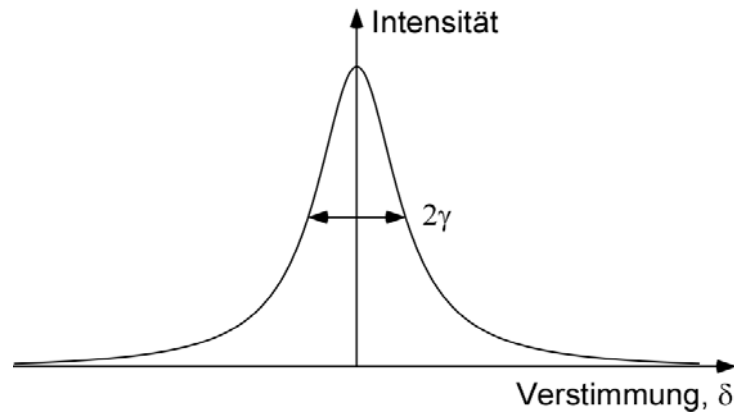
mit der Abkürzung

$$\delta := \omega - \omega_0$$

die manchmal Verstimmung genannt wird. Aus der Mechanik übernehmen wir, dass die Leistung, die die Saite bei seiner Schwingung abgibt, proportional zum Quadrat der Amplitude ist. Die akustische Leistungsabgabe ist also proportional zum Leistungsspektrum

$$P(\omega) \simeq A(\omega)^2 = \left( \frac{A_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\gamma^2 + \delta^2}$$

In der Nähe der Resonanz folgt das Leistungsspektrum also einer einfachen Lorentz-Funktion.



Die Gitarrensaite verliert seine Energie exponentiell und strahlt dabei ein Lorentz-Spektrum ab. Für die Halbwertsbreite des Spektrums erhält man gerade die doppelte Zerfallsrate

$$\Delta\omega = 2\gamma.$$

Mit der Zerfallsrate ist die Lebensdauer  $\tau_A$  verbunden. Sie ist definiert als die Zeit, nach der die Amplitude des Pendels auf  $1/e$  seiner Anfangsamplitude abgefallen ist. Mit dem obigen Ansatz erhält man

$$\tau_A = \frac{1}{\gamma}$$

Die Energie ist proportional zum Quadrat der Amplitude und zerfällt daher doppelt so schnell. Die Energiezerfallszeit  $\tau$  ist daher  $1/(2\gamma)$ . Drückt man  $\gamma$  durch die Halbwertsbreite aus, erhält man

$$\tau \cdot \Delta\omega = 1.$$

Dies ist ein Beispiel für die Frequenz-Zeit-Unschärfe eines exponentiell gedämpften Oszillators. Wenn man den Kammerton a (440 Hz) mit einer Frequenzgenauigkeit von 1% erzeugen will, muss der Ton mindestens ein Viertelsekunde lang klingen (unabhängig vom Instrument). Notenpartituren, bei denen Dauer und Höhe des Tons exakt angegeben werden, bergen einen prinzipiellen Widerspruch. Um einen Ton z.B. mit einer Halbtongenauigkeit spielen zu können, muss er eine Mindestlänge haben. Gerade für tiefe Töne darf die Tonfolge nicht zu schnell sein. Wie sind die Zahlen? Ist das eine in der Praxis wichtige Einschränkung? (Beispiel in den Übungen).

- Frequenz-Zeit-Unschärfe

Mit der, für den betreffenden Vorgang charakteristischen Zeitspanne  $\Delta t$  (in unserem Beispiel ist das die Energiezerfallszeit  $\tau$  der Saitenschwingung) ist eine Frequenzunschärfe  $\Delta\omega$  verbunden, die sich aus der Tatsache ergibt, dass sich eine zeitlich begrenzte Funktion aus mehrerer Schwingungen verschiedener Frequenzen zusammensetzt. Für

die Standardabweichungen eines zeitlich sich über eine begrenzte Zeit erstreckenden Vorgangs kann man für die Standardabweichungen allgemein zeigen, dass

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2}.$$

Diese Unschärferelation ist Resultat des Fourier-Theorems und eine allgemeine Eigenschaft von Schwingungen.

- Energie-Zeit-Unschärfe

Analog zur Ort-Impuls-Unschärfe kann man der Energie eines Teilchens eine Frequenz zuordnen:

$$E = \hbar\omega.$$

Durch die Frequenz-Zeit-Unschärfe wird dann aber auch die Energie eines Photons im zeitlich begrenzten Vorgängen unscharf.

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Ein Teilchen hat nur dann eine exakt bestimmbare Energie, wenn es unendlich lange lebt und man es unendlich lange beobachtet. Die Energie eines Photons wird zu einer, in endlichen Zeiten nicht exakt bestimmbaren Größe. Dies ist eine verblüffende und spektakuläre Konsequenz der Vorstellung, dass Teilchen durch Schwingungen beschrieben werden können.

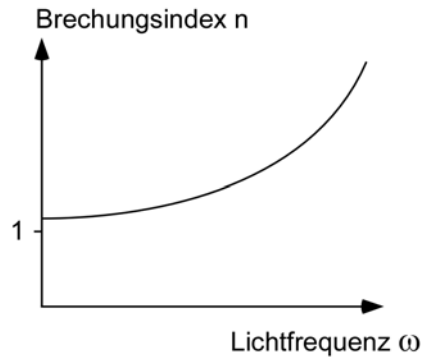
## 1.9 Lichtpulse in Materie

Als zweites Beispiel für die Überlagerung von harmonischen Wellen betrachten wir einen Lichtpuls. Wir müssen dazu nur wissen, dass Licht ein Wellenphänomen ist und wie die Dispersionsrelation aussieht. Den Puls setzen wir aus einer Überlagerung harmonischer Wellen zusammen. In dispersiven Medien breitet sich allerdings jede dieser Wellen mit einer anderen Geschwindigkeit aus, wodurch der Puls seine Form ändert. Dies ist vor allem bei der digitalen Datenübertragung in Glasfasern mit Hilfe von Lichtpulsen wichtig. Wir betrachten das Phänomen etwas genauer anhand eines Gaußschen Wellenpakets.

- Normale Dispersion

Bei sichtbarem und infrarotem Licht steigt der Brechungsindex in den transparenten Bereichen mit der Frequenz an. Man hat also normale Dispersion.





Eine anomale Dispersion, bei der  $n$  mit wachsendem  $\omega$  sinkt, findet man nur in den absorbierenden Bereichen (später dazu mehr).

- Wellenpakete

Wir setzen den Lichtpuls als Überlagerung von harmonischen Wellen mit verschiedenen Wellenzahlen  $k$  an,

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk.$$

Jede Welle trägt mit einer Amplitude  $A(k)$  bei. Die Frequenzen der einzelnen Wellen ergeben sich aus der Dispersionsrelation  $\omega(k)$ . Für Medien mit linearer Dispersionsrelation,  $\omega = vk$ , gilt

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ik(x-vt)} dk = \psi(x - vt)$$

Das Wellenpaket breitet sich also mit der Phasengeschwindigkeit  $v = \omega/k$  aus, ohne seine Form zu verändern. Anders sieht die Sache aus, wenn die Phasengeschwindigkeit von  $k$  abhängt.

- Gaußsches Wellenpaket

Die Amplituden sollen gaußförmig um eine maximale Amplitude  $A_0$  verteilt sein

$$A(k) = A_0 e^{-\alpha(k-k_0)^2}.$$

und damit

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha(k-k_0)^2) \exp(ikx - i\omega(k)t) dk \\ &= A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha(k-k_0)^2 + ikx - i\omega(k)t) dk \end{aligned}$$

Die Dispersionsrelation  $\omega(k)$  entwickeln wir in eine Taylor-Reihe und brechen nach der zweiten Ableitung ab.

$$\omega(k) = \omega_0 + \underbrace{\left[ \frac{d\omega}{dk} \right]_{k=k_0}}_{:=v_g} \cdot (k - k_0) + \frac{1}{2} \underbrace{\left[ \frac{d^2\omega}{dk^2} \right]_{k=k_0}}_{:=D} \cdot (k - k_0)^2 + \dots$$

Der erste Entwicklungskoeffizienten  $v_g$  heißt "Gruppengeschwindigkeit". Der zweite Entwicklungskoeffizient  $D$  ist der "Gruppengeschwindigkeitsdispersionskoeffizient". Einsetzen in den Exponenten im Integral liefert

$$\begin{aligned} & -\alpha(k - k_0)^2 + ikx - i\omega(k)t \\ = & -\alpha(k - k_0)^2 + ikx - i\left(\omega_0 + (k - k_0)v_g + \frac{D}{2}(k - k_0)^2\right)t \\ = & i(k_0x - \omega_0t) + \left(i(k - k_0)(x - v_gt) - \left(\alpha + i\frac{D}{2}t\right)(k - k_0)^2\right) \end{aligned}$$

und damit

$$\psi(x, t) = A_0 e^{i(k_0x - \omega_0t)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i(k - k_0)(x - v_gt) - \left(\alpha + i\frac{D}{2}t\right)(k - k_0)^2\right) dk.$$

Durch Substitution  $k \rightarrow k + k_0$  kann man das Integral umformen in

$$\psi(x, t) = A_0 e^{i(k_0x - \omega_0t)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ik(x - v_gt) - \left(\alpha + i\frac{D}{2}t\right)k^2\right) dk.$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} u & : = x - v_gt \\ q & : = \alpha + i\frac{D}{2}t \end{aligned}$$

Erhält man die Fouriertransformation einer Gaußkurve

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} \cdot e^{-qk^2} dk = \sqrt{\frac{\pi}{q}} e^{-\frac{1}{4}\frac{u^2}{q}}$$

Das Betragsquadrat der Lösung beschreibt die räumliche Energieverteilung des Wellenpakets:

$$\begin{aligned} |\psi(x, t)|^2 & = \left| \sqrt{\frac{\pi}{q}} \right|^2 \cdot \left| e^{-\frac{1}{4}\frac{u^2}{q}} \right|^2 \\ & = \frac{\pi}{\sqrt{qq^*}} \cdot e^{-\frac{1}{4}\frac{u^2}{q}} e^{-\frac{1}{4}\frac{u^{*2}}{q^*}} \\ & = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 t^2}} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{u^2}{q} + \frac{u^{*2}}{q^*}\right)} \end{aligned}$$

Der Exponent lautet

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{q} + \frac{u^{*2}}{q^*} &= (x - v_g t)^2 \left( \frac{1}{\alpha + i\frac{D}{2}t} + \frac{1}{\alpha - i\frac{D}{2}t} \right) \\ &= 2(x - v_g t)^2 \frac{\alpha}{\alpha^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 t^2} \end{aligned}$$

und man erhält schließlich

$$\begin{aligned} |\psi(x, t)|^2 &= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 t^2}} \exp\left(- (x - v_g t)^2 \frac{\alpha/2}{\alpha^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 t^2}\right) \\ &= \pi \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \frac{1}{\Delta(t)} \exp\left(- \left(\frac{x - v_g t}{\Delta(t)}\right)^2\right), \end{aligned}$$

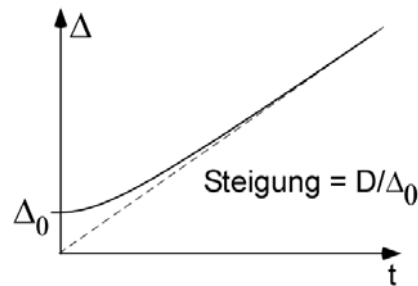
wobei

$$\Delta(t) := \sqrt{2\alpha} \sqrt{1 + \frac{D^2}{4\alpha^2} t^2}.$$

Für festes  $\Delta$  ist  $|\psi(x, t)|^2$  eine Funktion von  $x - v_g t$  d.h. der Puls bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \left[ \frac{d\omega}{dk} \right]_{k=k_0}.$$

Die Breite des Pulses  $\Delta(t)$  wächst allerdings mit der Zeit an.



Für große Zeiten zerfließt der Puls mit einer konstanten Geschwindigkeit,

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} Dt.$$

Die Konstante  $\alpha$  hängt mit der Startbreite

$$\Delta_0 := \Delta(t = 0) = \sqrt{2\alpha}$$

des Pulses zusammen und man erhält den einfachen Ausdruck

$$\Delta = \frac{D}{\Delta_0} t$$

Ein kurzer Puls läuft schneller auseinander. Die Steigung der Dispersionsrelation bei  $k = k_0$  liefert also die Gruppengeschwindigkeit während die Krümmung der Dispersionsrelation die Geschwindigkeit angibt, mit der der Puls auseinanderläuft (dispergiert). Wir haben die Dynamik eines Pulses bestimmt, ohne die Wellengleichung lösen zu müssen. Die Dispersionsrelation enthält die für die Dynamik nötige Information!

## 1.10 Die Trommel

Abschließend betrachten wir ein etwas anspruchsvolleres Beispiel, nämlich eine Membran, die in einen kreisförmigen Rahmen eingespannt ist. Die Schritte und Methoden, mit der wir das Problem zerlegen und lösen, sind die selben wie die, mit denen man Atome analysiert (siehe "Quantenmechanik I" und "Experimentalphysik VI: Atome, Moleküle, Licht."). Dort entspricht die Membran der dreidimensionalen Materiewelle des Elektrons und der Rahmen dem Coulomb Potential des Atomkerns.

- Zweidimensionale d'Alembert-Gleichung

Wenn wir annehmen, dass die Membran gleichmäßig gespannt und die Wellengeschwindigkeit in alle Richtungen gleich ist, können wir die eindimensionale d'Alembert-Gleichung auf einfache Weise auf zwei Dimensionen erweitern.

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial t^2}.$$

Diese Gleichung beschreibt ein nicht dispersives lineares Medium. Das ist unser Modell für die Trommel. Wir machen wieder den Separationsansatz

$$\psi(x, y, t) = u(x, y) \cdot \chi(t)$$

und trennen Ort- und Zeitfunktion,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (u(x, y) \cdot \chi(t))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u(x, y) \cdot \chi(t))}{\partial y^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (u(x, y) \cdot \chi(t))}{\partial t^2} \\ \frac{1}{u(x, y)} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{1}{u(x, y)} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{1}{\chi(t)} \frac{\partial^2 \chi(t)}{\partial t^2} \\ \frac{1}{u(x, y)} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{1}{u(x, y)} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{1}{\chi(t)} \frac{\partial^2 \cdot \chi(t)}{\partial t^2} =: E. \end{aligned}$$

Man erhält zwei Gleichungen mit der Konstanten  $E$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi(t)}{\partial t^2} &= v^2 E \chi(t) \\ \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} &= E u(x, y) \end{aligned}$$

Die erste Gleichung wird durch eine harmonische Schwingung gelöst. Einsetzen einer harmonischen Schwingung der Frequenz  $\omega$  liefert den Zusammenhang.

$$\omega^2 = -Ev^2.$$

$E$  ist also negativ. Die Konstante  $E$  erhalten wir erst, wenn wir die Gleichung für  $u(x, y)$  gelöst haben. Aufgrund der kreisförmigen Symmetrie des Problems benutzen wir Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Der 2D-Laplace-Operator lautet in Polarkoordinaten

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

was die Wellengleichung jetzt so aussehen lässt

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) u(r, \varphi) = E \cdot u(r, \varphi).$$

- Variablenseparation

Wir suchen Lösungen, bei denen Winkelanteil und Radiusanteil separieren, also vom Typ

$$u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Psi(\varphi).$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \Psi(\varphi) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} R(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right) + R(r) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Psi(\varphi) &= E \cdot R(r) \cdot \Psi(\varphi) \\ \frac{1}{R(r)} \left( r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} R(r) + r \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right) - Er^2 &= -\frac{1}{\Psi(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Psi(\varphi) \end{aligned}$$

Da der linke Teil nur von  $r$  und der rechte nur von  $\varphi$  abhängt erhält man für alle  $r$  und alle  $\varphi$  nur dann eine Lösung, wenn beide Teile konstant sind und gleich. Wir nennen die Konstante  $m^2$ .

- Winkelfunktion

Für den Winkel erhält man

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Psi(\varphi) = -m^2 \Psi(\varphi)$$

mit der Lösung

$$\Psi(\varphi) = \Psi_0 e^{im\varphi}$$

Da die Lösung periodisch bezüglich eines Umlaufs sein muss gilt

$$\begin{aligned}\Psi(\varphi + 2\pi) &= \Psi(\varphi) \\ \Psi_0 e^{im(\varphi+2\pi)} &= \Psi_0 e^{im\varphi} \\ e^{im2\pi} &= 1\end{aligned}$$

Damit ist  $m$  eine ganze Zahl.

- Radialgleichung

Es bleibt noch die Radialgleichung

$$\begin{aligned}\frac{1}{R(r)} \left( r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} R(r) + r \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right) - Er^2 &= m^2 \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} R(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} R(r) - \left( E + \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) &= 0\end{aligned}$$

Wir skalieren den Radius mit einem noch unbekanntem Faktor  $\kappa$ ,

$$z := \kappa r$$

und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial (z/\kappa)^2} R(z/\kappa) + \frac{1}{(z/\kappa)} \frac{\partial}{\partial (z/\kappa)} R(z/\kappa) - \left( E + \frac{m^2}{(z/\kappa)^2} \right) R(z/\kappa) &= 0 \\ \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} R(z/\kappa) + \frac{\kappa^2}{z} \frac{\partial}{\partial z} R(z/\kappa) - \left( E + \frac{\kappa^2 m^2}{z^2} \right) R(z/\kappa) &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} R(z/\kappa) + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} R(z/\kappa) - \left( \frac{E}{\kappa^2} + \frac{m^2}{z^2} \right) R(z/\kappa) &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} R(z/\kappa) + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} R(z/\kappa) - \left( \frac{E}{\kappa^2} + \frac{m^2}{z^2} \right) R(z/\kappa) &= 0\end{aligned}$$

Jetzt wählen wir den Faktor so, dass der erste Term in der Klammer eins wird,

$$\kappa^2 := -E.$$

und erhalten die Besselsche Differentialgleichung

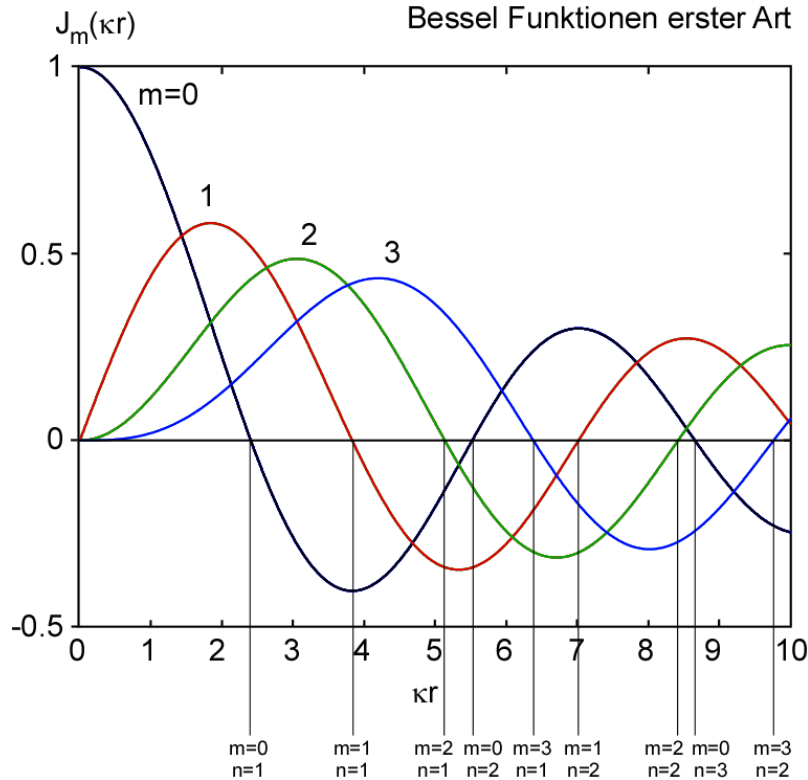
$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} + \left( 1 - \frac{m^2}{z^2} \right) \right) J_m(z) = 0$$

wobei

$$J(z) := R(z/\kappa).$$

- Lösungen

Die Lösungen Besselschen Differentialgleichungen sind die Bessel-Funktionen. Man kann sie nicht als geschlossenen Ausdruck hinschreiben, sie sind aber tabelliert und man kann sie zeichnen.



Die Bessel-Funktionen sind oszillierende Funktionen mit jeweils unendlich vielen Nullstellen. Die möglichen Werte für  $\kappa$  ergeben sich aus der Randbedingung, wonach die Wellenfunktion am Trommelrand bei  $r = R$  verschwinden muss.

$$J_{|m|}(\kappa R) = 0.$$

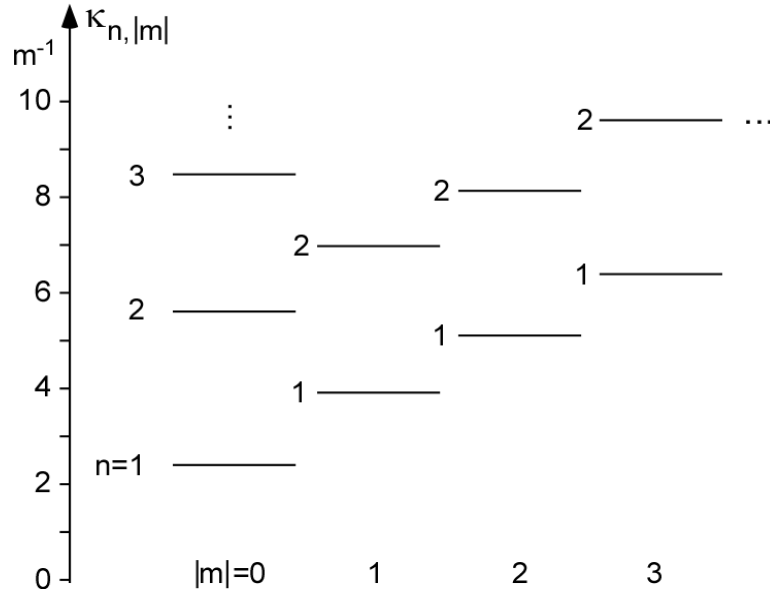
Daraus erhält man  $\kappa \cdot R$  und bei bekanntem Radius  $R$  der Trommel das  $\kappa$ . Aus  $\kappa$  ergibt sich schließlich bei bekannter Phasengeschwindigkeit die Frequenz

$$\omega^2 = -Ev^2 = \kappa^2 v^2.$$

Die Nullstellen der  $m$ -ten Bessel-Funktion kann man abzählen und mit  $n$  indizieren. Die möglichen Werte von  $\kappa$  und damit die möglichen Frequenzen der Trommeltöne sind also mit zwei Indizes,  $n$  und  $m$ , gekennzeichnet

$$\begin{aligned} \kappa &= \kappa_{n,m} \\ \omega_{n,m} &= v \cdot \kappa_{n,m} \end{aligned}$$

Man hat also anders als beim eingespannten Seil zwei "Quantenzahlen",  $n$  und  $m$ . Für eine Trommel mit  $R = 1$  m erhält man folgendes Spektrum:



Die Gesamtlösung lautet

$$\psi_{n,m}(r, \varphi, t) = A \cdot J_{|m|}(\kappa_{n,m}r) \cdot e^{im\varphi} \cdot e^{i\omega_{n,m}t}.$$

Dies sind die stationären Lösungen der Trommel. Das Auslenkungsmuster der Membran ist der Realteil der Wellenfunktion

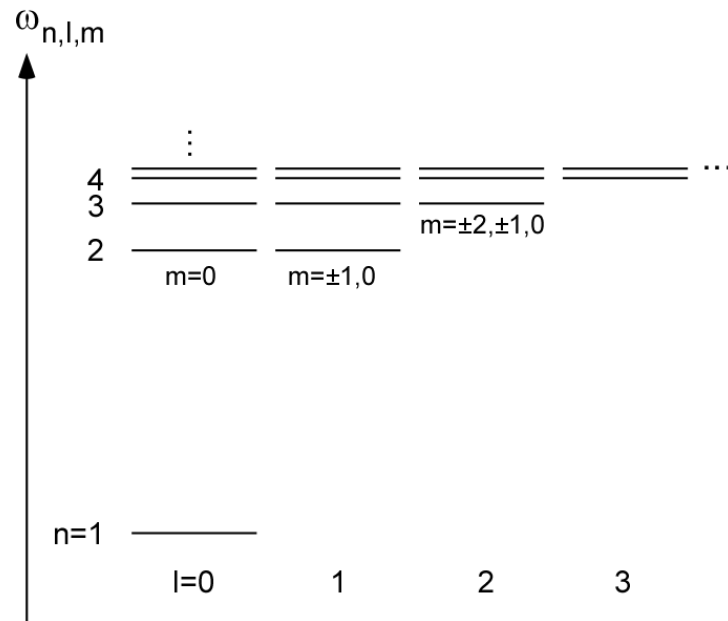
$$\text{Re}(\psi_{n,m}(r, \varphi, t)) = A \cdot J_{|m|}(\kappa_{n,m}r) \cdot \cos(m\varphi) \cdot \cos(\omega_{n,m}t).$$

(Winkelfunktionen zeichnen als Übung). Je nachdem, wo der Schlagzeuger auf die Membran schlägt, entstehen nur Töne, die dort keinen Knoten haben. (Simulation).

- Atomare Spektren

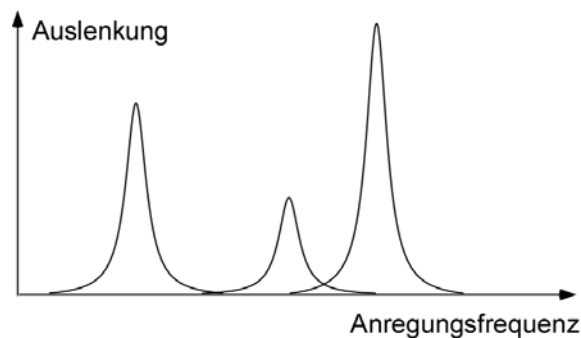
Beim Wasserstoffatom bewegt sich das Elektron als Welle um den Kern. Der Kern bildet ein Randbedingung für quantenmechanischen Wellenfunktionen, die der Schrödinger-gleichung gehorchen. Die Details sind anders, das Prinzip aber dasselbe. Man erhält eine abzählbare Menge von Wellenfunktionen mit dazugehörigen Frequenzen. Da man es mit Wellen im dreidimensionalen Raum zu tun hat, erhält man drei Quantenzahlen. Man nennt die Wellenfunktionen dann "Zustände" mit der "Hauptquantenzahl"  $n$ , der "Drehimpulsquantenzahl"  $l$  und der "magnetischen Quantenzahl"  $m$ .





- Spektroskopie

Man kann von außen versuchen, die Eigenschwingungen, also die stationären Zustände des Systems gezielt anzuregen. Bei Trommelschwingungen bietet sich an, einen Lautsprecher in die Nähe der Trommel zu stellen und mit einem Tongenerator nacheinander das gesamte Tonspektrum durchzufahren. Gemessen wird die Anregungsamplitude, also die Auslenkung der Trommelmembran als Funktion der Anregungsfrequenz. Man erhält ein "Anregungsspektrum".



Trifft man mit der Anregungsfrequenz eine Frequenz des Spektrums erhält man eine besonders starke Auslenkung (Video Trommel vor Lautsprecher).

Man kann auch versuchen das System mit möglichst allen Frequenzen gleichzeitig anzuregen. Das System schwingt dann in einer Überlagerung aller möglicher Schwingun-

gen. Geigen, Orgelpfeifen und Trompeten funktionieren so. Meist ist die Grundschwingung am stärksten und definiert den "Ton". Misst man die Frequenzen, aus denen sich die Anregung zusammensetzt mit einem Mikrophon und einem geeigneten elektronischen Frequenzanalysator, erhält man ein "Emissionsspektrum". Vergleichbare Spektroskopiemethoden gibt es in allen Gebieten der Physik. Sie sind von zentraler Wichtigkeit.

## 2. Lichtwellen

Licht kann als elektromagnetische Welle interpretiert werden. Die dazugehörige Wellengleichung lässt sich aus den Maxwellgleichungen ableiten. Sie beschreibt dreidimensionale Lichtwellen und hat eine Vektorstruktur, d.h. die Wellenfunktion ist ein Vektor. Wir betrachten außerdem stationäre Lichtwellen in Resonatoren und Interferometern sowie frühe Vorstellungen, wie sich Licht in Medien ausbreitet (Fermatsches Prinzip und Huygenssche Elementarwellen).

- Sichtbares Licht

ist ein kleiner Ausschnitt aus dem elektromagnetischen Spektrum:

Wellenlänge:  $\lambda = 400 - 800 \text{ nm}$  (etwa. 10000-mal größer als ein Atom)

Frequenz:  $\nu = c/\lambda = 370 - 750 \text{ THz}$  (eine Oktave)

Periode:  $T = 1.3 - 2.6 \text{ fs}$  (etwa die Umlaufdauer eines Elektrons um den Kern)

Energie:  $h\nu = 1.2 - 3eV$  (etwa die Energie eines Elektrons im Atom)

Für kürzere Wellenlängen spricht man von UV-Licht und dann von Röntgenstrahlung. Für längere Wellenlängen spricht man von Infrarotlicht und dann von Wärmestrahlung.

- Lichtquellen

Licht entsteht durch beschleunigte Ladungen (Animation zur Erinnerung).

### 2.1 Wellengleichung für elektromagnetische Wellen

- Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{d}{dt} \vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{d}{dt} \vec{E}\end{aligned}$$

Die Felder  $B$ ,  $E$  sowie die Ladungsdichte  $\rho$  und die Stromdichte  $j$  sind reellwertige orts- und zeitabhängige Funktionen. Die so genannte Influenzkonstante beträgt  $\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ A s / V m}$  und die Induktionskonstante  $\mu_0 = 1.2566 \times 10^{-6} \text{ V s / A m}$ .

- Nabla-Operator

Die Divergenz eines Vektors  $A$  ist ein Skalar:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &: = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned}$$

Die Rotation eines Vektors  $A$  ist ein Vektor:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} := \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Außerdem kann man ausrechnen, dass für einen beliebigen Vektor

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

wobei

$$\nabla^2 \vec{A} := \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{A}$$

ein Vektor ist. Den Laplace-Operator  $\nabla^2$  kann man auch auf einen Skalar anwenden was ein Skalar (Divergenz des Gradienten) ergibt

$$\nabla^2 \phi := \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

- Gleichung für das Magnetfeld  $B$

Die Maxwellgleichungen lassen sich in eine Wellengleichung umformen. Wir bilden die Rotation der 4. Gleichung:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{\nabla} \times \vec{j} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{\nabla} \times \frac{d}{dt} \vec{E}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{d}{dt} \vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{d}{dt} \vec{E}\end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

und

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d}{dt}\vec{B}$$

erhält man

$$-\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{\nabla} \times \vec{j} - \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \vec{B}$$

- Gleichung für das elektrische Feld E

Ganz analog erhält man durch Rotation der 2. Gleichung

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\vec{\nabla} \times \frac{d}{dt} \vec{B} = -\frac{d}{dt} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= -\frac{d}{dt} \left( \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{d}{dt} \vec{E} \right) \\ \nabla^2 \vec{E} &= \mu_0 \cdot \frac{d}{dt} \vec{j} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\nabla} \rho\end{aligned}$$

- Behandlung der Quellen

Wir nehmen an, dass das Ohmsche Gesetz gültig ist

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

( $\sigma$  ist die Leitfähigkeit) und dass die Ladungsträgerdichte homogen ist:

$$\vec{\nabla} \rho = 0$$

Dies gilt im Vakuum und in homogenen Medien. Mit diesen Annahmen vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$\nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \sigma \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \vec{B}.$$

und unter nochmaliger Verwendung der zweiten Maxwell-Gleichung erhält man schließlich

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \sigma \cdot \frac{d}{dt} \vec{B} + \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \vec{B}$$

Für das elektrische Feld erhält man ganz analog:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \sigma \cdot \frac{d}{dt} \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \vec{E}.$$

- Skalare Wellengleichung im Vakuum

Im Vakuum ist die Leitfähigkeit  $\sigma = 0$  und man erhält für die 3 Komponenten von  $\vec{E}$  die drei skalaren Wellengleichungen:

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2}$$

mit  $i = x, y, z$ . Dieselben drei Gleichungen erhält man für die 3 Komponenten von  $\vec{B}$ . Jede Komponente der beiden Felder erfüllt also eine Gleichung der Form:

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}, t) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Allerdings sind nicht alle Komponenten unabhängig voneinander. Die Maxwellgleichungen erzwingen eine bestimmte Vektorstruktur, die wir später besprechen. Zunächst betrachten wir lediglich die skalare Wellennatur der Maxwelltheorie, also die Lösungen der dreidimensionalen skalaren Wellengleichung.

## 2.2 Ebene Wellen und Lichtgeschwindigkeit

- Wellenfunktion ebener Wellen

Um Begriffe wie Frequenz und Wellenzahl auch in drei Dimensionen verwenden zu können, betrachten wir wieder harmonische Wellen, diesmal aber in drei Dimensionen. Dies sind die "ebenen Wellen".

$$\psi(\vec{r}, t) = A \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = A \cdot e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

Die Wellenzahl wird hier zum "Wellenvektor"

$$\vec{k} := \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

Die drei Komponenten entsprechen den "Quantenzahlen" des Zustands. Da wir es mit drei Dimensionen zu tun haben, haben wir drei Quantenzahlen im Gegensatz zu zwei bei der Trommel und eine beim Seil. Der Ausdruck "Quantenzahlen" für die Komponenten des Wellenvektors ist eher unüblich im Zusammenhang mit der klassischen Maxwell-Theorie und wird so in der Literatur nicht verwendet. Aus moderner Sicht wäre die Verwendung allerdings durchaus sinnvoll.

- Phasenfronten

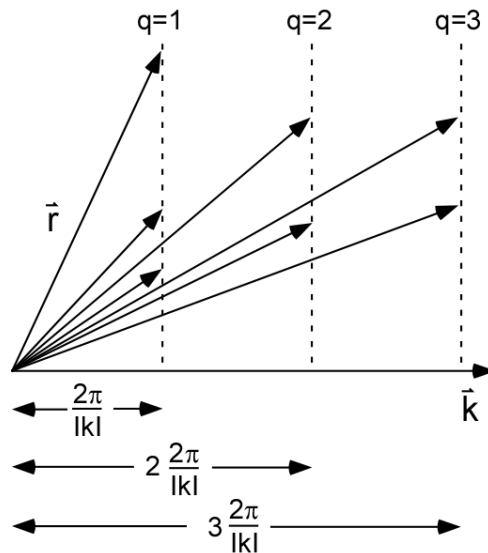
Um die Form einer solchen Welle zu verstehen, suchen wir die Lage der Maxima  $\vec{r}_M$ . Für eine feste Zeit  $t = 0$  (Schnappschuss) erhält man Maxima an Orten, für die die Phase ein Vielfaches von  $2\pi$  ist. Wir fordern also

$$\vec{k} \cdot \vec{r}_M = q \cdot 2\pi$$

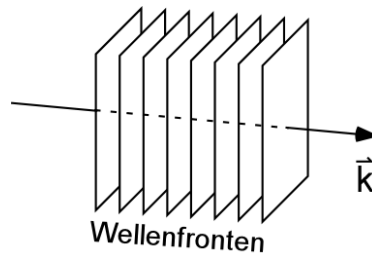
mit einer ganzen Zahl  $q$ . Das Skalarprodukt kann man umformen in

$$\begin{aligned} |\vec{k}| \cdot |\vec{r}_M| \cdot \cos(\varphi) &= q \cdot 2\pi \\ |\vec{r}_M| \cdot \cos(\varphi) &= \frac{q \cdot 2\pi}{|\vec{k}|} = \text{konstant.} \end{aligned}$$

Die linke Seite ist gerade die Länge der Projektion des Vektors  $\vec{r}_M$  auf die Richtung des  $\vec{k}$ -Vektors. Die gesuchten  $\vec{r}_M$  sind also Vektoren, deren Projektion auf den Wellenvektor einen bestimmten festen Wert  $q \cdot 2\pi / |\vec{k}|$  hat. Dies gilt für alle Ortsvektoren, die auf einen Punkt in einer Ebene senkrecht zu  $\vec{k}$  weisen. Die Maxima liegen also alle in einer Ebene. Für jedes  $q$  erhält man eine eigene Ebene.



Die Welle breitet sich also mit Phasenfronten senkrecht zu  $\vec{k}$  aus.



Benachbarte Wellenfronten haben den Abstand.

$$\frac{(q+1) \cdot 2\pi}{|\vec{k}|} - \frac{q \cdot 2\pi}{|\vec{k}|} = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = \lambda$$

Die Wellenlänge einer ebenen Welle ist also

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$$

- Ebene Wellen als Lösung der 3D-Wellengleichung, Lichtgeschwindigkeit

Wir setzen ebenen Wellen als Ansatz in die 3D-Wellengleichung ein. Für die zweiten Ableitungen erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi &= -k_x^2 \cdot A \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi &= -k_y^2 \cdot A \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi &= -k_z^2 \cdot A \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi &= -\omega^2 \cdot A \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\end{aligned}$$

Einsetzen in die Wellengleichung

$$\nabla^2\psi(\vec{r}, t) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi$$

liefert die Dispersionrelation

$$\begin{aligned}-\vec{k}^2 \cdot A \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} &= -\varepsilon_0\mu_0\omega^2 \cdot A \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ \omega^2 &= \frac{\vec{k}^2}{\varepsilon_0\mu_0} \\ \omega &= \frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\end{aligned}$$

mit

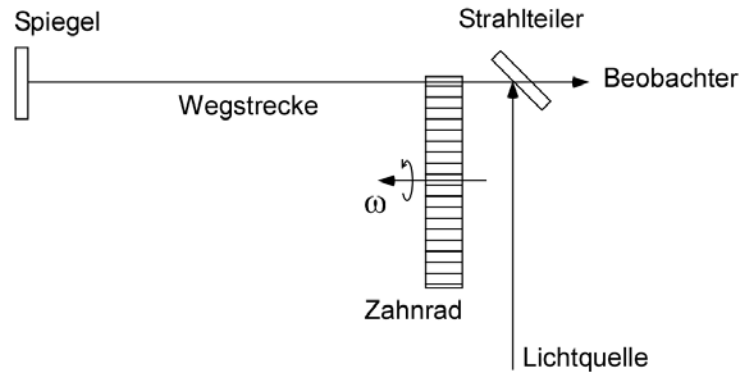
$$k := \sqrt{\vec{k}^2} = |\vec{k}|$$

Die Geschwindigkeit der Welle ist also

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c = 299\,792\,458 \text{ km/s} \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Dieses zentrale Ergebnis der Maxwellschen Lichttheorie liefert eine experimentell überprüfbare Vorhersage.

- Messung der Lichtgeschwindigkeit nach Fizeau.



Zwischen Zahnrad und Spiegel liegt eine möglichst große Wegstrecke, die das Licht um eine möglichst große Laufzeit verzögert. Die Quelle wird gerade verdeckt, wenn sich das Zahnrad während der Lichtlaufzeit vom Zahnrad zum Spiegel und zurück um einen halben Zahn weiterdreht. Es gibt also eine bestimmte Rotationsgeschwindigkeit, bei der die Quelle für den Betrachter unsichtbar wird. Aus dieser Winkelgeschwindigkeit und der Wegstrecke zwischen Zahnrad und Spiegel lässt sich die Lichtgeschwindigkeit bestimmen (Zahlenbeispiel als Übung). Heute wird die Lichtgeschwindigkeit als Naturkonstante definiert. Über die Realisierung der Sekunde durch Messen der Hyperfeinstruktur von Cäsium ist damit auch das Meter definiert. Die Lichtgeschwindigkeit ist in jedem Inertialsystem die gleiche. Der Wert der Naturkonstante  $c$  entspricht der besten Messung der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

- Brechungsindex

Im Medium ändert sich die Lichtgeschwindigkeit und beträgt

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Die elektrische Suszeptibilität  $\varepsilon$  und die magnetische Permeabilität  $\mu$  sind dimensionlose Konstanten, die angeben, um wie viel größer die Kapazität einer Ladungsverteilung und die Induktivität einer Stromverteilung im Medium ist als im Vakuum. Der Brechungsindex  $n$  ist definiert als Korrektur zur Vakuumlichtgeschwindigkeit

$$v = \frac{c}{n}$$

und hängt somit mit  $\varepsilon$  und  $\mu$  zusammen

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Im Medium ist die Lichtgeschwindigkeit also kleiner. Je höher die Dichten, umso kleiner die Geschwindigkeit. In Glas z.B. ist die Lichtgeschwindigkeit 1.5-mal langsamer als in



Vakuum:  $n = 1.5$ . In Luft beträgt die Verlangsamung dagegen nur wenige %. Wie es zu dieser Verlangsamung kommt, wird in Kapitel 4 erklärt. (Achtung: Die elektrische Suszeptibilität  $\varepsilon$  und die magnetische Permeabilität  $\mu$  werden im Buch von E. Hecht mit  $K_e$  und  $K_m$  bezeichnet. Die Symbole  $\varepsilon$  und  $\mu$  bezeichnen bei Hecht das Produkt  $K_m\mu_0$  und  $K_e\varepsilon_0$ , sind daher nicht dimensionslos sondern haben dieselbe Einheit wie  $\varepsilon_0$  bzw.  $\mu_0$ . Diese Bezeichnungsweise ist eher unüblich)

## 2.3 Vektorstruktur elektromagnetischer Wellen

Die drei Komponenten des E-Feldes sowie die drei Komponenten des B-Feldes gehorchen je einer 3D-Wellengleichung. Diese 6 Größen sind aber nicht unabhängig sondern sind durch die Maxwellgleichungen verbunden.

- Orientierung von  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{k}$

Wir betrachten die 2. Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d}{dt}\vec{B}.$$

Für ebene Wellen

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}.\end{aligned}$$

lauten die Ableitungen

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= i\vec{k} \times \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \\ \frac{d}{dt}\vec{B} &= -i\omega\vec{B}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0$$

Mit dem Einheitsvektor in k-Richtung  $\hat{k}$  schreibt sich das Ergebnis

$$\hat{k} \times \vec{E}_0 = c\vec{B}_0.$$

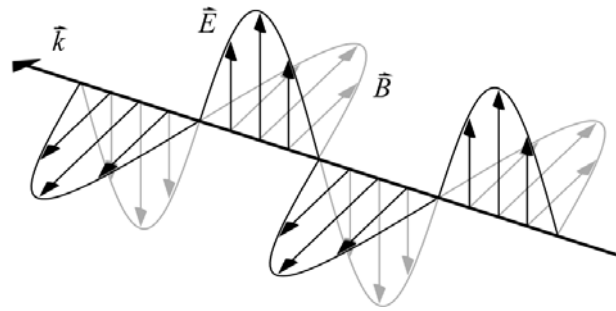
$\vec{B}$  steht also senkrecht zu  $\vec{E}$  und  $\vec{k}$ . Man erhält ganz analog mit Hilfe der 4. Maxwellgleichung

$$\vec{k} \times \vec{B}_0 = \frac{\omega}{c^2}\vec{E}_0$$

und damit

$$\hat{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{1}{c}\vec{E}_0.$$

$\vec{E}$  steht also auch senkrecht zu  $\vec{B}$  und  $\vec{k}$ . Damit bilden  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{k}$  ein rechthändiges Dreibein.



Die Feldvektoren stehen senkrecht zueinander und liegen in einer Ebene senkrecht zu  $\vec{k}$ . Für die Feldbeträge gilt

$$|\vec{E}_0| = c |\vec{B}_0|$$

In SI-Einheiten ist das E-Feld  $c$ -mal stärker als das B-Feld. Die Amplituden  $E_0$  und  $B_0$  sind beide reell und haben dasselbe Vorzeichen.

- Relativphase von laufenden Wellen

E-Feld und B-Feld schwingen synchron in Phase. An einem bestimmten Ort gibt es also immer Zeitpunkte, an denen beide Felder gleichzeitig verschwinden. Die Energie, die in den Feldern steckt, verschwindet dann ebenfalls und ist zu den Stellen gewandert, an denen die Felder zu diesem Zeitpunkt nicht verschwunden sind.

- Relativphase von stehenden Wellen

In der Nähe von Randbedingungen also z.B. im Nahfeld einer Antenne kann das anders sein. Dort schwingt E-Feld und B-Feld um  $90^\circ$  phasenversetzt zueinander. Im Fernfeld verschwindet diese Phasenverschiebung. Überlagert man zwei laufende Wellen zu einer Stehwelle schwingen die beiden Felder zeitlich um  $90^\circ$  phasenversetzt (als Übung, Simulation Resonator). Wären die Felder immer noch synchron, so gäbe es Zeitpunkte, an denen E- und B-Stehwelle gleichzeitig an allen Orten verschwindet. Die Gesamtenergie wäre dann nicht mehr erhalten sondern würde zeitlich oszillieren, was im Widerspruch zur Energieerhaltung steht.

## 2.4 Intensität von Lichtwellen

- Intensität

Aus den Feldern können wir die Intensitäten berechnen. Die Intensität ergibt sich aus der Energiedichte des elektrischen Feldes

$$U_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

und der des magnetischen Feldes

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Mit

$$|E| = c \cdot |B|$$

folgt

$$U_E = c^2 \frac{\varepsilon_0}{2} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = U_B$$

Die Gesamtenergiedichte

$$U = U_E + U_B$$

ist daher

$$U = \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2 = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

Die Energie, die in einer Zeit  $\Delta t$  durch eine Fläche  $A$  fließt, füllt ein Volumen  $c \cdot A \cdot \Delta t$  mit der Energiedichte  $U$  und ist daher  $U \cdot c \cdot A \cdot \Delta t$ . Die Leistung  $P$  ist die Energie pro Zeit und damit

$$P = \frac{U \cdot c \cdot A \cdot \Delta t}{\Delta t} = U \cdot c \cdot A.$$

Die Intensität  $S$  ist die Leistung pro Fläche

$$S = \frac{U \cdot c \cdot A}{A} = U \cdot c$$
$$S = c\varepsilon_0 E^2 = \frac{c}{\mu_0} B^2 = \frac{1}{\mu_0} E \cdot B.$$

Sie ist gerade der Betrag des Poynting-Vektors

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B},$$

der außerdem noch die Richtung des Energieflusses angibt. Formal kann man auch direkt aus den Maxwell-Gleichungen den Poyntingschen Satz herleiten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = c^2 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{d}{dt} \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{d}{dt} \vec{B} = \frac{d}{dt} U$$

Er hat die Form einer Kontinuitätsgleichung für die Energie,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \frac{d}{dt} U.$$

- Mittlere Intensität ebener Wellen

Der Ansatz für ebene Wellen ergibt für den Poynting-Vektor

$$\vec{S} = c^2 \varepsilon_0 \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

Die Intensität oszilliert zeitlich mit der optischen Frequenz. Die dazu gehörige Periode beträgt typischerweise nur wenige Femtosekunden.

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \sim 10^{-16} \text{ s}$$

Typische optische Vorgänge sind um Größenordnungen langsamer. Daher bezeichnet man mit "Intensität" fast immer das zeitliche Mittel:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle & : = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) = c^2 \varepsilon_0 \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \langle \cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \rangle \\ & = \frac{1}{2} c^2 \varepsilon_0 \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \end{aligned}$$

(Der zeitliche Mittelwert von  $\cos^2(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$  ist  $1/2$ .) Die mittlere Intensität oder "Bestrahlungsstärke" einer ebenen Welle ist also

$$I := \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{2} c^2 \varepsilon_0 \langle |\vec{E}_0 \times \vec{B}_0| \rangle = \frac{1}{2} c^2 \varepsilon_0 \langle |\vec{E}_0| |\vec{B}_0| \rangle$$

und mit

$$E_0 := |\vec{E}_0| = \frac{1}{c} |\vec{B}_0|$$

erhält man schließlich

$$I := \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2$$

- Intensität in komplexer Schreibweise

Schreibt man das elektrische Feld in der komplexen Erweiterung

$$\vec{E} = \vec{A} \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

mit der komplexen Amplitude

$$\vec{A} = \vec{E}_0 e^{i\varphi_E}$$

erhält man für den Ausdruck

$$|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}^* = \vec{E}_0 e^{i\varphi_E} \cdot \vec{E}_0 e^{-i\varphi_E} = |\vec{E}_0|^2 = E_0^2$$

Die zeitlich gemittelte Intensität ergibt sich also aus dem Betragsquadrat der komplexen Amplitude,

$$I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 |\vec{A}|^2$$

Dies ist ein oft verwendeter und daher wichtiger Zusammenhang zwischen komplexer Amplitude und zeitlich gemittelter Intensität.

- Intensität in dielektrischen Medien

Im Medium sieht die Sache ähnlich aus. Man muss lediglich folgende Ersetzungen machen  $\varepsilon_0 = \varepsilon\varepsilon_0$ ,  $\mu_0 = \mu\mu_0$  und  $c = c/n$ . Die Intensität lautet dann

$$I = \frac{1}{2} \frac{c}{n} \varepsilon \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \varepsilon \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} \sqrt{\varepsilon\mu} c \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} n c \varepsilon_0 E_0^2$$

Da im Dielektrikum die Magnetisierbarkeit keine Rolle spielt, ist  $\mu = 1$  und daher

$$I = \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 E_0^2 = n \cdot I_{vac}$$

Dies entspricht der Energieerhaltung. Wenn sich Licht im Medium langsamer ausbreitet, muss seine Intensität höher sein, damit durch eine Fläche pro Zeit die selbe Energiemenge fließt.

## 2.5 Optische Resonatoren

Wie beim Seil aus dem ersten Kapitel wird eine Wellenfunktion nicht nur durch die Differentialgleichung sondern auch durch die Randbedingungen bestimmt. Ein Lichtfeld zwischen zwei Spiegeln bildet z.B. Stehwellen aus. Wie beim Seil kann man die Ortsfunktion und die Zeitfunktion separieren.

- Optische Moden

Wir machen für die Wellenfunktion einen Separationsansatz

$$\psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) \cdot \chi(t)$$

und setzen ihn in die Wellengleichung

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\psi}$$

ein,

$$(\nabla^2 u(\vec{r})) \cdot \chi(t) = \varepsilon_0 \mu_0 u(\vec{r}) \ddot{\chi}(t).$$

Division durch  $\psi(\vec{r}, t)$  liefert

$$\frac{\nabla^2 u(\vec{r})}{u(\vec{r})} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\ddot{\chi}(t)}{\chi(t)}.$$

Beide Seiten müssen konstant sein. Setzt man als Konstante  $-k^2$  an, erhält man die zwei Gleichungen

$$\nabla^2 u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) = 0$$

und

$$\ddot{\chi}(t) = \frac{-k^2}{\varepsilon_0 \mu_0} \chi(t).$$

Die zweite Gleichung hat die Lösung

$$\chi(t) = \chi_0 e^{i\omega t}$$

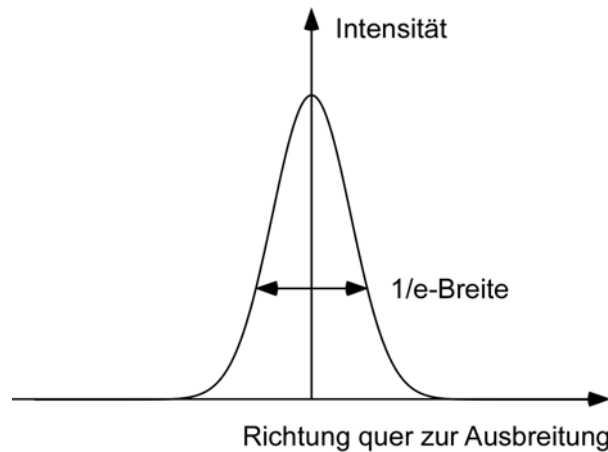
$$\omega^2 : = \frac{k^2}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

Die erste Gleichung beschreibt die räumliche Form der stationären Lösungen und heißt Helmholtzgleichung. Die Lösungen der Helmholtz-Gleichung hängt von den Randbedingungen ab. In der Optik nennt man die Lösungen der Helmholtz-Gleichung bei gegebenen Randbedingungen "optische Moden" oder kurz "Moden".

- Resonatormoden

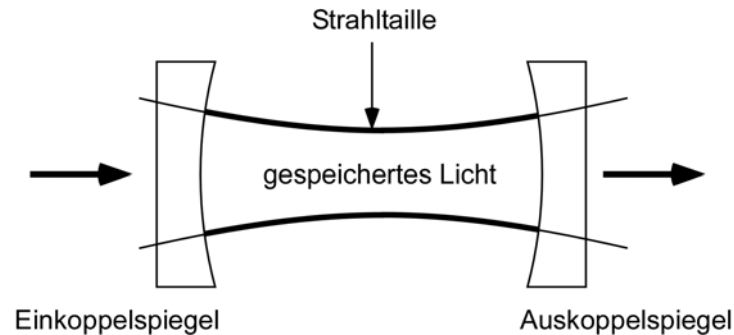
Stellt man zwei Spiegel sich gegenüber erhält man einen optischen Resonator. Er ist das Analogon eines an seinen Enden fixierten Seils oder der Saite eines Musikinstruments. Allgemein bestehen Resonatoren aus zwei oder mehreren Spiegeln, die einen Lichtstrahl in sich zurückspiegeln. Sie sind technisch wichtig beim Bau von Lasern und als Interferometer. Die Moden eines einfachen Zweispiegel-Resonators bilden eine Stehwelle entlang der Resonatorachse. Die Amplitude der Stehwelle variiert allerdings mit dem radialen Abstand zur Resonatorachse, so dass ein Strahl mit einem bestimmten Strahlprofil entsteht. Im einfachsten Fall hat das Strahlprofil die Form einer Gauß-Funktion

$$I \simeq e^{-x^2}$$

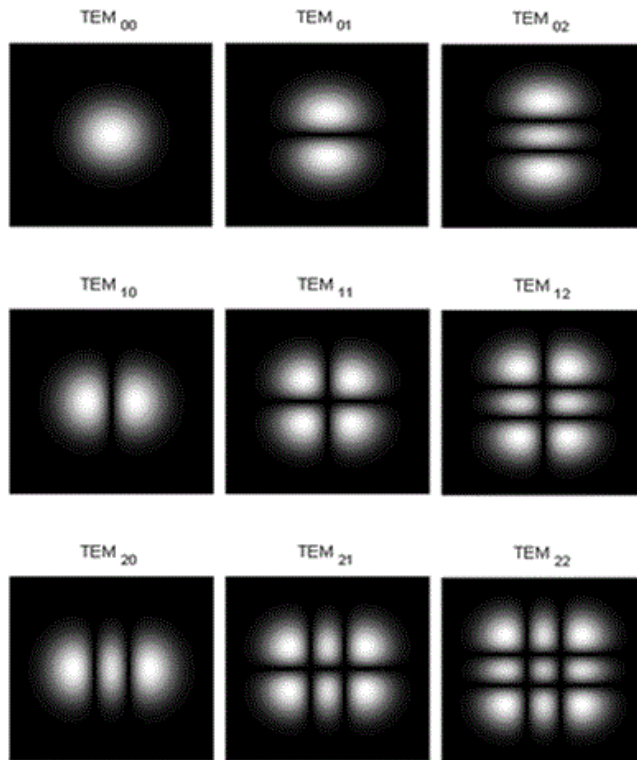


Die Amplitude ist also entlang der Resonatorachse maximal. Die Breite der Gauß-Funktion und damit der Radius des Strahls variiert entlang der Resonatorachse und hat an einer bestimmten Stelle ein Minimum. Dort befindet sich die Strahltaile (englisch "beam waist"). Bei Resonatoren mit gleichen Spiegeln liegt die Strahltaile in der Mitte zwischen den beiden Spiegeln. Um den Strahl zu illustrieren, zeichnet man zwei Linien,

die sich aus den Punkten zusammensetzt, an denen die Amplitude auf  $1/e$  abgefallen ist.



Neben dieser so genannten Gaußschen Grundmode gibt es noch höhere Schwingungsmoden, die transversalen Moden. Bei ihnen weist die Intensitätsverteilung in der Querschnittsfläche senkrecht zur Resonatorachse Knotenlinien auf (ganz analog zu den Schwingungsmoden der Trommel). Die verschiedenen Moden können nach der Anzahl der Knotenlinien sortiert werden. Man erhält die so genannten transversalen elektrischen Moden  $TEM_{ij}$  mit  $i$  Knotenlinien parallel zur  $y$ -Richtung und  $j$  Knotenlinien parallel zur  $x$ -Richtung. Wie bei der Trommel schwingt jede Mode mit ihrer eigenen Frequenz. Die genaue Berechnung der Lichtfelder in Resonatoren findet sich im Skript zur Vertiefungsfach-Vorlesung über "Laserphysik und Angewandte Optik".



- Spektrum der Fundamentalmode im Resonator

Wir betrachten nur die Fundamentalmode  $TEM_{00}$ . Bei festem Spiegelabstand erhält man ausgeprägte Resonanzspitzen für die Wellenzahlen, bei denen das Licht nach einem Umlauf mit sich selber konstruktiv interferiert, also eine Phase aufammelt, die ein Vielfaches von  $2\pi$  ist. Diese Phase ist im wesentlichen  $k \cdot l$ . Es kommt aber noch eine zusätzliche Phasenkorrektur  $\varphi_0$  hinzu, die durch die Abweichung der Resonatormoden von einer idealen ebenen Welle zustande kommt. Insgesamt wird also pro Umlauf die Phase

$$\varphi = k \cdot l + \varphi_0$$

aufgesammelt. Maxima erhält man dann für

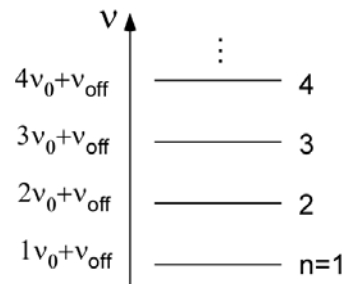
$$\varphi = n \cdot 2\pi$$



oder

$$\begin{aligned}\varphi &= k \cdot l + \varphi_0 = \frac{\omega}{c} \cdot l + \varphi_0 = \frac{2\pi\nu}{c} \cdot l + \varphi_0 = n \cdot 2\pi \\ \frac{2\pi\nu}{c} \cdot l + \varphi_0 &= n \cdot 2\pi \\ \nu &= \frac{1}{2} \frac{2n\pi}{c} - \frac{1}{2} \frac{\varphi_0}{c} = \nu_0 n - \nu_{off} \\ \nu_0 &: = \frac{c}{l} \\ \nu_{off} &: = \frac{\varphi_0}{2\pi} \nu_0\end{aligned}$$

wobei  $n$  eine natürliche Zahl ist. Die Konstante  $\nu_0$  heißt "freier Spektralbereich". Die Resonanzfrequenzen sind natürliche Vielfache des freien Spektralbereichs. Wie bei den Seilwellen erhält man ein äquidistantes Spektrum.



Je nach dem Wert der Korrekturphase  $\varphi_0$  ist das Spektrum entsprechend als ganzes verschoben.

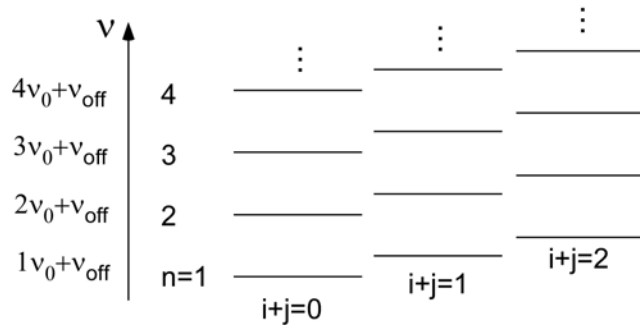
Die natürliche Zahl  $n$  ist eine der drei "Quantenzahlen" der Resonatormoden. Sie nummeriert die verschiedenen longitudinalen (entlang der Resonatorachse) Stehwellen, die im Resonator existieren können und legt deren Frequenzen fest. Mit  $n$  wächst die Anzahl der Knoten entlang der Resonatorachse. Die beiden anderen Quantenzahlen nummerieren die transversalen Moden.

- Spektrum der transversalen Moden

Für jede transversale Mode  $TEM_{ij}$  erhält man eine andere Phasenkorrektur

$$\varphi_0 = \varphi_{i,j} = 4(i + j + 1) \arctan\left(\frac{l}{2z_0}\right)$$

Der Parameter  $z_0$  ist die so genannte Rayleigh-Länge. Sie hängt auf nicht triviale Weise vom Krümmungsradius der Spiegel ab. Jede transversale Mode  $TEM_{ij}$  erzeugt also ein äquidistantes Spektrum, was um einen charakteristischen Betrag verschoben ist, der von der Summe  $i + j$  abhängt.



- Resonante Überhöhung

Das Feld zwischen den Spiegeln hängt empfindlich von der Wellenlänge ab. Optimaler Weise interferiert das Licht nach einem Umlauf konstruktiv mit sich selber. Das klappt nur für bestimmte Wellenlängen des eingestrahnten Lichts. Solches eingestrahktes Licht überlagert sich konstruktiv mit der bereits umlaufenden Welle. Die Lichtleistung im Resonator steigt. Verluste an den Spiegeln oder durch den Auskoppelspiegel führen zu einem Gleichgewicht der Intensität im Resonator. Diese kann bis zu  $10^5$  mal höher sein als die eingestrahkte Lichtintensität. Dies betrachten wir genauer. Dazu müssen wir uns zunächst die Spiegel beschreiben.

- Teilreflektierende Spiegel

Die Spiegel beschreiben wir durch die "Feldtransmissivität"

$$t = \frac{A_{trans}}{A_{inc}},$$

die das Verhältnis der komplexen Amplitude des einfallenden Lichts und des transmittierten Lichts angibt. Analog ist die "Feldreflektivität"

$$r = \frac{A_{ref}}{A_{inc}},$$

das Verhältnis der komplexen Amplitude des reflektierten Lichts und es einfallenden Lichts. Wir nehmen an, dass  $r$  und  $t$  reelle Größen sind. Da die Leistung proportional zum Quadrat der Amplitude ist, gilt für ideale Spiegel (keine Absorption)

$$\begin{aligned} |A_{inc}|^2 &= |A_{ref}|^2 + |A_{trans}|^2 = |rA_{inc}|^2 + |tA_{inc}|^2 \\ 1 &= r^2 + t^2 \end{aligned}$$

Man benutzt große Größen um die "Leistungsreflektivität"  $R$  bzw. "Leistungstransmissivität"  $T$  zu bezeichnen:

$$\begin{aligned} R &: = r^2 \\ T &: = t^2. \end{aligned}$$

Achtung: Am Spiegel ist die Feldamplitude keine Erhaltungsgröße, d.h.

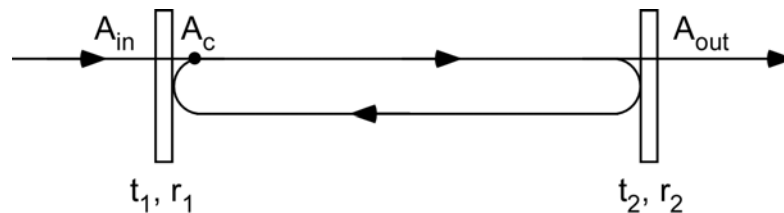
$$r + t \neq 1$$

aber

$$R + T = 1.$$

- Intensität im Resonator

Wir berechnen die Intensität im Resonator. Dazu vergleichen wir die komplexe Feldamplitude  $A_n$  nach  $n$  Umläufen mit der Amplitude  $A_{n+1}$  nach  $n + 1$  Umläufen.



$$A_{n+1} = A_n \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_l \cdot e^{i\varphi} + t_1 \cdot A_{in}$$

Während des Umlaufs der Gesamtlänge  $l$  wird eine Phase  $\varphi = k \cdot l$  aufgesammelt. Der Parameter  $r_l$  beschreibt zusätzliche Verluste z.B. durch Streuung an den Spiegeloberflächen. Außerdem wird pro Umlauf das Feld  $t_1 A_{in}$  eingekoppelt. Im Gleichgewichtszustand ändert sich das Feld nach einem Umlauf nicht und man erhält eine konstante Amplitude  $A_c$  im Resonator

$$A_{n+1} = A_n := A_c$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} A_c &= A_c \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_l \cdot e^{i\varphi} + t_1 \cdot A_{in} \\ \frac{A_c}{A_{in}} &= \frac{t_1}{1 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_l \cdot e^{i\varphi}} \end{aligned}$$

Für die Intensität  $I_c$  im Resonator erhält man mit

$$\frac{I_c}{I_{in}} = \frac{|A_c|^2}{|A_{in}|^2}$$

den Ausdruck

$$\begin{aligned} I_c &= I_{in} \frac{t_1^2}{(1 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_l \cdot e^{i\varphi})(1 - r_1 \cdot r_2 \cdot r_l \cdot e^{-i\varphi})} \\ &= I_{in} \frac{T_1}{1 + R_1 \cdot R_2 \cdot R_l - 2\sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot R_l} \cos \varphi} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} R_i &: = r_i^2 \\ T_i &: = t_i^2. \end{aligned}$$

Da die Leistung proportional zum Quadrat des Feldes ist, bezeichnen  $R_i$  und  $T_i$  den Bruchteil der Lichtleistung, der am Spiegel reflektiert bzw. transmittiert wird. Die Intensität im Resonator variiert also periodisch mit der pro Umlauf aufgesammelten Phase. Die Phase kann man durch Variation des Spiegelabstands oder der Lichtfrequenz einstellen. Das Intensitätsmaximum liegt bei  $\cos \varphi = 1$  und ist um den Faktor

$$\frac{I_c}{I_{in}} = \frac{1 - R_1}{(1 - \sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot R_l})^2}$$

größer als die eingestrahlte Intensität. Dieses Verhältnis nennt man den "Überhöhungsfaktor".

- Gefangenes Photon

Ein einzelnes Photon im Resonator kann nur Energiewerte annehmen, die ein Vielfaches einer Grundenergie  $h\nu_0$  sind. Ähnlich wie ein einzelnes Photon zwischen zwei Spiegeln gefangen wird, ist das Elektron des Wasserstoffatoms um Coulomb-Potential des Kerns eingeschlossen. In beiden Fällen erhält man eine abzählbare Menge stationärer Zustände die mit drei Zahlen nummeriert werden.

- Impedanzanpassung

Für welche Werte des Einkoppelspiegels ist der Überhöhungsfaktor maximal? Ableiten von  $I_c/I_{in}$  nach  $R_1$  bei festem  $R_2$  und dann Nullsetzen ergibt

$$R_1 = R_2 \cdot R_l$$

Definiert man als Verlustparameter den Leistungsverlust pro Umlauf

$$L := 1 - R_2 \cdot R_l$$

erhält man den einfachen Zusammenhang für die optimale Einkopplung

$$T_1 = L$$

Man muss also so viel Licht über den Einkoppelspiegel zuführen, wie pro Umlauf verloren geht. Man spricht dann von optimaler Impedanzanpassung. In diesem Fall lautet der Überhöhungsfaktor

$$\frac{I_c}{I_{in}} = \frac{1}{L}$$

- Verlustfreier Resonator

Falls das Licht aus dem Resonator nur über die Spiegel entweichen kann und es keine sonstigen Verluste gibt (was streng nicht machbar ist), also  $R_l = 1$ , gilt

$$L = 1 - R_2 = T_2$$

Die Intensität hinter dem Auskoppelspiegel berechnet sich dann zu

$$I_{trans} = I_c \cdot T_2 = I_{in} \cdot \frac{1}{T_2} T_2 = I_{in}$$

Im Fall optimaler Impedanzanpassung und bei Abwesenheit von Verlusten wird in Resonanz alles Licht den Resonator passieren, unabhängig von den Spiegelreflektivitäten. Das gilt auch für Spiegel mit 100% Reflektivität! In diesem Grenzfall dauert es allerdings unendlich lange bis sich ein Gleichgewicht eingestellt hat und die Selbstkonsistenz erfüllt ist. Wird dieses Gleichgewicht nach unendliche langer Zeit schließlich erreicht, ist die Intensität im Resonator unendlich hoch und selbst wenn davon nur 0% transmittiert werden, erhält man einen endlichen Wert, der dann identisch ist mit der eingestrahlten Intensität.

Verschiebt man den hinteren Spiegel etwas, so dass die Resonanzbedingung nicht mehr erfüllt ist, wird das Licht am vorderen Spiegel reflektiert! Die Vorstellung, dass im Lichtstrahl Photonen wie kleine Kügelchen entlangfliegen, kann also nicht stimmen, denn wie kann ein solches Kügelchen am vorderen Spiegel wissen wo der hintere steht.

## 2.6 Interferometer

- Optische dünne Schichten, Laserspiegel

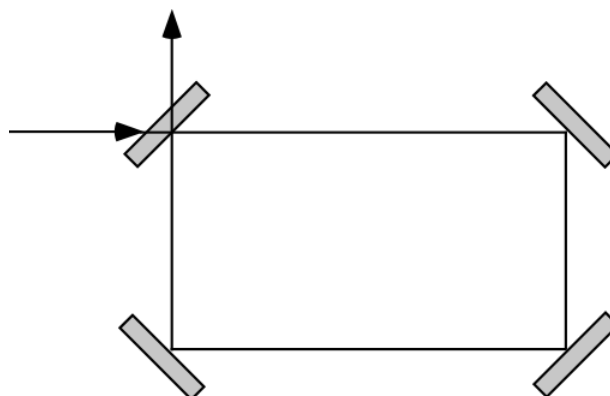
Wie funktionieren Spiegel? Die üblichen Silber- oder Aluminium-Spiegel basieren auf den optischen Eigenschaften von Metallen, die sich nicht ohne weiteres erschließen. Wir werden sie in Kapitel 4 behandeln. Tatsächlich sind so genannte "dielektrische Spiegel" wesentlich einfacher zu verstehen und kommen der Vorstellung idealer Spiegel auch viel näher als Metallspiegel.

Dielektrische Spiegel bestehen aus einem Stapel dünner Glasschichten, deren Brechungsindizes zwischen zwei Werten abwechseln. Die Schichten werden im Vakuum auf ein poliertes Glassubstrat (Scheibchen) aufgedampft.



Wie bei Seilwellen hängt auch bei optischen Medien die Phasengeschwindigkeit mit dem Wellenwiderstand zusammen. Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex haben auch unterschiedlichen Wellenwiderstand. Beim Übergang zu einem Medium mit anderen Wellenwiderstand wird die Welle genau wie bei zwei Seilen unterschiedlicher Dicke teilweise reflektiert. Einen reflektierenden Gesamtstapel erhält man, wenn die optische Dicke einer Schicht gerade einer viertel Wellenlänge entspricht. Das Licht, das die Schicht nach einem Umlauf in Rückwärtsrichtung verlässt, überlagert daher konstruktiv mit dem Licht, das direkt an der ersten Grenzfläche der Schicht reflektiert wurde (Achtung: Phasensprung am optisch dichteren Medium berücksichtigen). Die Transmission durch die Schicht ist dann minimal. Der Reflektionskoeffizient hängt von der Anzahl der Schichten ab und lässt sich so einstellen. Mit einem Duzend solcher Schichten übereinander erhält man hochwertige Spezialspiegel die fast vollständig reflektieren. Geringe Restverluste entstehen durch Streuung in den Schichten. Typische Resonatorspiegel kosten 100 Euro und haben etwa 0.2% Streuverluste. Es gibt auch sehr teure Superspiegel mit bis zu 5 ppm (0.0005%) Streuverlusten. Auf ähnliche Weise kann man auch Antireflexschichten herstellen, bei denen die Reflektion durch Interferenz verschwindet.

- Ringresonatoren



Ganz analog zum Drahting in Übungsblatt 1 hat man eine periodische Randbedingung. Man erhält als resonante Wellenfunktionen laufende Wellen mit zwei möglichen Umlaufrichtungen.

$$\psi_{n,\pm} = A \cos(k_n x \pm \omega_n t)$$

Beide erfüllen die Resonanzbedingung

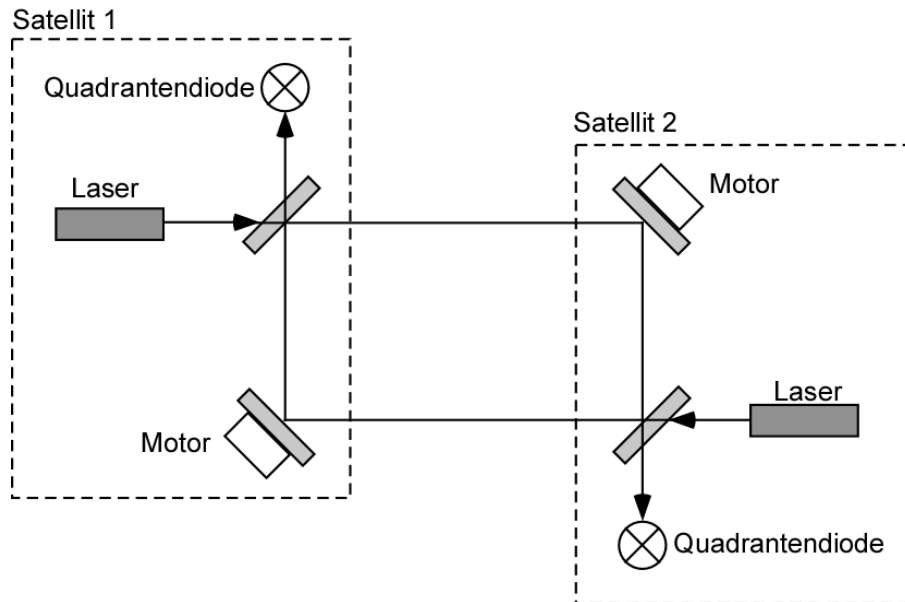
$$k_n \cdot L = n \cdot 2\pi$$

wobei L die geometrische Länge eines Umlaufs ist, also

$$\omega_n = c \cdot k_n = n \cdot 2\pi \cdot \frac{c}{L}$$

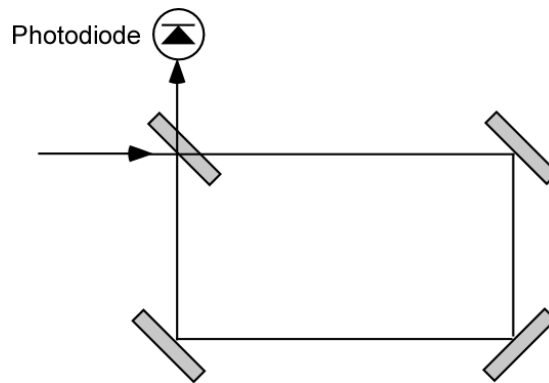
Die Intensität ist räumlich konstant und hat keine Knoten, was für den Bau von Lasern wichtig sein kann.

- Grace Follow on Mission (auf you tube: GRACE-FO, "Gravitation Recovery and Climate Experiment-Follow-on")



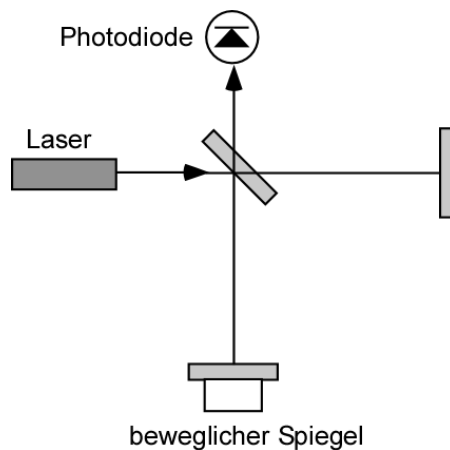
Zwei Satelliten umkreisen gemeinsam die Erde. Der Abstand zwischen den Satelliten wird interferometrisch gemessen. Gravitationsänderungen machen sich im Abstand bemerkbar. Langfristige Änderungen der Wasserverteilung werden so messbar, was für das Verständnis der Klimawandels wichtig ist. Die Satelliten bilden einen Ringresonator, bei dem an zwei Spiegeln zusätzlich Licht eingekoppelt wird. Mit einer Quadrantendiode wird die genaue Überlagerung des umlaufenden mit dem eingekoppelten Licht kontrolliert und gegebenenfalls mit dem Motorspiegel korrigiert. Gleichzeitig wird die Diode benutzt um das Schwebungssignal zwischen dem umlaufenden Licht und dem eingekoppelten Licht zu messen. Aus dieser Schwebung wird der Abstand bestimmt. Die Mission erprobte Techniken, die in Zukunft möglicherweise bei einem Ringresonator zum Einsatz kommen soll, der mit einer Millionen km Armlänge als Gravitationswellendetektor dienen soll (LISA-Mission, "Laser-Interferometer-Space Antenna")

- Sagnac Interferometer



Wird der Einkoppelspiegel eines Ringresonators um  $90^\circ$  gekippt, entsteht ein Sagnac-Interferometer. Es dient zum Messen von Drehbewegungen. Ruht das Interferometer, interferiert der links- und rechts-umlaufende Lichtweg am Ausgang immer destruktiv. Die Weglängen sind zwar gleich aber am Strahlteiler wird einmal am optisch dichteren Medium und einmal am optisch dünneren Medium reflektiert, was einen Phasenunterschied von  $\pi$  erzeugt. Bewegt sich das Interferometer wird ein Weg kürzer als der andere, da der Spiegel von der Position beim Start der Lichtwelle zu einer neuen Position weitergerückt ist, auf die das Licht nach einem Umlauf, je nach Umlaufrichtung entweder früher oder später auftrifft. Die Relativphase ist damit von der Umlaufgeschwindigkeit abhängig.

- Michelson-Interferometer



Aktuell kommt ein Michelson-Interferometer beim Nachweis von Gravitationswellen wissenschaftlich zum Einsatz ("advanced LIGO"). Technische Anwendung findet es bei der OCT ("optical coherent tomographie"). Das Michelson-Interferometer ist aber vor allem durch die Widerlegung der Äthertheorie berühmt. Michelson erhielt für die Methode 1907 den Nobelpreis.

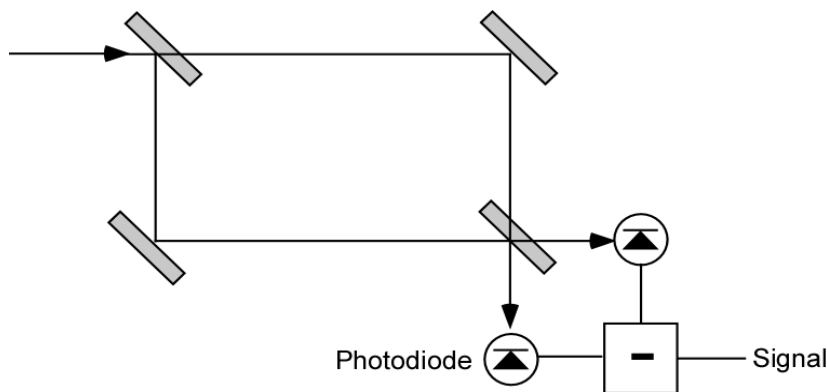


- Widerlegung des Äthers

In den Experimenten von Albert A. Michelson 1881 in Potsdam und Edward W. Morley 1887 in Cleveland ging man zunächst davon aus, dass sich Licht in einem hypothetischen Äther ausbreitet wie Wasserwellen im Wasser. Fließt das Wasser addiert sich die Fließgeschwindigkeit zur Phasengeschwindigkeit der Wellen. Zeigt einer der Interferometerarme in richtung der Fließgeschwindigkeit so "fließt" das Licht zum Spiegel schneller als zurück. Da es aber eine kürzere Zeit schnell ist (auf dem Hinweg zum Spiegel) und eine längere Zeit langsam (auf dem Rückweg zu Strahlteiler), braucht es insgesamt etwas länger als das Licht auf dem Referenzast. Dort ist der Weg zwar etwas länger, da sich der Strahlteiler während der Laufzeit seitlich bewegt und das Licht daher einen Dreiecksweg macht. Dieser Effekt ist aber etwas kleiner, so dass insgesamt eine Laufzeitdifferenz übrigbleibt.

Ausgedrückt in effektiven Weglängendifferenzen erwartete man für Michelsons Experiment etwa eine halbe Wellenlänge. Die Fließgeschwindigkeit ist dabei die Geschwindigkeit, mit der sich die Erde um die Sonne dreht (30 km/s). Man dreht also einmal den einen und dann den anderen Arm in Fließrichtung und erwartet einen Wechsel im Interferenzsignal vom Minimum zum Maximum. Legt man die Bewegung des Sonnensystems um das Zentrum der Galaxie zugrunde (220 km/s) oder gegenüber der Hintergrundstrahlung (368 km/s) so sollte das Signal noch viel größer sein und eine Drehung zum Durchgang mehrerer Maxima führen. Tatsächlich sahen Michelson und Morley gar keine Abhängigkeit vom Drehwinkel. Der Fehler im Experiment von 1887 ließ nur eine Obergrenze für die Fließgeschwindigkeit von etwa 5 km/s zu. Damit war die Hypothese eines unveränderlichen Äthers widerlegt. Aktuelle Experimente liefern eine Obergrenze für die Anisotropie der Lichtgeschwindigkeit von  $\Delta c/c \approx 10^{-17}$ .

- Mach-Zehnder-Interferometer



wurde 1891 vom Österreicher Ernst Mach und unabhängig vom Schweizer Ludwig Zehnder entwickelt. Es ist das konzeptionell einfachste Interferometer. Das Licht wird in zwei Wege aufgetrennt und wieder zusammengeführt. Es wird heute technisch z.B. zur Erzeugung von Pulsen für die optische Datenübertragung verwendet.

## 2.7 Fermatsche Prinzip

Bisher haben wir Licht betrachtet, das sich in einem Medium mit konstanter Lichtgeschwindigkeit ausbreitet und durch Spiegel manipuliert wird. Da sich im Allgemeinen das Medium räumlich und zeitlich ändern kann, ist auch der Brechungsindex im Allgemeinen eine Funktion von Ort und Zeit,  $n = n(\vec{r}, t)$ . Damit wird die Wellengleichung kompliziert

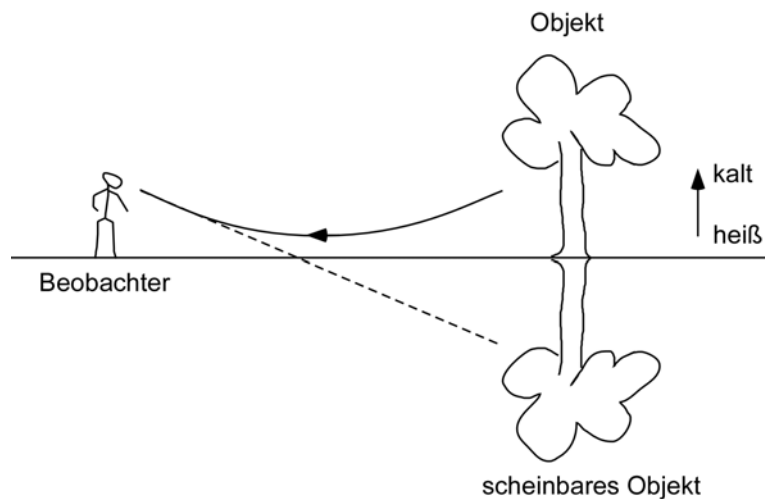
$$\nabla^2 \vec{\psi} = \frac{n^2(\vec{r}, t)}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2}.$$

Es gibt hier keine einfache allgemeine Lösung mehr. Für technische Anwendungen muss man numerisch vorgehen. Allerdings haben sich Physiker auch schon vor Maxwell gefragt, wie sich Licht in solchen Medien verhält und nach allgemeinen Prinzipien für die Ausbreitung von Licht gesucht.

- Fermatsches Prinzip.

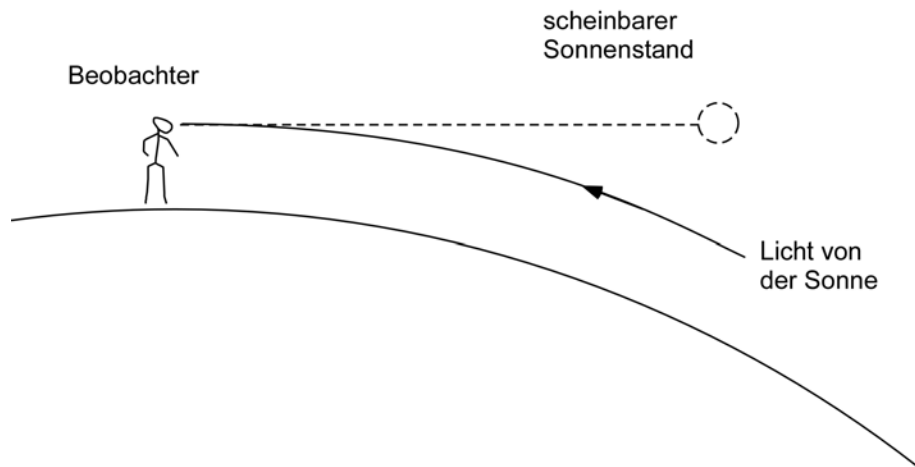
Fermat ging davon aus, dass sich Licht, wie kleine fliegende Teilchen entlang gerader Bahnen mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegt. Die Geschwindigkeit kann je nach Medium verschieden sein und wird durch dessen Brechungsindex bestimmt. Die Bahnen ergeben sich aus der Bedingung, dass Licht von allen benachbarten Wegen denjenigen nimmt, der zeitlich am kürzesten dauert.

- Luftspiegelung



Der räumlich längere Weg ist wegen der höheren Geschwindigkeit in heißer Luft der zeitlich kürzere. Die Quelle erscheint dem Betrachter gespiegelt.

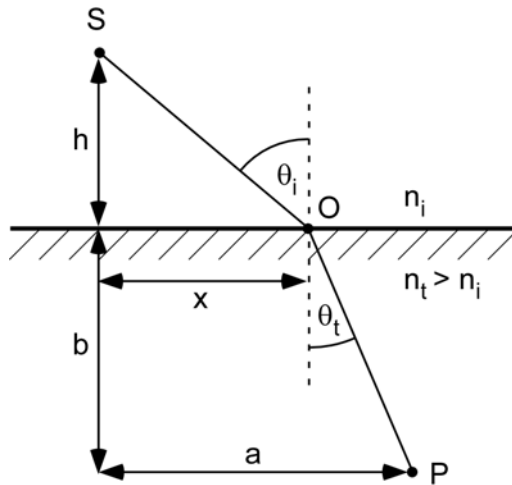
- Sonnenuntergang



Der kürzere Weg von der Sonne zum Beobachter ist nicht der direkte, der von der Erde bereits versperrt ist, sondern der gekrümmte: In den oberen Luftschichten ist der Brechungsindex kleiner, da der Atmosphärendruck nach oben hin abnimmt und damit die Lichtgeschwindigkeit zunimmt. Die Sonne scheint noch über dem Horizont zu stehen, obwohl sie bereits untergegangen ist.

- Es ist wichtig, dass die Wege, deren Länge man vergleicht benachbart sind. Zwischen zwei Punkten z.B. ist die kürzeste Strecke die Verbindungsgerade, auf der das Licht sich dann auch ausbreitet. Es kann aber außerdem noch ein Sichtverbindung über einen Spiegel geben. Auch auf diesem Weg breitet sich dann das Licht aus, obwohl sie länger ist als der direkte Weg. Beide Wege sind aber nicht benachbart, d.h. sie können nicht ohne Sprung ineinander überführt werden.
- Brechung und Fermatsches Prinzip

Im homogenen Medium breitet sich das Licht entlang einer Geraden aus. An der Grenzfläche zwischen zwei Medien (Index  $i$  für das obere Medium für "incident" und Index  $t$  für das untere Medium für "transmitted") kann es also höchstens einen Knick machen.



Wir bestimmen den Ablenkwinkel mit dem Fermatschen Prinzip. Das Licht soll von Punkt  $S$  nach Punkt  $P$  auf dem schnellsten Weg. Die Laufzeit wird durch die Lage von Punkt  $O$  verändert. Gesucht wird also der Abstand  $x$ , bei dem die Laufzeit am kleinsten ist. Die Laufzeit beträgt:

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\overline{SO}}{v_i} + \frac{\overline{OP}}{v_t} \\
 &= \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_i} + \frac{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}}{v_t}
 \end{aligned}$$

und ist minimal für

$$\frac{d}{dx}t(x) = 0$$

also

$$\begin{aligned}
 \frac{dt}{dx} &= \frac{x}{v_i \sqrt{h^2 + x^2}} + \frac{-a + x}{v_t \sqrt{b^2 + (a-x)^2}} = 0 \\
 &= \frac{1}{v_i} \sin \theta_i - \frac{1}{v_t} \sin \theta_t = 0 \\
 \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} &= \frac{v_i}{v_t}
 \end{aligned}$$

Die Brüche mit den Wurzeln sind gerade der Sinus des Einfallswinkel und des Winkels des transmittierten Strahls. Mit

$$\frac{v_i}{v_t} = \frac{n_t}{n_i}$$

ergibt sich das Snelliussches Brechungsgesetz.

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_t}{n_i}$$

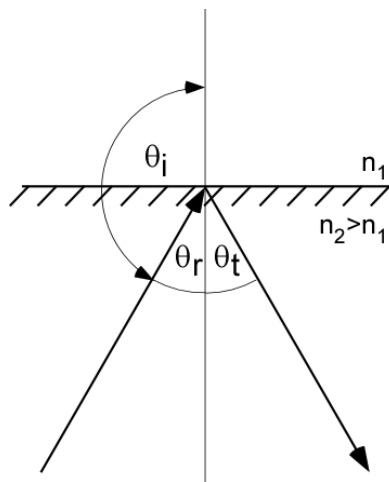
Es beendet eine lange Debatte angefangen bei Claudius Ptolomäus (um 100) in der Antike über Erazmus Witelo im Mittelalter (um 1250) bis Johannes Kepler (1571-1630), Rene Descartes (1596-1650) und Willebrod Snell (1580-1626) in der Neuzeit.

- Totalreflexion

Das Snelliussche Gesetz beschreibt auch die Situation für  $\theta_i > 90$  richtig. Beide Strahlen laufen dann im unteren Medium und es gilt  $n_i = n_t$  und es folgt

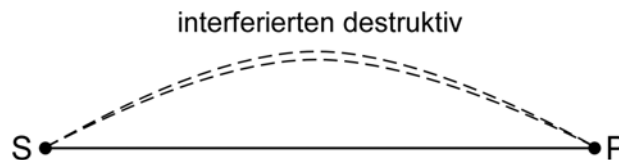
$$\sin \theta_i = \sin \theta_t$$

Man erhält totale interne Reflexion wie an einer Spiegelfläche.



- Fermatsches Prinzip als Interferenzphänomen

Eine interessante Variante des Fermatschen Prinzips erhält man, wenn man postuliert, dass sich das Licht nicht nur auf geraden Bahnen ausbreitet, sondern tatsächlich gleichzeitig auch auf allen anderen benachbarten gekrümmten Wegen. Das Licht betrachtet man dabei als eine Vielzahl von Wellen, die sich entlang all dieser Wege ausbreiten. Alle diese Wellen finden aber immer einen Partner, mit dem sie am Punkt P destruktiv interferieren, so dass sie sich gegenseitig auslöschen. Dazu muss die Bahn des Nachbarwegs nur minimal abweichen, so dass dessen Wegstrecke gerade eine halbe Wellenlänge länger ist.



Auf diese Weise löschen sich alle Wellen paarweise aus. Der einzige Weg, der offenbar keinen derartigen Partner findet, ist der direkte Weg (würde er sich mit einem Nachbarweg auslöschen, wäre die Spiegelsymmetrie bezüglich der S-P-Achse gebrochen). Der extremale (hier kürzeste) Weg ist einzigartig und ungepaart. Die Welle auf diesem Weg überlebt als einzige.

Man könnte einwenden, dass die Lichtwellen auf den verschiedenen (gekrümmten) Wegen sich nur im Endpunkt P auslöschen abseits davon aber messbar sein müssten. Zu Entkräftung dieses Arguments nehmen wir einen neuen Punkt P' und platzieren ihn dort, wo wir das Licht auf Abwegen vermuten (also irgendwo abseits der direkten Verbindung zwischen S und P). Für diesen neuen Punkt P' können wir aber dasselbe Argument wie für P verwenden und stellen fest, dass sich das Licht von S nach P' ebenfalls nur entlang der direkten Verbindungslinie ausbreitet. Das Argument ist also in sich schlüssig, wenn es auch etwas tautologisch erscheint. Siehe auch: Euler-Lagrange-Gleichung, Feynman'sche Pfadintegrale, Prinzip der kleinsten Wirkung.

### 3. Beugung

Ebene Wellen sind zwar exakte Lösungen der Maxwell-Gleichungen aber sie sind insofern unrealistisch als sie unendlich ausgedehnt sind. Tatsächlich hat man es immer mit Rändern zu tun. Wie breitet sich also Licht aus, wenn man ihm z.B. Dinge in den Weg stellt. Eine Möglichkeit diese Frage zu beantworten benutzt das Prinzip von Christian Huygens (1629-1695). Man zerlegt dabei die ebenen Wellen in Kugelwellen, von denen, je nach Rändern, einige ausgeblendet werden. Das verbleibende, "gebeugte" Lichtfeld kann man so als Überlagerung der verbleibenden Kugelwellen verstehen. Mit diesem Prinzip kann man eine Vielzahl von Szenarien verstehen ohne die Maxwellgleichungen numerisch zu simulieren.

Huygens Prinzip läuft auf die Frage hinaus, welches Lichtfeld eine Anzahl von Punktquellen an einem Beobachtungspunkt erzeugt. Solche Quellen können z.B. Löcher oder Streifen in einem Schirm sein, der mit einem aufgeweiteten Laserstrahl angestrahlt wird. Hinter dem Schirm entstehen dann sogenannte Beugungsmuster. Die Quellen können aber auch einzelne Atome oder Störstellen in Festkörpern sein, die mit Röntgenlicht angestrahlt werden. Durch die Beobachtung der Beugungsmuster kann man dann z.B. auf die Kristallstruktur zurückschließen. Ähnlich kann man mit Röntgenbeugung bei der Metallherstellung Eigenspannungen vermessen, also Kräfte, die im Metall durch Defekte erzeugt werden. Eine weitere wichtige Anwendung ist die Beugung an speziell hergestellten Gittern mit extrem kleinen Gitterabstand von der Größenordnung einer Wellenlänge. Mit solchen Spektralgit-tern kann man die Frequenzkomponenten von mehrfarbigem Licht räumlich trennen. In fast allen Bereichen der Naturwissenschaften sind solche Gitterspektrometer vielfach im Einsatz. Einer der wichtigsten Beugungseffekte ist allerdings weniger erfreulich, denn er begrenzt die Auflösung des Lichtmikroskops. Objekte können nur scharf abgebildet werden, wenn sie größer sind als die Wellenlänge des Lichts, mit dem man es beobachtet. Dies gilt auch

umgekehrt für die Projektion kleinster Strukturen auf einen Schirm. Der Herstellung von immer kleineren lithographischen Masken für die Mikrochipherstellung ist daher durch Beugungseffekte eine prinzipielle Grenze gesetzt.

### 3.1 Huygensches Prinzip

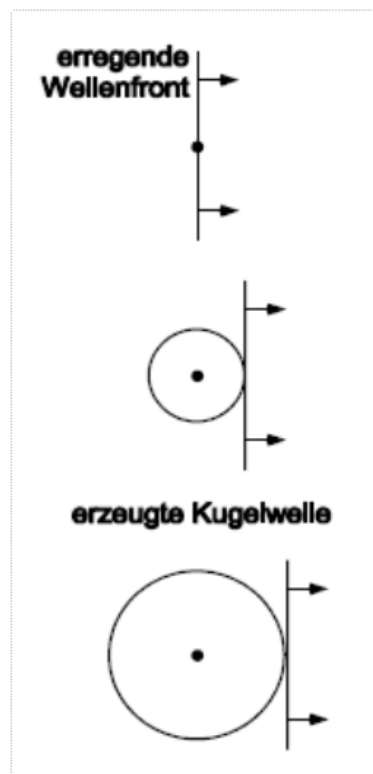
- Huygensche Prinzip

Nach Christian Huygens (1629-1695) wird an jedem Punkt einer Wellenfront eine Kugelwelle ausgelöst, die sich mit allen anderen Kugelwellen, die bis dahin ausgelöst wurden, überlagern. Dieses recht abstrakte Prinzip nimmt keinerlei Materie an. Die Wellen werden "einfach so" auch z.B. im Vakuum ausgelöst. Tatsächlich steckt dahinter die Entwicklung einer Wellenfront in Kugelwellen und damit eine frühe Vorstellung von der Reihenentwicklung in Funktionensystem wie z.B. die Fourier-Transformation eine ist.

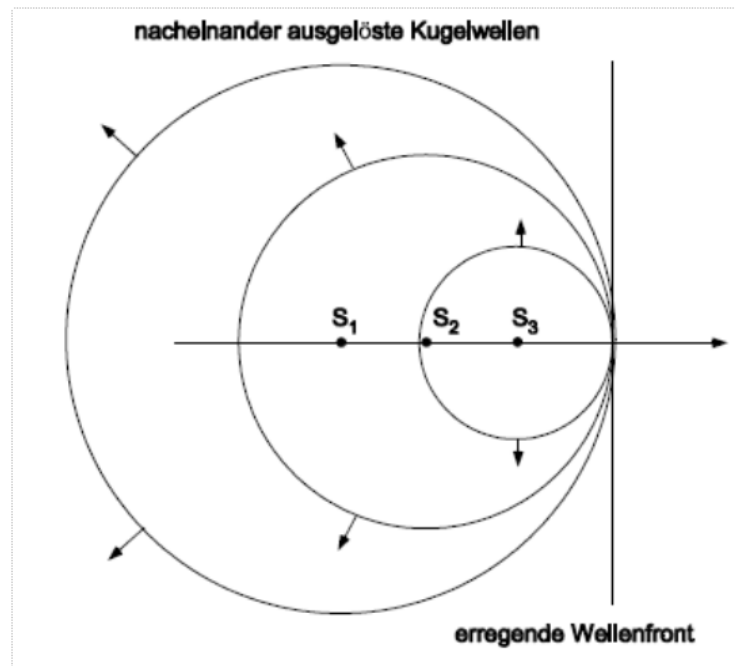
- Ebene Wellen nach Huygens

In diesem Bild bleibt eine ebene Welle eine ebene Welle, was man in drei Schritten motivieren kann.

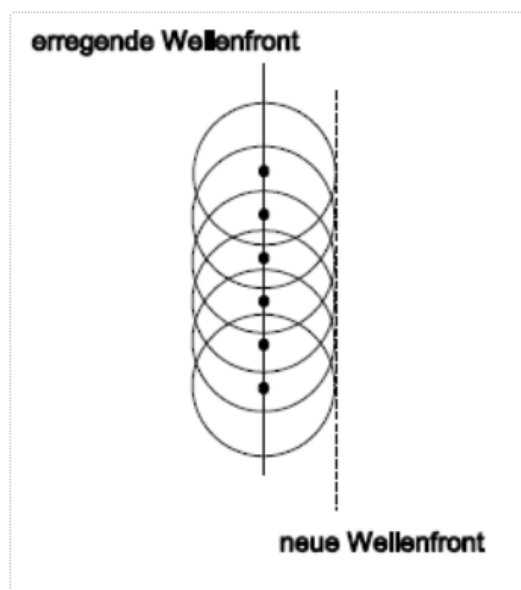
1) Die an einem Punkt von einer Phasenfront der Primärwelle ausgelöste Welle schwingt synchron mit der Primärwelle und überlagert sich mit ihr in Vorwärtsrichtung konstruktiv.



2) Alle weiteren, von der Phasenfront entlang der Ausbreitungsrichtung ausgelösten Wellen überlagern sich ebenfalls in Vorwärtsrichtung konstruktiv. In alle anderen Richtungen löschen sich die Kugelwellen aus.



3) Alle Kugelwellen die entlang einer Front ausgelöst werden überlagern sich in Vorwärtsrichtung konstruktiv und bilden ebenfalls eine Phasenfront.

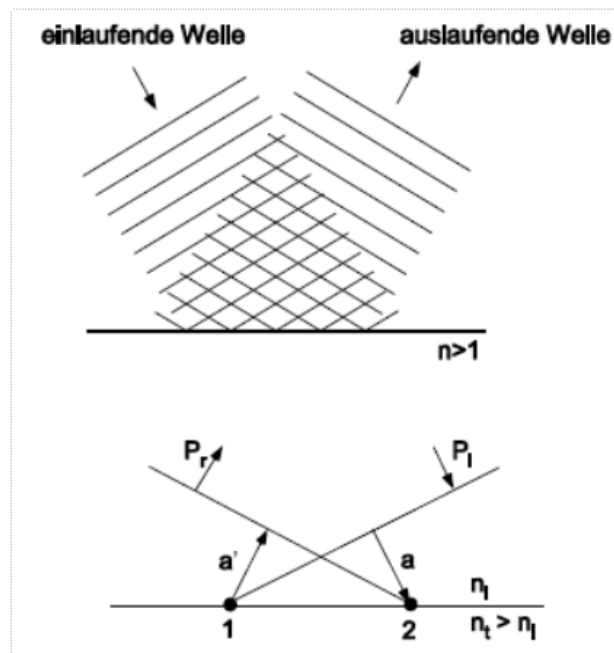




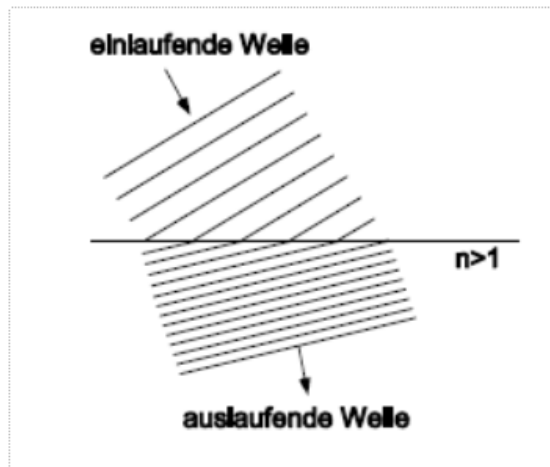
- Snelliussches Brechungsgesetz im Wellenbild

Reflexion: Wir haben bisher bei der Brechung an der Grenzfläche vernachlässigt, dass auch ein Teil des Lichts an der Grenzfläche zum Medium reflektiert wird. Das erklärt sich nach Huygens damit, dass im Medium die Kugelwellen eine andere Amplitude als im Vakuum haben. Dieser Extraanteil an Kugelwellen in der Grenzschicht überlagert sich zu einer reflektierten Wellenfront.

Der Reflektionswinkel ergibt sich folgendermaßen. Punkt 2 in der Ebene feuert um die Laufzeit für die Strecke  $a$  später als Punkt 1. Wenn Punkt 2 feuert, hat sich also um Punkt 1 eine Kugelwelle mit Radius  $a' = a$  entwickelt. Sie bildet mit der Kugelwelle, die gerade bei Punkt 2 entsteht eine gemeinsame Phasenfront  $P_r$ . Wegen  $a = a'$  müssen Einfallswinkel und Ausfallswinkel gleich sein.



Brechung: Hier ist die Situation wegen der unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeiten anders.

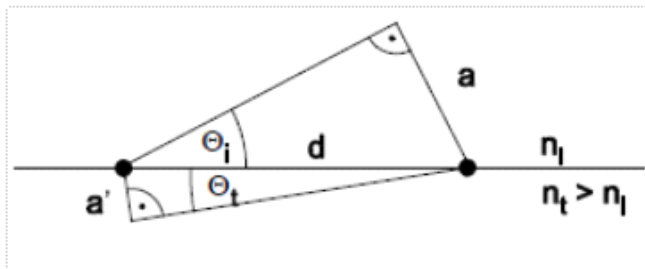


Die gebrochene Welle legt die Strecke  $a'$  in derselben Zeit zurück wie die einfallende Welle die Strecke  $a$ . Beide Laufzeiten sind also gleich,

$$\frac{n_t a'}{c} = \frac{n_i a}{c}$$

$$n_t a' = n_i a$$

Aus der Geometrie



erhält man

$$\frac{a'}{d} = \sin \theta_t$$

und

$$\frac{a}{d} = \sin \theta_i$$

Für die Laufzeiten folgt

$$n_t \cdot d \cdot \sin \theta_t = n_i \cdot d \cdot \sin \theta_i$$

oder

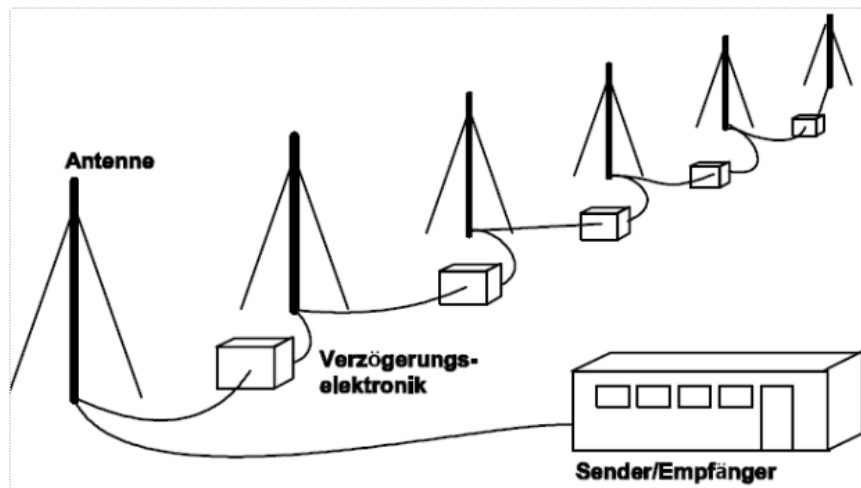
$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_t}{n_i}$$

## 3.2 Antennen-Arrays

Das Prinzip von Huygens funktioniert für Grenzflächen also sehr gut. Als nächsten Schritt betrachten wir eine diskrete, periodische Anordnung von Punktquellen. Als konkretes Beispiel analysieren wird das Abstrahlverhalten einer Reihe von Radioantennen.

- Aufbau

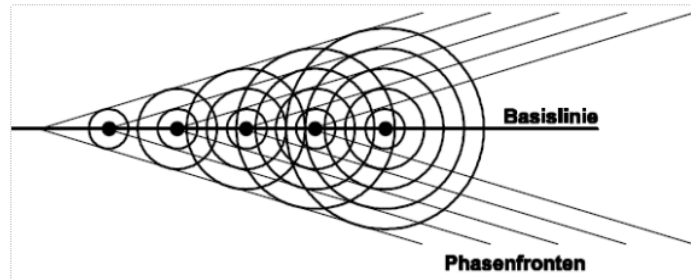
Wir betrachten eine Reihe von Radioantennen im gegenseitigen Abstand  $d$  entlang einer Basislinie. Für solche Antennen-Anordnungen wird im Deutschen oft das deutsch-englische Wort Antennen-Array verwendet. Die einzelnen Antennen strahlen elektromagnetische Kugelwellen mit einer bestimmten Winkelcharakteristik ab, die wir hier der Einfachheit als isotrop ansetzen (in alle Richtungen gleich stark). Außerdem sollen alle Antennen mit gleicher Feldamplitude abstrahlen.



Die Antennen sind mit einem Sender verbunden, der ein zeitlich sinusförmiges Signal der Kreisfrequenz  $\omega$  erzeugt. Zusätzlich wird mit Hilfe einer geeigneten Verzögerungselektronik eine zeitliche Phasenverschiebung  $\varphi_e$  zwischen benachbarten Antennen eingeführt.

- Abstrahlrichtung qualitativ

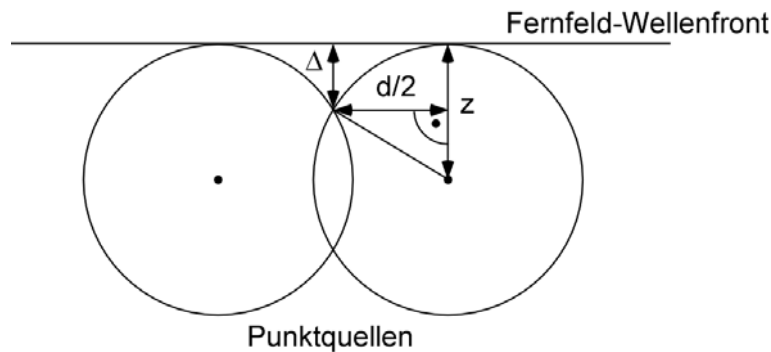
Im großen Abstand überlagern sich die Kugelwellen näherungsweise zu ebenen Wellenfronten, die unter einem bestimmten Winkel zur Basislinie abgestrahlt werden. Von oben sieht das dann so aus:



Der Abstrahlwinkel, den die Phasenfronten mit der Basislinie bilden, ist durch die Phasenverzögerung einstellbar. Es entsteht eine Richtantenne, dessen Abstrahlrichtung einfach durch Einstellen der elektronischen Phase  $\varphi_e$  zwischen den Antennen verändert werden kann, ohne etwas mechanisch bewegen zu müssen. Umgekehrt ist auch richtungsempfindlicher Empfang möglich, was in der Radioastronomie verwendet wird (VLBI: "Very Long Baseline Interferometry").

- Fraunhofer Näherung

Betrachtet man die Überlagerung von Punktquellen aus Sicht eines ins Unendliche verschobenen Beobachters (Fernfeldnäherung) spricht man von "Fraunhofer-Beugung". Betrachtet man das Feld in der Nähe der Quellen (Nahfeldnäherung) spricht man von "Fresnell-Beugung". In der Fernfeldnäherung überlagert sich das Feld einer Reihe von Punktquellen zu einer ebenen Welle (Huygens'-Prinzip). Ab welchem Abstand ist diese Annahme gerechtfertigt? Wir betrachten dazu die Überlagerung von zwei Punktquellen. Auf der Höhe der Punktquellen stimmen die Wellenfronten der Punktquellen und einer hypothetischen ebenen Welle überein. Zwischen den Punktquellen gibt allerdings es eine Abweichung  $\Delta$ .



Als Bedingung für die Gültigkeit der Fernfeldnäherung verlangen wir, dass diese Abweichung wesentlich kleiner ist als eine halbe Wellenlänge, dass also die Wellenfront

der Kugelwellen nicht in das benachbarte Wellental der ebenen Welle fällt,  $\Delta \ll \lambda/2$ . Mit dem Satz von Pythagoras angewandt auf das rechtwinklige Dreieck erhält man

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (z - \Delta)^2 = z^2$$

Auflösen nach  $\Delta$  liefert

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{4} + z^2 + \Delta^2 - 2z\Delta &= z^2 \\ \Delta^2 - 2z\Delta + \frac{d^2}{4} &= 0 \\ \Delta &= z \pm \sqrt{z^2 - \frac{d^2}{4}} \end{aligned}$$

Da  $\Delta$  verschwinden muss, wenn  $d/2$  verschwindet, muss das negative Vorzeichen gelten. Außerdem kann man  $z$  ausklammern

$$\Delta = z \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{4z^2}} \right)$$

Die Wurzel kann man entwickeln falls  $z \gg d$  und man erhält mit  $\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots$

$$\Delta \simeq z \left( 1 - 1 + \frac{d^2}{8z^2} \right) = \frac{d^2}{8z}$$

Mit der Bedingung für das Fernfeld  $\Delta \ll \lambda/2$  erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{8z} &\ll \lambda/2 \\ \frac{d^2}{4\lambda} &\ll z. \end{aligned}$$

Mit einer vollständigen Berechnung des Feldes von Punktquellen mit Hilfe von so genannten Kirchhofintergralen erhält man als Bedingung für die Gültigkeit der Fernfeldnäherung,

$$\frac{d^2}{\lambda z} \ll 1.$$

Diese Abschätzung findet sich auch üblicherweise in der Standardliteratur. Unsere einfache Überlegung kommt also bis auf einen Faktor 4 an die korrekte Abschätzung heran und liefert ein anschauliches Bild für den Zusammenhang der drei beteiligten Längen.

- Abstrahlrichtung quantitativ

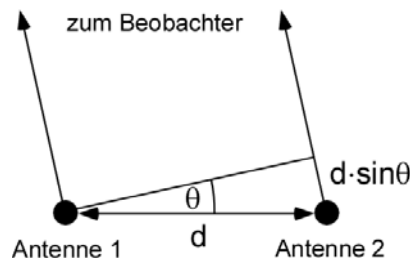
Wie ist der Zusammenhang zwischen Abstrahl-/Beobachtungsrichtung und der elektronischen Phase  $\varphi_e$ ? Wir betrachten dazu die Überlagerung der einzelnen von den Antennen abgestrahlten Felder an einem weit entfernten Punkt. Alle Antennen sollen dort mit gleicher reeller Amplitude beitragen. Entscheidend sind die Phasen der Felder an diesem Punkt. Als Phasenreferenz verwenden wir das Feld der ersten Antenne ganz links. Sie trägt also definitionsgemäß mit der Phase  $\varphi_1 = 0$  bei. Die Phasenverschiebung des Feldes mit dem die zweite Antenne beiträgt beträgt

$$\varphi_2 = \varphi + \varphi_e.$$

Sie enthält den elektronischen Anteil  $\varphi_e$ , der vom Betreiber der Anlage eingestellt werden kann und den geometrischen Anteil

$$\varphi = k \cdot d \cdot \sin \theta,$$

der durch den Abstand  $d \cdot \sin \theta$  zustande kommt, den die zweite Antenne weiter vom Beobachtungspunkt entfernt liegt als die erste:



Hier kommt also der Abstrahlwinkel ins Spiel. Die Phasenverschiebung der dritten Antenne ist gerade doppelt so groß. Allgemein gilt für die  $n$ -te Antenne

$$\varphi_n = (n - 1) \cdot \Delta\varphi$$

mit der im folgenden immer wieder auftauchenden Abkürzung

$$\Delta\varphi := d \cdot k \cdot \sin \theta + \varphi_e.$$

Die Feldvektoren aller Antennen sollen am Beobachtungspunkt parallel stehen, so dass die Beiträge aller Quellen miteinander interferieren, sich also auslöschen oder verstärken können. Das Gesamtfeld von  $N$  Antennen ist dann:

$$E_{\text{gesamt}} = \sum_{n=1}^N A_n e^{i\omega t} = E_0 e^{i\omega t} \sum_{n=1}^N e^{i\varphi_n} = E_0 e^{i\omega t} \sum_{n=1}^N e^{i(n-1)\Delta\varphi}$$

Die Summe kann man als geometrische Reihe schreiben und deren Lösung verwenden:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N e^{i(n-1)\cdot\Delta\varphi} &= \sum_{n=0}^N (e^{i\Delta\varphi})^n = \frac{e^{iN\Delta\varphi} - 1}{e^{i\Delta\varphi} - 1} \\ &= \frac{e^{i\frac{N}{2}\Delta\varphi} (e^{i\frac{N}{2}\Delta\varphi} - e^{-i\frac{N}{2}\Delta\varphi})}{e^{i\frac{1}{2}\Delta\varphi} (e^{i\frac{1}{2}\Delta\varphi} - e^{-i\frac{1}{2}\Delta\varphi})} = e^{i\alpha} \frac{\sin(\frac{1}{2}N\Delta\varphi)}{\sin(\frac{1}{2}\Delta\varphi)} \end{aligned}$$

mit der Phase

$$\alpha := \frac{1}{2} (N - 1) \Delta\varphi$$

- Feldamplitude

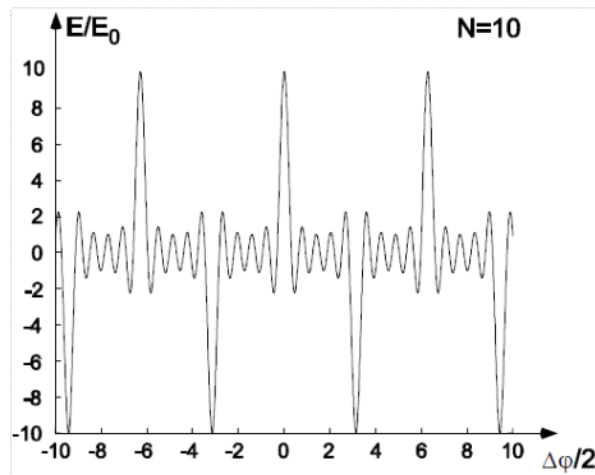
Das tatsächliche elektrische Feld ist der Realteil des komplexen Feldes,

$$\operatorname{Re} \left( E_0 e^{i\omega t} e^{i\alpha} \frac{\sin(\frac{1}{2}N\Delta\varphi)}{\sin(\frac{1}{2}\Delta\varphi)} \right) = E_0 \frac{\sin(\frac{1}{2}N\Delta\varphi)}{\sin(\frac{1}{2}\Delta\varphi)} \operatorname{Re}(e^{i\omega t} e^{i\alpha}) = E \cos(\omega t + \alpha).$$

Die Feldamplitude

$$E := E_0 \frac{\sin(\frac{1}{2}N\Delta\varphi)}{\sin(\frac{1}{2}\Delta\varphi)}$$

ist eine Funktion von  $\Delta\varphi$  und variiert daher mit dem Abstrahlwinkel  $\theta$ . Für 10 Antennen ( $N = 10$ ) sieht das Fernfeld so aus:



Man erhält ausgeprägte Hauptextrema bei  $\Delta\varphi/2 = n \cdot \pi$  und dazwischen jeweils 8 Nebenextrema. Das zentrale Maximum bei  $\Delta\varphi = 0$  ist mit dem Abstrahlwinkel über

$$\Delta\varphi = d \cdot k \cdot \sin \theta + \varphi_e = 0$$

verbunden, d.h.

$$\sin \theta = -\frac{\varphi_e}{d \cdot k}$$

Dies ist der gesuchte Zusammenhang zwischen elektronischer Phase und Abstrahlwinkel.

- Intensitätsüberhöhung

Die Amplitude der Maxima kann man exemplarisch am Hauptmaximum berechnen. Bei kleinen  $\Delta\varphi$  kann man im Ausdruck

$$E = E_0 \frac{\sin\left(\frac{1}{2}N\Delta\varphi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)}$$

den Sinus durch sein Argument ersetzen,

$$E = E_0 \frac{\frac{1}{2}N\Delta\varphi}{\frac{1}{2}\Delta\varphi} = NE_0.$$

Die Intensität wächst also quadratisch mit der Antennenzahl

$$I_{\max} = I_0 N^2.$$

Die abgestrahlte Intensität ist  $N$  mal größer als die Summe der einzeln abgestrahlten Intensitäten! Kohärente Abstrahlung führt zu höherer Effizienz. Der Sender zieht mehr Strom wenn die Antennen in einer Reihe stehen im Vergleich zu einer statistischen Verteilung. Benutzt man den Antennenarray als Empfangsantenne wächst die Empfindlichkeit ebenso quadratisch mit der Antennenzahl.

- Verhalten für kleine Abstrahlwinkel

Wir betrachten die Form des Beugungsmusters in der Nähe des zentralen Hauptmaximums etwas genauer. Für kleine  $\Delta\varphi$  kann man den Nenner durch sein Argument nähern,

$$\begin{aligned} E &\simeq E_0 \frac{\sin\left(\frac{1}{2}N\Delta\varphi\right)}{\frac{1}{2}\Delta\varphi} = E_0 \frac{N \sin\left(\frac{1}{2}N\Delta\varphi\right)}{N\frac{1}{2}\Delta\varphi} \\ &= E_0 \cdot N \cdot \frac{\sin u}{u} \\ u &: = \frac{1}{2}N\Delta\varphi = \frac{N}{2}(\varphi_e + d \cdot k \cdot \sin \theta) \end{aligned}$$

Die abgestrahlte Amplitude bzw. die Empfindlichkeit der Antenne variiert mit  $u$  gemäß der Sinc-Funktion (Sinus Cardinalis)  $(\sin u) / u$ .

- Richtungsselektivität



Wir betreiben die Antenne als Empfangsantenne in der Radioastronomie und beobachten zwei weit entfernte Mikrowellenquellen. Die Abstrahlwinkel werden jetzt zu Einfallswinkel. Bei zwei nahe beieinander liegenden Quellen fällt die Strahlung unter zwei leicht unterschiedlichen Winkel  $\theta_1$  und  $\theta_2$  ein. Wie verschieden müssen die beiden Winkel sein, um sie noch unterscheiden zu können d.h. wie gut ist die Winkelauflösung der Antenne? Wir stellen die Antenne so ein, dass ihr Hauptmaximum in Richtung  $\theta_1$  der ersten Quelle liegt. Die elektronische Phase muss dafür auf den Wert

$$\varphi_e = -d \cdot k \cdot \sin \theta_1$$

eingestellt werden. Als Kriterium für die Winkelauflösung verlangen wir, dass die zweite Quelle aus einer Richtung  $\theta_2$  kommt, in der die Antenne gerade die erste Nullstelle hat, d.h. wir fordern

$$\frac{\sin u_2}{u_2} = 0$$

was erfüllt ist, wenn

$$u_2 = \pm \pi,$$

wobei

$$u_2 = \frac{1}{2} N \Delta \varphi_2 = \frac{N}{2} (\varphi_e + d \cdot k \cdot \sin \theta_2)$$

Einsetzen der anhand der ersten Quelle eingestellten elektronischen Phase  $\varphi_e$  ergibt

$$\begin{aligned} \frac{N}{2} (-d \cdot k \cdot \sin \theta_1 + d \cdot k \cdot \sin \theta_2) &= \pm \pi \\ \sin \theta_1 - \sin \theta_2 &= \mp \frac{2\pi}{d \cdot k \cdot N} \end{aligned}$$

Den linken Teil kann man umformen in

$$\sin \theta_1 - \sin \theta_2 = 2 \cos \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right)$$

Die die Winkel  $\theta_1$  und  $\theta_2$  sehr ähnlich sind, kann man im ersten Term nähern

$$\theta_1 \simeq \theta_2 := \theta$$

d.h.

$$\theta_1 + \theta_2 \simeq 2\theta.$$

Damit erhält man für die Winkeldifferenz

$$\Delta \theta := \theta_1 - \theta_2$$

den Zusammenhang

$$\begin{aligned} 2 \cos \left( \frac{2\theta}{2} \right) \sin \left( \frac{\Delta \theta}{2} \right) &\simeq \mp \frac{2\pi}{d \cdot k \cdot N} \\ \sin \left( \frac{\Delta \theta}{2} \right) &\simeq \mp \frac{\pi}{d \cdot k \cdot N} \frac{1}{\cos \theta} \end{aligned}$$

Da  $\Delta\theta$  sehr klein ist, kann man den Sinus durch sein Argument nähern und erhält schließlich den einfachen Ausdruck

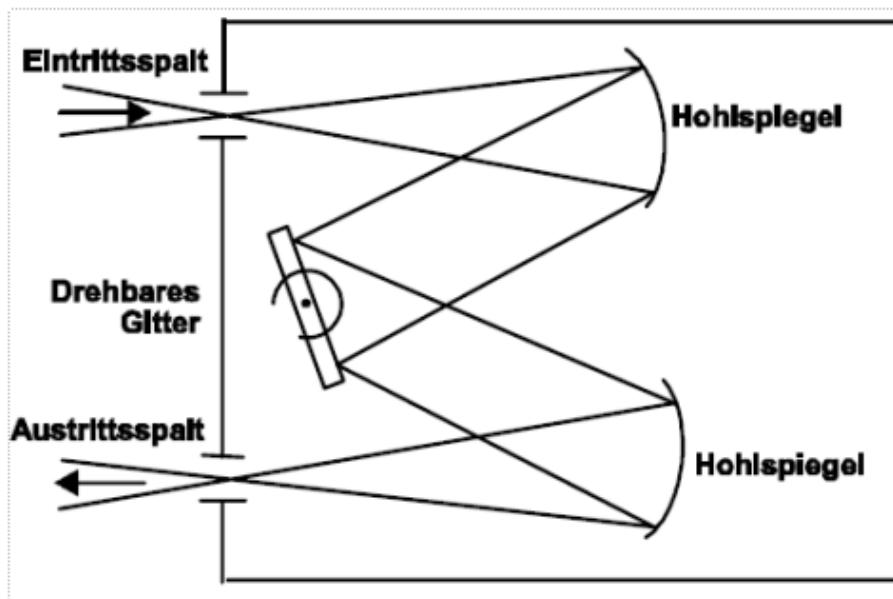
$$\Delta\theta \simeq \mp \frac{\lambda}{d \cdot N} \frac{1}{\cos\theta},$$

mit der Wellenlänge  $\lambda$  und dem Abstand zwischen der ersten und der letzten Antenne  $d \cdot N$ . Die Auflösung ist in Vorwärtsrichtung am besten ( $\theta_1 = 0$ ) und verschlechtert sich für seitliche Winkel. Die Winkelauflösung ist in Vorwärtsrichtung also ungefähr das Verhältnis von Wellenlänge zur Länge der Antennenreihe. Wenn man alle Antennen zwischen der ersten und der letzten entfernt, bleibt die Auflösung zwar erhalten, die Signalstärke (Intensität) verringert sich jedoch quadratisch mit der sinkenden Antennenzahl.

### 3.3 Beugung am Gitter

- Gitterspektrometer

Ein Gitterspektrometer dient zur Messung von optischen Wellenlängen in Physik, Chemie und Biologie. Die Anwendungen reichen von der spektralen Analyse von Sternenlicht bis zur Absorption biologischer Proben. Man kann mit solchen Geräten die Wellenlänge von Licht auf etwa 3-4 Stellen genau messen.



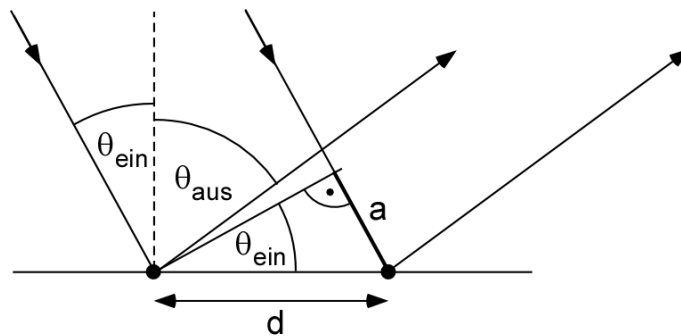
Die klassische Bauform enthält als zentrales Element ein drehbares Reflektionsgitter, also eine Anordnung von parallelen, eng beieinanderliegenden spiegelnden Streifen an der Oberfläche einer Glasscheibe. Das einfallende Licht wird unter einem Winkel

gespiegelt, der von der Wellenlänge des Lichts abhängt. Das Gitter zerlegt das Licht also ähnlich wie ein Prisma in seine Farben, nur mit wesentlich größeren Ablenkungswinkeln. Wie sieht das Lichtfeld hinter dem Gitter aus, wenn es mit einer ebenen Welle beleuchtet wird?

- Beugung am Gitter

Jede Gitterlinie ist Quelle einer Zylinderwelle. Wir vernachlässigen die Randeffekte an den beiden Enden jeder Linie und stellen uns die Linie als unendlich lang vor. Man erhält so eine effektiv zweidimensionale Situation, da in jeder Ebene senkrecht zu den Gitterlinien physikalisch das selbe geschieht und die Gesamtsituation vollständig translationsinvariant ist. Es genügt also, eine einzige Ebene zu analysieren. Wir betrachten das Gitter gewissermaßen von oben, so dass jede Linie wie ein Punkt aussieht, der eine Kreiswelle abstrahlt. Damit haben wir die Verbindung zum Antennenarray hergestellt. (Zu den Details der formalen Reduktion auf zwei Dimensionen siehe Buch von E. Hecht).

Wir können die Rechnung für das Antennenarray direkt übernehmen, wenn wir die elektronische Phasenverzögerung richtig interpretieren. Sie ist natürlich nicht mehr elektronisch vorgegeben, sondern durch den Winkel des einfallenden Lichts.



Je nach Einfallswinkel werden die einzelnen Gitterstäbe durch die einfallende Welle um die Phase

$$a \cdot k = d \cdot k \cdot \sin \theta_{ein}$$

verzögert relativ zum Nachbarstab angeregt. Diese Verzögerung hat den selben Effekt wie die elektronische Phasenverzögerung beim Antennenarray. Wir übernehmen die Lösung des Antennenarrays

$$E = E_0 \frac{\sin \left( \frac{1}{2} N \Delta \varphi \right)}{\sin \left( \frac{1}{2} \Delta \varphi \right)}$$

und ersetzen im Ausdruck für die Relativphase  $\Delta \varphi$  die elektronische Phase  $\varphi_e$  durch  $d \cdot k \cdot \sin \theta_{ein}$ ,

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \varphi_e + d \cdot k \cdot \sin \theta = d \cdot k \cdot \sin \theta_{ein} + d \cdot k \cdot \sin \theta \\ &= d \cdot k \cdot (\sin \theta_{ein} - \sin \theta_{aus}). \end{aligned}$$

Das negative Vorzeichen in zweiten Term kommt dadurch zustande, dass der Ausfallswinkel jetzt als der Winkel rechts vom Lot definiert ist also  $\theta_{aus} := -\theta$ . Wie im Falle des Antennenarrays erhält man Haupt und Nebenextrema.

- Hauptextrema

Die Hauptextrema also die Richtungen mit maximaler Intensität erhält man für verschwindenden Nenner:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) &= 0 \\ \Delta\varphi &= m \cdot 2\pi\end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\sin\theta_{ein} - \sin\theta_{aus} = \frac{m \cdot 2\pi}{d \cdot k} = m \frac{\lambda}{d}$$

Dies ist die sogenannte Gittergleichung. In nullter Ordnung ( $m = 0$ ) erhält man

$$\sin\theta_{ein} = \sin\theta_{aus}$$

bzw.

$$\theta_{ein} = \theta_{aus}$$

Das Gitter verhält sich in nullter Ordnung wie ein Spiegel und reflektiert unabhängig von der Wellenlänge des Lichts. In einem Gitterspektrograph verwendet man deshalb das Hauptmaximum der ersten Ordnung ( $m = 1$ ):

$$\sin\theta_{ein} - \sin\theta_{aus} = \frac{\lambda}{d}$$

Der Ausdruck vereinfacht sich, wenn man das Gitter unter senkrechtem Einfall beleuchtet ( $\theta_{ein} = 0$ ) und der Ablenkwinkel erster Ordnung klein bleibt, so dass näherungsweise  $\sin\theta_{max} \simeq \theta_{aus}$ . Der Zusammenhang zwischen Ablenkwinkel und Wellenlänge ist dann einfach das Verhältnis von Wellenlänge und Gitterkonstanten:

$$\begin{aligned}\sin(\theta_{ein} = 0) - \sin\theta_{aus} &= \frac{\lambda}{d} \\ \theta_{aus} &\simeq -\frac{\lambda}{d}\end{aligned}$$

- Auflösung eines Gitters

Wie ähnlich dürfen die Wellenlängen zweier Eingangsstrahlen sein, um vom Gitter noch getrennt zu werden. Um dieses "Auflösungsvermögen" zu bestimmen, können wir das Ergebnis der Rechnung für das Antennenarray übernehmen.

$$\Delta\theta \simeq \frac{\lambda}{d \cdot N} \cdot \frac{1}{\cos\theta_{aus}}$$

Der Winkel  $\Delta\theta$  war dabei die Differenz zwischen dem Hauptmaximum und der ersten benachbarten Nullstelle. Zwei Wellenlängen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  können getrennt werden, wenn die Differenz der beiden zugehörigen Beugungswinkel  $\theta_1$  und  $\theta_2$  mindestens so groß ist wie  $\Delta\theta$ .

$$\theta_1 - \theta_2 \geq \Delta\theta$$

Dann nämlich fällt das Beugungsmaximum des einen Strahls auf die Nullstelle des anderen Strahls. Mit oben gilt für senkrechten Einfall und nicht zu großen Beugungswinkeln

$$\theta_1 = -\frac{\lambda_1}{d}, \quad \theta_2 = -\frac{\lambda_2}{d},$$

so dass

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\Delta\lambda}{d},$$

wobei  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ . Die Auflösungsbedingung lautet damit

$$\frac{\Delta\lambda}{d} \geq \Delta\theta = \frac{\lambda}{d \cdot N} \cdot \frac{1}{\cos\theta_{aus}}$$

oder

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{\cos\theta_{aus}}$$

Wenn der Ablenkwinkel erster Ordnung außerdem klein bleibt, so dass näherungsweise  $\cos\theta_{max} \simeq 1$  ergibt sich der einfache zu merkende Ausdruck

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq \frac{1}{N}$$

Die relative Wellenlängenauflösung ist etwa gerade der Kehrwert der Anzahl der beleuchteten Gitterstäbe. Große Gitter liefern große Auflösung.

### 3.4 Beugung am Spalt

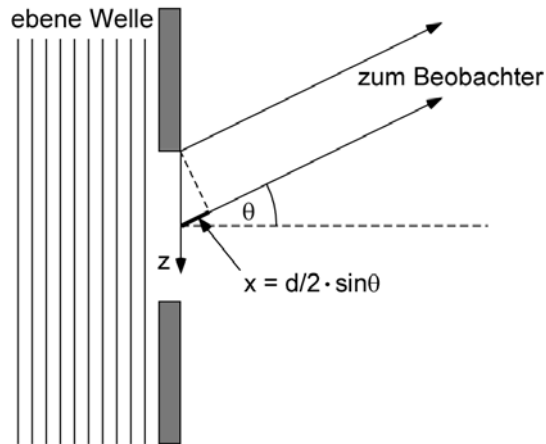
Man kann statt einer diskreten Anzahl von Punktquellen auch eine kontinuierliche Menge von Quellen betrachten. Das Standardbeispiel ist Beugung am Spalt.

- Beugung am Einzelspalt

Eine Schirm mit Spalt der Breite  $d$  wird von links mit einer ebenen Welle angeleuchtet. Wie ist die Helligkeitsverteilung im Fernfeld hinter der Beugungsmaske?

Wie beim Gitter reduzieren wir die dreidimensionale Anordnung auf eine Ebene und nehmen an, dass jeder Punkt in der Spaltöffnung die Quelle einer Kreiswelle ist. Die Kreiswellen überlagern sich hinter dem Spalt zu einem Interferenzmuster.

Ein einfaches Argument erlaubt die Richtung der Intensitätsminima zu bestimmen. Dazu zerlegt man die Menge der Quellen in Paare, die sich gegenseitig auslöschen.



Die Strahlen vom Rand und vom Mittelpunkt löschen sich aus, falls die Phase

$$k \cdot x = \pi$$

oder

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{d}{2} \sin \theta = \pi$$

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d}.$$

Die restlichen Strahlen kann man analog zu Paaren zusammenfassen, die sich in Richtung  $\theta$  gegenseitig auslöschen. Damit gibt es in diese Richtung kein Licht.

- Fouriertransformation einer kontinuierlichen Feldverteilung

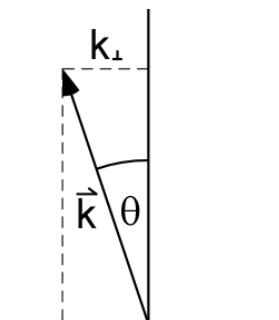
Anders als beim Gitter und beim Antennenarray haben wir es jetzt mit einer kontinuierlichen Reihe von Quellen also einer Quellendichte zu tun. Eine Quelle im Abstand  $z$  von der oberen Spaltkante erzeugt am Beobachtungspunkt ein Feld mit einer Phase

$$\varphi(z) = k \cdot z \cdot \sin \theta = k_{\perp} \cdot z$$

Die Abkürzung

$$k_{\perp} := k \sin \theta$$

entspricht gerade der Komponente des Wellenvektors des gebeugten Lichts, die parallel zum Schirm orientiert ist.



Wir lassen außerdem zu, dass jede Quelle eine unterschiedliche Amplitude  $E(z)$  hat und am Beobachtungspunkt mit einer zu  $E(z)$  proportionalen Amplitude  $\eta E(z)$  zum Gesamtfeld beiträgt. Der Faktor  $\eta$  berücksichtigt die Abschwächung des Feldes auf dem Weg von der Beugungsmaske zum Beobachter. Der Faktor soll für alle Quellen gleich sein. Die Summe der Antennenreihe wird jetzt zum Integral,

$$E_{\text{gesamt}} = \int_{-\infty}^{\infty} \eta E(z) e^{i\varphi(z)} dz = \eta \int_{-\infty}^{\infty} E(z) e^{ik_{\perp}z} dz := \eta F(k_{\perp}).$$

Die Feldverteilung  $E_{\text{gesamt}}$  im Fernfeld ist offenbar proportional zur Fouriertransformierten  $F(k_{\perp})$  der Feldverteilung  $E(z)$  in der Beugungsebene. Die Intensität im Fernfeld ist

$$I = \eta^2 \frac{1}{2} c \varepsilon_0 |F(k_{\perp})|^2$$

- Beugungsmuster

Das Beugungsmuster eines Spalts lässt sich einfach berechnen, wenn wir annehmen, dass der Beitrag zum Gesamtfeld für jeden Quellpunkt gleich groß ist,

$$\eta E(z) = E_0 \text{ für } 0 < z < d.$$

Einsetzen in das Integral liefert:

$$F(k_{\perp}) = E_0 \int_0^d e^{ik_{\perp}z} dz = E_0 \left[ \frac{1}{ik_{\perp}} e^{ik_{\perp}z} \right]_0^d = \frac{E_0}{ik_{\perp}} (e^{ik_{\perp}d} - 1)$$

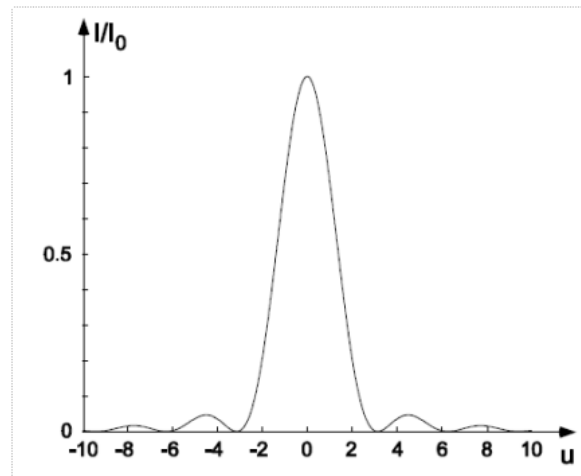
Die Intensität ist dann

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} c \varepsilon_0 F(k_{\perp}) F^*(k_{\perp}) = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \left( \frac{E_0}{k_{\perp}} \right)^2 (e^{ik_{\perp}d} - 1) (e^{-ik_{\perp}d} - 1) \\ &= \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \left( \frac{E_0}{k_{\perp}} \right)^2 (2 - 2 \cos(k_{\perp}d)) \\ &= 2c \varepsilon_0 \left( \frac{E_0}{k_{\perp}} \right)^2 \sin^2(k_{\perp}d/2) \\ &= \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 d^2 \left( \frac{\sin(k_{\perp}d/2)}{k_{\perp}d/2} \right)^2 = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 d^2 \cdot \text{sinc}^2(u) \end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$u := k_{\perp}d/2 = \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \sin \theta$$

Die Intensitätsverteilung ist das Quadrat einer Sinc-Funktion (Sinus cardinalis) mit einem zentralen Maximum in Vorwärtsrichtung.



- Die Breite der Verteilung schätzen wir durch die Lage der ersten Nullstellen ab, die bei  $\pm\pi$  liegen

$$\Delta u \simeq 2\pi.$$

Für die Breite  $\Delta k_{\perp}$  der transversalen Impulsverteilung erhält man damit

$$\Delta u = \Delta k_{\perp} d / 2 = 2\pi$$

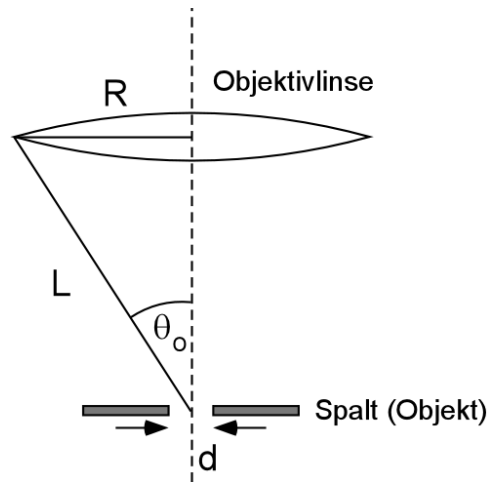
$$\Delta k_{\perp} d = 4\pi$$

Schränkt man das Licht auf einen Bereich der Größe  $d$  ein, so verteilt sich sein transversaler Wellenvektor und damit der transversale Impuls der beteiligten Photonen über einen Bereich, dessen Größe umgekehrt proportional zu  $d$  ist. Hier zeigt sich wieder die Ort-Impuls-Unschärfe.

- Auflösung eines Mikroskops

Die Auflösung eines Mikroskops erhält man am einfachsten, wenn man sich das zu beobachtende Objekt als ein Spalt vorstellt, der von unten beleuchtet wird. Falls sich so eine Spalt nicht mehr scharf abbilden lässt, sollte man auch kein anderes Objekt mehr auflösen können, wie z.B. ein von oben beleuchtetes Bakterium oder dergleichen. Durch die Beugung erhält das Licht oberhalb des Spalts einen transversalen Impuls und zerfließ dadurch seitlich. Für ein scharfes Bild wird es nötig sein, möglichst viel von diesem Licht mit einer Linse einzufangen.





Der maximale Beugungswinkel  $\theta_o$ , den das Objektiv noch einfängt, ist durch den Radius  $R$  der Linse und den Abstand  $L$  des Linsenrandes zum Zentrum des Spalts,

$$\sin \theta_o = \frac{R}{L}$$

Den Beugungswinkel bei der Beugung am Spalt kann man wie oben durch den transversalen Wellenvektor ausdrücken (so war  $k_{\perp}$  oben definiert),

$$\frac{k_{\perp}}{k} = \sin \theta.$$

Für ein scharfes Bild fordern wir, dass  $\theta < \theta_o$  also

$$\frac{k_{\perp}}{k} < \frac{R}{L}$$

Oben haben wir gesehen, dass fast alle Werte für  $k_{\perp}$  innerhalb der Breite

$$\Delta k_{\perp} = \frac{4\pi}{d}$$

liegen. Wir nehmen also an, dass der transversale Wellenvektor nicht größer ist als

$$k_{\perp} \simeq \frac{\Delta k_{\perp}}{2} = \frac{2\pi}{d}.$$

Einsetzen in die Bedingung für ein scharfes Bild liefert

$$\frac{2\pi/d}{k} < \frac{R}{L}$$

$$\lambda \frac{L}{R} < d$$

Für Objektive wird die "numerische Apertur" definiert als

$$N_a := \sin \theta_o = \frac{R}{L}$$

Damit lautet die Auflösung schließlich

$$\frac{d}{\lambda} > \frac{1}{N_a}.$$

Den Abstand zwischen Objektiv und Objekt kann man nicht beliebig klein machen, da er durch die Brennweite der Linse vorgegeben ist. Man benötigt also kurzbrennweitige Linsen mit großem Radius und möglichst kleinen Linsenfehlern. Gute Objektive erreichen Werte für  $N_a$  zwischen 0.2 und 0.9. Ein Mikroskop kann also nur Objekte abbilden, die nicht kleiner sind als in etwa die Wellenlänge des Lichts, mit dem sie beleuchtet werden. Umgekehrt kann man Strukturen z. B. auf einen Silizium-Waver projizieren, die nicht kleiner sind als die Wellenlänge des Lichts. Um immer kleinere elektronische Strukturen zu erzeugen, benötigt man Licht mit immer kürzeren Wellenlängen und Objektive, die bei diesen Wellenlänge keine Abbildungsfehler haben. Dies ist eine große Herausforderung.

In der Fachsprache der modernen Physik lautet das Ganze zusammengefasst so: Das Lichtfeld, das das Objekt in der Objektebene erzeugt, kann man sich als Fouriersynthese aus transversalen ebenen Wellen zusammengesetzt denken. Die kleinste Objektstruktur erzeugt dabei den größten transversalen Wellenvektor. Durch seinen begrenzten Radius hat das Objektiv eine begrenzte Bandbreite bei der Übertragung der transversalen Fourierkomponenten. Es schneidet die großen Komponenten ab, was die Auflösung begrenzt.

## 4. Licht in Materie

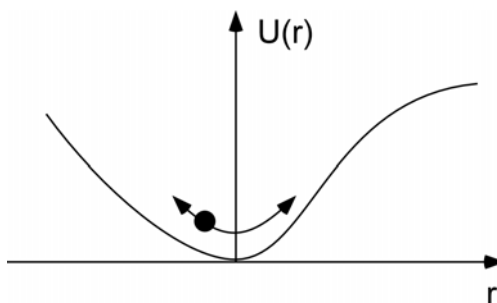
In Materie ändert Licht seine Phasengeschwindigkeit und es gibt eine von der Phasengeschwindigkeit abweichende Gruppengeschwindigkeit. Außerdem kann Licht absorbiert werden, d.h. es fließt Energie vom Licht in die Materie und die Lichtwelle wird dunkler. Beide Effekte werden durch einen, in den komplexen Zahlenraum erweiterten Begriff des Brechungsindex beschrieben. In diesem Kapitel geht es um zunächst um ein Modell, das den Brechungsindex mikroskopisch erklärt. Es wurde vom niederländischen Physiker Hendrik Antoon Lorentz im Jahre 1887 entwickelt (nicht zu verwechseln mit dem Dänen Ludvig Lorenz nach dem die Lorenz-Eichung benannt ist). Unter anderem bekam er dafür 1902 zusammen mit Pieter Zeeman den Nobelpreis. (Von Lorentz stammt auch die Lorentz-Kontraktion und die Lorentz-Transformation, auf die sich Einstein in der speziellen Relativitätstheorie bezieht.)

Das Lorentz-Modell des Brechungsindex liefert eine anschauliche Vorstellung der physikalischen Vorgänge und ist auch aus heutiger Sicht in seinem Kern noch gültig. Das Modell ist in jedem Fall ein wichtiger Ausgangspunkt für das Verständnis der Wechselwirkung zwischen Licht und Materie weshalb wir ihm ein ganzes Kapitel widmen.

## 4.1 Lorentz-Modell in Dielektrika

Das Lorentz-Modell beschreibt zunächst nur Dielektrika also transparente, nicht magnetisierbare Materialien, die von einem elektrischen Feld polarisiert werden können. Im Lorentz-Modell werden die Elektronen im Dielektrikum als klassische geladene Punktteilchen behandelt. Das elektrische Feld des Lichts übt auf die geladenen Elektronen im Material eine oszillierende Kraft aus und setzt sie in Bewegung. Sobald die Ladungen beschleunigt werden, strahlen sie selber Licht ab. Das abgestrahlte Licht überlagert sich mit dem einfallenden Licht zu einem Gesamtfeld. Sind die Ladungen homogen verteilt, entspricht das Gesamtfeld wieder einer ebenen Welle allerdings mit veränderter Ausbreitungsgeschwindigkeit. Auf diese Weise erhält man ein mikroskopisches Modell für den reellen Brechungsindex. Ein Teil des Lichts kann allerdings auch absorbiert werden. Sind die beschleunigten Ladungsträger in ihrer Bewegung gedämpft, kann die Energie des Lichts in Wärme umgewandelt werden.

- Modell für Elektronen im Kristall



Nach der Vorstellung des Lorentz-Modells erzeugen die positiv geladenen Kerne (Atomionrümpfe) in einem Kristall ein periodisches Potential für die Elektronen. Jedes der Potentialminima ist mit einem Elektron besetzt. Die Abstände der Kerne und damit der Potentialminima betragen wenige Angström ( $10^{-10}$  m), so dass mehrere tausend Elektronen innerhalb einer Wellenlänge liegen. Das einfallende Lichtfeld lenkt die Elektronen aus ihrer Ruhelage aus und bringt sie zum schwingen. Bei kleinen Lichtstärken wird das Elektron nur wenig ausgelenkt und man kann das Potential durch den ersten nicht verschwindenden Term einer Taylor-Entwicklung nähern.

$$U = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 + \dots$$

Die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  ist durch die Krümmung des Potentials im Minimum gegeben. Für Laserlicht mit Leistungen im Watt-Bereich muss man auch höhere Terme in der Taylor-Entwicklung mitnehmen. Das ist das Spezialgebiet der "Nichtlinearen Optik", die wir hier nicht besprechen. In linearer Näherung ist die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung

$$F = -\frac{dU}{dx} = -m\omega_0^2x.$$

Wir können uns die Elektronen also wie mit Federn an ihre Gleichgewichtslage angeheftet denken. Außerdem können die Elektronen noch durch eine Reibungskraft gedämpft werden,

$$F_r = -\gamma \cdot m \cdot \dot{x},$$

die proportional zur Geschwindigkeit ist und deren Stärke durch die Dämpfungskonstante  $\gamma$  gegeben ist. Das Lichtfeld wirkt als periodisch antreibende Kraft auf die Ladung  $q$  des Elektrons.

$$F_L = q \cdot E_0 e^{-i\omega t}.$$

- Bewegungsgleichung

Die Kraftbilanz

$$F + F_r + F_L = m\ddot{x}$$

führt zur Differentialgleichung für den getriebenen gedämpften harmonischen Oszillator:

$$m\ddot{x} + \gamma m\dot{x} + m\omega_0^2 x = q \cdot E_0 e^{-i\omega t}$$

mit der Lösung:

$$\begin{aligned} x &= E_0 \cdot D(\omega) \cdot e^{-i\omega t} \\ D(\omega) &: = \frac{q}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \end{aligned}$$

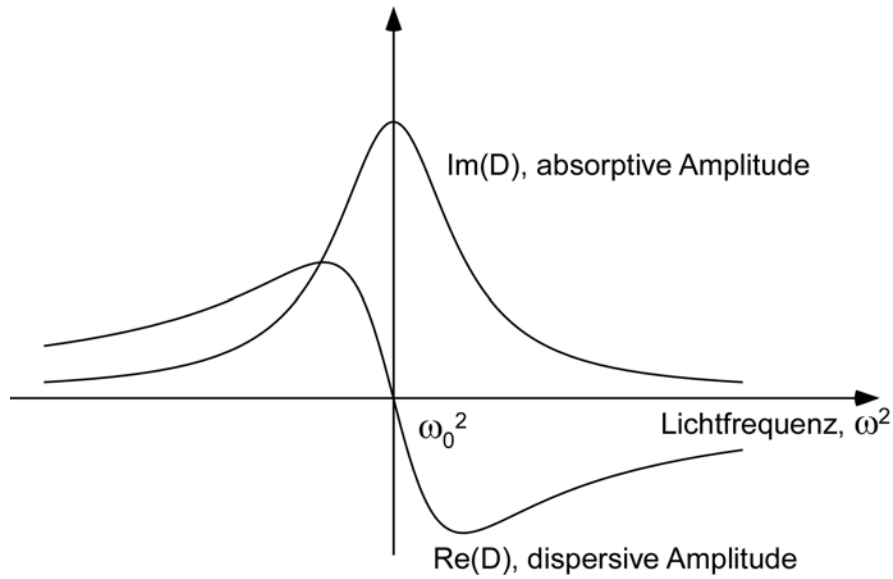
Die komplexe Resonanzfunktion  $D(\omega)$  kann man in Real und Imaginärteil zerlegen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(D) &= \frac{q}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \\ \operatorname{Im}(D) &= \frac{q}{m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \end{aligned}$$

Die Auslenkung des Elektrons aus der Ruhelage ist der Realteil von  $x$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(x) &= E_0 \operatorname{Re}(D \cdot e^{-i\omega t}) \\ &= E_0 \operatorname{Re}((\operatorname{Re}(D) + i \operatorname{Im}(D)) \cdot (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t))) \\ &= E_0 \operatorname{Re}(D) \cos(\omega t) + E_0 \operatorname{Im}(D) \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Die Schwingung des Elektrons ist also eine Überlagerung einer Kosinus- und einer Sinusschwingung. Da das anregende elektrische Feld,  $\operatorname{Re}(E_0 e^{-i\omega t}) = E_0 \cos(\omega t)$ , proportional zum Kosinus schwingt, bewegt sich das Elektron mit einer Amplitude  $E_0 \operatorname{Re}(D)$  in Phase mit dem Lichtfeld und mit einer Amplitude  $E_0 \operatorname{Im}(D)$  um  $90^\circ$  phasenversetzt dem Feld hinterher. Die phasensynchrone Amplitude heißt dispersive Amplitude und die phasenverzögerte ist die absorptive Amplitude. Die absorptive Amplitude zeigt bei der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  ein Maximum. Die dispersive Amplitude verschwindet dort.

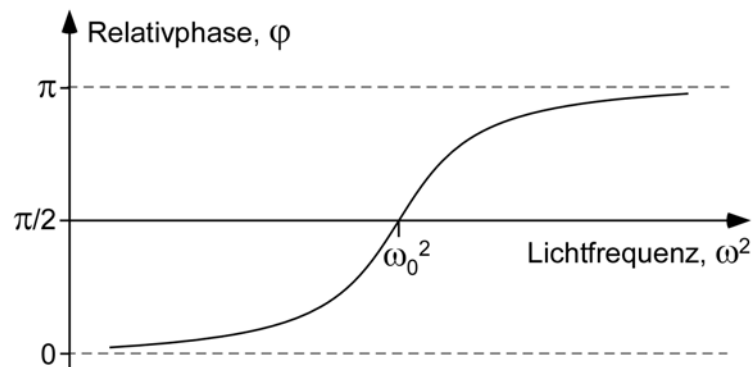


Man kann auch die Relativphase zwischen Licht und Elektron direkt ausrechnen:

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im}(D)}{\operatorname{Re}(D)} = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\cot \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\gamma\omega} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\gamma\omega}\right) + \frac{\pi}{2}$$



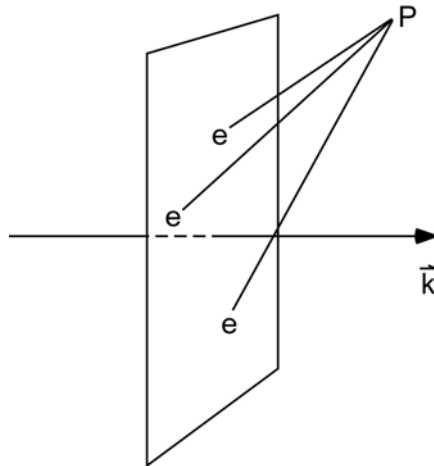
Die Relativphase wächst mit der Frequenz an, durchläuft in Resonanz den Wert  $\pi/2$  und wird für hohe Frequenzen bei  $\pi$  maximal. Die Resonanzfrequenz liegt für optisch transparente Materialien oberhalb der Lichtfrequenz also  $\omega < \omega_0$ . In diesem Bereich ist die absorptive Amplitude deutlich kleiner als die dispersive. Die Elektronen schwingen

also weitgehend in Phase mit dem anregenden Lichtfeld. Interessiert man sich für das Betragquadrat der Auslenkung erhält man den einfachen Ausdruck

$$\begin{aligned}
 |x|^2 &= E_0^2 \cdot |D(\omega)|^2 = E_0^2 \cdot ((\operatorname{Re} D)^2 + (\operatorname{Im} D)^2) \\
 &= E_0^2 \frac{q^2}{m^2} \cdot \left( \left( \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right)^2 + \left( \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right)^2 \right) \\
 &= E_0^2 \frac{q^2}{m^2} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}{\left( (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2 \right)^2} \\
 &= E_0^2 \frac{q^2}{m^2} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}
 \end{aligned}$$

- Dipolebene.

Die Elektronen strahlen jedes wie ein Herzscher Dipol phasengleich mit dem anregenden Primärfeld eine Kugelwelle mit Dipolcharakteristik ab. Wir fassen die Elektronen in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Lichts zusammen. Das Feld an einem Punkt  $P$  ist dann die Überlagerung der von den schwingenden Elektronen abgestrahlten Felder.



Zur Berechnung des Gesamtfeldes an  $P$  können wir hier keine Fernfeldnäherung machen, denn  $P$  soll auch sehr nahe an der Ebene liegen dürfen. Eine vollständige Rechnung übernehmen wir hier im Ergebnis (siehe z.B. "Laser Physics" von M. Sargent, M. Scully und W. Lamb, Addison Wesley 1974, Anhang A) Sie zeigt, dass in einer unendlich ausgedehnten Ebene homogen verteilte Elektronen, die alle synchron mit  $\cos(\omega t)$  schwingen, ihre abgestrahlten Dipolfelder zu zwei sekundären ebenen Wellen

$$\begin{aligned}
 E_{sek}(x, t) &= \Delta E \cdot \sin(\pm kz + \omega t) \\
 \Delta E &: = \frac{1}{2} \frac{N_a k q x_0}{\varepsilon_0}
 \end{aligned}$$

überlagern, die sich in beiden Richtungen senkrecht zur Dipolebene ausbreiten. Die Amplitude  $\Delta E$  der erzeugten Wellen enthält die Flächendichte  $N_a$  der Dipole sowie die Amplitude  $x_0$  der Elektronenschwingung. Die Phase der Sekundärwellen in der Dipolebene ( $z = 0$ ) hinkt der Schwingung Dipole um  $-90^\circ$  hinterher.

- Interferenz mit der Primärwelle

Die phasenverzögerte Sekundärwelle, die in die selbe Richtung wie die Primärwelle läuft, überlagert sich mit der Primärwelle zu einer Gesamtwelle, die gegenüber der Primärwelle ebenfalls leicht phasenverzögert ist. Das sieht man mit Hilfe des allgemeinen Zusammenhangs (Bronstein)

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \left( x + \arctan \left( \frac{b}{a} \right) \right)$$

In der Dipolebene bei  $x = 0$  erhält man

$$\begin{aligned} \Delta E \sin \omega t + E_0 \cos \omega t &= \sqrt{\Delta E^2 + E_0^2} \sin \left( \omega t + \arctan \left( \frac{E_0}{\Delta E} \right) \right) \\ &= \sqrt{\Delta E^2 + E_0^2} \cos (\omega t - \Delta \varphi) \end{aligned}$$

$$\Delta \varphi = -\arctan \left( \frac{E_0}{\Delta E} \right) + \frac{\pi}{2} = \arctan \left( \frac{\Delta E}{E_0} \right)$$

Eine Primärwelle der Amplitude  $E_0$  und eine durch die dispersive Schwingung erzeugte Welle mit Amplitude  $\Delta E$  überlagern sich zu einer neuen Welle, die gegenüber der Primärwelle um  $\Delta \varphi$  verschoben ist. Da üblicherweise  $\Delta E \ll E_0$  bleibt die Amplitude durch die Überlagerung praktisch unverändert.

- Absorption

Schwingen die Elektronen mit der absorptiven Amplitude, also um  $-90^\circ$  verzögert zum anregenden Lichtfeld, so erzeugen die Elektronen eine Sekundärwelle, die gegenüber der anregenden Primärwelle um zweimal  $90^\circ$  also  $180^\circ$  verschoben ist und diese daher teilweise auslöscht. Das Licht wird vom Medium "absorbiert".

- Brechungsindex

Die veränderte Lichtgeschwindigkeit in Materie ist gemäß dem Lorentz-Modell ein reiner Interferenzeffekt von Primär und Sekundärwellen, die sich auch im Medium mit Vakuumlichtgeschwindigkeit bewegen. In optischen Materialien mit überwiegend dispersiver Amplitude verschiebt jede Dipolebene die Phase der Lichtwelle um einen Betrag  $\Delta \varphi$  nach hinten. Die Gesamtphasenverschiebung  $\alpha$  wächst so mit jeder neuen Ebene und damit proportional zum Ort  $\alpha = \Delta \varphi / a \cdot x$ , wobei  $a$  der Abstand zwischen

benachbarten Ebenen ist. Insgesamt sammelt sich nach einer Strecke  $x$  eine Gesamtphase an, die sich aus dem Teil  $k \cdot x$  zusammensetzt, den man auch ohne Materie im Vakuum hätte und der zusätzlichen Phase  $\alpha$  aufgrund der Elektronen:

$$\varphi = k \cdot x + \frac{\Delta\varphi}{a} \cdot x = \left( k + \frac{\Delta\varphi}{a} \right) \cdot x = k_m \cdot x$$

Der Wellenvektor im Medium  $k_m$  ist damit

$$k_m := k + \frac{\Delta\varphi}{a} = n \cdot k$$

Der Brechungsindex

$$n = \frac{k + \frac{\Delta\varphi}{a}}{k} = 1 + \frac{\Delta\varphi}{ka}$$

wird also, vermittelt  $\Delta\varphi$ , durch das Verhältnis aus Primärwelle und dispersiver Sekundärwelle bestimmt.

- Rückwärtslaufende Sekundärwellen

Wir haben oben gesehen, dass von jeder der Dipolebenen auch eine rückwärtslaufende Welle ausgeht. Diese löschen sich allerdings alle gegenseitig aus, da es zu jeder Welle mit positiver Amplitude eine mit negativer Amplitude gibt (siehe Huygens Prinzip).

- Berechnung von  $\Delta\varphi$

Um die Berechnung des Brechungsindex abzuschließen, müssen wir die Phase  $\Delta\varphi = \arctan\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)$  berechnen. Dazu benötigen wir die Amplitude der Sekundärwelle

$$\Delta E = N_a \frac{1}{2} \frac{\omega}{c\epsilon_0} q x_0,$$

die durch die dispersive Schwingung erzeugt wird. Für  $x_0$  setzen wir also die dispersive Amplitude ein

$$x_0 = E_0 \frac{q}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

und erhalten

$$\frac{\Delta E}{E_0} = N_a \frac{1}{2} \frac{\omega q^2}{m c \epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

Der Phasenversatz pro Dipolfläche ist damit

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \arctan\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right) \simeq \frac{\Delta E}{E_0} \\ &= N_a \frac{1}{2} \frac{\omega q^2}{m c \epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \end{aligned}$$



Damit erhält man schließlich für den Brechungsindex

$$\begin{aligned} n &= 1 + \frac{\Delta\varphi}{ka} \\ &= 1 + \frac{1}{ka} N_a \frac{1}{2} \frac{\omega q^2}{m c \varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \frac{N q^2}{m \varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}, \end{aligned}$$

wobei

$$N := \frac{N_a}{a},$$

die Dipoldichte im Material also die Anzahl der Atome pro Volumen ist. Für verschwindende Dämpfung in transparenten Medien wird  $\gamma = 0$  und der Brechungsindex vereinfacht sich zu

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{N q^2}{m \varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- Komplexer Brechungsindex

Eine kürzere aber physikalisch weniger durchsichtige Herleitung verwendet die Grundlagen der Elektrodynamik in Medien, bei der für nichtmagnetische Materialien vor allem die elektrische Polarisation  $\vec{P}$  ins Spiel kommt. Sie ist die Dipoldichte im Medium, also:

$$\vec{P} = q \cdot \vec{x} \cdot N$$

wobei  $N$  die Elektronendichte im Medium ist,  $q$  die Ladung eines Elektrons und  $\vec{x}$  die Auslenkung der Elektronen aus der Ruhelage, wie wir sie oben berechnet haben. Die Resonanzfunktion  $D(\omega)$  behalten wir als komplexe Funktion und erwarten daher zunächst einen komplexen Ausdruck für den Brechungsindex, dessen Realteil dann der übliche reelle Brechungsindex ist. Auslenkung und Feldrichtung sind parallel und daher sind auch Polarisation und Feld parallel. Die Stärke der Polarisation ist in der linearen Optik proportional zum Feld

$$\vec{P} = \chi \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_0$$

wobei die Proportionalitätskonstante

$$\chi := \frac{q}{\varepsilon_0} \cdot N \cdot D(\omega)$$

die aus der Elektrodynamik bekannte elektrische Suszeptibilität ist. Diese hängt auf einfache Weise mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$  zusammen

$$\chi = \varepsilon - 1$$

Die Dielektrizitätskonstante liefert dann den Brechungsindex:

$$\begin{aligned} n^2 &= \varepsilon = 1 + \chi \\ &= 1 + \frac{q}{\varepsilon_0} \cdot N \cdot D(\omega) \\ n &= \sqrt{1 + \frac{q}{\varepsilon_0} \cdot N \cdot D(\omega)} \end{aligned}$$

Für Brechungsindizes nahe bei 1 ist der zweite Term unter der Wurzel klein und man kann die Wurzel durch eine Taylorreihe nähern und nach dem zweiten Term abbrechen.

$$\begin{aligned} n &\simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{q}{\varepsilon_0} \cdot N \cdot D(\omega) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \end{aligned}$$

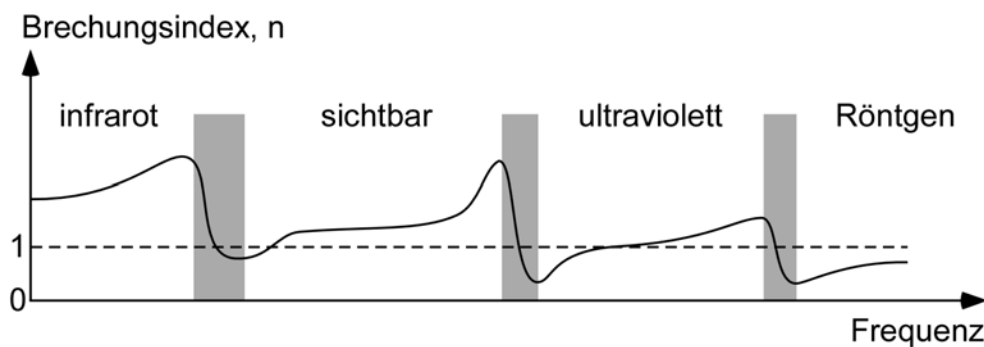
Der Brechungsindex ist im Allgemeinen also eine komplexe Zahl. Falls die Dämpfungskonstante  $\gamma$  klein ist, wie es in transparenten Materialien der Fall sein muss (keine Dämpfung der Elektronen), wird der Brechungsindex reell  $\gamma \rightarrow 0$  reell:

$$n \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Dies ist genau das Ergebnis des mikroskopischen Modells von oben.

Der Imaginärteil des Brechungsindex lässt sich ebenfalls physikalisch interpretieren. Er beschreibt die Absorption vom Licht, was vor allem bei Metallen wichtig wird und im nächsten Abschnitt weiter unten besprochen wird.

- Dispersionsrelation von Dielektrika



Für Dielektrika beobachtet man etwa folgenden typischen Verlauf des Brechungsindex als Funktion der Lichtfrequenz  $n(\omega)$ : Man erhält Kurven, mit dispersiver Form, wie es das Lorentz-Modell vorhersagt. Allerdings gibt es mehrere dispersive Resonanzen. Dies

sind im Lorentz-Modell nicht zu verstehen sondern erfordern eine quantenmechanische Beschreibung für die Elektronen in Festkörpern. Man erhält im sogenannten "Bändermodell" der Festkörperphysik tatsächlich mehrere sehr breite Frequenzbereiche, in denen man die Elektronen zu Schwingungen anregen kann (graue Bereiche in der Abbildung). In diesen Bereichen sind die absorptiven Schwingungen dominant und die Strahlung wird stark absorbiert. Dazwischen gibt es transparente Bereiche, in denen man Optik machen kann. Im sichtbaren und infraroten Bereich ist der Brechungsindex  $n$  größer als 1. Im Ultravioletten und vor allem im Röntgenbereich gibt es Bereiche in denen  $n < 1$ . Hier ist die Phasengeschwindigkeit des Lichts größer als im Vakuum! Sammellinsen sind hier konkav und Totalreflexion findet beim Übergang von optisch dünn nach optisch dicht statt. Auf diese Weise kann man Röntgenspiegel z.B. für Teleskope bauen.

## 4.2 Metalle

- Dispersionsrelation in Metallen

Im Metall gibt es zusätzlich zu den gebundenen Elektronen auch freie Elektronen ohne rücktreibende Kraft. Für diese verschwindet die Federkonstante und damit wird  $\omega_0 = 0$ . Für den Brechungsindex kann man in Anlehnung an das Lorentzmodell den allgemeinen Ansatz machen:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \left( \underbrace{\frac{f_e}{-\omega^2 - i\gamma_e \omega}}_{\text{freie Elektronen}} + \sum_j \underbrace{\frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega}}_{\text{gebundene Elektronen}} \right)$$

Die Faktoren  $f_e$  und  $f_j$  heißen Oszillatorstärken und sind dimensionslose Parameter des Modells. Der erste Term in der Klammer beschreibt die freien Elektronen. Daneben werden auch gebundene Elektronen angenommen, die wie im Dielektrikum unterschiedliche Schwingungsfrequenzen  $\omega_{0j}$  haben können. Die Summe aller komplexen Spektren ergibt eine von  $\omega$  abhängige komplexe Zahl, deren Phase für den komplexen Brechungsindex verantwortlich ist.

- Plasmafrequenz

Wir betrachten zunächst nur die freien Elektronen und nehmen schwache Dämpfung an,

$$\omega \gg \gamma.$$

Außerdem setzen wir  $f_e = 1$ . Für den Brechungsindex erhält man den einfachen Ausdruck

$$n^2(\omega) \simeq 1 - \frac{Nq^2 f_e}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \left( \frac{\omega_P}{\omega} \right)^2$$

mit der "Plasmafrequenz"

$$\omega_P := \sqrt{\frac{Nq^2}{\epsilon_0 m}}.$$

Für Metalle ist die Plasmafrequenz größer als die Lichtfrequenz im sichtbaren Bereich, d.h.  $n^2 < 0$ . Der Brechungsindex ist also imaginär.

$$n(\omega) = i\sqrt{\left(\frac{\omega_P}{\omega}\right)^2 - 1}$$

Das Feld oszilliert nicht mehr räumlich sondern klingt nach Eintritt ins Medium exponentiell ab.

$$\begin{aligned} E(\omega) &= E_0 e^{i(kx - \omega t)} \\ &= E_0 e^{-i\omega t} e^{in(\omega)\frac{\omega}{c}x} \\ &= E_0 e^{-i\omega t} e^{i\sqrt{\left(\frac{\omega_P}{\omega}\right)^2 - 1} \cdot \frac{\omega}{c}x} \\ &= E_0 e^{-i\omega t} e^{-x/\lambda_s} \end{aligned}$$

Mit der "Eindringtiefe"

$$\lambda_s := \frac{1}{\frac{\omega}{c} \sqrt{\left(\frac{\omega_P}{\omega}\right)^2 - 1}}$$

Für Strahlungsfrequenzen unterhalb der Plasmafrequenz  $\omega < \omega_P$  kann man die 1 in der Wurzel vernachlässigen und man erhält

$$\lambda_s = \frac{c}{\omega_P}.$$

Die Eindringtiefe ist kleiner als die Wellenlänge des Lichts:

$$\lambda_s < \frac{c}{\omega} = \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

- Reflektion bei imaginärem Brechungsindex

Aufgrund der geringen Eindringtiefe kann das Feld auch nicht im Material absorbiert werden. Metalle reflektieren also im sichtbaren Spektralbereich ( $\omega < \omega_P$ ). Wir suchen eine Ausdruck für den Reflektionskoeffizienten. Die Fresnellschen Formeln (siehe Kap.5) bleiben auch bei komplexen Brechungsindizes mit Realteil  $n_R$  und Imaginärteil  $n_I$ ,

$$n = n_R + in_I,$$

des Metalls gültig und man erhält für senkrechten Einfall aus dem Vakuum auf eine metallische Oberfläche einen komplexen Reflektionsgrad für das Felder.

$$\frac{E_r}{E_i} = r = \frac{n - 1}{n + 1}$$

Die reflektierte Intensität ist proportional zum Betragsquadrat des Feldes:

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{E_r E_r^*}{E_i E_i^*} = r r^* = \frac{n - 1}{n + 1} \frac{n^* - 1}{n^* + 1} = \frac{(n_R - 1)^2 + n_I^2}{(n_R + 1)^2 + n_I^2}$$

Die Reflektion wächst sowohl mit dem Realteil des Brechungsindex'  $n_R$  als auch mit dem Imaginärteil  $n_I$ . Für Metalle in der Näherung  $\gamma < \omega$  ist der Brechungsindex sogar rein imaginär (siehe oben) und man erhält vollständige Reflektion:

$$R = \frac{(-1)^2 + n_I^2}{(+1)^2 + n_I^2} = 1$$

- Absorption

Nimmt man die Dämpfung der freien Elektronen dazu, also  $\gamma \neq 0$ , bekommt man auch einen nicht verschwindenden Realteil  $n_R$ . Die Reflektion ist dann kleiner als 1, d.h. ein kleiner Teil des Lichts wird innerhalb der Eindringtiefe absorbiert. Dies führt zur Erwärmung des Metalls. Die Farbe der Metalle entsteht allerdings durch die Absorption aufgrund der gebundenen Elektronen.

- Röntgenbereich

für  $\omega > \omega_P$  ist  $n$  reell und das Metall wird transparent.

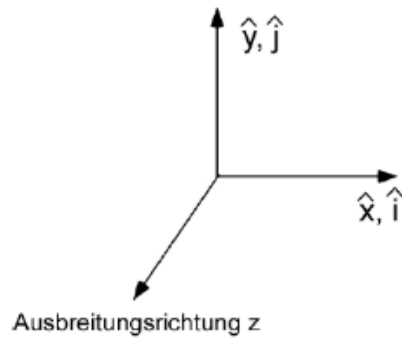
## 5. Polarisation

Licht ist eine transversale Welle, d.h. die Amplituden von harmonischen Wellen sind Vektoren. In diesem Kapitel besprechen wir einige wichtige Effekte, die damit zusammenhängen. Lichtwellen können zirkular, linear oder allgemein elliptisch polarisiert sein. Der Brechungsindex kann von dieser Polarisation abhängen. Im Teilchenbild übersetzt sich die Vektorstruktur in den Eigendrehimpuls der Photonen. Es zeigt sich im berühmten Experiment von R. Beth(1936), dass dieser Eigendrehimpuls den Wert von einem  $\hbar$  hat. Schließlich ist die Polarisation für Reflektion und Brechung an Grenzflächen wichtig. Sie bestimmt die Intensitäten des transmittierten und des gebrochenen Lichts.

### 5.1 Lineare und zirkulare Polarisation

- Koordinatensystem

Bei einer ebenen Welle ist die Amplitude ein Vektor, der aber in seiner Richtung nicht völlig frei ist. Die möglichen elektrischen Feldvektoren einer Lichtwelle liegen vielmehr in einer Ebene senkrecht zum Wellenvektor (z-Richtung). Sie bilden einen zweidimensionalen Raum mit den Basisvektoren  $\hat{i}$  und  $\hat{j}$  ( $\hat{x}$  und  $\hat{y}$ -Richtung). Bei allem folgenden betrachtet man das Licht von "vorne". Die Lichtwelle läuft also entlang der z-Achse auf den Beobachter zu.



Eine harmonische Welle schreibt sich dann

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(t) &= \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\
 &= \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0y} e^{i\varphi_y} \end{pmatrix} e^{i(k_z z - \omega t)} \\
 &= \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} e^{i\varepsilon} \end{pmatrix} e^{i(k_z z - \omega t + \varphi_x)} \\
 &= (\hat{i}E_{0x} + \hat{j}E_{0y} e^{i\varepsilon}) e^{i(k_z z - \omega t + \varphi_x)}
 \end{aligned}$$

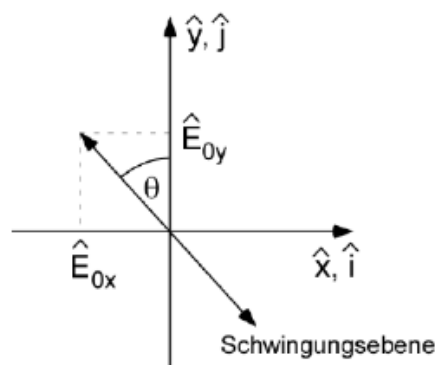
mit der Abkürzung

$$\varepsilon = \varphi_y - \varphi_x.$$

Neben Frequenz und Wellenzahl sind die im folgenden wichtigen Parameter die Relativphase  $\varepsilon$  und die beiden Amplituden  $E_{0x}$  und  $E_{0y}$ . Sie bestimmen die Polarisation.

- lineare Polarisation

Verschwindet die Relativphase ( $\varepsilon = 0$ ) schwingen die beiden Felder an einem gegebenen Ort synchron und man erhält eine "lineare Polarisation". Die Schwingungsebene kann relativ zur  $\hat{j}$  um den Winkel  $\theta$  gekippt sein wobei  $\theta$  offenbar durch die Werte der Feldstärken  $E_{0y}$  und  $E_{0x}$  bestimmt wird:  $\tan \theta = E_{0x}/E_{0y}$ .



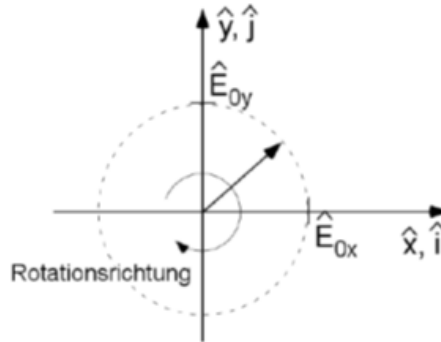
- zirkulare Polarisation

Bei einer Relativphase von  $90^\circ$  ( $|\varepsilon| = \pi/2$ ) und gleichen Amplituden,  $E_{0x} = E_{0y}$ , erhält man vollständig "zirkular" polarisiertes Licht. Für  $\varepsilon = -\pi/2$  läuft die x-Komponente der y-Komponente voraus und der Feldstärkevektor dreht vom Beobachter aus betrachtet rechts herum (im Uhrzeigersinn):

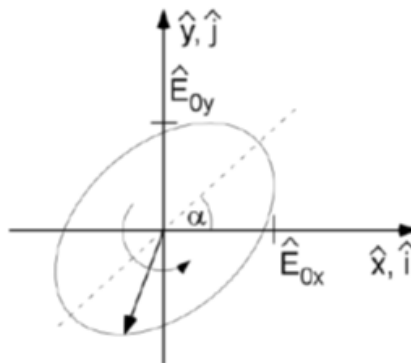
$$E_x(t) = \operatorname{Re}(\hat{i} \cdot \vec{E}) = \operatorname{Re}(E_{0x} e^{i(kz - \omega t + \varphi_x)}) = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_x)$$

$$E_y(t) = \operatorname{Re}(\hat{j} \cdot \vec{E}) = \operatorname{Re}(E_{0y} e^{i(kz - \omega t + \varphi_x - \pi/2)}) = E_{0y} \sin(kz - \omega t + \varphi_x)$$

Man nennt das Licht dann "rechts zirkular polarisiert". Zu einer festen Zeit bildet der Feldstärkevektor also eine Linksschraube in Ausbreitungsrichtung.



Für  $\varepsilon = +\pi/2$  läuft der Vektor im 2D-Koordinatensystem im Gegenuhrzeigersinn und bildet eine Rechtsschraube. Das Licht heißt dann "linkszirkular polarisiert". Für  $\varepsilon \neq 0$  und  $E_{0x} = E_{0y}$  erhält man eine "elliptische" Polarisation, die durch die Länge der Halbachsen und den Kippwinkel charakterisiert werden kann.



- Basiswechsel

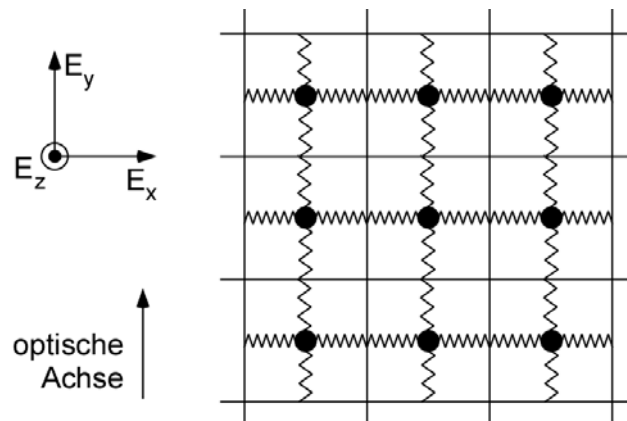
Man kann lineares Licht als Überlagerung von zirkular rechts und zirkular links polarisiertem Licht auffassen. Je nach Phase, mit der die beiden zirkularen Polarisationen überlagert werden, erhält man verschiedene Polarisationswinkel des resultierenden linearen Lichts. Umgekehrt haben wir gesehen, dass man zirkuläres Licht als Überlagerung von linearem Licht auffassen kann. Man kann sich also aussuchen, welche der beiden Grundtypen von Schwingung man zur Beschreibung der Polarisation verwendet. Die lineare und die zirkulare Basis sind äquivalent.

## 5.2 Manipulieren und Beobachten der Polarisation

Die Polarisation des Lichts kann mit optischen Elementen manipuliert und nachgewiesen werden. Man verwendet so genannte Verzögerungsplättchen, die aus doppelbrechenden Materialien hergestellt werden.

- Doppelbrechung

Das Lorentz-Modell nimmt Elektronen an, die in einem harmonischen Potential um eine Gleichgewichtsposition herum gefangen sind. Dieses Potential kann inhomogen sein, d.h. die Krümmung und damit die Oszillationsfrequenz ist für eine Schwingung in x-Richtung anders als für eine Schwingung in y-Richtung (oder z-Richtung). Man spricht von doppelbrechenden Materialien. In Gläsern erhält man Doppelbrechung nur, wenn man das Material unter mechanische Spannung setzt, also entlang einer Richtung quetscht. Kristalle können von sich aus doppelbrechend sein. In einem Federmodell sähe ein Schnittebene durch einen Kristall so aus.



Für ein oszillierendes elektrisches Feld in x-Richtung liegt die Resonanzfrequenz z.B. höher als in y-Richtung. Damit ist auch der Brechungsindex für beide Schwingungsrichtungen unterschiedlich. Eine ebene Lichtwelle, die sich entlang der z-Richtung also

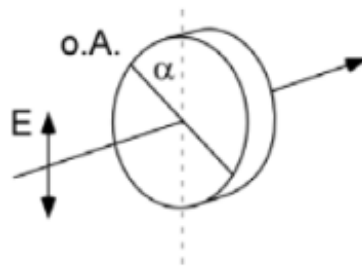


senkrecht zur Zeichenebene ausbreitet erhält man einen polarisationsabhängigen Brechungsindex. Das allgemeine dreidimensionale Federmodell mit drei Federkonstanten bei beliebiger Kristallsymmetrie sowie beliebiger Ausbreitungsrichtung und Polarisation des Lichtfeldes wird die Sache kompliziert. Wir beschränken uns auf die Situation in der Zeichnung. Außerdem nehmen wir an, dass die Federkonstanten für Schwingungen in x-Richtung und in z-Richtung gleich sind.

In der für das volle Modell üblichen Bezeichnungsweise heißt der Brechungsindex für die Polarisation in x- und z-Richtung dann "ordentlicher Brechungsindex  $n_o$ " und für Polarisation in y-Richtung "außerordentlicher Brechungsindex  $n_e$ ". Außerdem müssen wir noch die "optische Achse" einführen. Sie ist die Ausbreitungsrichtung des Lichts, für die der Brechungsindex unabhängig von der Polarisation ist. In unserem Fall ist das die y-Achse.

- $\lambda/4$ -Plättchen

Man schneidet aus einem doppelbrechenden Material eine Scheibe heraus, deren Frontflächen parallel zur optischen Achse liegen (wie oben). Das einfallende Licht kann man in eine ordentliche Polarisationskomponente senkrecht zur optischen Achse mit Index  $n_o$  zerlegen und eine zur optischen Achse parallele rein außerordentliche Polarisationskomponente mit Index  $n_e$ .



Die Dicke  $d$  der Platte wird so gewählt, dass sich beim Durchgang ein Phasenunterschied  $\Delta\varphi$  zwischen ordentlicher und außerordentlicher Polarisation von  $\pi/2$  einstellt (modulo  $2\pi$ ).

$$\Delta\varphi = k \cdot n_e \cdot d - k \cdot n_o \cdot d = \frac{\pi}{2} + m \cdot 2\pi$$

mit einer natürlichen Zahl  $m$ . Je nach Einstellwinkel  $\alpha$  bleibt lineares Licht erhalten (für  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 90^\circ$ ) oder wird zu zirkular links-bzw. rechtsdrehendem Licht ( $\alpha = \pm 45^\circ$ ) umgewandelt. Das geht natürlich auch rückwärts, so dass zirkulares Licht in lineares verwandelt werden kann. Für andere Winkeleinstellungen  $\alpha$  ist das Ergebnis komplizierter, was wir hier nicht diskutieren.

- $\lambda/2$ -Plättchen

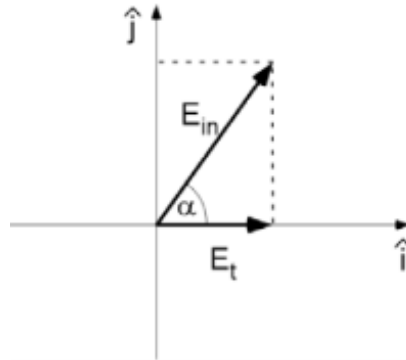
Die Dicke ist hier so gewählt, dass die Phasenverschiebung gerade  $\pi$  ist (modulo  $2\pi$ ).

$$\Delta\varphi = \pi + m \cdot 2\pi$$

Die Polarisation von linear polarisiertem Licht bleibt linear wird aber um den Winkel  $2\alpha$  gedreht. Bei  $\alpha = \pm 45^\circ$  wird die Polarisation also um  $\pm 90^\circ$  gedreht. Für zirkulares Licht wird die Rotationsrichtung umgekehrt (unabhängig vom Winkel  $\alpha$ ).

- Polarisatoren

Polarisationsfilter. Es gibt optische Elemente, die aus beliebig polarisiertem Licht die lineare Komponente entlang einer bestimmten Achse herausfiltern. Ein solcher Polarisator definiert ein Achsenkreuz, gemäß dem das Licht in eine transmittierte und eine absorbierte Komponente zerlegt wird. Das einfallende Licht wird durch das Polfilter auf die transmittierende Richtung projiziert.



Das transmittierte Feld lautet also

$$\vec{E}_t = \hat{i} \cdot \cos \alpha \cdot |\vec{E}_{in}|$$

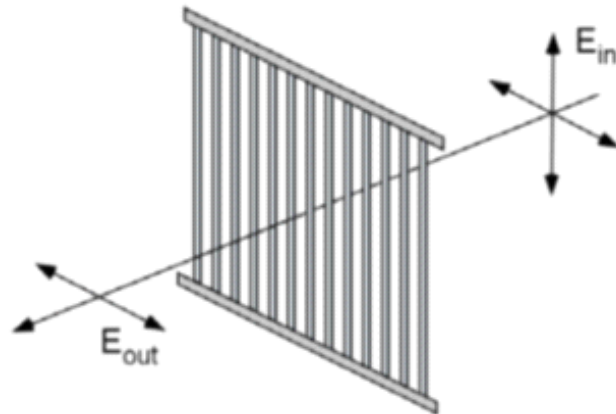
und für die Transmission erhält man

$$\frac{I_t}{I_{in}} = \frac{|\vec{E}_t|^2}{|\vec{E}_{in}|^2} = \cos^2 \alpha$$

Dies ist das Gesetz von Malus (Etienne Louis Malus, 1775-1812). (gekreuzte Polarisatoren Animation)

- Drahtpolarisator

Für lange Wellenlängen im Radiowellenbereich kann man Drahtgitter verwenden.



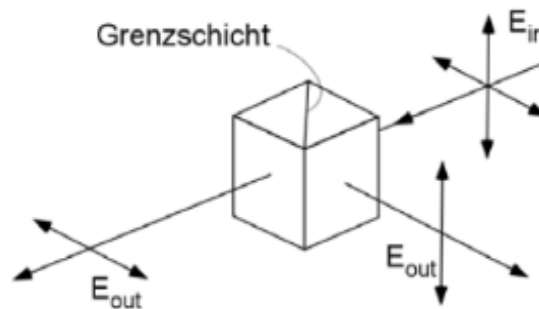
Die Strahlung mit Feld senkrecht zu den Drähten wird durchgelassen. Die parallele Polarisation erzeugt in den Drähten Schwingungen, die ihrerseits ein Feld abstrahlen, das mit dem erzeugenden Feld destruktiv interferiert. Außerdem werden die Ladungsträgerschwingungen in den Drähten gedämpft, was Energie und damit Licht verbraucht. Licht kann man mit Drahtpolarisatoren nicht polarisieren, da die Drähte zu dünn sein müssten.

- Polaroidfilter

Man kann aber statt der Drähte langkettige Moleküle nehmen. Dazu wird eine Polymerfolie langgezogen und mit Jod dotiert. Dadurch entstehen frei bewegliche Elektronen die entlang der längsgezogenen Moleküle wie in Drähten fließen. Man erhält sozusagen einen molekularen "Drahtpolarisator". Solche Folien sind billig und praktisch, absorbieren aber auch einen Teil des Lichts und halten daher keine hohen Leistungen aus.

- Polarisationsstrahlteilerwürfel

In der Laseroptik sind polarisierende Strahlteilerwürfel gängig. Sie bestehen aus zwei zu einem Würfel zusammengefügt Prismen. An der Grenzschicht wird vor dem Zusammenkleben ein spezielles dielektrisches Schichtensystem aufgedampft. Durch Vielstrahlinterferenz erreicht man stark unterschiedliche Transmission und Reflektion für die beiden Polarisationskomponenten (siehe Fresnellsche Gleichungen weiter unten).

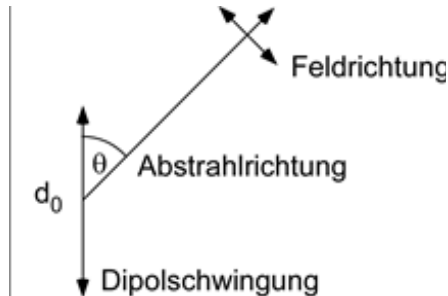


- Polarisation durch Streuung an Atomen

Atome können Licht aus einem Lichtstrahl heraus streuen. Laut Lorentz-Modell kann man ein Atom als Hertzchen Dipol beschreiben. Das anregende Feld erzeugt atomare Dipolschwindungen, die wiederum eine ebene Welle bilden, die sich mit der einfallenden Primärwelle überlagert. Streuung in anderer Richtungen entsteht durch Fluktuationen der Atomdichte. Dadurch wird die perfekte Interferenz der Dipole gestört und das in alle Richtungen abgestrahlte Feld der Dipole wird sichtbar. Fluktuationen sind proportional zur Wurzel der Atomzahl  $\sqrt{N}$ . Damit ist auch das gestreute Feld proportional zu  $\sqrt{N}$  und die gestreute Intensität proportional zum Feldquadrat also zur Atomzahl. Man findet daher oft das Bild, dass in einer Wolke von Atomen das von einem Atom gestreute Feld unabhängig von den Feldern der anderen Atome betrachten kann, was natürlich nicht stimmt. Es sind die Fluktuationen, die die Streuung machen. In Glas und anderen transparenten Festkörpern sind die Fluktuationen viel kleiner weshalb sie eben transparent sind. Das gestreute Feld hat nichtsdestotzrotz die Form eines Hertzchen Dipols mit effektiver Dipolamplitude  $d_0$ ,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{k^2 d_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \sin\theta \cdot \hat{e}_\theta.$$

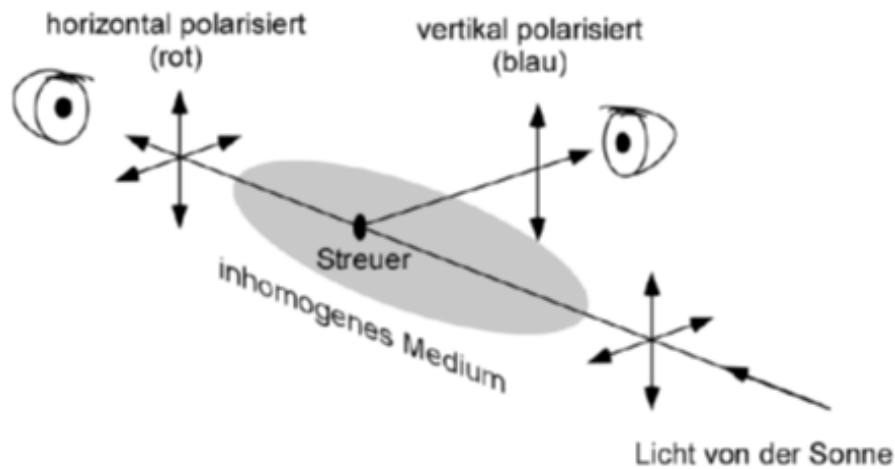
Der Winkel  $\theta$  ist der Polarwinkel und  $\hat{e}_\theta$  der Einheitsvektor entlang  $\theta$ . Er steht also parallel zu den Längengraden auf einer gedachten Kugel um den Dipol herum steht.



Die Intensität der Welle lautet

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 |E|^2 = \frac{c k^4 d_0^2}{32 \pi^2 \epsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

Sie ist stark wellenzahlabhängig,  $I \sim k^4$ . Blaues Licht wird also wesentlich stärker gestreut als rotes, was den Himmel blau erscheinen lässt und die untergehende Sonne rot (weil Rot übrigbleibt). Die Intensität ist richtungsabhängig,  $I \sim \sin^2 \theta$ . Die Streuung wird maximal für  $\theta = 90^\circ$ , d.h. senkrecht zu Richtung der Schwingung (am "Äquator"). Das aus dem Medium rechtwinklig zum Lichtstrahl heraus gestreute Licht ist somit senkrecht zum Lichtstrahl polarisiert. (Experiment mit der Milchwanne)



### 5.3 Photonen

Licht kann man sich als eine Ansammlung von Teilchen vorstellen, den Photonen. Photonen sind nicht geladen und haben keine Masse. Sie tragen aber sowohl Energie als auch Impuls und Drehimpuls. Jede der drei Eigenschaften ist mit einer bestimmten Welleneigenschaft verbunden.

- de Broglie-Beziehungen

Die Energie des Photons ist proportional zur Kreisfrequenz und der Impuls proportional zum Wellenvektor.

$$E = \hbar\omega$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

Die Proportionalitätskonstante ist das Plancksche Wirkungsquantum,

$$\hbar = 1.05457266 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

Die sind die berühmten de Broglie-Beziehungen (sprich Broglie). Sie verknüpfen die charakteristischen Eigenschaften von Wellen mit den charakteristischen Eigenschaften von Teilchen. Die de Broglie-Beziehungen wurden zunächst auf Elektronen bezogen, die dadurch überraschenderweise mit neuartigen, noch unbekanntem Materiewellen in Verbindung gebracht werden konnten. In der Optik waren die Wellen zuerst da. Sie kann man durch die de Broglie Beziehungen mit neuartigen Teilchen in Verbindung bringen, den Photonen.

- Drehimpuls von Photonen

Zirkular links und rechts polarisiertes Licht übertragen entgegengesetzten Drehimpuls. Mit dem elektrischen Feld rotiert die Kraft, die das Licht auf eine Ladung ausübt und treibt die Ladung auf eine Kreisbahn. Die Leistung, die von einem Drehmoment  $T$  auf eine mit  $\omega$  rotierende Ladung übertragen wird ist:

$$P = \omega \cdot T$$

Außerdem gilt allgemein für Drehimpuls  $L$  und Drehmoment  $T$ :

$$\frac{dL}{dt} = T$$

Leistung und Drehimpulsänderung hängen also über  $\omega$  zusammen:

$$P = \omega \cdot \frac{dL}{dt}$$

Wird also in einer Zeit  $dt$  eine Energiemenge

$$dE = \omega \cdot \frac{dL}{dt} dt = \omega \cdot dL$$

aufgenommen, ist damit auch ein Drehimpuls

$$dL = \pm \frac{dE}{\omega}$$

übertragen worden. Das Vorzeichen ist vom Drehsinn abhängig. Da Photonen eine Energie

$$E = \hbar\omega$$

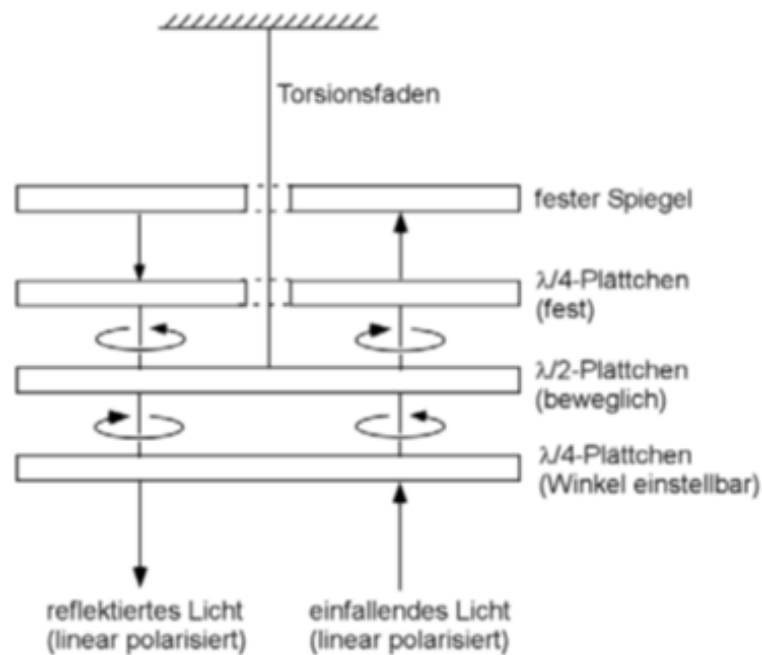
transportieren, tragen sie offenbar auch einen Drehimpuls der Größe

$$L = \pm \hbar$$

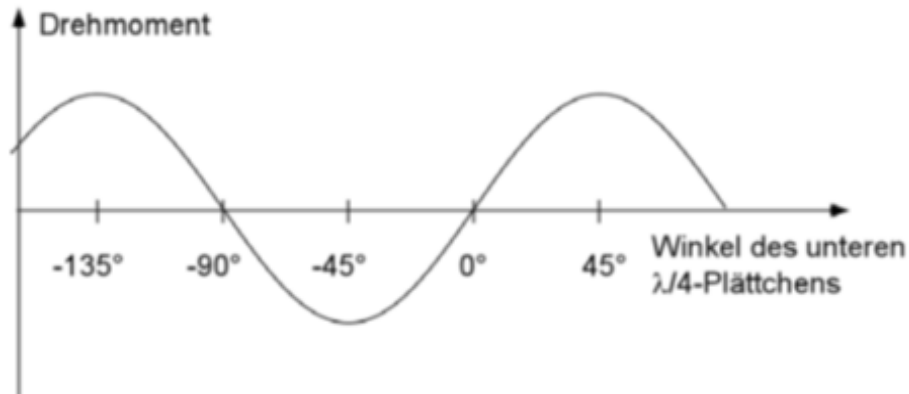
Eine zirkuläre Lichtquelle besteht aus Photonen, von denen jedes einen Drehimpuls  $\hbar$  trägt.

- Experiment von R. Beth(1936)

Den Drehimpuls von Licht kann man mit einer Torsionswaage messen.



Das erste  $\lambda/4$ -Plättchen transformiert das einfallende, linear polarisierte Licht in zirkular polarisiertes Licht. Das an einem Torsionsfaden aufgehängt  $\lambda/2$ -Plättchen invertiert die Rotationsrichtung des Lichts und nimmt dabei pro Photon einen Drehimpuls von  $+2\hbar$  auf. Das Licht durchläuft dann das obere  $\lambda/4$ -Plättchen zweimal, einmal vor und einmal nach der Reflektion am Spiegel. Es wirkt also wie ein  $\lambda/2$ -Plättchen, das die Drehrichtung umkehrt bevor das rücklaufende Licht das bewegliche  $\lambda/2$ -Plättchen zum zweiten Mal durchläuft und wieder eine Drehimpuls von  $+2\hbar$  überträgt. In der Zeit, in der ein Photon die Anordnung durchläuft, überträgt es also einen Drehimpuls von  $+4\hbar$  und damit wirkt bei einem konstanten Photonenfluss ein konstantes Drehmoment auf das Torsionspendel, dessen Auslenkung im Gleichgewicht ein Maß für den Drehimpuls des Lichtfelds ist. Je nach Einstellungswinkel des unteren  $\lambda/4$ -Plättchen ist das Licht danach entweder rechtszirkular oder linkszirkular oder linear polarisiert. Das Pendel schlägt dann entweder in die eine oder die andere Richtung oder gar nicht aus. Das ist es auch was man beobachtet.



Die Größe des Drehmoments entspricht gerade dem von den Photonen übertragenen Drehimpuls wobei sich die Photonenzahl aus der Lichtleistung errechnet, also dem Energiefluss durch die Apparatur.

- Lineares Licht im Photonenbild

Ein linear polarisiertes Photon gehört zu einer linear polarisierten Welle, die eine Superposition aus links und rechtszirkularem Licht ist

$$E_{lin}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_+(t) \hat{e}_+ + E_-(t) \hat{e}_-)$$

wobei sich die Einheitsvektoren des zirkularen Lichts aus den linearen Komponenten zusammensetzen,

$$\hat{e}_\pm = \hat{i} \pm i \cdot \hat{j}$$

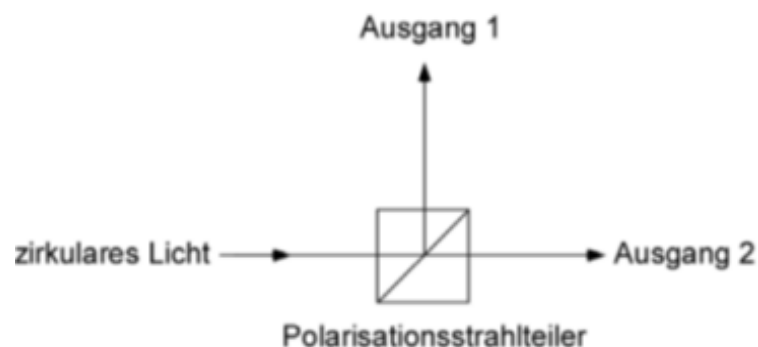
$$\begin{aligned} |E_{lin}(t)|^2 &= \frac{1}{2} |E_+(t)|^2 + \frac{1}{2} |E_-(t)|^2 + \hat{e}_+ \hat{e}_- E_+(t) E_-(t) \\ &= \frac{1}{2} |E_+(t)|^2 + \frac{1}{2} |E_-(t)|^2 \end{aligned}$$

Die Energie eines linearen Photons ist also zu gleichen Teilen auf beide zirkulare Polarisationen aufgeteilt. Der letzte Term in der ersten Zeile verschwindet da  $\hat{i}$  und  $\hat{j}$  und damit auch  $\hat{e}_+$  und  $\hat{e}_-$  orthogonal sind. Ein Photon soll aber ein Elementarteilchen sein und ist damit nicht in ein halbes linkszirkulares und ein halbes rechtszirkulares Photon teilbar. Um hier Welle und Teilchen zusammenzubringen, braucht man eine neue Idee. Sie besteht darin, nicht das Photon zu teilen, sondern die Wahrscheinlichkeit, mit der man das Photon in der einen oder der anderen Polarisation antrifft. Ein linear polarisiertes Photon befindet sich also mit halber Wahrscheinlichkeit im zirkular rechten Zustand und mit halber Wahrscheinlichkeit im zirkular linken Zustand.



- Zirkulares Photon am Strahlteiler

Zum analogen Schluss für zirkulare Photonen kommt man, wenn man folgenden Aufbau betrachtet:



Der Polarisationsstrahlteiler trennt die beiden linearen Polarisierungen, aus denen sich das einfallende zirkulare Licht zusammensetzt in eine vertikal linear polarisierte Komponente und ein horizontal linear polarisierte Komponente auf und verteilt es je nach Polarisationsrichtung auf die beiden Ausgänge. Für einfallendes (zirkulares) Photon gibt es kein Argument, das entscheidet, ob es nach links oder geradeaus gehen soll. Wieder hilft die Einführung einer Wahrscheinlichkeit, die sich dann teilen lässt. Mit halber Wahrscheinlichkeit verlässt das Photon den Strahlteiler entweder am Ausgang 1 oder am Ausgang 2. Bis hierher waren Experimente in der Physik immer streng reproduzierbar und vorbestimmt (determiniert). Dies ist hier nicht mehr der Fall. Hier endet die klassische Physik und die Quantenmechanik beginnt.

## 5.4 Polarisationsabhängige Reflektion: Fresnell-Gleichungen

Die Prinzipien von Fermat und Huygens sind in der Lage die Ausbreitungsrichtung von Licht an einer Grenzfläche zu bestimmen nicht aber die Stärke des transmittierten und reflektierten Lichts. Dazu benötigt man die Wellentheorie des Lichts. Tatsächlich liefern die Maxwellgleichungen nicht nur das Snellius-Gesetz sondern auch die Feldstärken der reflektierten und transmittierten Felder und deren Phasenbeziehungen. Daraus lassen sich dann die Lichtintensitäten berechnen. Wir interpretieren hier die entsprechenden Ausdrücke. Deren Ableitung folgt im Anhang.

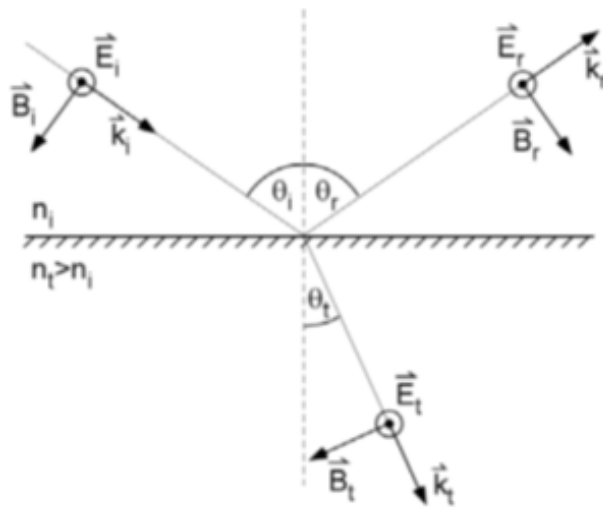
Wir betrachten zunächst nur ein linear polarisiertes Licht also Licht, dessen elektrisches Feld in einer Ebene schwingt und das am optisch dichteren Medium reflektiert wird. Wir müssen zunächst festlegen, wie diese Schwingungsebene relativ zur Grenzfläche orientiert ist. Üblicherweise verwendet man dazu die Einfallsebene, also die Ebene, die durch die  $k$ -Vektoren des einfallenden, des reflektierten und des transmittierten Lichts definiert ist. Man kann zwei Fälle unterscheiden.

- Polarisierung senkrecht zur Einfallsebene

Die Schwingungsebene des E-Feldes liegt parallel zur Grenzschicht und damit senkrecht zur Einfallsebene. Der Reflektionskoeffizient und Transmissionskoeffizient für die elektrische Feldstärke ist dann gegeben durch

$$\frac{E_r}{E_i} = r_{\perp} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$

$$\frac{E_t}{E_i} = t_{\perp} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$$

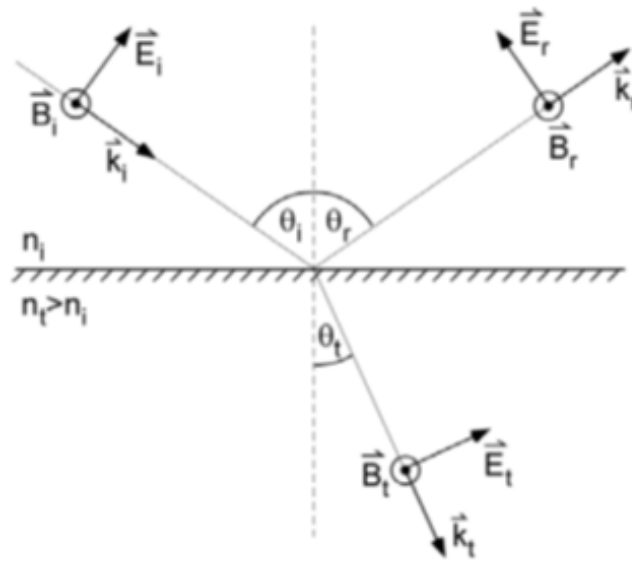


- Polarisierung parallel zur Einfallsebene

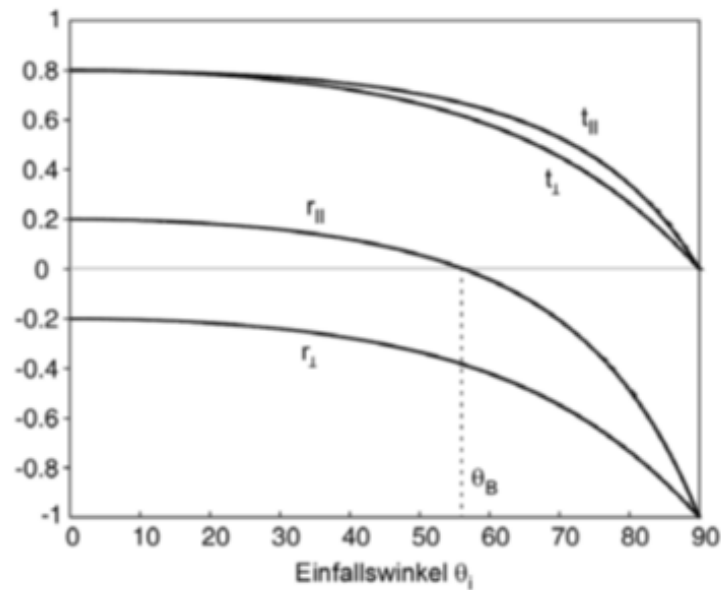
Die Schwingungsebene des E-Feldes liegt senkrecht zur Grenzschicht und damit parallel zur Einfallsebene. Der Reflektionskoeffizient und Transmissionskoeffizient für die elektrische Feldstärke ist dann

$$\frac{E_r}{E_i} = r_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}$$

$$\frac{E_t}{E_i} = t_{\parallel} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}$$



Die Koeffizienten kann man in einem Diagramm zeichnen. Für Glas mit einem Brechungsindex von  $n = 1.5$  sieht das so aus:



Die Transmissionskoeffizienten starten für senkrechten Einfall beim gleichen Wert und sinken dann mit zunehmendem Einfallswinkel um bei  $90^\circ$  zu verschwinden. Die Vorzeichen von  $r_{\perp}$  und  $t_{\perp}$  beziehen sich auf die Orientierungen der Feldvektoren wie in der Zeichnung. Für  $r_{\perp}$  bleibt die Orientierung von  $E_r$  gegenüber  $E_i$  erhalten wohingegen für  $r_{\parallel}$  die Orientierung von  $E_r$  beim Winkel  $\theta_B$  wechselt.

- Senkrechter Einfall

Für senkrechten Einfall auf ein optisch dichteres Medium, also  $n_t > n_i$  und  $\theta_i = \theta_t = 0$  vereinfachen sich die Gleichungen zu

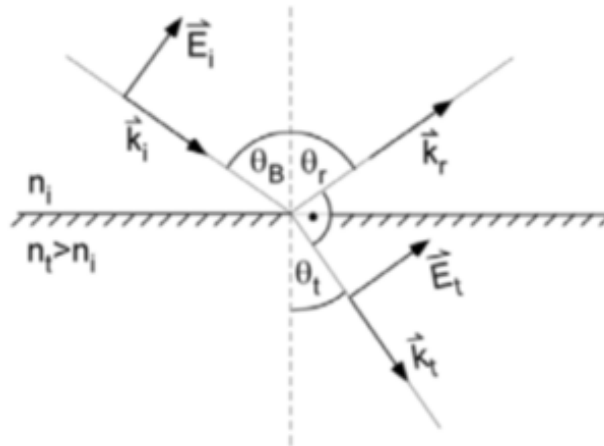
$$r_{\parallel} = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \quad t_{\parallel} = \frac{2n_i}{n_t + n_i}$$

$$r_{\perp} = \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t} \quad t_{\perp} = \frac{2n_i}{n_i + n_t}$$

Bei senkrechtem Einfall macht eine Unterscheidung der beiden Einfallsebenen keinen Sinn, da die Einfallsebene nicht mehr definiert ist. Die Koeffizienten werden daher identisch bis auf das unterschiedliche Vorzeichen zwischen  $r_{\parallel}$  und  $r_{\perp}$ , das durch die Definition der E-Felder in beiden Fällen entsteht (siehe Zeichnung). In beiden Fällen entsteht bei Reflexion am dichten Medium ein Phasensprung von  $\pi$  (Seilanalgie: festes Seilende). Das transmittierte Licht durchläuft die Grenzfläche ohne Phasensprung.

- Brewsterwinkel  $\theta_B$

Interessant ist der Nulldurchgang für  $r_{\parallel}$ . Für Glas mit einem Brechungsindex von  $n = 1.5$  liegt er bei  $56.3^\circ$ . Hier verschwindet die Reflexion völlig, während  $r_{\perp}$  endlich bleibt. Licht mit einer Polarisation parallel zur Einfallsebene kann ohne Verluste in das dichtere Medium übertreten. Im Brewsterwinkel stehen  $\vec{k}_t$  und  $\vec{k}_r$  gerade im rechten Winkel. Das Feld im optisch dichteren Medium  $E_t$  ist daher parallel zu  $\vec{k}_r$ , also der Ausbreitungsrichtung des reflektierten Lichts. Damit schwingt die elektrische Polarisation im Material ebenfalls parallel zu  $\vec{k}_r$  und kann daher in diese Richtung nicht abstrahlen.



Man kann Snellius-Gesetz und Fresnel-Gleichungen kombinieren und erhält

$$\tan(\theta_B) = \frac{n_t}{n_i}$$

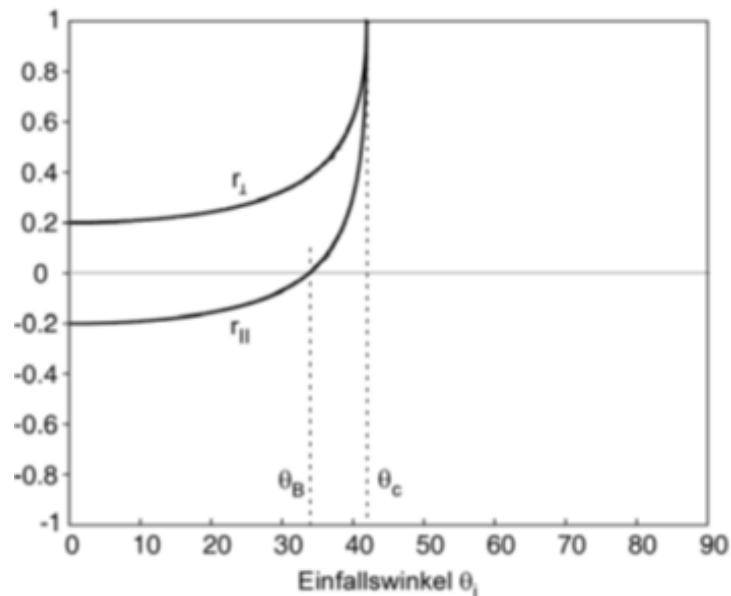
Im Brewsterwinkel einfallendes unpolarisiertes Licht ist nach der Reflexion senkrecht zur Einfallsebene polarisiert.

- Phasensprung und Brewsterwinkel

Dass der Reflektionskoeffizient einen Nulldurchgang machen muss, ergibt sich notwendig auch aus dem Phasensprung bei Reflexion am optisch dichteren Medium: Wenn bei senkrechtem Einfall  $E_i$  und  $E_r$  antiparallel stehen, geht ihr Relativwinkel mit wachsendem Einfallswinkel von  $180^\circ$  nach  $0^\circ$  über, so dass sie bei streifendem Einfall parallel stehen und der Phasensprung verschwunden wäre. Tatsächlich verschwindet das Feld aber, um mit umgekehrten Vorzeichen wieder aufzutauchen. So bleibt der Phasensprung von  $180^\circ$  immer erhalten.

- Reflexion am dünneren Medium

Für  $n_i > n_t$  erhält man die Kurven:



Der Brewsterwinkel  $\theta_B$  ist jetzt kleiner und es taucht bei  $\theta_c$  Totalreflektion auf. Bei diesem Winkel wird  $\theta_t = \pi/2$  und damit

$$r_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_c - n_i \cos \frac{\pi}{2}}{n_t \cos \theta_c + n_i \cos \frac{\pi}{2}} = 1$$

Ebenso wird

$$r_{\perp} = \frac{n_i \cos \theta_c - n_t \cos \frac{\pi}{2}}{n_i \cos \theta_c + n_t \cos \frac{\pi}{2}} = 1$$

Der dazu gehörige Einfallswinkel ergibt sich aus dem Snelliusschen Gesetz für  $\theta_t = \pi/2$ , also

$$\frac{\sin \theta_c}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{n_t}{n_i}$$

was zum Totalreflektionswinkel

$$\sin \theta_c = \frac{n_t}{n_i}$$

- Phase bei Totalreflektion

Für  $\theta_i > \theta_c$  wird der Reflektionskoeffizient eins, es ändert sich jedoch die Phase des reflektierten Lichts. Sie berechnet sich aus den Reflektionskoeffizienten, die oberhalb des kritischen Winkels für Totalreflektion komplex werden: Aus Snellius

$$\sin \theta_i \frac{n_i}{n_t} = \sin \theta_t$$

folgt für  $\theta_i > \theta_c$  dass  $\sin \theta_t > 1$ , was so keinen Sinn macht. Formal kann man aber

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_t + \cos^2 \theta_t &= 1 \\ \sin \theta_t &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta_t} \end{aligned}$$

in die Snellius-Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} \sin \theta_i \frac{n_i}{n_t} &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta_t} \\ \cos \theta_t &= \sqrt{1 - \left(\frac{n_i}{n_t}\right)^2 \sin^2 \theta_i} \\ &= i \sqrt{\left(\frac{n_i}{n_t}\right)^2 \sin^2 \theta_i - 1} \end{aligned}$$

Was man wiederum in die Fresnel-Gleichung einsetzen kann:

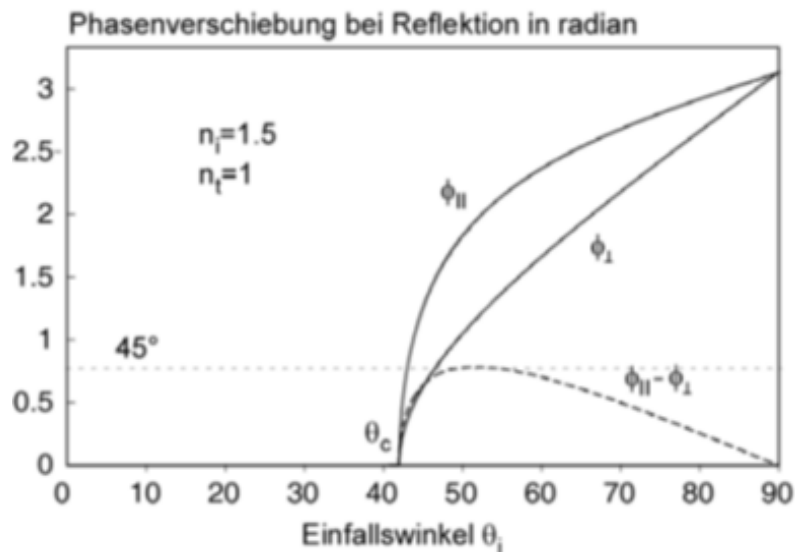
$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= \frac{\cos \theta_i - i \frac{n_i}{n_t} \sqrt{\left(\frac{n_i}{n_t}\right)^2 \sin^2 \theta_i - 1}}{\cos \theta_i + i \frac{n_i}{n_t} \sqrt{\left(\frac{n_i}{n_t}\right)^2 \sin^2 \theta_i - 1}} \\ r_{\perp} &= \frac{\frac{n_i}{n_t} \cos \theta_i - i \sqrt{\left(\frac{n_i}{n_t}\right)^2 \sin^2 \theta_i - 1}}{\frac{n_i}{n_t} \cos \theta_i + i \sqrt{\left(\frac{n_i}{n_t}\right)^2 \sin^2 \theta_i - 1}} \end{aligned}$$

Ein komplexer Reflektionskoeffizient führt zu einer komplexen Amplitude der reflektierten Welle, deren Phasenfaktor eine Phasenverschiebung des Feldes beschreibt.

$$\phi_{\parallel} = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(r_{\parallel})}{\operatorname{Re}(r_{\parallel})}\right)$$

$$\phi_{\perp} = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(r_{\perp})}{\operatorname{Re}(r_{\perp})}\right)$$

Diese Phasen kann man leicht mit dem Rechner plotten:

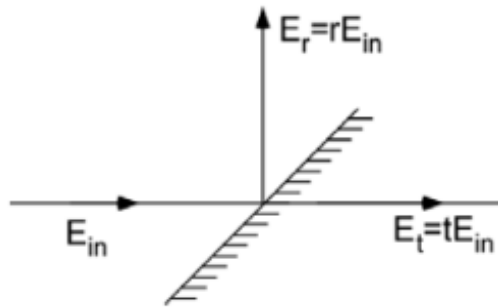


Die Relativphase für Wellen in den beiden Polarisationsrichtungen wächst bei etwa  $50^\circ$  Einfallswinkel auf einen maximalen Wert von  $45^\circ$  an. Damit eignet sich totale interne Reflexion als Phasenverzögerungselement zur Herstellung zirkularer Polarisation.

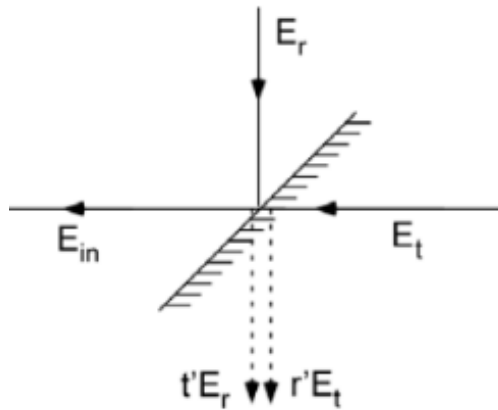
- Phasensprung und Zeitumkehrinvarianz

Der Phasensprung bei Reflexion am optisch dichteren Medium ist prinzipieller Natur und gilt für beliebige Einfallswinkel. Er ist Folge der Zeitumkehrinvarianz. In einfachen Worten kann man diese Forderung so ausdrücken: Filmt man einen physikalischen Vorgang und betrachtet dann den rückwärtslaufenden Film, muss das, was man da sieht immer noch ein physikalisch möglicher Vorgang sein, also den Naturgesetzen gehorchen.

Wir betrachten eine einlaufende Welle, die an einer Grenzschicht reflektiert wird.



Die Pfeile markieren die Ausbreitungsrichtung, die Symbole sind die Feldamplituden. Filmt man den Vorgang und spult den Film rückwärts ab so erhält man zwei einlaufende Wellen, die sich zu einer auslaufenden vereinen.



Gemäß dem Prinzip der Zeitumkehrvarianz muss der rückwärtslaufende Film einen physikalisch möglichen Vorgang zeigen. Wenn also nach unten kein Licht austritt dann müssen sich die Felder, die sich nach unten ausbreiten wegheben:

$$r'E_t = t'E_r = 0$$

Die gestrichenen Größen  $r'$  und  $t'$  beziehen sich auf die Reflektion am optisch dünneren Medium. Da

$$E_r = r \cdot E_{in}$$

und

$$E_t = t \cdot E_{in}$$

folgt

$$\begin{aligned} r' \cdot t \cdot E_{in} + r \cdot t' \cdot E_{in} &= 0 \\ r' \cdot t &= -t \cdot r \end{aligned}$$



Das im rückwärtslaufenden Film nach links austretende Feld setzt sich ebenfalls aus den beiden im rückwärtslaufenden Film einfallenden Feldern zusammen:

$$\begin{aligned} E_{in} &= t' \cdot E_t + r \cdot E_r \\ &= t' \cdot t \cdot E_{in} + r \cdot r \cdot E_{in} \\ t' \cdot t &= 1 - r^2 \end{aligned}$$

Da  $r < 1$ , ist  $t \cdot t'$  positiv und damit auch  $t/t'$ . Wenn wir jetzt noch annehmen, dass  $t$  und  $t'$  vom Betrag her gleich sind, erhält man aus  $r \cdot t/t' = -r$  dass

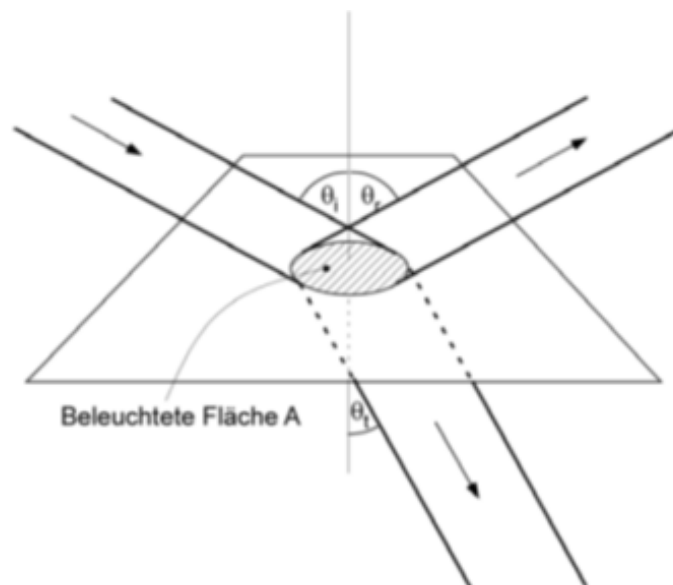
$$r' = -r$$

Dass der Phasensprung bei Reflektion am optisch dichten Medium stattfindet, kann man nicht ableiten sondern lediglich folgern, dass es bei einer der Reflektionen einen Phasensprung geben muss.

## 5.5 Reflexion und Transmission der Intensität

- Leistung und Intensität bei schrägem Einfall

Um die reflektierte und transmittierte Lichtleistung zu bestimmen, müssen wir uns noch über die beteiligten Flächen klar werden. Die Lichtstrahlen treffen schräg auf die Grenzfläche auf. Die Leistung ist die Intensität multipliziert mit der Querschnittsfläche des Strahls die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht.



Die drei Strahlen treffen sich in der Grenzschicht und beleuchten dort eine gemeinsame Fläche  $A$ . Die Querschnittsflächen der einzelnen Strahlen sind um den Kosinus

des betreffenden Winkels kleiner. Für die einfallende, reflektierte und transmittierte Leistung erhält man daher

$$\begin{aligned} P_i &= I_i \cdot A \cdot \cos \theta_i \\ P_r &= I_r \cdot A \cdot \cos \theta_r \\ P_t &= I_t \cdot A \cdot \cos \theta_t \end{aligned}$$

Der "Reflexionsgrad" ist als das Leistungsverhältnis definiert

$$R := \frac{P_r}{P_i} = \frac{I_r \cos \theta_r}{I_i \cos \theta_i} = \frac{I_r}{I_i} = \left( \frac{E_r}{E_i} \right)^2 = r^2$$

Der "Transmissionsgrad" lautet entsprechend

$$T := \frac{P_t}{P_i} = \frac{I_t \cos \theta_t}{I_i \cos \theta_i} = \frac{n_t \cos \theta_t E_t^2}{n_i \cos \theta_i E_i^2} = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} t^2$$

Jetzt gilt auch die Energieerhaltung  $R + T = 1$  (Übung)

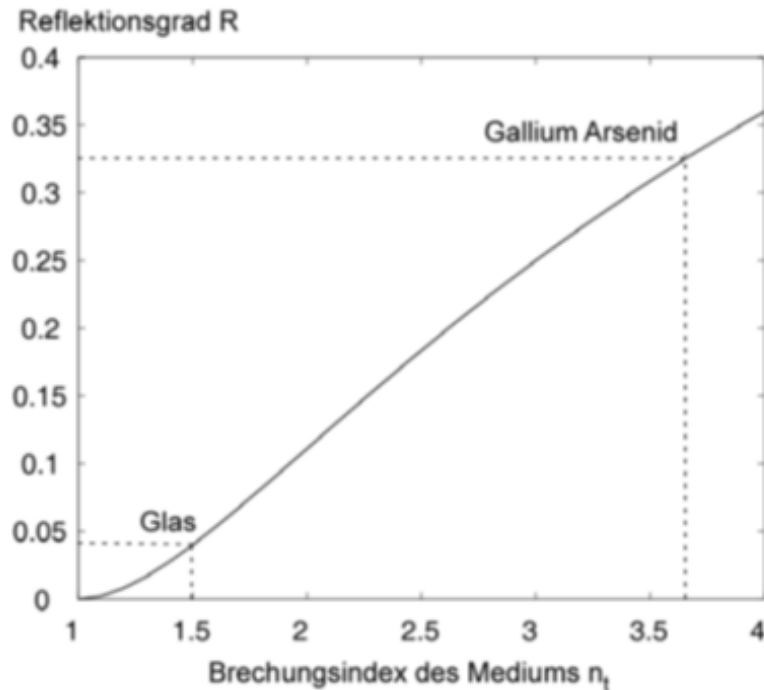
- Senkrechter Einfall.

Für  $\theta_i = \theta_t = \theta_r = 0$  erhält man

$$R = R_{\parallel} = R_{\perp} = \left( \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \right)^2$$

und

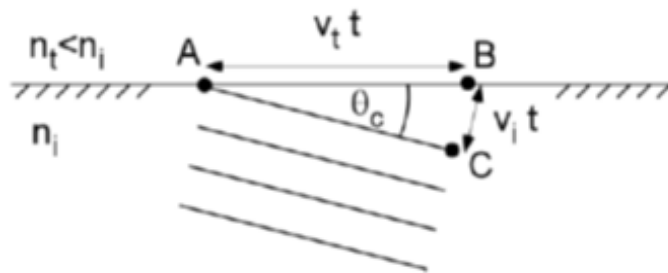
$$T = T_{\parallel} = T_{\perp} = \frac{4n_t n_i}{(n_t + n_i)^2}$$



Glas reflektiert etwa 4%. Galliumarsenid, ein Halbleitermaterial aus dem Laserdioden hergestellt werden, hat einen sehr hohen Brechungsindex von 3.66. Entsprechend hoch ist die Reflexion an der Grenzfläche.

- Evaneszente Wellen

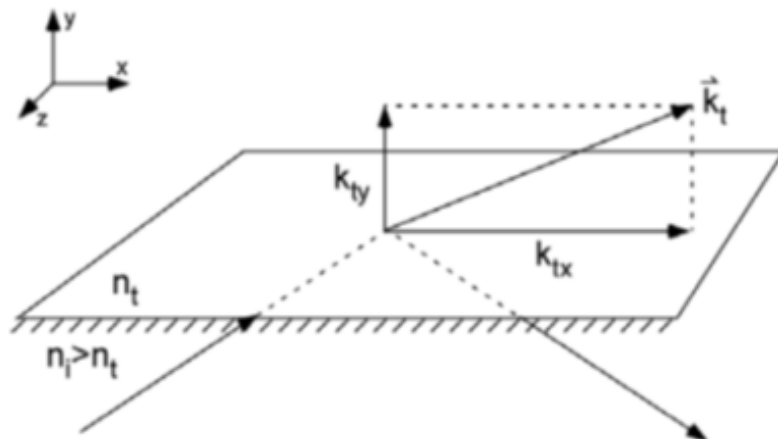
Bei Reflexion am optisch dünneren Medium wird das Licht ab dem kritischen Winkel  $\theta_c$  total reflektiert.



Bei  $\theta_i = \theta_c = \arcsin(n_t/n_i)$  wird die Laufzeit von Punkt A nach Punkt B gerade so groß wie die Laufzeit von Punkt C nach Punkt B, denn

$$\sin \theta_c = \frac{v_i \cdot t}{v_t \cdot t} = \frac{v_i}{v_t} = \frac{n_t}{n_i}.$$

Die in Luft erzeugten Kugelwellen an A und B interferieren also konstruktiv in Richtung entlang der Oberfläche. Es entsteht eine parallel zur Oberfläche laufende Welle, die mit dem Abstand zur Oberfläche schnell abklingen muss, denn in nicht parallele Richtungen ist die Interferenz nicht mehr konstruktiv.



Auch formal erhält man dasselbe Verhalten. Für die transmittierte ebene Welle erhält man

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t0} e^{i(\vec{k}_t \vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_{t0} e^{i(k_{tx}x + k_{ty}y - \omega t)}$$

wobei der Transmissionswinkel  $\theta_t$  mit dem Einfallswinkel  $\theta_i$  durch Snelliussche Gesetz gegeben ist. Man erhält also

$$\begin{aligned} k_{tx} &= k_t \cdot \sin \theta_t = k_t \cdot \frac{n_i}{n_t} \cdot \sin \theta_i = k_t \cdot \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_c} \\ k_{ty} &= k_t \cdot \cos \theta_t = \pm k_t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \pm k_t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{n_i}{n_t} \cdot \sin \theta_i\right)^2} \\ &= \pm k_t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_c}\right)^2} \end{aligned}$$

mit dem kritische Winkel für Totalreflektion

$$\sin \theta_c = \frac{n_t}{n_i}.$$

Oberhalb des kritischen Winkels,  $\theta_i > \theta_c$ , wird die Wurzel negativ:

$$k_{ty} = \pm i k_t \cdot \sqrt{-1 + \left(\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_c}\right)^2} =: \pm i \beta$$

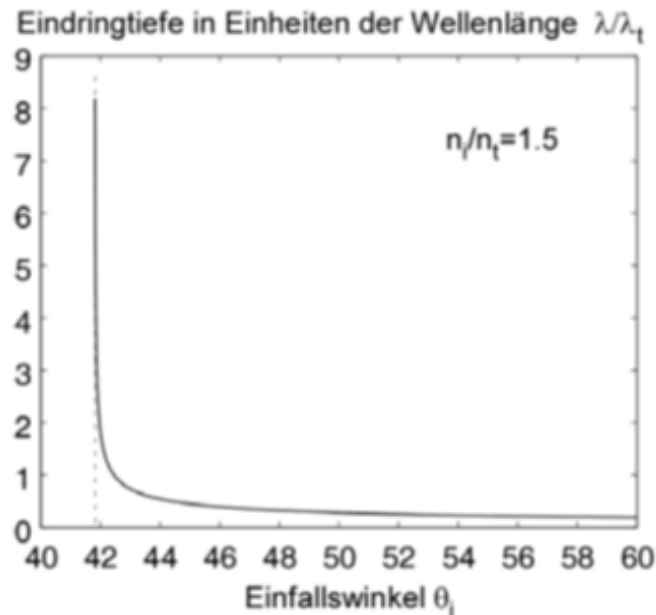
Die transmittierte Welle erhält dann die Form

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t0} \cdot e^{-\beta y} \cdot e^{i\left(k_t \cdot \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_c} x - \omega t\right)}$$

Dies entspricht einer Welle die in x-Richtung entlang der Oberfläche läuft und in y-Richtung exponentiell abklingt. Der exponentiell anwachsende Term (negatives Vorzeichen) ist unphysikalisch und bleibt unberücksichtigt. Die "Eindringtiefe"  $\lambda$  ist

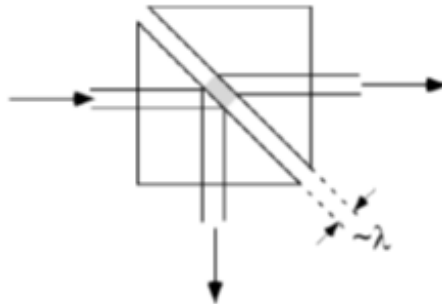
$$\lambda := \frac{1}{\beta} = \frac{1}{k_t \cdot \sqrt{\left(\frac{n_i}{n_t} \cdot \sin \theta_i\right)^2 - 1}}$$

ist genau beim kritischen Winkel unendlich, fällt aber mit wachsendem Einfallswinkel schnell ab.



- Frustrierte Totalreflexion.

Befindet sich innerhalb der Eindringtiefe wieder eine Grenzfläche, so kann die Welle im neuen Medium weiterlaufen. Die Totalreflexion ist "frustriert".



Das Licht tunnelt durch das Hindernis, das der Luftspalt bildet. Dieses Tunneln ist ein ganz allgemeines Wellenphänomen und tritt bei akustischen, seismischen und quantenmechanischen Wellen genauso auf. Anwendungen gibt es in der Geologie und der Tunnelmikroskopie.

- Die wirkliche Welt

Bisher haben wir Licht nur in Medien mit räumlich konstantem Brechungsindex betrachtet oder ebene Grenzflächen zwischen solchen Medien. Die Welt ist natürlich voll von verschiedenen optisch transparenten Medien. Beim Übergang zwischen den Medien macht der Brechungsindex Sprünge aber auch innerhalb eines Medium kann der

Brechungsindex fluktuieren. Dichteschwankungen in Gasen, Einschlüsse oder Störungen des Kristallgitters in Festkörpern, Gemische von Flüssigkeiten wie z.B. Öl und Wasser sind selber schon bereits physikalische Idealisierungen all dessen, was uns umgibt und durch die Wechselwirkung mit Licht sichtbar wird. Regenbogen, Nebel, Dunst, Farbe und Glanz von Oberflächen etc. sind nur einige Beispiele. Dazu kommt die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Richtung des Feldes, die aus der dem Brechungsindex zugrundeliegenden dielektrischen Funktion einen komplexwertigen Tensor macht. Dieser komplexwertige, dielektrische Tensor  $\varepsilon(\omega, \vec{r}, t)$  der wirklichen Welt enthält letztlich alle klassischen optischen Phänomene, vom Kinofilm bis zum Sonnenuntergang. Ihn wenigstens in winzigen Ausschnitten zu untersuchen ist Gegenstand der traditionellen Optik.

- Nichtlineare Optik

Mit Aufkommen des Lasers kann man optische Phänomene bei viel höheren Intensitäten untersuchen als es mit klassischen Lichtquellen möglich war. Es zeigt sich, dass bei hohen Intensitäten der dielektrische Tensor auch von der Intensität, genauer von der Feldstärke der elektromagnetischen Lichtwellen abhängen kann,  $\varepsilon(\omega, \vec{r}, t, \vec{E}(\vec{r}, t))$ . Dies eröffnet das Gebiet der "Nichtlinearen Optik", das zu besprechen hier zu weit führt. Es sei nur erwähnt, dass sich dann auch die Frequenz des Lichtfeldes ändern kann. Man kann z.B. mit geeigneten Kristallen die Frequenz eines Laserstrahl verdoppeln, also infrarotes Licht in blaues Licht verwandeln. Ähnlich können Frequenzen auch addiert oder subtrahiert werden. Heute werden diese Methoden routinemäßig verwendet um starke Laserstrahlen im grünen, blauen oder sogar ultravioletten Spektralbereich zu erzeugen.

## Anhang: Herleitung der Fresnelschen Gleichungen

- Stetigkeit der elektrischen und magnetischen Felder

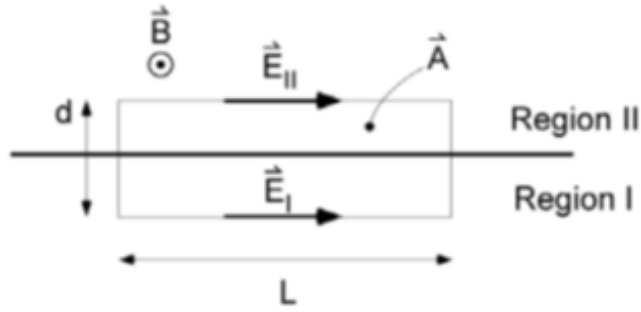
Die Tangentialkomponente von E ist an einer Grenzfläche stetig d. h. auf beiden Seiten der Grenzfläche gleich. Das erkennt man durch Verwendung der Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d}{dt}\vec{B}$$

der Form nach Anwendung des Stockesschen Satzes

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = - \int \frac{d}{dt}\vec{B} d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{A}$$

Den Weg des Ringintegrals wählt man so:



Für das Wegintegral auf der linken Seite erhält man

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = LE_I - LE_{II}.$$

$E_I$  bzw.  $E_{II}$  sind die tangentialen Komponenten von  $\vec{E}$  an der Grenzfläche zwischen Region I und II. Für den Grenzwert  $d \rightarrow 0$  verschwindet die Fläche  $A$  und damit das Integral über  $\vec{B}d\vec{A}$  auf der rechten Seite. Beides einsetzen in die Maxwellgleichung ergibt

$$\begin{aligned} LE_I - LE_{II} &= 0 \\ E_I &= E_{II}. \end{aligned}$$

Ganz analog folgt aus der Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -\frac{d}{dt} \vec{D}$$

dass auch die Tangentialkomponenten des Magnetfeldes  $H$  stetig sind,

$$H_I = H_{II}.$$

Da optische Materialien nicht diamagnetisch sind, ist die Permeabilität in beiden Regionen gleich,  $\mu = 1$ , wodurch auch die Tangentialkomponenten der B-Felder stetig sind,

$$B_I = B_{II}.$$

Für die bei der Brechung beteiligten Wellen machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= \vec{E}_{i0} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega_i t) \\ \vec{E}_r &= \vec{E}_{r0} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega_r t + \varphi_r) \\ \vec{E}_t &= \vec{E}_{t0} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega_t t + \varphi_t). \end{aligned}$$

Die möglichen Phasenverschiebungen des reflektierten und transmittierten Lichts  $\varphi_r$  und  $\varphi_t$  sind relativ zum einfallenden Licht definiert. Die Stetigkeitsbedingung für die Tangentialkomponente kann man unter Verwendung des Einheitsvektor  $\hat{U}$  senkrecht zur Grenzfläche formulieren. Dazu bildet man den Vektor  $\hat{U} \times \vec{E}$  der in der Grenzfläche liegt, senkrecht zum Feld steht und dessen Länge dem Betrag der Tangentialkomponente entspricht. Die Stetigkeitsbedingung lautet dann

$$\hat{U} \times \vec{E}_i + \hat{U} \times \vec{E}_r = \hat{U} \times \vec{E}_t$$

$$\hat{U} \times \vec{E}_{i0} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega_i t) + \hat{U} \times \vec{E}_{r0} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega_r t + \varphi_r) = \hat{U} \times \vec{E}_{t0} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega_t t + \varphi_t)$$

Diese Bedingung muss für alle Orte  $\vec{r}$  an der Oberfläche und alle Zeiten  $t$  gelten.

- Bedingung für die Phasen, Snellius-Gesetz

Um die Grenzbedingung zu erfüllen, müssen zunächst die Argumente der Kosinus-Funktionen gleich sein. Für beliebige Zeiten klappt das nur, wenn die Frequenzen alle gleich sind, also:

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t$$

Bei der Brechung wird die Frequenz des Lichtfeldes nicht verändert. Desweiteren müssen die Ortphasen in der Grenzschicht gleich sein. Insbesondere gilt für die einfallende und die reflektierte Welle

$$\vec{k}_i \vec{r} = \vec{k}_r \vec{r} + \varphi_r$$

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \vec{r} = \varphi_r$$

Da  $\vec{r}$  auf einen Punkt in der Grenzschicht deutet, ist dies nur erfüllt, wenn der Vektor  $\vec{k}_i - \vec{k}_r$  senkrecht zur Grenzschicht steht, denn, wie bei der Diskussion der Wellenfronten bei ebenen Wellen, liegen Orte, die die Bedingung  $(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \vec{r} = \text{konstant}$  erfüllen, in einer Ebene senkrecht zum Vektor  $(\vec{k}_i - \vec{k}_r)$ . Damit ist  $(\vec{k}_i - \vec{k}_r)$  parallel zu  $\hat{U}$  und

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \times \hat{U} = 0$$

$$\vec{k}_i \times \hat{U} = \vec{k}_r \times \hat{U}$$

Für die Beträge der beiden Vektoren erhält man

$$|\vec{k}_i| \sin \theta_i = |\vec{k}_r| \sin \theta_r$$

und da

$$|\vec{k}_i| = |\vec{k}_r|$$

folgt

$$\theta_i = \theta_r$$



Man erhält das Reflexionsgesetz.

Fordert man Gleichheit für die Phasen der einfallenden und der transmittierten Welle, erhält man analog, dass

$$\left| \vec{k}_i \right| \sin \theta_i = \left| \vec{k}_t \right| \sin \theta_t$$

Da jetzt

$$\begin{aligned} \left| \vec{k}_i \right| &= n_i \cdot \omega / c \\ \left| \vec{k}_t \right| &= n_t \cdot \omega / c \end{aligned}$$

ergibt sich jetzt das Snellius-Gesetz

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t.$$

- Bedingungen für die Amplituden für  $\vec{E}$  senkrecht zur Einfallsebene

Neben den Phasen müssen auch die Amplituden an der Grenzfläche stimmen. Hier betrachten wir als erstes den Fall mit  $\vec{E}$  senkrecht oder parallel zur Einfallsebene. Die E-Felder aller 3 Strahlen stehen dann parallel zur Grenzfläche und müssen daher stetig sein und für die Beträge der Felder gilt:

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}$$

Jetzt kommt außerdem noch die Stetigkeit der B-Felder ins Spiel, die in der Einfallsebene liegen. Die Tangential-Komponenten entstehen durch Projektion auf die Grenzfläche:

$$B_{i0} \cos \theta_i - B_{r0} \cos \theta_r = B_{t0} \cos \theta_t$$

Das negative Vorzeichen ergibt sich aus der Definition der Orientierung von  $\vec{B}_r$  (siehe oben bei Diskussion der Fresnell-Gleichungen). Wir verwenden den Zusammenhang zwischen  $E$  und  $B$  für ebene Wellen in Materie

$$\begin{aligned} E_{i0} &= \frac{c}{n_i} B_{i0} \\ E_{r0} &= \frac{c}{n_i} B_{r0} \\ E_{t0} &= \frac{c}{n_t} B_{t0} \end{aligned}$$

sowie das Reflexionsgesetz  $\theta_i = \theta_r$  und erhalten aus der Stetigkeit des Magnetfeldes die Gleichung

$$n_i E_{i0} \cos \theta_i - n_i E_{r0} \cos \theta_i = n_t E_{t0} \cos \theta_t$$

Die Stetigkeit der E-Felder wird benutzt um  $E_{t0}$  zu eliminieren:

$$n_i \cos \theta_i (E_{i0} - E_{r0}) = n_t (E_{i0} + E_{r0}) \cos \theta_t$$

oder

$$\frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} = r_{\perp}$$

Eliminiert man dagegen  $E_{r0}$  ergibt sich:

$$\frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} = t_{\perp}$$

- Bedingungen für die Amplituden für  $\vec{E}$  parallel zur Einfallsebene

In diesem Fall erzwingt die Stetigkeit der tangentialen Komponente des E-Feldes den Zusammenhang

$$E_{i0} \cos \theta_i - E_{r0} \cos \theta_i = E_{t0} \cos \theta_t$$

und die Stetigkeit der tangentialen Komponente des B-Feldes:

$$B_{i0} + B_{r0} = B_{t0}$$

Wie oben kann man die Magnetfeldamplituden durch die E-Feldamplituden ausdrücken:

$$n_i E_{i0} + n_i E_{r0} = n_t E_{t0}$$

Eliminieren von  $E_{t0}$  ergibt:

$$E_{i0} \cos \theta_i - E_{r0} \cos \theta_i = \frac{1}{n_t} (n_i E_{i0} + n_i E_{r0}) \cos \theta_t$$

$$\frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t} = r_{\parallel}$$

Entsprechend führt Eliminieren von  $E_{r0}$  zu

$$\frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} = t_{\parallel}$$

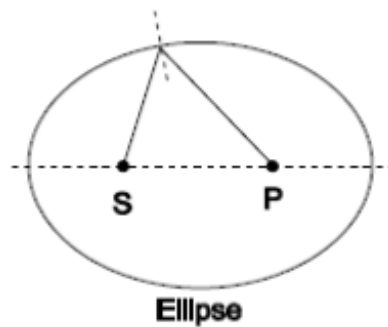
## 6. Geometrisch Optik: Spiegel, Linsen und Abbildungen

Gekrümmte Grenzflächen können Licht eines Objekts sammeln und an einem anderen Ort schicken. Unter bestimmten Umständen baut sich dort ein Abbild des Objekts auf. Auf diesem Phänomen beruhen Kameras, Teleskope und Projektoren. Die prinzipielle Funktionsweise solcher optischer Instrumente lässt sich oft bereits im Rahmen der geometrischen Optik erstaunlich gut verstehen. Die Entwicklung moderner optischer Geräte basieren heutzutage allerdings meist auf numerischen Simulationen der Maxwell-Gleichungen. Die geometrische Optik verliert daher zunehmend an technischer Bedeutung ist aber immer noch sehr nützlich für eine erste semiquantitative Analyse eines optischen Instruments. Die geometrische Optik ist aber vor allem ein einfaches Spielfeld um physikalisch-analytisches Denken zu üben und daher geeignet für eine einführende Vorlesung in den ersten Semestern. Wir diskutieren hier nur einige wesentlichen Aspekte. Eine ausführlichere Darstellung der geometrischen Optik findet sich im Buch von E. Hecht: "Optik", Oldenbourg.

## 6.1 Abbildung von Punkten

- Abbildung

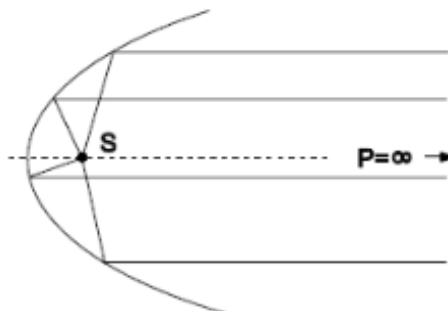
Für Anwendungen wichtig ist der Begriff der Abbildung, den wir hier zunächst einmal nur für einzelne Punkte einführen: Werden alle Lichtstrahlen, die von einem Punkt ausgehen an einem anderen Punkt wieder zusammengeführt, hat man den ersten auf den zweiten Punkt abgebildet. Beispielsweise werden die beiden Brennpunkte eines Ellipsoids aufeinander abgebildet.



Eine Ellipse entsteht durch Verwendung eines Fadens, den man locker zwischen S und P einspannt und als Zirkel verwendet. Der Weg von Punkt S nach Punkt P über einen beliebigen Punkt der Ellipse ist also eine Konstante. Alle diese Wege sind also gleich schnell und werden daher gemäß des Fermatschen Prinzips vom Licht durchlaufen. (Ellipsenzirkel)

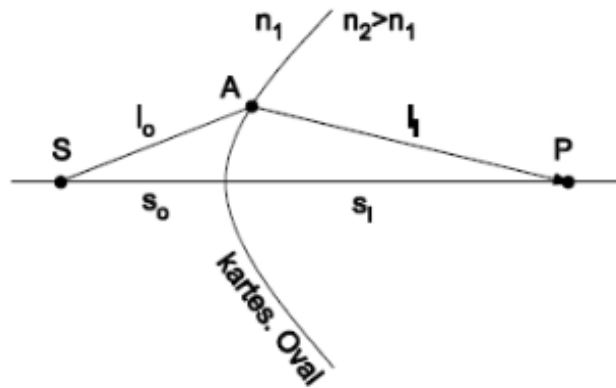
- Parabolscheinwerfer

Schiebt man den Punkt P nach unendlich, erhält man einen Parabolscheinwerfer:



- Abbildung durch Brechung

Mit einer gekrümmten Grenzfläche erreicht man ebenfalls eine Abbildung.



Damit die Grenzfläche eine Abbildung erzeugt, muss der optische Weg  $SAP$  für beliebige Punkte  $A$  gleich sein, insbesondere so lang wie der optische Weg zwischen  $S$  und  $P$  entlang der optischen Achse, also:

$$l_o n_1 + l_i n_2 = s_o n_1 + s_i n_2$$

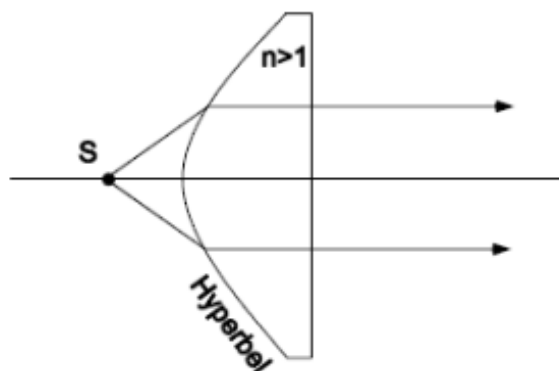
(Die Indizes "o" und "i" stehen für "object" und "image"). Die rechte Seite ist unabhängig von der Lage von  $A$  und somit konstant. Man erhält so die Definitionsgleichung für ein Kartesisches Oval (Rene Descartes, 1596-1650, 32 Jahre jünger als Galilei):

$$l_o n_1 + l_i n_2 = \text{konstant}$$

(Laptop: Ellipsenkonstruktion für Kartesisches Oval)

- Hyperbolische Plankonvexlinse

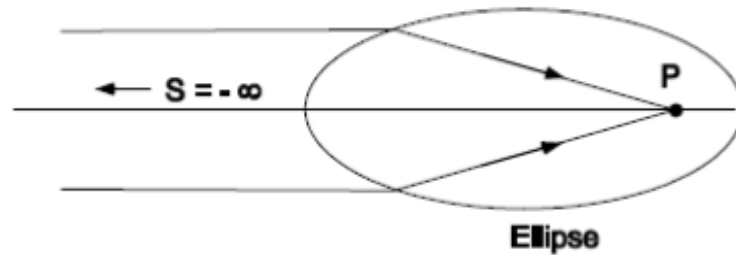
Schiebt man  $P$  nach unendlich, so werden die Strahlen, die von  $S$  kommen kollimiert, d.h. parallelisiert.



Das kartesische Oval wird zur Hyperbel (hier ohne Ableitung). Aus der planen Rückseite treten die Strahlen ohne Brechung aus.

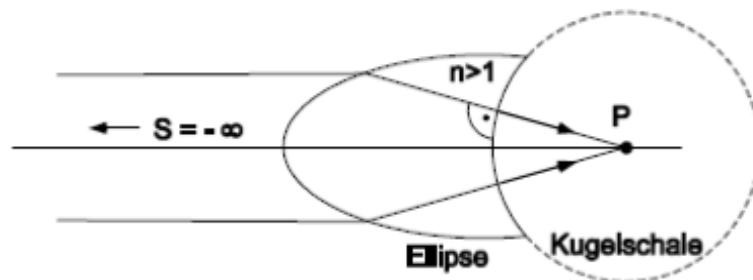
- Brechende Ellipse

Schiebt man den Punkt  $S$  des kartesischen Ovals nach  $-\infty$ , so erhält man eine Ellipse (hier ohne Ableitung).



- Konkav-Konvexlinse

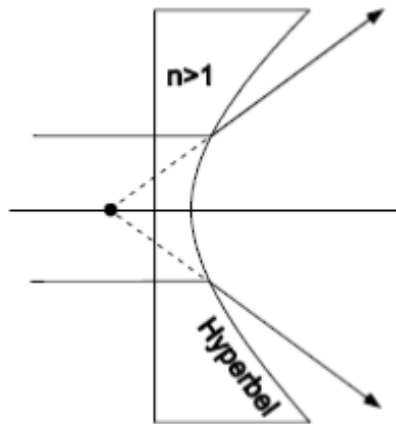
Soll der Punkt  $P$  im selben Medium liegen wie der Startpunkt  $S$ , so kann man einen Teil der Ellipse kugelförmig wegschneiden:



Die Kugelschale lässt die von  $P$  kommenden Strahlen ungebrochen.

- Streulinsen

Analoges gilt für Streulinsen, z. B. hyperbolische Plankonkavlinse



## 6.2 Linsen

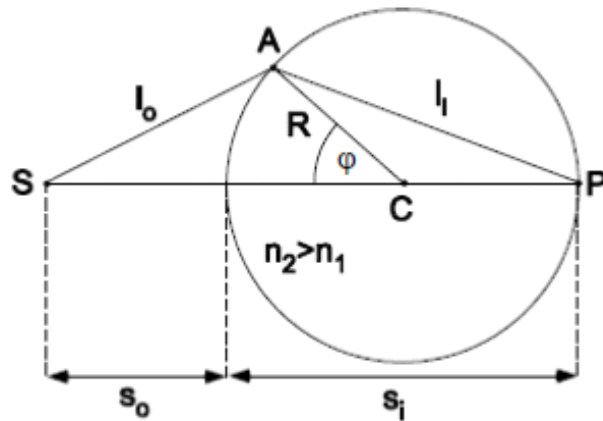
Technisch ist es nicht einfach elliptische oder hyperbolische Grenzflächen herzustellen. Kugelförmig gekrümmte Flächen kann man dagegen mit großer Genauigkeit schleifen und polieren. Das war zumindest in der Vergangenheit so. Heute kann man auch sehr gute Kunststofflinsen pressen. Die Pressform darf dann auch kompliziert und teuer sein. Bestform-Linsen werden dadurch kommerziell sinnvoll und können für spezielle Anwendungen mit dem Computer optimiert werden. Trotzdem werden gerade auch in der Laseroptik immer noch Glaslinsen verwendet, die bessere Oberflächen haben und größere Leistungen vertragen. Solche Linsen haben in der Regel kugelförmige Oberflächen. Es stellt sich also die Frage in wie weit sich solche Grenzflächen für eine Abbildung eignen.

- Brechende Kugel

Oben haben wir gesehen, dass eine Ellipse eine Abbildung liefert. Eine Kugel ist nur näherungsweise eine Ellipse und kann daher nur näherungsweise eine Abbildung erzeugen. Tatsächlich werden nur achsnahe Strahlen abgebildet also solche für die die Ellipsenoberfläche näherungsweise eine Kugelschale ist.

- Abbildungsgleichung

Um einen Ausdruck für die Objektweite und Abbildungsweite zu erhalten benutzen wir das Fermatsche Prinzip. Man muss überprüfen, ob es ein Objektweite  $s$  und eine Bildweite  $s_i$  gibt, so dass alle Strahlen, die von  $S$  ausgehen auch an  $P$  ankommen. Dafür müssen alle Wege  $SAP$ , zumindest näherungsweise optisch gleich lang sein.

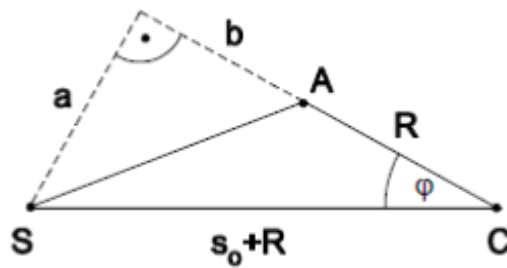


Die optische Weglänge ist

$$L_{opt} = l_o n_1 + l_i n_2 = s_o n_1 + s_i n_2$$

- Berechnen von  $l_o$

Wir betrachten die Objektseite noch mal genauer und erweitern das Dreieck  $SCA$  zu einem rechtwinkligen Dreieck.



Man erhält für die Länge  $b$

$$\frac{b + R}{s_o + R} = \cos \varphi$$

$$b = \cos \varphi \cdot (s_o + R) - R$$

und für  $a$

$$\frac{a}{s_o + R} = \sin \varphi$$

$$a = \sin \varphi \cdot (s_o + R)$$

Die Länge  $l_o = SA$  ergibt sich dann aus dem Pythagoras

$$l_o^2 = a^2 + b^2 = \sin^2 \varphi \cdot (s_o + R)^2 + (\cos \varphi \cdot (s_o + R) - R)^2$$

$$l_o = \sqrt{(s_o + R)^2 + R^2 - 2R(s_o + R) \cos \varphi}$$

Berechnen von  $l_i$  geht völlig analog,

$$l_i = \sqrt{(s_i - R)^2 + R^2 + 2R(s_i - R) \cos \varphi}$$

Das Fermatsches Prinzip verlangt, dass der optische Weg minimal ist, also dass:

$$\frac{dL_{opt}}{d\varphi} = n_1 \frac{dl_o}{d\varphi} + n_2 \frac{dl_i}{d\varphi} = 0$$

wir brauchen also die Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{dl_o}{d\varphi} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(s_o + R)^2 + R^2 - 2R(s_o + R) \cos \varphi}} 2R(s_o + R) \sin \varphi \\ &= \frac{R(s_o + R)}{l_o} \sin \varphi \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\frac{dl_i}{d\varphi} = -\frac{R(s_i - R)}{l_i} \sin \varphi$$

Damit erhält man insgesamt

$$\begin{aligned} \frac{dL_{opt}}{d\varphi} &= n_1 \frac{R(s_o + R)}{l_o} \sin \varphi - n_2 \frac{R(s_i - R)}{l_i} \sin \varphi = 0 \\ \frac{n_1(s_o + R)}{l_o} - \frac{n_2(s_i - R)}{l_i} &= 0 \end{aligned}$$

- Näherung achsnaher Strahlen (Paraxiale Näherung)

Für achsnahe Strahlen ist

$$\begin{aligned} l_o &\simeq s_o \\ l_i &\simeq s_i \end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\frac{n_1(s_o + R)}{s_o} - \frac{n_2(s_i - R)}{s_i} = 0$$

oder

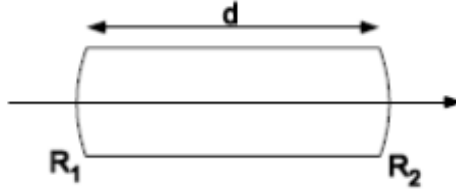
$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Genügen die Objektweite  $s_o$  und die Bildweite  $s_i$  dieser Gleichung, ist die optische Weglänge für alle achsnahen Strahlen zwischen  $S$  und  $P$  gleich lang und man erhält eine Abbildung.



- Linse

Kombiniert man zwei kugelförmige Grenzflächen erhält man die traditionelle Linse.



Für die erste Grenzfläche gilt:

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_{i1}} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$$

Für die zweite Grenzfläche beträgt die Objektweite  $-s_{i1} + d$ . Das negative Vorzeichen kommt daher, dass das Bild links von der ersten Fläche liegt. Daher ist  $s_{i1} < 0$ , was durch das negative Vorzeichen kompensiert wird. Berücksichtigt man außerdem das umgekehrte Vorzeichen des Radius erhält man für die zweite Grenzfläche

$$\frac{n_2}{d - s_{i1}} + \frac{n_1}{s_{i2}} = \frac{n_1 - n_2}{R_2}$$

Betrachtet man die Summe der Gleichungen für die beiden Grenzflächen, erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_{i1}} + \frac{n_2}{d - s_{i1}} + \frac{n_1}{s_{i2}} &= \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_1 - n_2}{R_2} \\ \frac{n_1}{s_o} + \frac{n_1}{s_{i2}} &= \frac{n_2}{-d + s_{i1}} - \frac{n_2}{s_{i1}} + \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_1 - n_2}{R_2} \\ \frac{n_1}{s_o} + \frac{n_1}{s_{i2}} &= \frac{n_2 d}{(s_{i1} - d) s_{i1}} + (n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

- Dünne Linsen

Dieser Ausdruck wird durch die wichtige Näherung dünner Linsen stark vereinfacht. Für  $d$  gegen Null und in Vakuum mit  $n_1 = 1$  und  $n_2 = n$  erhält man die so genannte Linsenmachergleichung:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_{i2}} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Sie verbindet Objektweite und Bildweite auf der linken Seite mit den Eigenschaften der Linse auf der rechten Seite.

- Brennpunkt und Brennweite

Wir führen noch den Begriff der Brennweite ein. Die Brennweite  $f$  ist die Abkürzung für die rechte Seite der Gleichung

$$\frac{1}{f} := (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

wodurch man die Linsengleichung schreiben kann als:

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}$$

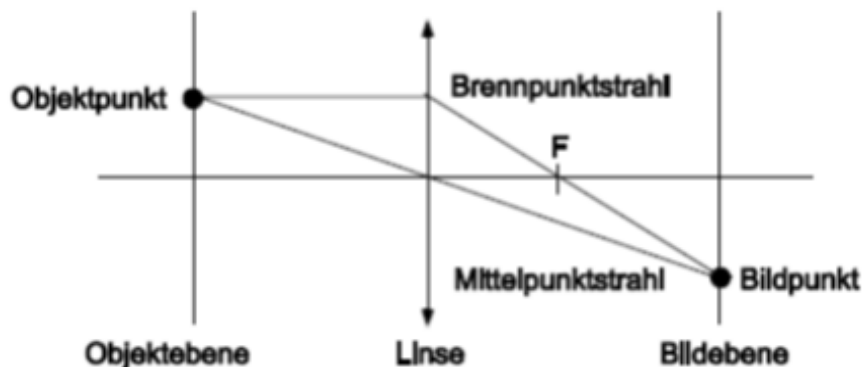
Die anschauliche Bedeutung für die Brennweite ergibt sich, wenn man den Objektpunkt  $S$  nach unendlich schiebt also  $s_o$  unendlich groß wird.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\infty} + \frac{1}{s_i} &= \frac{1}{f} \\ s_i &= f \end{aligned}$$

Die aus dem Unendlichen kommenden Strahlen sind offensichtlich parallel. Solche parallelen Strahlen werden gemäß der Linsenmachergleichung im so Brennpunkt  $F$  gebündelt, der im Abstand der Brennweite  $f$  von der Linse entfernt liegt. (Demonstration mit dem Plexiglasmodell)

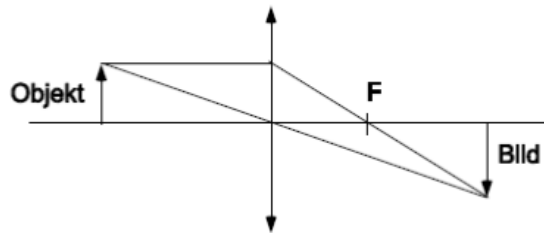
### 6.3 Abbildung von Objekten in paraxialer Näherung

Bisher haben wir nur einen Objektpunkt  $S$  auf der optischen Achse auf den Bildpunkt  $P$  abgebildet. Es werden aber auch die Nachbarpunkte von  $S$  abgebildet sofern die Punkt in einer Objektebene senkrecht zur optischen Achse liegen. Sie bilden dann Bildpunkte in der Bildebene, die in der Nähe von  $P$  liegen. Es entsteht so ein Bild des Objekts. Das Abbild ist in der Regel nicht perfekt sondern durch Abbildungsfehler verzerrt. Die Kunst bei der Konstruktion guter abbildender Linsensysteme besteht darin solche Fehler möglichst zu minimieren.



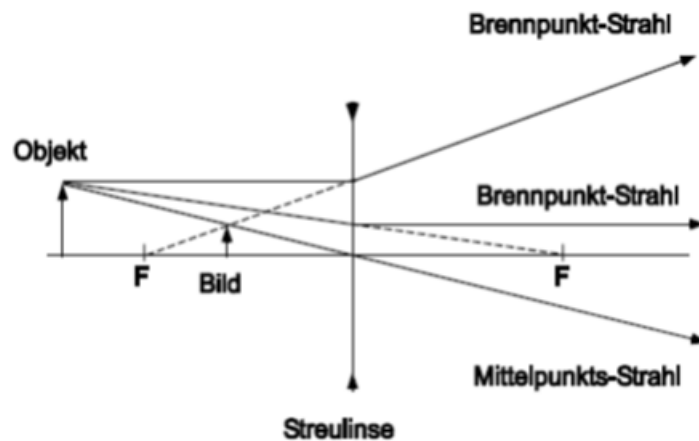
- Konstruktion von Bildern

Die Größe und Lage des Abbilds lässt sich geometrisch konstruieren. Zunächst legt man die optische Achse fest, die sich aus der Rotationssymmetrie der Linse ergibt. Ein Objektpunkt, der auf der optischen Achse liegt wird auf einen Bildpunkt abgebildet, der ebenfalls auf der optischen Achse liegt. Um eine Vorstellung von der Abbildung zu bekommen wählt man daher ein aussagekräftiges Objekt, z. B. einen Pfeil, der auf der optischen Achse steht. Um dessen Bild zu konstruieren muss man jetzt nur noch wissen, wo sich die Lichtstrahlen bündeln, die von der Pfeilspitze ausgehen. Man kennt aber den Verlauf von mindesten zwei dieser Strahlen. Der eine ist der so genannte Mittelpunktstrahl, der durch das Zentrum der Linse geht. An den Schnittpunkten der beiden Linsenoberflächen mit der optischen Achse sind die zwei planen Tangentialflächen, die sich an die gekrümmten Oberflächen anschmiegen, gerade parallel. Der Mittelpunktstrahl "sieht" also näherungsweise eine planparallele Glasscheibe und wird daher nicht abgelenkt. In der Näherung dünner Linsen geht er ohne Versatz ungebrochen durch die Linse. Der zweite Pfeil ist der Brennpunktstrahl. Objektseitig verläuft er parallel zur optischen Achse und wird daher von der Linse in den Brennpunkt gebrochen. Dort wo sich Mittelpunkt- und Brennstrahl treffen muss das Abbild der Pfeilspitze entstehen. Dort liegt also auch die Bildebene und an deren Schnittpunkt mit der optischen Achse auch der Pfeilanzfang. Eine Linse erzeugt ein an der optischen Achse punktgespiegeltes Abbild.

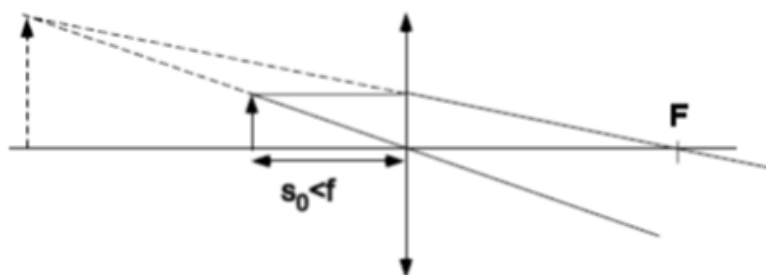


- Virtuelle Bilder

Neben Sammellinsen gibt es auch Streulinsen mit konkaven Krümmungen. Sie erzeugen so genannte virtuelle Bilder. Die Strahlen, die von einem Objektpunkt ausgehen, scheinen auf der Bildseite alle von einem bestimmten Bildpunkt auszugehen, der ebenfalls auf der Objektseite der Linse liegt. Anders als bei der Sammellinse entsteht kein reelles Bild, das auf einem Schirm sichtbar wäre, sondern ein scheinbares Objekt, deren Lage und Größe durch die Linse gegenüber dem Original verändert wird. Wieder lässt sich das Bild geometrisch unter Zuhilfenahme von Brenn- und Mittelpunktstrahlen konstruieren. Den Brennpunkt einer Streulinse erhält man wieder aus dem Verhalten von Strahlen, die parallel zur optischen Achse einfallen. Sie werden von der optischen Achse weg gebrochen, können aber rückwärtig verlängert werden. Der Schnittpunkt dieser Verlängerung mit der optischen Achse ist der Brennpunkt.



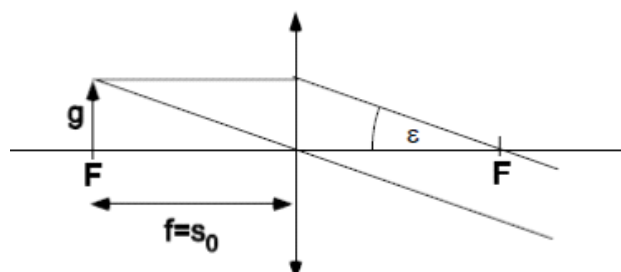
Virtuelle Bilder erhält man auch mit Sammellinsen, wenn das Objekt innerhalb der Brennweite liegt also  $s_o < f$ .



Je näher  $s_o$  an  $f$  herankommt, umso weiter wird das Bild nach links geschoben.

- Objekt in der Brennebene

Für  $s_o = f$  wandert das Bild nach unendlich aus. Es gibt keinen rückwärtigen Schnittpunkt der Strahlen mehr. Alle Strahlen eines Punktes  $S$  werden parallelisiert.



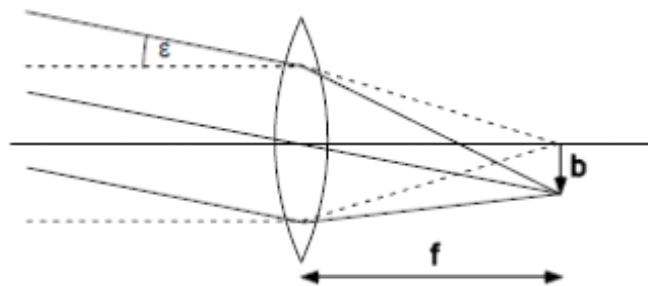
Durchläuft man die Strahlen in umgekehrter Richtung erkennt man, dass parallel einfallende Strahlen in einem Punkt der Brennebene gebündelt werden. Betrachtet man das rechtwinklige Dreieck links von der Linse so erkennt man, dass der Winkel  $\varepsilon$  durch die Länge  $g$  des Pfeils und die Brennweite  $f$  gegeben ist:

$$\tan \varepsilon = \frac{g}{f}.$$

Diesen Zusammenhang benötigen wir gleich für die Beschreibung der Lupe.

- Objekt im Unendlichen

Umgekehrt kann man das Objekt auch ins Unendliche schieben. Je entfernter das Objekt ist, umso parallel treffen dessen Strahlen auf der Linse auf. Die Position der Objektpunkte macht sich im Winkel  $\varepsilon$  bemerkbar. Die Strahlen der Pfeilspitze treffen unter einem anderen Winkel auf der Linse auf wie die Strahlen des Pfeilfußes. Die Größe des Objekts (z. B. Länge des Pfeils) wird durch den Winkel gegeben, unter dem seine Randstrahlen auftreffen. Das erkennt man, wenn man das unendlich weit entfernte Objekt abbildet. Die gestrichelten Linien kommen vom Pfeilfuß, die durchgezogenen von der Pfeilspitze. Je größer der Winkel  $\varepsilon$  umso größer ist auch das Bild  $b$ .



Die Größe des Bildes erhält man aus dem Mittelpunktstrahl:

$$b = f \cdot \tan \varepsilon \simeq f \cdot \varepsilon$$

Die Bildgröße  $b$  und der Winkel  $\varepsilon$  sind also proportional.

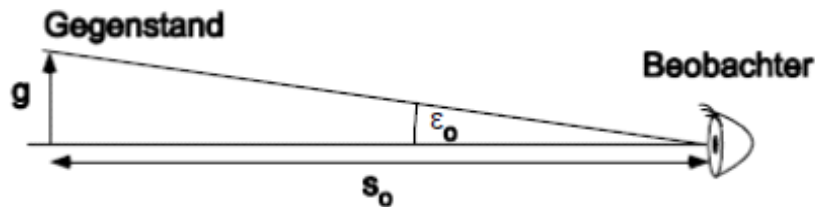
## 6.4 Lupe und Fernrohr

- Lupe

Bei einer Lupe befindet sich der Gegenstand im Brennpunkt einer Sammellinse (siehe oben). Oben haben wir gesehen, dass alle Strahlen, die beispielsweise von einer Pfeilspitze im Abstand  $g$  von der optischen Achse ausgehen, dann hinter der Linse parallel verlaufen und mit der optischen Achse den Winkel  $\varepsilon$  einschließen,

$$\tan \varepsilon = \frac{g}{f}.$$

Das muss man mit dem Winkel vergleichen, den man mit dem unbewaffneten Auge erreicht



wobei  $s_o$  der kleinste Abstand ist, bei dem man ein Objekt mit bloßem Auge gerade noch scharf sieht, also etwa  $s_o = 15 \text{ cm}$ . Die Vergrößerung der Lupe ist also durch das Winkelverhältnis gegeben:

$$V := \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} \simeq \frac{\tan \varepsilon}{\tan \varepsilon_o} = \frac{g/f}{g/s_o} = \frac{s_o}{f}$$

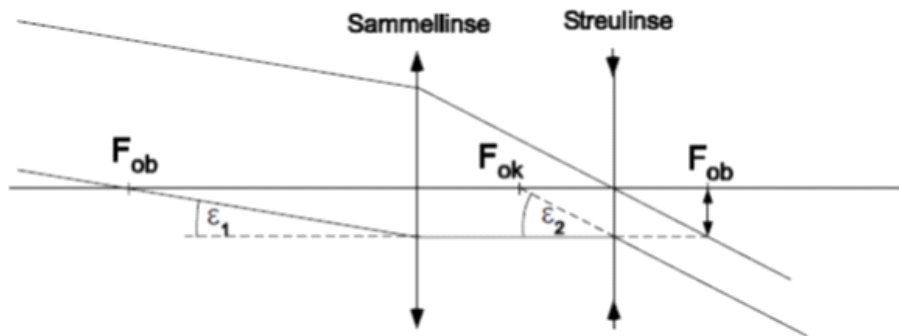
Eine Vergrößerung von 3 erreicht man also mit einer Linse der Brennweite 5 cm.

- Kepler Fernrohr

Das Kepler-Fernrohr besteht aus zwei Sammellinsen im Abstand  $d = f_1 + f_2$ . Das Objektiv erzeugt ein reelles Zwischenbild, das man mit dem Okular wie mit einer Lupe betrachtet. (Strahlengang als Übung). Das Bild wird im Kepler Fernrohr invertiert. Beim Beobachten von Sternen schadet das nicht. Das Kepler-Fernrohr heißt manchmal auch Astronomisches Fernrohr.

- Galilei Fernrohr

Beim Galilei-Fernrohr ist das Okular eine Streulinse deren beobachterseitiger Brennpunkt mit dem des Objektivs zusammenfällt. Parallel einfallende Strahlen verlassen das Fernrohr dann auch wieder parallel aber unter einem steileren Winkel relativ zur optischen Achse. Der links einfallende Brennpunktstrahl des Objektivs verläuft zwischen den Linsen parallel zur optischen Achse und wird vom Okular von der Achse so weggebrochen, dass die rückwärtige Verlängerung die optische Achse im Brennpunkt des Okulars schneidet. Einen zweiten Strahl erhält man mit dem Mittelpunktstrahl des Okulars, den man zunächst rechts vom Okular parallel zum ersten Strahl wählt. Er schneidet die Brennebene des Okulars am selben Punkt wie der erste Strahl wenn das Okular nicht da wäre. Strahlen, die die Brennebene im selben Punkt scheiden, müssen aber dann links von Objektiv parallel verlaufen. Damit werden parallel einfallende Strahlen zu parallelen auslaufenden Strahlen und man erhält eine Abbildung.



Die Vergrößerung erhält man, wenn man die Winkel ausrechnet:

$$\tan \varepsilon_1 = \frac{d}{f_{ob}}$$

$$\tan \varepsilon_2 = \frac{d}{f_{ok}}$$

und damit

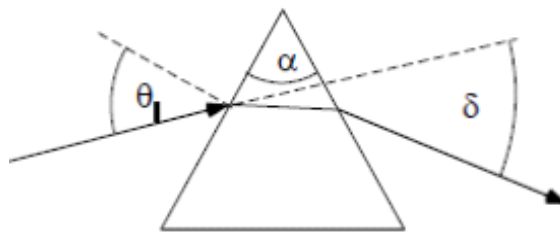
$$V = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \simeq \frac{\tan \varepsilon_2}{\tan \varepsilon_1} = \frac{f_{ob}}{f_{ok}}$$

## 6.5 Prismen

werden verwendet um weißes Licht spektral zu zerlegen und um Strahlen abzulenken.

- Ablenkwinkel

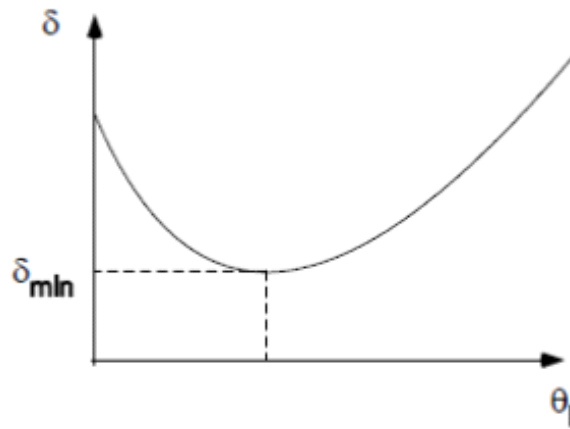
Der Ablenkwinkel ist abhängig vom Brechungsindex  $n(\lambda)$  und der wiederum von der Farbe.



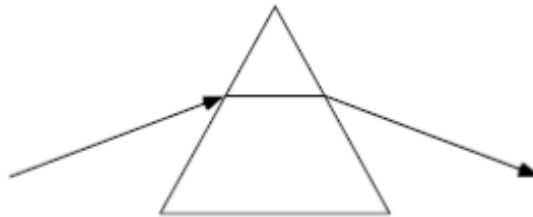
Für einen gegebenen Brechungsindex kann man nach dem Ablenkwinkel  $\delta$  fragen, also dem Winkel zwischen Eingangs- und Ausgangsstrahl. Eine Rechnung ist nicht schwierig. Das Ergebnis lautet

$$\delta = \theta_i - \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i} - \cos \alpha \sin \theta_i}$$

Für ein  $60^\circ$  Prisma bekommt man qualitativ folgenden Verlauf:



Der Winkel kleinster Ablenkung entspricht der symmetrischen Situation:



Das muss auch so sein, da der rückwärtslaufende Strahl ein möglicher Einfallstrahl wäre. Wären Eintritts- und Austrittsstrahl nicht gleich, hätte man zwei Winkel kleinster Ablenkung, was nicht sein kann. Für ein gegebenes  $\alpha$  kann man durch Messen von  $\delta_m$  den Brechungsindex bestimmen

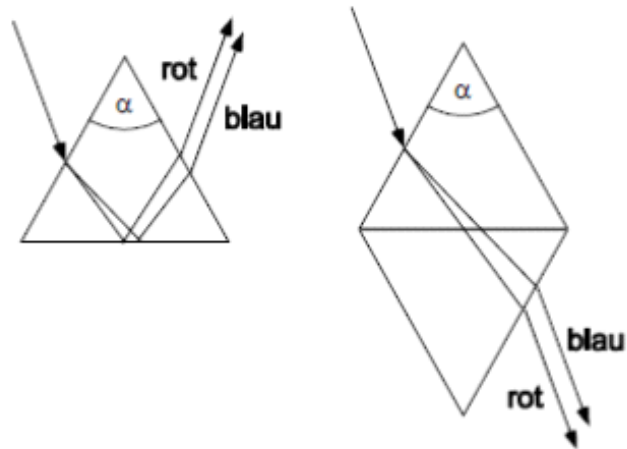
$$n = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(\delta_m + \alpha)\right)}{\sin \alpha/2}$$

Es gibt eine Reihe verschiedener Bauformen mit bestimmten Eigenschaften.

- Achromatische Prismen

Achromatische Prismen lenken alle Wellenlängen gleich ab, d.h. der Ablenkwinkel  $\delta$  ist unabhängig von  $\lambda$ . Verschiedene Farben erleiden aber einen unterschiedlichen Strahlversatz.

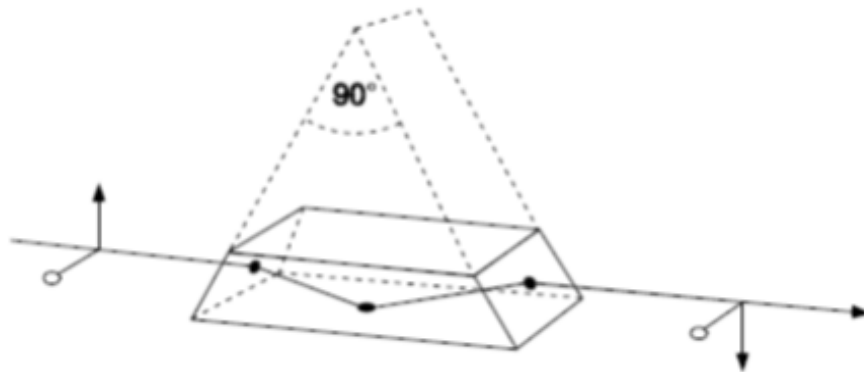




Der Durchgang durch dicke Platte ist also ebenfalls achromatisch.

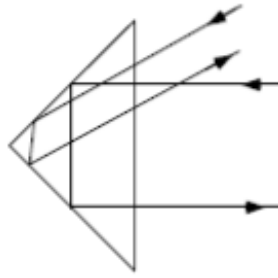
- Dove-Prisma

Dies ist ein interessantes Beispiel für ein Umlenkprisma. Es spiegelt das Bild an der Horizontalebene. Es dreht das Bild doppelt so schnell wie das Prisma um seine Längsachse gedreht wird. Dasselbe gilt für die Polarisation des Lichts also die Schwingungsebene der Lichtwelle.



- Katzenauge

Schließlich gibt es noch das Corner-Cube-Prisma, das die Form eines diagonal zerschnittenen Würfels hat. Es schickt das Licht immer zum Absender zurück.



Einhundert dieser Prismen auf einer Fläche von  $0.25 \text{ m}^2$  wurden von Apollo 11 auf dem Mond platziert. Seitdem kann man Laserblitze zum Mond schicken und deren Reflexe beobachten. Aus Laufzeitmessungen kann man die Entfernung Erde-Mond dadurch sehr genau bestimmen und deren zeitliche Änderung verfolgen.