

# Kapitel 1

## Einleitung

In diesem Grundkurs über Physik, der die vormals getrennten Vorlesungen "Experimentalphysik" und "Theoretische Physik" integriert, wollen wir Sie mit grundlegenden physikalischen Phänomenen vertraut machen und gleichzeitig die theoretischen Methoden zur Beschreibung und zum Verständnis dieser Phänomene entwickeln. Wir werden dabei mit so grundlegenden Begriffen wie "Raum" und "Zeit" beginnen und uns dann im Detail der "Mechanik" widmen, der Lehre von der Bewegung und der Verformung von Körpern unter dem Einfluss unterschiedlicher Kräfte.

### 1.1 Raum, Zeit und Koordinatensysteme

sind Begriffe, die Ihnen aus ihrem täglichen Leben wohlvertraut sind. Sie können sich auf der Erdoberfläche ohne große Schwierigkeiten in den zwei Dimensionen bewegen, und - wenn gleich mit etwas größerem Aufwand - auch nach "oben" oder "unten". Der Raum in unserem täglichen Leben hat also **3 Dimensionen**.

Einem ganz bestimmten Ort im Raum werden Sie im allgemeinen durch **Koordinaten** angeben, z. B. "Tübingen, Auf der Morgenstelle, Gebäude D, Raum P40". Diese Koordinatenangabe ist zugegebenermaßen etwas kryptisch. Sie brauchen wahrscheinlich einige Übung, um mit dieser Angabe den damit angegebenen Ort tatsächlich zu finden. Wir werden daher in diesem Kurs Koordinatensysteme verwenden, die etwas durchschaubarer sind als das eben genannte Beispiel.

Bleibt noch die "Zeit" zu erwähnen. Sie "verstreicht", bietet Ihnen aber keine Möglichkeit, sich darin aktiv vor- oder zurückzubewegen. Auch für die Zeit verwenden Sie Koordinaten - etwa die Uhrzeit - um einen bestimmten Zeitpunkt zu kennzeichnen.

Wir können an dieser Stelle "Raum" und "Zeit" nicht wesentlich präziser fassen. Was wir aber tun können, ist uns mit der Art und Weise beschäftigen, mit denen wir Längen und Zeiten bestimmen.

Beginnen wir mit den Längen. Um die Länge eines Gegenstands oder auch den Abstand eines Gegenstands von einem anderen zu bestimmen benötigen wir zunächst eine "**Einheitslänge**". Wir wollen dann Längen und Abstände in Bruchteilen oder auch Vielfachen dieser Einheit angeben.

Das Einheitensystem, auf das man sich international geeinigt hat, ist das **SI-System** (Système Internationale). In diesem System werden **Längen** in Meter ausgedrückt. Es sei hier aber gleich darauf hingewiesen, dass noch eine ganze Reihe weiterer Einheitensysteme in Gebrauch sind. So werden beispielsweise Längen manchmal in "Zoll", "Fuß", "Meilen" oder auch "Angström" angegeben. Besonders erwähnenswert ist das "**cgs-System**". Dieses wird in der Physik häufig verwendet. Es gibt Längen in Zentimeter ("c"), Massen in Gramm ("g") und die Zeit in Sekunden ("s") an. Weitere cgs-Einheiten werden wir im Verlauf dieses Kurses angeben.

Bleiben wir aber zunächst bei der **Definition "1 Meter"**. 1 Meter war bis Ende des 18. Jh. als der  $10^{-7}$ -te Teil des (ungenau gemessenen) Meridianquadrants (d. h. der Entfernung Äquator-Pol) festgelegt. Auf der Basis dieser Definition benutzte man später das **Urmeter**, einen beim Bureau International des Poids et Mesure in Sèvres bei einer Temperatur<sup>1</sup> von  $0^\circ\text{C}$  aufbewahrten Pt-Ir-Stab. Die Abb. 1.1 zeigt ein Bild dieses Stabs, sowie des Bureau International des Poids et Mesure.



Abbildung 1.1: Das "Urmeter" (links) im "Bureau International des Poids et Mesures" in Sèvres (rechts)

Mit wachsenden Anforderungen an die Messgenauigkeit wurde das Urmeter durch eine Definition ersetzt, die auf der Wellenlänge des roten Lichts basiert, das Cadmium-Atome aussenden können. Demnach war 1 Meter ab 1927 das 1553164.13-fache dieser Wellenlänge. 1960 wurde das von Krypton-Atomen ausgesandte Licht als Definition verwendet; präzise war 1 Meter definiert als das 1650763.73-fache der Vakuumwellenlänge des orangefarbenen Lichts beim Übergang  $5d_5 \rightarrow 2p_{10}$  des Isotopes  $^{86}\text{Kr}$ .<sup>2</sup> Seit 1983 basiert die Definition des Meters auf der Geschwindigkeit  $c$  des Lichts im Vakuum. Diese Geschwindigkeit ist

<sup>1</sup>Gegenstände dehnen sich i. allg. mit wachsender Temperatur aus. Deshalb muss die Temperatur sehr genau spezifiziert werden.

<sup>2</sup>Diese Definition ist - ähnlich wie die Definition der Sekunde, die wir weiter unten einführen werden - an dieser Stelle sicher nur schwer nachvollziehbar. Sie werden aber die zu Grunde liegende Physik bis zum Ende des 4. Semesters (hoffentlich) beherrschen.

eine nach unserem Wissen unveränderliche Naturkonstante. Sie ist mit einer sehr hohen Genauigkeit messbar. Demnach legt das Licht 299792458 Meter in der Sekunde zurück und wir erhalten:

$$1 \text{ m} = c/299792458 \cdot 1 \text{ s} \quad (1.1)$$

Die Definition des Meters ist damit über die Lichtgeschwindigkeit  $c$  auf die Definition und die Messgenauigkeit der Sekunde zurückgeführt. Dies ist sinnvoll, da man Zeiten wesentlich genauer messen kann als Längen.

”1 Sekunde” ist die **Basiseinheit der Zeit** sowohl im SI- als auch im cgs-System.

Seit 1967 ist 1 Sekunde das 9192631770-fache der Periodendauer der elektromagnetischen Strahlung, die beim Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur-niveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids  $^{133}\text{Cs}$  ausgesandt bzw. absorbiert wird. Vorher war die Sekunde als das  $(1/31556925.9747)$ -fache des topischen Sonnenjahrs am 1. 1. 1900 definiert. Mit Atomuhren können heute Zeitangaben mit einer relativen Genauigkeit im Bereich von  $\pm 10^{-15}$  gemacht werden. Tatsächlich benötigt man diese Genauigkeit für einige spezielle Anwendungen. Denken Sie aber daran, dass im täglichen Leben genauso wie bei (fast) allen Messungen Angaben mit einer solchen Genauigkeit völliger Unsinn wären. Messungen sind immer mit gewissen Messfehlern behaftet, wie wir gleich im Detail sehen werden. Es macht keinen Sinn, Messgrößen wesentlich genauer als diese Messunsicherheit anzugeben!

Bevor wir uns Messfehlern und der Art und Weise, wie Längen und Zeiten bestimmt werden können zuwenden, wollen wir hier noch einige **allgemeine Anmerkungen** machen. Zunächst wollen wir die **dekadische Unterteilung der Grundeinheiten** angeben. So bezeichnen wir beispielsweise den  $10^{-3}$ -ten Teil eines Meters als 1 Millimeter (1 mm), den  $10^{-3}$ -ten Teil einer Sekunde als 1 Millisekunde (1 ms) usw. Ganz analog wird das  $10^3$ -fache eines Meters als 1 Kilometer (1 km) bezeichnet. Weitere Einteilungen, die den Bereich vom  $10^{-18}$  bis zum  $10^{18}$ -fachen der Grundeinheit abdecken, sind in Tab. 1.1 aufgelistet.

Tabelle 1.1: Die dekadische Unterteilung der Grundeinheiten

Zehnerpotenz	Vorsilbe	Kurzzeichen	Zehnerpotenz	Vorsilbe	Kurzzeichen
$10^{-1}$	Dezi	d	$10^1$	Deka	da
$10^{-2}$	Zenti	c	$10^2$	Hekto	h
$10^{-3}$	Milli	m	$10^3$	Kilo	k
$10^{-6}$	Mikro	$\mu$	$10^6$	Mega	M
$10^{-9}$	Nano	n	$10^9$	Giga	G
$10^{-12}$	Piko	p	$10^{12}$	Tera	T
$10^{-15}$	Femto	f	$10^{15}$	Peta	P
$10^{-18}$	Atto	a	$10^{18}$	Exa	E

Anmerkung 2 betrifft ganz spezielle Längeneinheiten, die gelegentlich verwendet werden:

1 fm (1 Fermi = 1 Femtometer):  $10^{-15}$  m (der Durchmesser eines Atomkerns beträgt ca. 1 fm)

1 Å (1 Angström):  $10^{-10}$  m (typischer Atomdurchmesser: 1 bis einige Å )

1 Lichtsekunde:  $3 \cdot 10^8$  m

1 AE (Astromische Einheit = Abstand Erde-Sonne):  $1.5 \cdot 10^{11}$  m

1 Lichtjahr:  $9.47 \cdot 10^{15}$  m

1 Parsec (Parallaxensekunde): 3.26 Lichtjahre= $3.086 \cdot 10^{16}$  m

Anmerkung 3 schließlich betrifft unsere "tägliche" Erfahrung mit Raum und Zeit. Man hat erkannt, dass Raum und Zeit unter gewissen Bedingungen eine sehr nichttriviale Struktur haben können. Dies passiert beispielsweise

- bei Geschwindigkeiten, die vergleichbar mit  $c$  werden ( $\rightarrow$  spezielle Relativitätstheorie)
- in starken Gravitationsfeldern ( $\rightarrow$  allgemeine Relativitätstheorie)
- bei sehr großen Abständen und Zeiten (im Bereich  $10^{10}$  (Licht-)jahre  $\approx$  Größe d. Universums)
- bei sehr kleinen Dimensionen

*Man kann aus drei fundamentalen Naturkonstanten:*

$G=6.672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ : Gravitationskonstante

$h=6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ : Planck'sches Wirkungsquantum

$c=2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ : Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

eine Länge, die sog. "Planck-Skala",  $l_P = \sqrt{Gh/c^3} \approx 10^{-35} \text{ m}$  bilden. Bei diesen Abständen versagt die uns bekannte Beschreibung der Physik. Es wird in diesem Zusammenhang auch diskutiert, ob der Raum mehr als drei Dimensionen hat.

## 1.2 Messung von Längen und Zeiten

### 1.2.1 Messgenauigkeit und Messfehler

Wir wollen zunächst einige allgemeine Anmerkungen zu "Messungen" machen. Wesentlich ist, dass jede Messung nur eine begrenzte Genauigkeit, sowie Fehlerquellen hat. Man unterscheidet dabei zwei unterschiedliche Arten von Messfehlern:

- "systematischer" Fehler: Er tritt dadurch auf, dass die Messgröße selbst bei genauestem Ablesen des Maßstabs falsch bestimmt wird. Ein einfaches Beispiel hierfür wäre das Anlegen eines falsch geeichten Maßstabs oder die Zeitbestimmung durch eine ungenau gehende Uhr. In diesen beiden Fällen kann man beispielsweise zwei unterschiedliche Uhren heranziehen, um den Fehler abzuschätzen. Ein weiteres, weniger triviales Beispiel ist die systematische Verfälschung einer Messung durch den Einfluss nicht berücksichtigter oder falsch berücksichtigter Effekte. Diese Fehler sind, wie man sich vorstellen kann, oft nur sehr schwer abzuschätzen.
- "statistischer" Fehler: Der "statistische" oder "zufällige" Fehler tritt dadurch auf, dass eine Messgröße, etwa durch ungenaues Ablesen des Maßstabs oder durch zufällige Störeinflüsse bei wiederholter Messung mit dem gleichen Maßstab bei jeder Messung leicht unterschiedliche Ergebnisse liefert. Beispielsweise könnte bei der Messung eines 1 m langen Gegenstands die erste Messung 99 cm ergeben, die zweite 1,01 m, die dritte 99,5 usw. Misst man eine Größe sehr häufig und trägt die Messwerte in einem "Histogramm" auf, so könnte sich folgendes Bild ergeben:

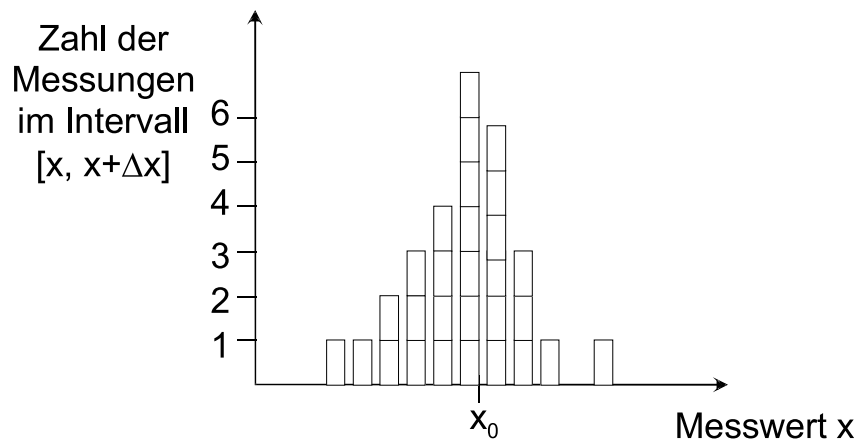


Abbildung 1.2: *Qualitatives Histogramm der Verteilung von Messwerten, wie sie bei wiederholter Messung einer Größe  $x$  gewonnen worden sein könnten. Der "wahre" Wert der Größe sei  $x_0$  (z. B.  $x_0 = 1$  m). Im Histogramm werden Messwerte, die zwischen dem Wert  $x$  und dem Wert  $x + \Delta x$  liegen (z. B. zwischen 98 cm und 99 cm) als ein Balken zwischen  $x$  und  $x + \Delta x$  in das Diagramm eingetragen. Liegen  $n$  Messwerte in diesem Intervall, bekommt der Balken die Höhe  $n$ . Es ergibt sich eine Verteilung der Messwerte, das - solange keine großen systematischen Fehler vorliegen - ein Maximum um den Wert  $x_0$  herum aufweist.*

Wesentlich ist nun, dieser statistische Fehler durch wiederholte Messung<sup>3</sup> verbesserbar ist, wie man schon aus Abb. 1.2 intuitiv schließen kann.

Wir wollen an dieser Stelle einige grundlegende Größen bei der Bestimmung von Messwerten einführen. Wir nehmen an, eine Größe  $x$  (z. B. Länge  $L$  eines Gegenstands) werde  $N$  mal gemessen. Der  $n$ -te Messwert sei  $x_n$ , mit  $n = 1, \dots, N$ .

Der **Mittelwert** über alle Messungen ist gegeben durch:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \quad (1.2)$$

Die **Streuung der Messwerte** definieren wir durch:

$$(\delta x)^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \langle x \rangle)^2 \quad (1.3)$$

Man bezeichnet diese Größe  $\delta x$  oft auch als ”**Standardabweichung**”  $\sigma$ . Man beachte, dass hierbei über die Quadrate der Abweichungen der einzelnen Messwerte vom Mittelwert gemittelt wird.

Bei zufälliger Streuung der Messwerte können wir den Ausdruck wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (\delta x)^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \langle x \rangle)^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n^2 - 2x_n \langle x \rangle + \langle x \rangle^2) \\ &= \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n^2 \right) - \left( \frac{2\langle x \rangle}{N} \sum_{n=1}^N x_n \right) + \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^2 \\ &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Das Quadrat der Standardabweichung ist also gegeben durch den Mittelwert von  $x^2$  abzüglich des Quadrates des Mittelwerts.

Genauere Aussagen zu treffen ist eine Aufgabe der mathematischen Statistik.

Man kann sich zunächst vorstellen, dass *sehr* viele Messwerte  $x_n$  aufgenommen wurden (im Idealfall unendlich viele). Wir können dann ein Histogramm erzeugen, bei dem die Intervalle  $\Delta x$ , innerhalb derer die Messwerte zu summieren sind, sehr fein gewählt sind, da ja sehr viele Messwerte zur Verfügung stehen<sup>4</sup>. Im Grenzfall unendlich vieler Messwerte können wir  $\Delta x$  sogar gegen null gehen lassen. Wir bezeichnen dieses unendlich kleine Intervall als ” $dx$ ”.

In einem derart fein unterteilten Histogramm ist die Einhüllende der einzelnen Balken eine kontinuierliche glatte Kurve  $p(x)$ .

Man kann nun die Einheiten für  $p(x)$  so wählen, dass  $p(x)$  gerade die Wahrscheinlichkeit - genauer gesagt, die Wahrscheinlichkeits*dichte* - dafür angibt, dass man bei einer

<sup>3</sup>Man erfasst dabei Messwerte üblicherweise per Computer, so dass es kein Problem ist, auch sehr viele Daten aufzunehmen.

<sup>4</sup>Hätten wir in Abb. 1.2 die Unterteilung zu fein gewählt, so hätten wir in wahrscheinlich in jedem Intervall nur einen Messwert erhalten, was nicht sehr hilfreich gewesen wäre.

bestimmten Einzelmessung einen Wert zwischen  $x$  und  $x + dx$  findet. Hierzu ist wie folgt vorzugehen:

Es sei  $P(x)$  die Einhüllende des Histogramms, die noch nicht geeignet normiert ist. Wir suchen dann einen Normierfaktor  $N$  so, dass  $p(x)$  die gesuchte Wahrscheinlichkeit angibt:  $p(x) = N \cdot P(x)$ .

Wir wissen nun, dass die Wahrscheinlichkeit gleich 1 ( $1 = \text{''sicher''}$ ) ist, dass der Messwert irgendwo zwischen  $-\infty$  und  $\infty$  liegt<sup>5</sup>. Wären unsere Intervalle  $\Delta x$  endlich groß, müssten wir über alle Intervalle aufsummieren und verlangen, dass die Summe gleich 1 ist. Im Grenzfall unendlich kleiner Intervalle  $dx$  gehen wir zur Integration über. Wir verlangen für  $p(x)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \cdot dx = 1 \quad (1.5)$$

Man beachte, dass das Produkt  $p(x) \cdot dx$  eine dimensionslose Zahl ergibt. Falls  $x$  bzw.  $dx$  die Einheit einer Länge hat, hat also  $p(x)$  die Dimension  $1/\text{Länge}$ . Daher auch die Bezeichnung Wahrscheinlichkeitsdichte. Wie erhalten mit  $p(x) = N \cdot P(x)$  für  $N$  die Bedingung:

$$N \cdot \int_{-\infty}^{\infty} P(x) \cdot dx = 1 \quad (1.6)$$

oder

$$N = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} P(x) \cdot dx} \quad (1.7)$$

Man findet, dass zufällige Messfehler oft "normalverteilt" (auch: "Gauß-verteilt") sind und durch die Funktion

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\langle x \rangle)^2/(2\sigma^2)} \quad (\text{"Gauß-Verteilung" oder "Normal-Verteilung"}) \quad (1.8)$$

beschrieben werden.

Es gilt hierbei zunächst:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\langle x \rangle)^2/(2\sigma^2)} \cdot dx \quad (1.9)$$

Um das Integral auswerten zu können, wählen wir anstelle der dimensionsbehafteten Variablen  $x$  die Variable  $\xi = (x - \langle x \rangle)/\sigma$  (wir könnten auch sagen, wir messen  $x$  in Einheiten von  $\sigma$ ).

---

<sup>5</sup>Das Symbol  $\infty$  steht für "unendlich".

Es gilt:  $dx/\sigma = d\xi$ . Auch die Variable  $\xi$  läuft von  $-\infty$  bis  $\infty$ . Das Integral schreibt sich damit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2} \cdot d\xi \quad (1.10)$$

Das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2} \cdot d\xi$  kann analytisch berechnet werden und liefert den Wert  $\sqrt{2\pi}$ . Die Funktion  $p(x)$  ist also richtig normiert.

Die Abb. 1.3 zeigt die Funktion  $p(\xi)$ . Ihr Maximalwert beträgt  $1/\sqrt{2\pi}$  für  $\xi = 0$ .

Für  $x - \langle x \rangle = \sigma$  (bzw.  $\xi = 1$ ) liefert  $p(\xi)$  den Wert  $e^{-1/2}/\sqrt{2\pi} \approx 0.607/\sqrt{2\pi} \approx 0.24$ .

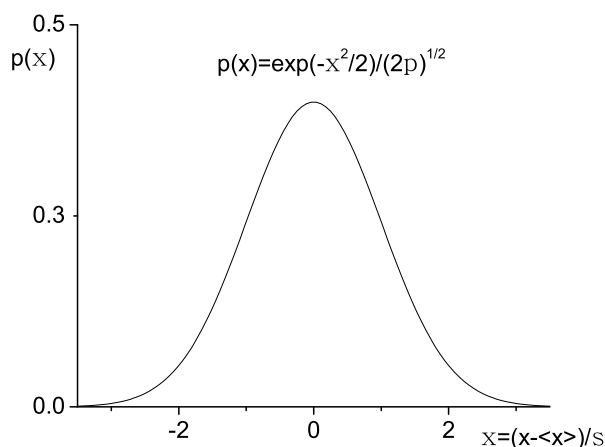


Abbildung 1.3: Gauss-Verteilung  $p(\xi)$

Einige weitere interessante Eigenschaften der Gauß-Verteilung seien hier nur kurz erwähnt:

- ein einzelner Messwert weicht im Durchschnitt um  $\sigma$  vom Mittelwert ab
- der Mittelwert aus  $N$  Messungen weicht im Durchschnitt um  $\sigma/\sqrt{N}$  vom Mittelwert ab, d. h. der **Messfehler verbessert sich proportional zu  $1/\sqrt{N}$** .
- 68 % aller Messungen liegen innerhalb  $\pm\sigma$ .  
(dies entspricht dem Integral  $\int_{\langle x \rangle - \sigma}^{\langle x \rangle + \sigma} p(x) dx$ )
- 99.7 % aller Messungen liegen innerhalb  $\pm 3\sigma$ .  
(dies entspricht dem Integral  $\int_{\langle x \rangle - 3\sigma}^{\langle x \rangle + 3\sigma} p(x) dx$ )

Zum Schluss unserer Betrachtungen über Messfehler wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, wie sich der Fehler einer aus mehreren Messgrößen berechneten Größe ergibt, etwa dem Verhältnis  $v = x/t$  aus den zwei (fehlerbehafteten) Messgrößen  $x$  und  $t$ . Man spricht hier auch von **Fehlerfortpflanzung bei abgeleiteten Größen**.

Im Beispiel sollen die Messungen sowohl von  $x$  als auch von  $t$  um die Mittelwerte  $\langle x \rangle$  bzw.  $\langle t \rangle$  schwanken. Wie ergibt sich nun der Fehler der berechneten Größe  $v = x/t$ ?



- Wir nehmen zunächst an,  $t$  sei exakt und der gerade gemessene Wert von  $x$  weiche um  $\pm\delta x$  vom Mittelwert  $\langle x \rangle$  ab. Wir bezeichnen die Abweichung von  $v$  vom "wahren" Wert als  $\delta v_t$ . Damit erhalten wir:

$$v \pm \delta v_t = (x \pm \delta x)/t = v \pm \delta x/t \quad \rightarrow \quad \delta v_t = \delta x/t. \quad (1.11)$$

Der Fehler  $\delta v_t$  ist also direkt proportional zu  $\delta x$ .

- Falls umgekehrt  $x$  exakt ist und der Messwert für  $t$  um  $\pm\delta t$  abweicht, erhalten wir:

$$v \pm \delta v_x = \frac{x}{t \pm \delta t} = \frac{x}{t} \frac{1}{1 \pm \delta t/t}. \quad (1.12)$$

Wir wollen nun annehmen, dass das Verhältnis  $\delta t/t \ll 1$  sei. Die Funktion  $\frac{1}{1 \pm \delta t/t}$  schreiben wir wie folgt um:

$$\frac{1}{1 \pm \delta t/t} = \frac{1 \mp \delta t/t}{(1 \pm \delta t/t) \cdot (1 \mp \delta t/t)} = \frac{1 \mp \delta t/t}{1 - (\delta t/t)^2} \approx 1 \mp \delta t/t \quad (1.13)$$

Im letzten Schritt haben wir die Größe  $(\delta t/t)^2$  vernachlässigt. Sie ist quadratisch kleiner als die schon als klein angenommene Größe  $\delta t/t$ .

Damit erhalten wir:

$$v \pm \delta v_x \approx \frac{x}{t} (1 \mp \frac{\delta t}{t}) = v \mp \frac{x \delta t}{t^2} = v (1 \mp \frac{\delta t}{t}) \quad (1.14)$$

Den **Gesamtfehler** können wir nun **entweder** dadurch abschätzen, dass wir die **Beträge**  $|\delta v_x|$  und  $|\delta v_t|$  **addieren**:

$$|\delta v| = |\delta v_x| + |\delta v_t| = \left| \frac{\delta x}{t} \right| + \left| v \frac{\delta t}{t} \right| \quad (1.15)$$

oder deren **Betragsquadrate addieren**:

$$(\delta v)^2 = (\delta v_x)^2 + (\delta v_t)^2 = \left( \frac{\delta x}{t} \right)^2 + \left( v \frac{\delta t}{t} \right)^2 \quad (1.16)$$

Beide Varianten werden in der Literatur benutzt.

Es sei hier weiter erwähnt, dass man die Näherung  $\frac{1}{1 \pm \delta t/t} \approx 1 \mp \delta t/t$  auch wesentlich direkter durch die sogenannte **Taylor-Entwicklung** hätte erhalten können:

Wir nehmen hierzu an, die Funktion  $f(x)$  sei beliebig oft differenzierbar und bezeichnen mit  $f^{(n)}(x)$  die  $n$ -te Ableitung von  $f(x)$ . Man kann dann zeigen, dass sich  $f(x)$  wie folgt als Polynom schreiben lässt:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \quad (1.17)$$

Hierbei ist  $n!$  die "Fakultät", d. h. das Produkt  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . Man bezeichnet obige Reihe als die Taylor-Entwicklung um den Wert  $x_0$ . Bricht man die Reihe nach  $N$  Gliedern

ab, so ist dennoch die Abweichung von  $f(x)$  in der Nähe des Wertes  $x_0$  klein. Explizit auf die Funktion  $f(x) = \frac{1}{1 \pm x}$  angewandt erhalten wir, wenn wir die Variable  $\delta t/t$  als  $x$  bezeichnen:

0-te Ableitung von  $f(x)$  an der Stelle  $x = 0$  (d. h.  $\delta t = 0$ ):  $f^{(0)}(0) = 1$

1-te Ableitung von  $f(x)$  an der Stelle  $x = 0$ :  $f^{(1)}(x = 0) = \mp \frac{1}{(1 \pm x)^2} \Big|_{x=0} = \mp 1$

2-te Ableitung von  $f(x)$  an der Stelle  $x = 0$ :  $f^{(2)}(x = 0) = 2 \frac{1}{(1 \pm x)^3} \Big|_{x=0} = 2$

(usw.)

Damit ergibt sich:

$$f(x) = 1 \mp \frac{1}{1}x + \frac{2}{2}x^2 \mp \dots \quad (1.18)$$

Mit der Ersetzung  $x \rightarrow \delta t/t$  erhalten wir unser altes Ergebnis zurück, wenn wir die Reihe nach dem zweiten Glied abbrechen.

Kehren wir nach diesem kurzen Exkurs zur Fehlerfortpflanzung zurück. Wir betrachten jetzt eine allgemeine Größe Messgröße  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , die sich aus den  $N$  Messgrößen  $x_1$  bis  $x_N$  berechnet. Wir können jetzt den Fehler  $\delta y$  dieser Größe mit Hilfe der ersten "partiellen" Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_n}$  der Funktion  $f$  nach den jeweiligen Variablen  $x_n$  als

$$(\delta y)^2 = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \delta x_n \right)^2 \quad (1.19)$$

schreiben<sup>6</sup>. Bei der Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x_n}$  nach der Variablen  $x_n$  sind alle anderen Variablen  $x_m$  mit  $m \neq n$  konstant zu halten.

Wir wollen hiermit unsere allgemeine Betrachtung von Messfehlern vorläufig abschließen und uns realen **Längenmessungen auf verschiedenen Skalen** zuwenden.

## 1.2.2 Messung mittlerer und kleiner Abstände

Zurückgehend auf die Definition des Meters über die festgelegte Lichtgeschwindigkeit im Vakuum,  $c$  (siehe die Definition in Gleichung 1.1), können Längen über die Laufzeit bestimmt werden, die ein Lichtpuls für die zu vermessende Strecke benötigt. In der Praxis ist dieses Verfahren aber für kleine Längen weniger geeignet, da die Laufzeiten aufgrund der hohen Lichtgeschwindigkeit extrem kurz sind. Man kann aber eine andere Technik benutzen, die ebenfalls auf die Definition des Meters über die Lichtgeschwindigkeit zurückgreift. Über die Beziehung  $\lambda = c/\nu$  hängt die Wellenlänge  $\lambda$  einer elektromagnetischen Welle mit der Frequenz  $\nu$  zusammen. Kennt man die Frequenz und damit die Wellenlänge einer bestimmten Quelle für elektromagnetische Wellen, so kann man mit Hilfe optischer Interferometer eine zu bestimmende Länge in Einheiten dieser Wellenlänge  $\lambda$  bestimmen und den Wert anschließend in Meter umrechnen.

<sup>6</sup>Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf die Variante 2 (Addition der Betragsquadrate) der Berechnung der Fehlerfortpflanzung.

Für Längenmessungen im täglichen Leben stehen uns praktische, geeichte Sekundärnormale zur Verfügung. Als Beispiele seien hier die folgenden Maßstäbe aufgeführt, die für verschiedene Längenbereiche besonders geeignet sind:

0.1 mm ... km: Mikrometerschraube/Schieblehre/Meterstab/km-Zähler, usw.

1  $\mu\text{m}$  ... cm: Skala im Mikroskop

1 nm ... cm: Skala im Raster-Elektronenmikroskop

0.1 nm ... mm: Skala im Rasterkraft-/Rastertunnelmikroskope

0.1 nm ... 1  $\mu\text{m}$  Skala im Transmissions-Elektronenmikroskop

In Bezug auf Meterstab, Schieblehre usw. ist "anlegen" durchaus wörtlich gemeint. Im Mikroskop und den weiteren Verfahren wird in der Regel per Computer ein vorher geeichter Maßstab eingeblendet.

Die folgenden Abbildungen geben einige Beispiele für die verschiedenen Verfahren wieder. Abb. 1.4 zeigt die Aufnahme eines "Einzelelektronen-Transistor", der auf Silizium strukturiert wurde.

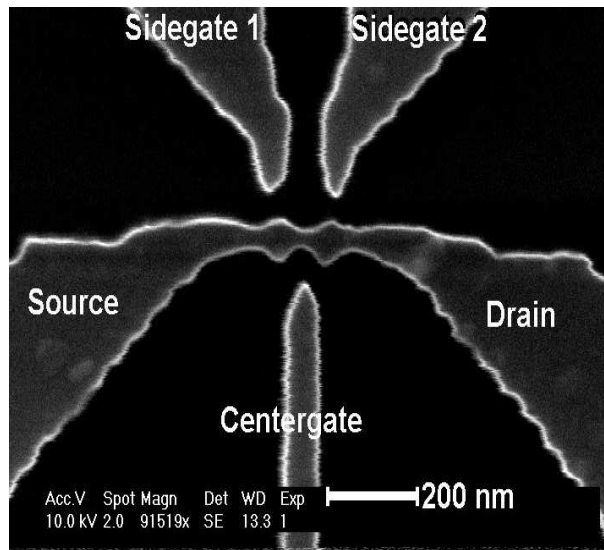


Abbildung 1.4: Aufnahme eines "Einzelelektronen-Transistors" mit dem Raster-Elektronenmikroskop (D. Wharam, D. Kern, Institut für Angewandte Physik)

Die kleinsten Abmessungen der Struktur liegen im Bereich weniger nm. Mit derartigen Strukturen sollen Transistoren auf der Basis der Bewegung einzelner Elektronen realisiert werden. Im **Raster-Elektronenmikroskop** selbst wird ein sehr feiner Elektronenstrahl auf die Probe gebündelt. Von der Probe werden daraufhin Elektronen und auch Röntgenstrahlung emittiert, die von entsprechenden Detektoren nachgewiesen werden. Der Elektronenstrahl wird Punkt für Punkt über die Probe gerastert, so dass schließlich ein Bild wie das in Abb. 1.4 gezeigte entsteht.

Die Abb. 1.5 zeigt ein Beispiel für eine Aufnahme mit dem **Raster-Tunnelmikroskop**. Hier wird eine sehr feine Spitze über die Probenoberfläche bewegt und Punkt für Punkt der Strom gemessen, der zwischen Spitze und Probenoberfläche fließt. Der Strom hängt sehr empfindlich vom Abstand zwischen Spitze und Oberfläche ab und liefert somit stark vereinfacht gesagt ein "Höhenprofil" der Oberfläche. Mit der Spitze des Raster-Tunnelmikroskops lassen sich einzelne Atome nicht nur abbilden sondern sogar auf der

Oberfläche hin- und herschieben. Die Abb. 1.5 zeigt dies am Beispiel von Eisenatomen, die bei sehr tiefen Temperaturen auf einer Kupferoberfläche bewegt wurden. Man hat hierbei einen Kreis aus diesen Atomen aufgebaut (unten rechts). Die wellenartigen Strukturen werden durch Elektronen hervorgerufen (auch die Elektronen können sich wie Wellen verhalten und so die beobachteten Strukturen erzeugen).

In sehr ähnlicher Weise wird beim **Raster-Kraftmikroskop** die Kraft zwischen Probenoberfläche und Spitze gemessen und zur Abbildung bzw. Manipulation der Oberfläche benutzt.

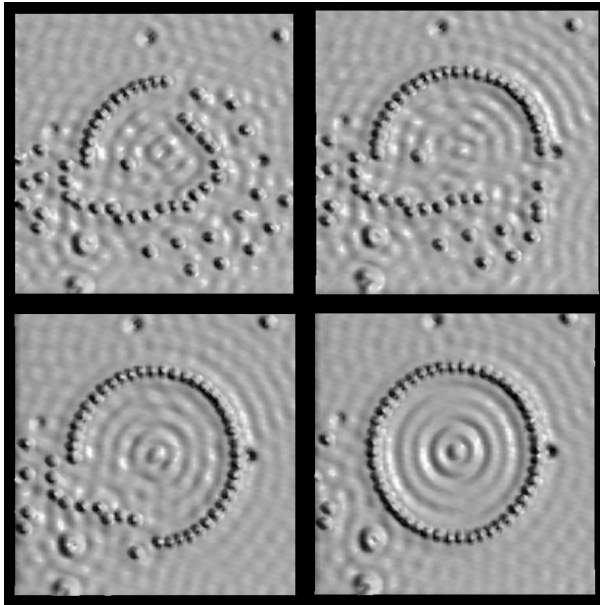


Abbildung 1.5: *Manipulation und Abbildung von Eisenatomen auf einer Kupferoberfläche mit Hilfe eines Rasterkraftmikroskopes [nach: M.F. Crommie, C.P. Lutz, D.M. Eigler (IBM), "Confinement of electrons to quantum corrals on a metal surface", *Science* **262**, 218-220 (1993)]. Der Durchmesser des Rings aus Fe-Atomen beträgt 14.3 nm.*

Die Abb. 1.6 zeigt eine Aufnahme der Verbindung  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  (ein so genannter Hochtemperatursupraleiter), die mittels der Transmissions-Elektronenmikroskopie gewonnen wurde. Bei dem Verfahren wird eine sehr dünne Probe von Elektronen durchstrahlt. In der Abbildung ist sehr schön die regelmäßige Anordnung der einzelnen Atome zu sehen. Genauer gesagt sieht man bei dieser Methode ganze "Zeilen" von Atomen, die senkrecht zur Bildebene angeordnet sind.

Noch kürzere Längen können nur noch mit indirekten Methoden bestimmt werden. Im Bereich der Kernradien (fm) und darunter führt man Stoßexperimente durch, bei denen Elektronen oder andere Atomkerne auf den zu untersuchenden Kern geschossen werden. Mit Hilfe der Kenntnis der Kräfte zwischen den Stoßpartnern kann dann beispielsweise auf die Struktur des Atomkerns geschlossen werden. Die Details können dabei allerdings recht kompliziert sein.

### 1.2.3 Messung großer Abstände

- Im Bereich Kilometer bis Lichtstunden lassen sich gut Laufzeitexperimente durchführen, und etwa die Lichtlaufzeit zu einem Satelliten messen. Aus der Kenntnis der Lichtgeschwindigkeit (vergleiche wiederum die Definition des Meters in Gl. 1.1) lässt sich dann der Abstand des Satelliten bestimmen.

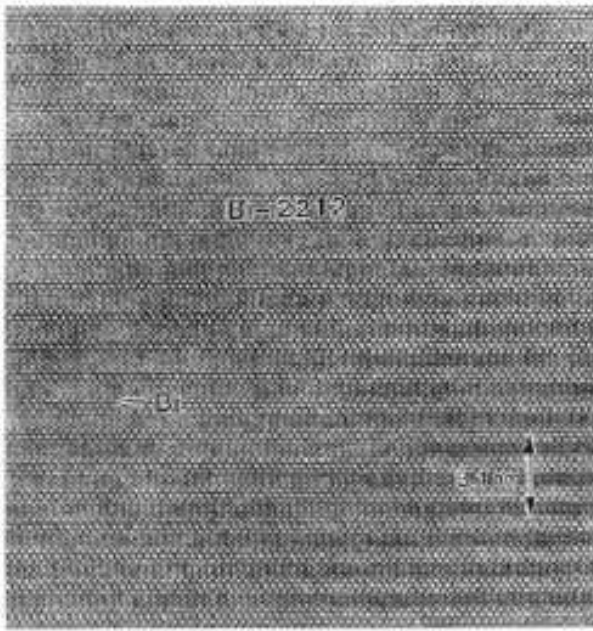


Abbildung 1.6: *Transmissions-Elektronenmikroskopie am Hochtemperatursupraleiter  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  (abgekürzt: Bi-2212). (O. Eibl, Institut für Angewandte Physik)*

Umgekehrt wird dieses Verfahren beim Global Positioning System (GPS) angewandt, um mittels von Satelliten die eigene Position auf der Erde auf wenige Meter genau zu bestimmen. Es existieren dabei 24 Satelliten, die auf insgesamt 6 Bahnebenen mit wohlbekannten Koordinaten kreisen. An jedem Punkt der Erde sollten damit mindestens vier Satelliten empfangbar sein. In jedem Satelliten befinden sich Atomuhren, die dem Empfänger die "genaue" Zeit mitteilen. Da das Licht aber eine gewisse Zeit braucht, um den Empfänger zu erreichen, wird die Uhrzeit jedes der Satelliten zu einer etwas unterschiedlichen Zeit beim Empfänger ankommen. Hätte der Empfänger selbst eine Atomuhr, so könnte er durch Vergleich "seiner" Zeit mit der Zeitangabe des Satelliten ermitteln, wie weit dieser Weg war. Der Empfänger muss sich auf einer Kugelschale mit dem entsprechenden Abstand um den Satelliten herum befinden (die meisten Punkte auf der Oberfläche dieser Kugel können natürlich ausgeschlossen werden, da sie nicht auf der Erdoberfläche liegen!). Bei Benutzung der Uhrzeit von zwei Satelliten kann der Ort des Empfängers immerhin schon auf die Linie eingeschränkt werden, auf der sich die beiden Kugelschalen um die beiden Satelliten schneiden. Ein dritter Satellit macht die Position des Empfängers eindeutig. Da der Empfänger selbst aber im allg. keine Atomuhr hat wird nun ein vierter Satellit herangezogen, der letztlich die fehlende Atomuhr des Empfängers ersetzt.

- bis zu Längen von einigen Lichtjahren kann der Effekt der "Parallaxe" verwendet werden, der in Abb. 1.7 skizziert ist. Wenn sich die Erde im Verlauf eines Jahres einmal um die Sonne bewegt, ändert sich die scheinbare Position eines Sterns um einen Winkel  $2\varphi$ . Bei Kenntnis des Durchmessers der Erdbahn lässt sich daraus der Abstand des Sterns von der Erde bestimmen.

**Versuch:** Die Parallaxe wird im Hörsaal durch den Schattenwurf von zwei Kugeln, die in unterschiedlichen Abständen von einer Lampe aufgestellt sind, demonstriert. Die Lampe wird dabei entsprechend der Bewegung von A nach B in Abb. 1.7 verschoben.

Auf der Basis der Parallaxe ist die Längeneinheit Parsec (Parallaxensekunde) defi-

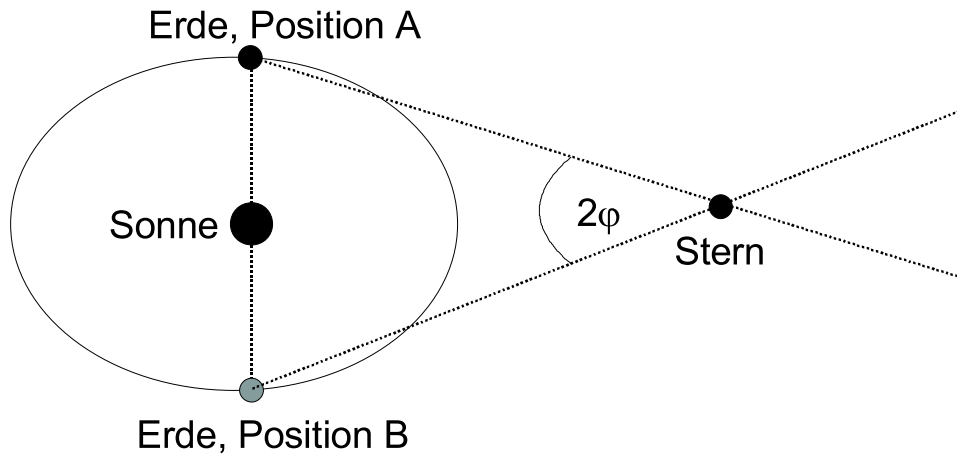


Abbildung 1.7: *Effekt der Parallaxe zur Bestimmung des Abstands eines Sterns von der Erde*

niert. Die scheinbare Bewegung eines Sterns, der 1 Parsec (=3.26 Lichtjahre) von der Erde entfernt ist, beträgt 1 Bogensekunde.

- bis zu einigen  $10^5$  Lichtjahre können beispielsweise Vergleiche der scheinbaren und absoluten Helligkeit spezieller Sterne (z. B. die "Cepheiden", eine spezielle Gruppe pulsierender Sterne), von Supernovae und von Galaxien zur Entfernungsbestimmung herangezogen werden. Die relative Helligkeit dieser Objekte ändert sich proportional zu  $\frac{1}{r^2}$ , wobei  $r$  der Abstand zum Beobachter ist. Bei bekannter absoluter Helligkeit kann daraus die Entfernung des Objekts abgeleitet werden.
- bei sehr großen Entfernungen bis zu  $10^{10}$  Lichtjahren dient die Beobachtung ferner Galaxien und Quasare zur Entfernungsbestimmung. Auf Grund der Expansion des Universums nach dem Urknall bewegen sich diese Objekte umso schneller von der Erde weg, je weiter sie von ihr entfernt sind<sup>7</sup>. Dieses Wegbewegen kann man mit Hilfe des "Doppler-Effektes" nachweisen. Er führt dazu, dass die Wellenlänge des Lichts, das ein sich vom Beobachter wegbewegendes Objekt aussendet, zu größeren Werten hin verschoben ist ("Rotverschiebung"). Das akustische Gegenstück dieses Effekts können Sie beobachten, wenn ein Auto oder Zug an Ihnen vorbeifährt.

### 1.2.4 Zeitmessung und Messung schneller Vorgänge

Bei der Zeitmessung werden meist (aber nicht notwendig) periodische Prozesse ausgenutzt, z. B. bei der Pendeluhr, der Quarzuhr (nutzt einen Schwingquarz) oder auch bei der Atomuhr. Diese realisiert die Zeitmessung entsprechend der Definition der Zeit. Das Prinzip üblicher **Atomuhren** ist in Abb. 1.8 skizziert.

Zunächst werden in einem Atomstrahlrohr Caesiumatome verdampft. Diese werden anschließend durch einen Ablenkmagneten nach den beiden "Hyperfeinzuständen" sortiert (die magnetischen Eigenschaften des Cs sind in den beiden Zuständen unterschiedlich).

<sup>7</sup>Man kann sich den Effekt in zwei Dimensionen dadurch klarmachen, dass man auf einem Luftballon eine Reihe von Punkten aufmalt und diesen dann aufbläst.

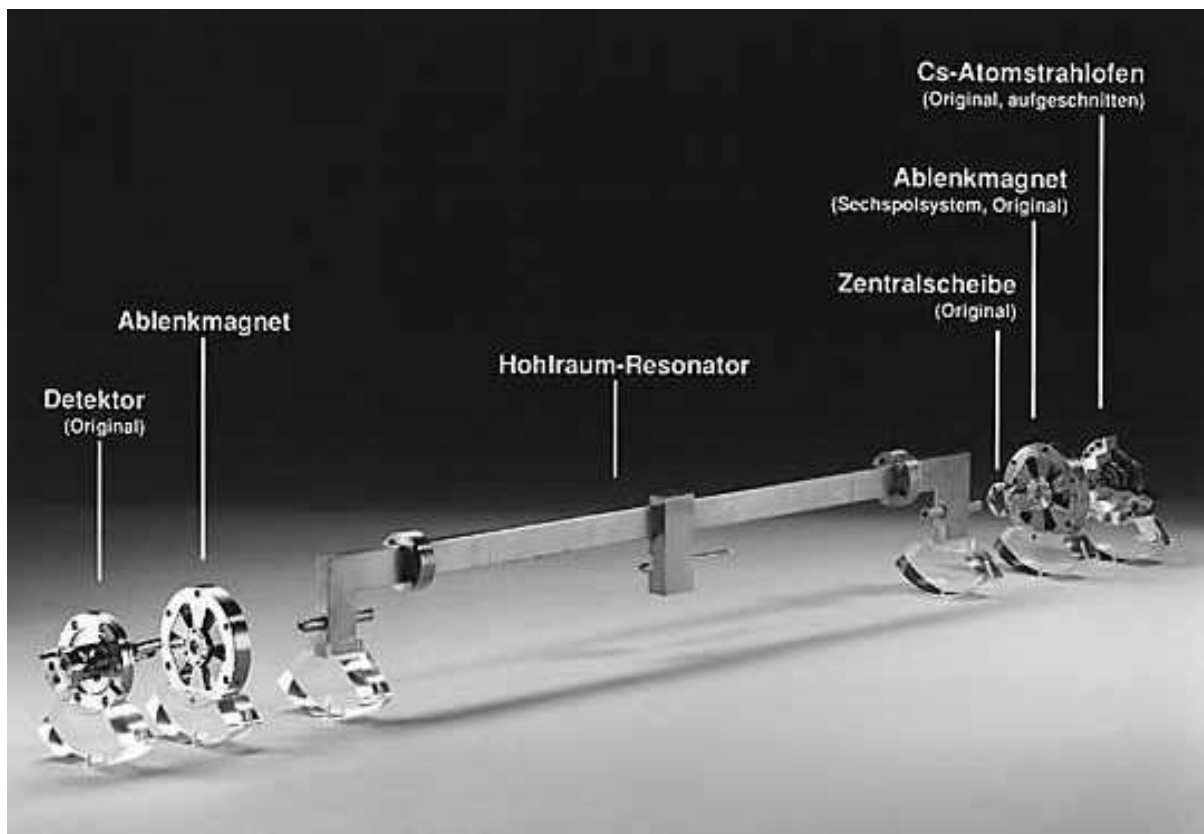


Abbildung 1.8: Die Komponenten einer Atomuhr (Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig)

Nur die Atome in einem der beiden Zustände laufen weiter und gelangen schließlich in einen Hohlraumresonator. Die Cs-Atome können den Energiezustand zwischen Hyperfein-niveaus wechseln, wenn ein elektromagnetisches Wechselfeld einer Frequenz  $f$  ( $= 1/\text{Periodendauer}$ ) von ca. 9,19 GHz (ein Mikrowellenfeld) auf sie wirkt. Dieses Feld wird im Resonator erzeugt. Anschließend werden die Atome durch einen zweiten Ablenkmagneten nochmals magnetisch sortiert und schließlich in einem Detektor aufgefangen. Die maximale Zählrate erhält man, wenn die Frequenz  $f$  des Mikrowellenfeldes im Resonator 9.192631770 GHz beträgt. Diese 9192631770 Periodendauern der Schwingungen im Resonator definieren 1 Sekunde. Für extrem hohe Messgenauigkeiten verwendet man seit wenigen Jahren Uhren, die auf Laser gekühlten Cäsium Atomen basieren. Aufgrund der geringen thermischen Geschwindigkeit erreicht man so längere Wechselwirkungszeiten zwischen Atomen und Mikrowellenfeld.

Wie misst man nun **kurze Zeiten und schnelle Vorgänge**?

Zunächst ist zu sagen, dass heutzutage sehr schnelle Messelektroniken zur Verfügung stehen, die leicht Zeiten bis in den ps-Bereich messen können. Um nun einen sehr schnellen Vorgang überhaupt wahrnehmen zu können, ist es nötig, die "Uhr" rechtzeitig zu starten und auch wieder zu stoppen (man spricht von "triggern").

Ein einfaches Beispiel für die Zeitmessung eines (noch nicht allzu schnellen) Bewegungsvorgangs ist ein 100 m-Lauf, bei dem ein Startschuss eine Uhr und auch den Läufer

startet. Eine 100 m weiter aufgestellte Lichtschranke stoppt die Uhr, sobald der Läufer die Schranke unterbricht.

Beispiele für **optische Hochgeschwindigkeitsaufnahmen** sind in Abb. 1.9 bis 1.11 gezeigt. In Abb. 1.9 wurde ein gallopiertes Pferd aufgenommen. Die lange ungeklärte Frage war, ob ein Pferd während des Gallops vollständig vom Boden abhebt. Die dritte Aufnahme von links klärte diese Frage. Abb. 1.10 zeigt einen auf einer Flüssigkeit auftreffenden Tropfen, Abb. 1.11 schließlich den Schuss durch einen Apfel und einige weitere schnelle Bewegungsvorgänge.



Abbildung 1.9: *Beweis, dass Pferd bei Gallop kurzfristig schwebt, siehe drittes Bild (Edward Muybridge, 1878)*

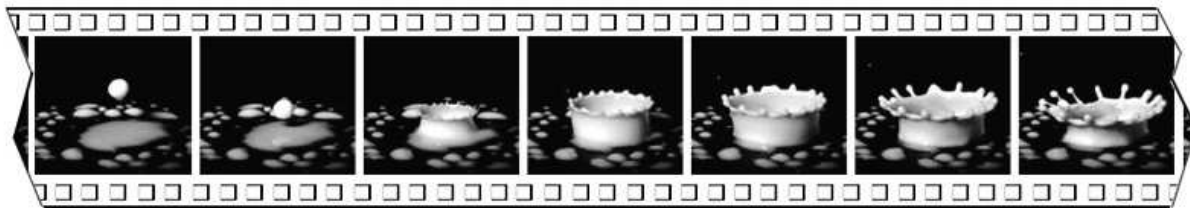


Abbildung 1.10: *Hochgeschwindigkeitsaufnahme eines auf einer Flüssigkeit auftreffenden Tropfens*

(siehe: Edgerton Center, MIT: <http://web.mit.edu/Edgerton/www/HighSpeed.html>)

Mit Hilfe sehr kurzer Laserpulse lassen sich heute sogar Vorgänge bis in den fs-Bereich erfassen. Ähnlich kurze Zeiten können auch durch die zurückgelegten Wegstrecken bei bekannter Geschwindigkeit bestimmt werden, z. B. beim Zerfall von Elementarteilchen, die sich (beinahe) mit Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Bei der **Messung sehr langer Zeiten** kann man sich schließlich auf der Skala von ca. 10000 Jahren der Datierung durch Baumringe oder Eisablagerungen bedienen. Bis hin zur Skala von Jahrmillionen kann man Datierungen beispielsweise mittels "Leitfossilien" in Erdschichten durchführen. Ein Verfahren, das wieder etwas mehr mit Physik zu tun hat, ist die Datierung über radioaktive Zerfälle. Radioaktive Isotope wie  $^{14}\text{C}$  oder  $^{40}\text{K}$  zerfallen im Verlauf der Zeit in andere Atomsorten. Die Zahl der vorhandenen Kerne nimmt dabei exponentiell mit der Zeit ab, wobei nach der "Halbwertszeit"  $t_{1/2}$  gerade die Hälfte aller Kerne zerfallen ist. Kennt man die anfängliche Konzentration der Kerne und bestimmt deren aktuellen Wert, so kann das Alter einer Probe errechnet werden.

Wir kommen nun zur experimentellen Messung einiger Geschwindigkeiten:

### **Geschwindigkeit einer Geschwindigkeit, Schall- und Lichtgeschwindigkeit**

Zunächst wollen wir die **Geschwindigkeit** definieren als  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ .



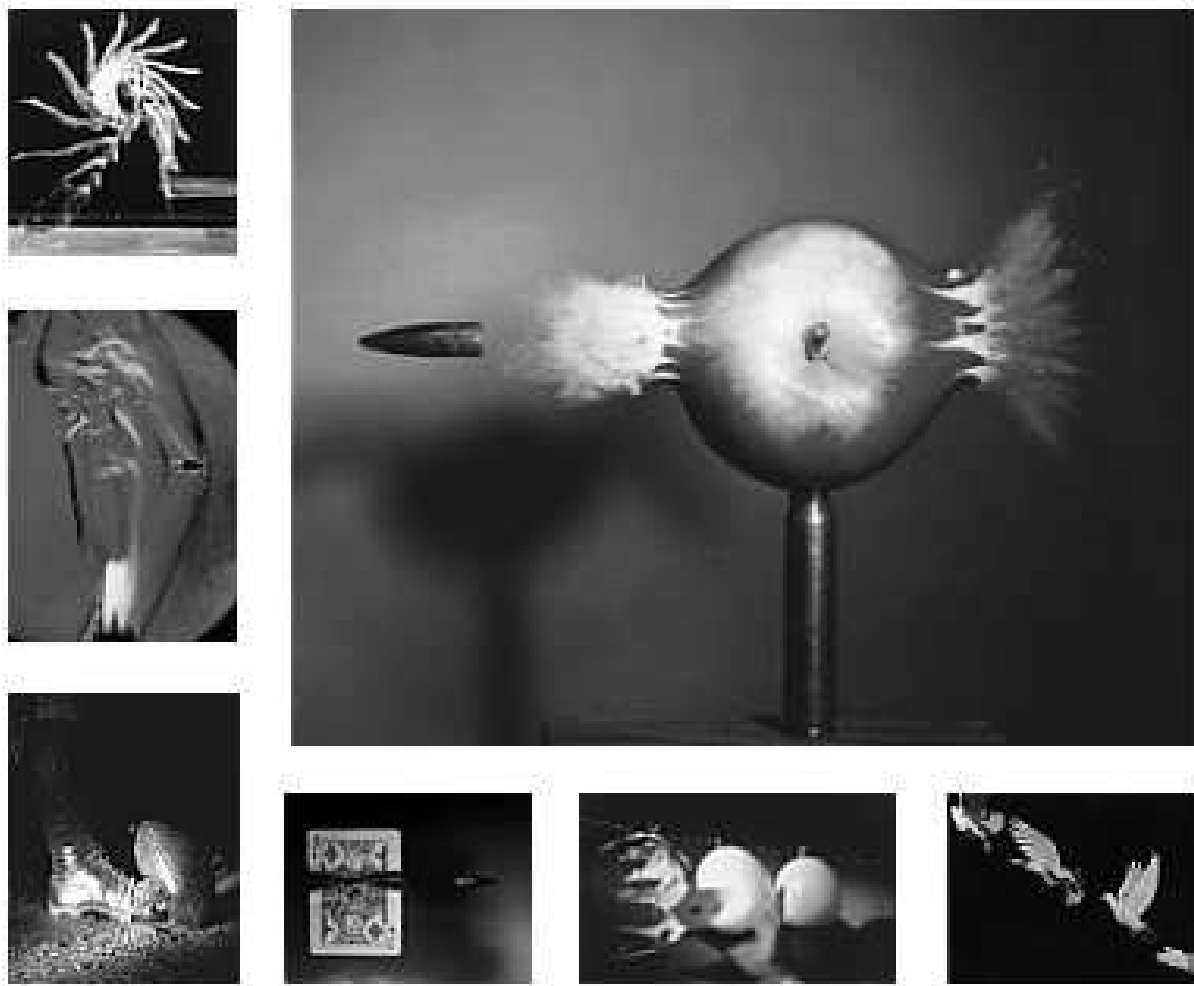


Abbildung 1.11: Hochgeschwindigkeitsaufnahmen verschiedener schneller Bewegungsvorgänge. In Bilder wurden mehrfach belichtet.  
(siehe: Edgerton Center, MIT: <http://web.mit.edu/Edgerton/www/HighSpeed.html>)

Hierbei ist  $\Delta x$  die zurückgelegte Wegstrecke und  $\Delta t$  die dafür benötigte Zeit<sup>8</sup>.

Im **Versuch: Geschossgeschwindigkeit** zerschießt ein Geschoss zunächst ein Drahtgitter und startet damit die Messelektronik. Nach der Laufstrecke  $\Delta x = 1$  m zerstört das Geschoss ein zweites Gitter und stoppt damit die Uhr. Wir finden eine Laufzeit von etwa  $\Delta t = 3.428 \mu\text{s}$  und damit  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx 292\text{m/s}$ .

Im **Versuch: Schallgeschwindigkeit** durchläuft ein von einem Lautsprecher erzeugter kurzer Schallpuls eine Gassäule von 1 m Höhe. Ein in der Nähe des Lautsprecher angebrachtes Mikrofon startet die Uhr, ein zweites Mikrofon stoppt die Uhr. Bei Raumdruck finden wir eine Geschwindigkeit von etwa  $v_s = 328\text{m/s}$ . Erniedrigt man den Druck der Gassäule, so findet man bei etwa 10% des Raumdrucks einen nur unwesentlich niedrigeren Wert von

<sup>8</sup>Ab dem nächsten Abschnitt werden wir die Intervalle  $\Delta x$  und  $\Delta t$  durch infinitesimal kleine Abschnitte  $dx$  und  $dt$  ersetzen, d. h.  $v = \frac{dx}{dt}$ .

$v_s = 325\text{m/s}$ . Erst bei sehr niedrigem Druck sinkt  $v_s$  schließlich deutlich ab (Es sei hier ferner angemerkt, dass  $v_s$  stark von der Temperatur abhängt).

Im **Versuch**: *Lichtgeschwindigkeit* wird die Laufzeit eines Lichtpulses zunächst über eine  $\Delta x = 2 \times 7.50\text{m} = 15\text{ m}$  lange Laufstrecke gemessen. Hierbei wird ein polarisierter Laserstrahl durch eine "Pockelszelle" geschickt, die durch kurzzeitiges, elektrisch ausgelöstes Drehen der Polarisationssebene für das Laserlicht durchlässig wird. Die Länge der Pulse beträgt wenige ps. Ein Teil des Laserpulses wird als Referenz mittels einer Lichtfaser von der Messelektronik (ein Photomultiplier) eingegeben. Der Rest des Pulses durchläuft die Strecke von 7.5 m, wird an einem Spiegel reflektiert und erreicht mit einer Zeitverzögerung  $\Delta t$  gegenüber dem Referenzpuls den Photomultiplier. Die Messelektronik mittelt über einige 100 Pulse und stellt den Mittelwert auf einem Oszillographen dar. Man sieht den Referenzpuls und den reflektierten Puls. Die Zeitdifferenz  $\Delta t$  beträgt 50 ns, was sehr schön dem Wert  $c = 3 \cdot 10^8\text{ m/s}$  entspricht. Ein "Kontrollexperiment" mit einer Laufstrecke von  $2 \times 15\text{ m}$  ergibt  $\Delta t = 100\text{ ns}$  in guter Übereinstimmung.

Die ersten - erfolglosen - Versuche zur Messung der Lichtgeschwindigkeit wurden angeblich bereits von Galileo Galilei (1564-1662) unternommen (vgl. Abb. 1.12). Er wollte die Lichtgeschwindigkeit mit Hilfe von Laternenträgern zu bestimmen, die sich in einem gewissen Abstand voneinander aufgestellt hatten.

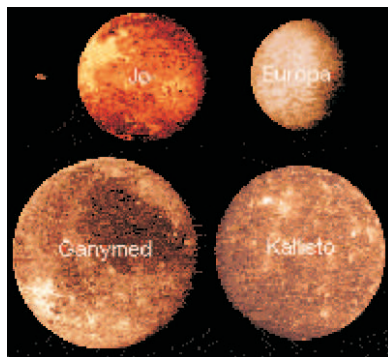


Abbildung 1.12: *Galileis Versuch zur Messung der Lichtgeschwindigkeit*

([http://www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/U\\_materialien/leifiphysik/web\\_ph09/versuche/09lichtgeschwindigkeit/index.htm](http://www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/U_materialien/leifiphysik/web_ph09/versuche/09lichtgeschwindigkeit/index.htm))

Die erste echte Bestimmung von  $c$  erfolgte 1676 durch Olaf Rømer durch Beobachtung der Zeitverschiebung bei der Verfinsterung der Jupitermonde. Bestimmt man deren Umlaufzeit, während sich die Erde am Jupiternächsten Punkt befindet und berechnet dann voraus, wo die Monde sein müssten, wenn die Erde ein halbes Jahr später um 2 AE weiter vom Jupiter entfernt ist, so findet man eine Zeitverschiebung von ca. 20 min. Hieraus konnte Rømer  $c$  zu etwa  $3 \cdot 10^8\text{ m/s}$  bestimmen.

Die erste "irdische" Messung erfolgte 1840 durch Hippolyte Fizeau (Abb. 1.14). Er benutzte ein sich schnell drehendes Zahnrad, um Lichtpulse zu erzeugen, die nach einer Laufstrecke von ca. 8.6 km gespiegelt wurden und zum Zahnrad zurückkehrten. Der Lichtpuls kann wieder durch das Zahnrad gehen, wenn sich dieses um eine ganze Zahl von Zähnen weitergedreht hat. Die Messung lieferte  $c \approx 3.13 \cdot 10^8\text{ m/s}$ , hatte also einen systematischen Fehler von ca. 5%.



Jupitermonde



Olaf Römer 1644-1710

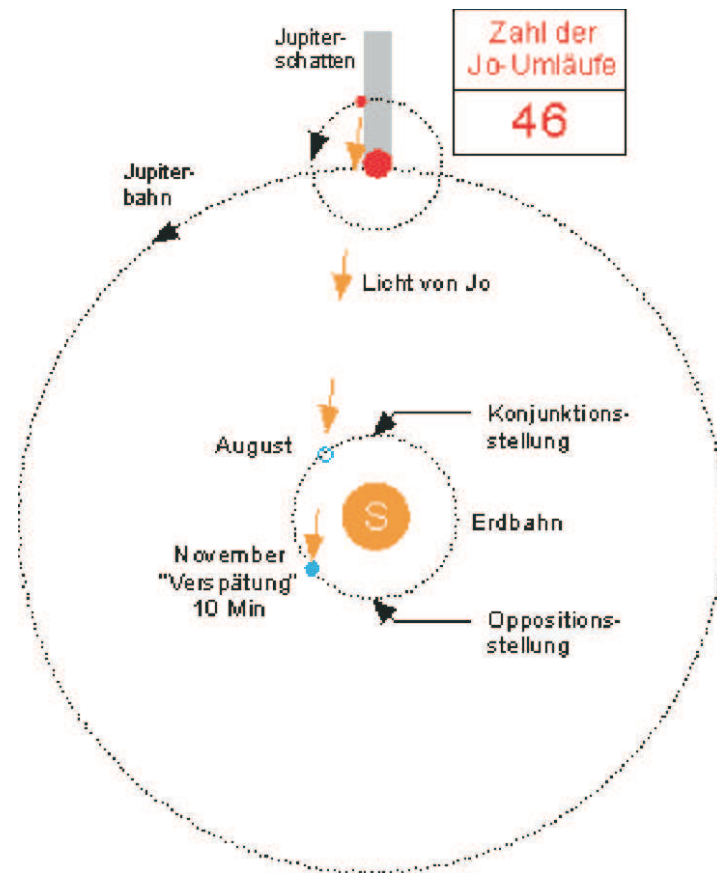


Abbildung 1.13: Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit durch Olaf Römer

([http://www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/U\\_materialien/leifiphysik/web\\_ph09/versuche/09lichtgeschwindigkeit/index.htm](http://www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/U_materialien/leifiphysik/web_ph09/versuche/09lichtgeschwindigkeit/index.htm))

Die letzte Methode, die hier erwähnt werden soll ist die Drehspiegelmethode von Jean Bernhard Foucault (1869). Das Prinzip wird aus Abb. 1.15 klar. Diese Methode lieferte  $c \approx 3 \cdot 10^8$  m/s.

Zum Abschluss sei noch kurz auf die Messmethoden eingegangen, die üblicherweise im Geschwindigkeitsbereich zwischen 30 km/h und gut 200 km/h eingesetzt werden (s. Abb. 1.16). Beim Radarkasten werden Mikrowellen (typische Frequenzen:  $f = 34$  GHz oder  $f = 24$  GHz) am fahrenden Auto reflektiert. Durch den Dopplereffekt ist die Frequenz des reflektierten Strahls etwas höher als die ausgesandte Frequenz, woraus sich die Geschwindigkeit des Wagens bestimmen lässt. Bei der Laserpistole werden kurze Laserpulse ausgesandt. Die rückreflektierten Pulse haben eine etwas höhere Rate als die ausgesandten Pulse, da das Auto zwischen zwei aufeinanderfolgenden Pulsen der Laserpistole etwas entgegengefahren ist.

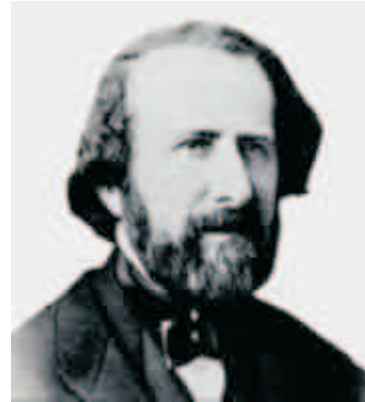
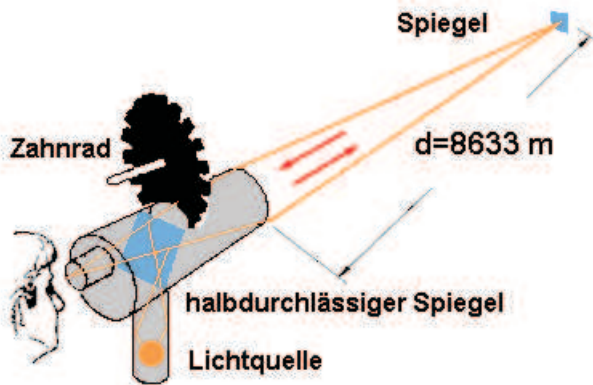
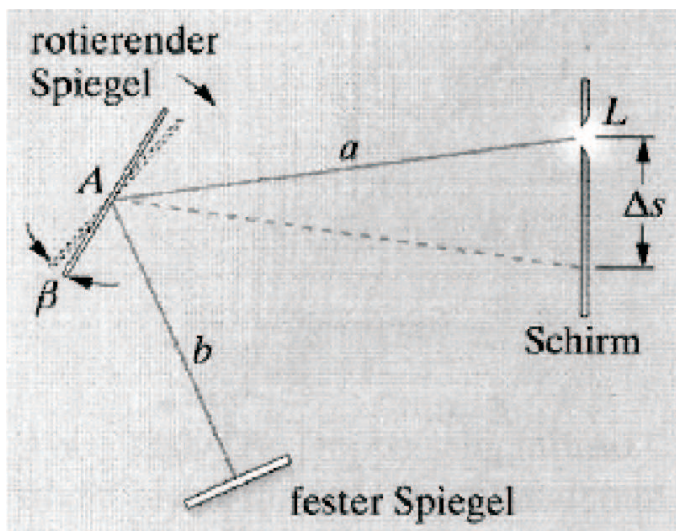


Abbildung 1.14: Zahnradmethode nach Hippolyte Fizeau (1819-1896) zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit ([http://www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/U\\_materialien/leifi-physik/web\\_ph09/versuche/09lichtgeschwindigkeit/index.htm](http://www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/U_materialien/leifi-physik/web_ph09/versuche/09lichtgeschwindigkeit/index.htm))



Jean Bernhard Foucault  
1819-1868

Abbildung 1.15: Drehspiegelmethode nach Foucault, 1869  
<http://www.bingo-ev.de/~kg666/verschie/physiker/foucault.htm>

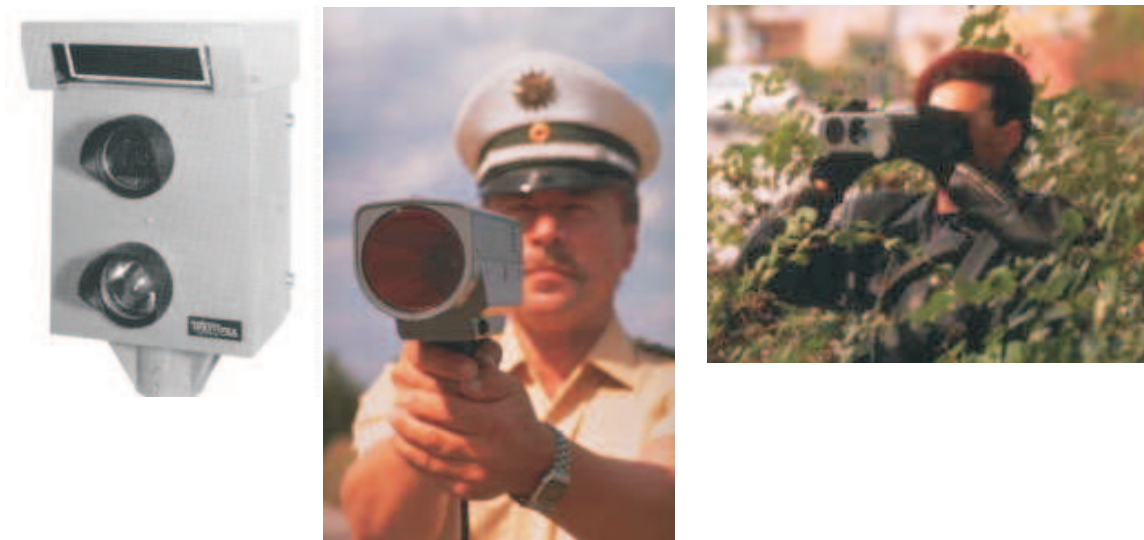


Abbildung 1.16: Radargerät und Laserpistole (<http://www.r-technik.com/mess.htm>)



# Kapitel 2

## Dynamik eines Massenpunktes

### 2.1 Vektoren und Koordinatensysteme

Wir wollen uns zunächst mit der Bewegung von einzelnen Punktteilchen befassen. Diese Bewegung wird mathematisch dadurch beschrieben, dass man zu jedem Zeitpunkt  $t$  die Position des Punktteilchens, also den entsprechenden Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  angibt. Zur eindeutigen Definition dieses Ortsvektors benötigen wir ein Bezugs- oder Koordinatensystem. Dies bedeutet insbesondere, dass man einen **Koordinatenursprung** definiert, so dass die jeweilige Position des betrachteten Punktteilchens durch den Ortsvektor bezogen auf diesen Koordinatenursprung eindeutig definiert ist. Dieser Positionsvektor ist der Relativvektor, der von dem Koordinatenursprung zum Aufenthaltsort des Teilchens zeigt.

Zur Beschreibung dieses Ortsvektors benötigen wir eine Basis für den dreidimensionalen Vektorraum der Ortsvektoren. Für viele Anwendungen ist es geschickt, drei orthonormale Basisvektoren  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$  und  $\hat{e}_z$  zu nehmen. Orthonormale Basisvektoren bedeutet ja, dass diese jeweils senkrecht aufeinander stehen und auf die Länge 1 normiert sind. Für das Skalarprodukt von jeweils zwei dieser Basisvektoren gilt also

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

In dieser Gleichung haben wir auch das Symbol  $\delta_{ij}$ , das Kroneckersche Deltasymbol eingeführt und definiert. Ausserdem soll das System der Basisvektoren **rechtshändig** sein. Dies bedeutet, dass die Basisvektoren für die  $x$ ,  $y$  und  $z$  Richtung geometrisch in die Richtung der gespreizten Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger einer rechten Hand zeigen.

Den Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  unseres Punktteilchens können wir nun eindeutig durch die Koordinaten in Richtung der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse definieren. Anschaulich bedeutet das, dass wir, um vom Koordinatenursprung zum Ort des Teilchens zu gelangen, zunächst eine Entfernung  $x$  (das entspricht gerade der  $x$ -Koordinate) in Richtung der Achse  $\hat{e}_x$  dann eine Strecke  $y$  in Richtung  $\hat{e}_y$  und schliesslich  $z$  in Richtung  $\hat{e}_z$  zurücklegen (siehe Figur 2.1). Mathematisch formuliert:

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z,$$

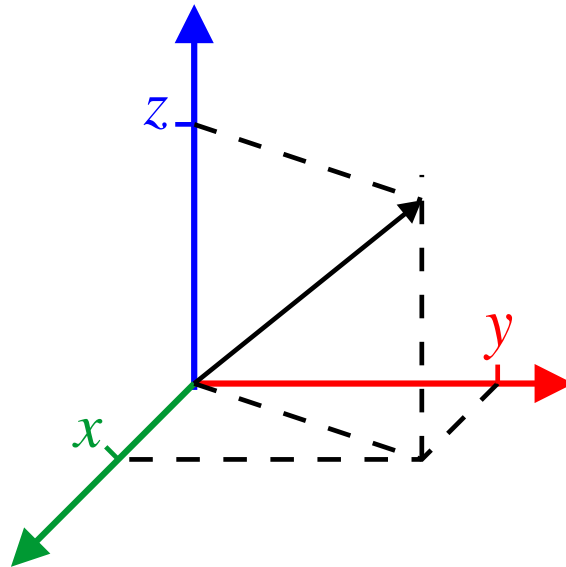


Abbildung 2.1: Darstellung eines Ortsvektors in Kartesischen Koordinaten (siehe Diskussion im Text)

beziehungsweise, wenn wir die Basisvektoren durch entsprechende Spaltenvektoren darstellen

$$\hat{e}_x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

kann man (2.1) auch umschreiben:

$$\vec{r} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Es sollen an dieser Stelle nicht alle Regeln des Rechnen mit Vektoren aufgeführt werden, es sei aber daran erinnert, dass das Produkt eines Vektors  $\vec{r}$  mit einer positiven Zahl (einem Skalar) zum Vektor führt, der in die gleiche Richtung weist, dessen Länge aber um den Faktor  $a$  vergrößert ( $a > 1$ ) oder auch verkleinert ( $a < 1$ ) ist. Ist  $a$  negativ, so steht der Ergebnisvektor  $a\vec{r}$  antiparallel (also parallel aber in umgekehrter Richtung) zum Ausgangsvektor  $\vec{r}$ . Rechnerisch ergibt sich dieses Skalarprodukt in der Schreibweise der Spaltenvektoren zu

$$a\vec{r} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}.$$

Die Addition zweier Vektoren  $\vec{r}_1$  (mit Koordinaten  $x_1, y_1$  und  $z_1$ ) und  $\vec{r}_2$  (mit Koordinaten  $x_2, y_2$  und  $z_2$ ) erfolgt rechnerisch durch

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$



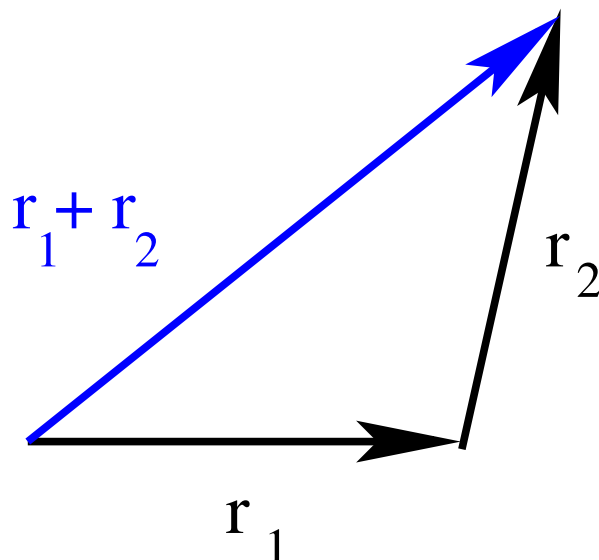


Abbildung 2.2: Die Summe zweier Vektoren (siehe Diskussion im Text)

Geometrisch ist diese Vektoraddition in Figur 2.2 dargestellt.

Ausserdem ist noch ein Skalarprodukt zweier Vektoren definiert. Am Beispiel der Vektoren  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  liefert dieses Skalarprodukt den Wert

$$\vec{r}_1 \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 .$$

Das Ergebnis ist also ein Skalar, eine Zahl. Geometrisch ergibt sich der Wert dieses Skalarproduktes auch aus dem Produkt der Längen der beiden Vektoren  $|\vec{r}_i|$  und dem Kosinus des Winkels  $\varphi$ , der von den Vektoren eingeschlossen wird (siehe Figur 2.3):

$$\vec{r}_1 \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| |\vec{r}_2| \cos(\varphi)$$

Damit ergibt sich für die Länge oder auch den Betrag eines Vektors  $\vec{r}_1$

$$|\vec{r}_1| = \sqrt{r_1^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} .$$

Schliesslich ist auch ein Vektorprodukt zweier Vektoren definiert, bei dem das Ergebnis eben ein Vektor ist. Die Länge des Vektors  $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$  ergibt sich zu

$$|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = |\vec{r}_1| |\vec{r}_2| \sin(\varphi) ,$$

also geometrisch die Fläche des Parallelogramms, das durch  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  aufgespannt ist. Der Vektor  $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$  steht senkrecht zur Fläche, die durch  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  aufgespannt ist entsprechend der rechten Hand Regel. In der Sprache der Spaltenvektoren ergibt sich für das Vektor- oder Kreuzprodukt:

$$|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix} .$$

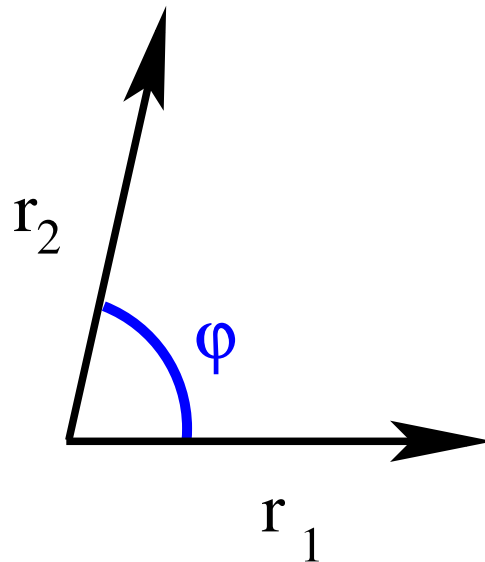


Abbildung 2.3: Das Skalarprodukt zweier Vektoren (siehe Diskussion im Text)

Dies besagt aber auch, dass für das Vektorprodukt der Basisvektoren gilt

$$\hat{e}_x \times \hat{e}_y = \hat{e}_z$$

gilt. Man bezeichnet ein solches rechtshändiges orthonormales Basissystem auch als ein **Kartesisches Koordinatensystem**.

Mit diesem Basissystem kann man jeden Ortsvektor eines Partikels eindeutig durch die Angabe der Entwicklungskoeffizienten für diese Basisvektoren, den Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$ , (vergleiche Gleichung 2.1) identifizieren. Die Bewegung eines solchen Partikels wird dann durch die Angabe der Koordinaten als Funktion der Zeit,  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$  beschrieben.

Die Geschwindigkeit berechnet sich als Quotient aus der Ortsvektors in einem Zeitabschnitt  $\Delta t$  und eben dieser Zeitdifferenz

$$\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Die Geschwindigkeit ist also ebenfalls ein Vektor, der in die Richtung der Bewegung des Teilchens zeigt. Der Betrag dieses Vektors entspricht der üblichen Geschwindigkeitsmessung. Diese Definition einer Geschwindigkeit (nach 2.1) macht Sinn, wenn die Richtung der Bewegung und der Betrag der Geschwindigkeit sich über einen längeren Zeitraum (der größer als  $\Delta t$  sein sollte) nicht ändert. Da wir aber auch Vorgänge behandeln wollen, bei denen sich Geschwindigkeiten schnell ändern können, definiert man die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Die Geschwindigkeit berechnet sich also als Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit. Zur Berechnung einer solchen Ableitung eines Vektors merken wir an, dass die Basisvektoren

$\hat{e}_i$  in dem kartesischen Koordinatensystem unabhängig von der Zeit sind. Dami gilt (siehe Gl.2.1)

$$\begin{aligned}\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dx}{dt} \hat{e}_x + \frac{dy}{dt} \hat{e}_y + \frac{dz}{dt} \hat{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{2.1}$$

wobei wir für die Zeitableitung die übliche Abkürzung

$$\dot{x} := \frac{dx}{dt}$$

eingeführt haben. An diesem Beispiel haben wir gesehen, wie man die Ableitung eines Vektors (hier den Ortsvektor) nach einem Skalar (hier die Zeit) berechnen kann. Insbesondere ergab sich, dass das Ergebnis dieser Ableitung wiederum einen Vektor (hier die Geschwindigkeit) ergibt.

In der Regel wird aber auch die Geschwindigkeit eines Teilchens  $\vec{v}$  von der Zeit abhängen. Dann ist von Interesse, wie sich die Geschwindigkeit pro Zeiteinheit ändert. Ein Maß dafür ist die Beschleunigung, die wir definieren durch

$$\vec{a} := \frac{d\vec{v}}{dt},$$

was bedeutet, dass auch die Beschleunigung  $\vec{a}$  als Vektor definiert ist.

Nachdem wir gelernt haben einen Vektor abzuleiten, wollen in einem nächsten Schritt die Integration eines Vektors diskutieren. Wir betrachten dazu das einfache Wegintegral

$$\begin{aligned}\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} d\vec{r} &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} (\hat{e}_x dx + \hat{e}_y dy + \hat{e}_z dz) \\ &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \\ &= \int_{x_A}^{x_E} \hat{e}_x dx + \int_{y_A}^{y_E} \hat{e}_y dy + \int_{z_A}^{z_E} \hat{e}_z dz \\ &= \hat{e}_x(x_E - x_A) + \hat{e}_y(y_E - y_A) + \hat{e}_z(z_E - z_A) \\ &= \vec{r}_E - \vec{r}_A.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Dieses Wegintegral über die Funktion  $f = 1$  beginnt am Startvektor (untere Integrationsgrenze)  $\vec{r}_A$  und endet am Ort  $\vec{r}_E$ . Wie die einfache Rechnung zeigt, ist das Ergebnis wiederum ein Vektor: der Differenzvektor  $\vec{r}_E - \vec{r}_A$ . Nun wird ein solches Wegintegral mit einem komplizierteren Integranden aber im Allgemeinen davon abhängen, wie wir den Weg von A nach B zurücklegen. Wir müssen dazu diesen Weg **parametrisieren**, indem wir den aktuellen Ortsvektor als Funktion einer skalaren Variablen  $s$  oder  $t$  darstellen. Anschaulich können wir uns unter dieser skalaren Größe die Zeit  $t$  vorstellen, so dass die Parametrisierung des Weges  $\vec{r}(t)$  angibt, wie sich das Teilchen vom Startpunkt  $\vec{r}_A$  zur

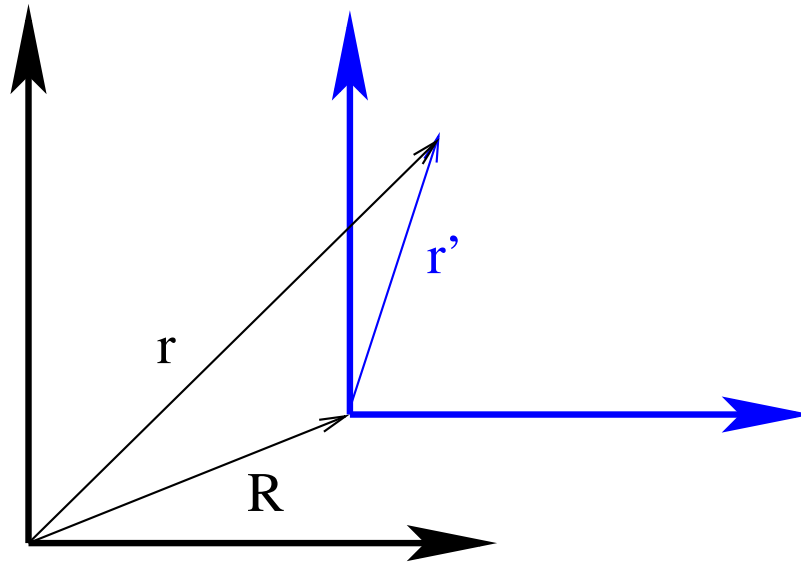


Abbildung 2.4: Transformation zwischen Koordinatensystemen (siehe Diskussion im Text)

Zeit  $t_A$  zum Endpunkt  $\vec{r}_E$ , den es zur Zeit  $t_E$  erreicht bewegt. Damit können wir das Wegintegral von (2.2) schreiben

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_E} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_E} \vec{v}(t) dt.$$

Als ein Beispiel wollen wir nun einen Weg betrachten, bei dem das Teilchen mit einer Geschwindigkeit  $v_0$  am Punkt  $\vec{r}_A$  startet und dann seine Geschwindigkeit mit einer konstanten Beschleunigung  $\vec{a}$  verändert, bis es schliesslich zur Zeit  $t_E$  bei  $\vec{r}_E$  ankommt. Setzen wir also

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_A)$$

in (2.1) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} d\vec{r} &= \vec{v}_0 \int_{t_A}^{t_E} dt + \vec{a} \int_{t_A}^{t_E} (t - t_A) dt \\ &= \vec{v}_0(t_E - t_A) + \frac{1}{2} \vec{a}(t_E - t_A)^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Berücksichtigen wir nun noch (2.2) so ergibt sich für den Vektor des Endpunktes

$$\vec{r}_E = \vec{r}_A + \vec{v}_0(t_E - t_A) + \frac{1}{2} \vec{a}(t_E - t_A)^2.$$

Wir sind bis zu diesem Punkt immer davon ausgegangen, dass wir nur einen Koordinatenursprung haben. Häufig ist es jedoch geschickt einen weiteren Koordinatenursprung einzuführen, der im ersten Koordinatensystem durch den Ortsvektor  $\vec{R}$  gekennzeichnet ist. Die Position unseres Punktteilchens werde im ersten Koordinatensystem durch den Ortsvektor  $\vec{r}$  im zweiten durch  $\vec{r}'$  so gilt die Beziehung (siehe Abb. 2.4)

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

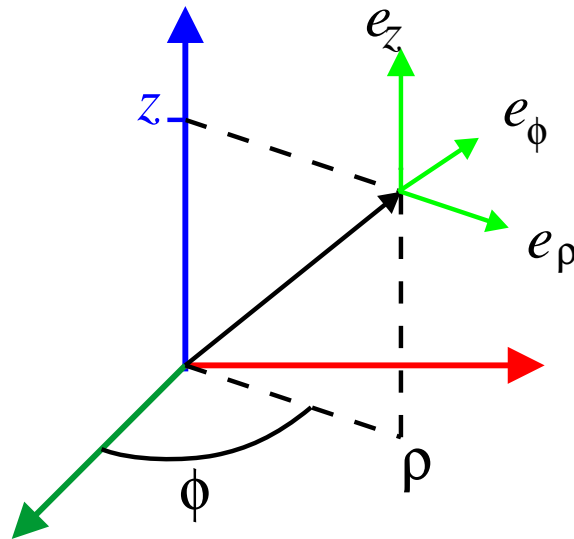


Abbildung 2.5: Darstellung eines Ortsvektors in Zylinderkoordinaten (siehe Diskussion im Text)

Bewegt sich der Koordinatenursprung des zweiten Koordinatensystems relativ zum ersten, ist also  $\vec{R}$  zeitabhängig, so sind die Geschwindigkeiten in den beiden Koordinatensystemen unterschiedlich

$$\vec{v} = \frac{d(\vec{R} + \vec{r}')}{dt} = \vec{V}_0 + \vec{v}'$$

Dies gilt für die Berechnung aber auch für die Messungen von Geschwindigkeiten. Bewegen wir uns z.B. in einem Zug, der mit der Geschwindigkeit  $\vec{V}_0$  durch die Gegend fährt, so wird eine Messung der Geschwindigkeit durch einen Beobachter, der auch im Zug sitzt, ein Ergebnis  $\vec{v}'$  liefern, das anders ist als das Ergebnis  $\vec{v}$  des Beobachters, der ausserhalb des Zuges steht. Die Geschwindigkeiten auch dieser Messungen sind über (2.1) miteinander verknüpft. Bewegt sich der zweite Koordinatenursprung mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{V}_0$  so bezeichnet man die Koordinatentransformation als **Galileitransformation**.

### 2.1.1 Zylinderkoordinaten

In vielen Fällen ist es jedoch geschickter die Ortsvektoren nicht durch die kartesischen Koordinaten sondern durch andere Koordinaten zu beschreiben. Bewegt sich etwa ein Punktteilchen auf der Oberfläche eines Kreises oder eines Zylinders mit dem Radius  $R$ , so empfiehlt es sich ein Koordinatensystem einzuführen, bei dem die  $z$ -Achse parallel zur Symmetrieachse des Zylinders ist. Entsprechend der Darstellung in Abb. 2.5 kann man den Ortsvektor  $\vec{r}$  eindeutig festlegen durch die Angabe der  $z$ -Koordinate sowie des Abstandes des Aufenthaltsortes von der  $z$ -Achse  $\rho$  und des Winkels  $\phi$ , den die Projektion des Ortsvektors auf die  $xy$ -Ebene mit der  $x$ -Achse bildet. Die Koordinaten  $\rho$ ,  $\phi$  und  $z$  lassen

sich aus den kartesischen Koordinaten berechnen

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty] \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x} \in [0, 2\pi] \\ z &= z \in [-\infty, \infty]\end{aligned}\tag{2.4}$$

es existiert aber auch die Umkehrtransformation

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi\end{aligned}\tag{2.5}$$

Für das Beispiel des Punktteilchens, das sich auf dem Mantel eines Zylinders bewegt, vereinfacht sich nun die Beschreibung der Bewegung dadurch, dass die Radialkoordinaten  $\rho(t) = R$  und damit eine Konstante der Bewegung ist.

Die Zylinderkoordinaten sind ein Beispiel für **Krummlinige Koordinaten**. Diese Bezeichnung basiert auf den Eigenschaften der zugehörigen Koordinatenlinien. Beschreibt man einen Vektor durch Koordinaten  $q_i$  ( $i=1,2,3$ ), so sind z.B. die Koordinatenlinien für die Koordinate  $q_3$  definiert

$$\mathcal{L}_{q_3}(q_1, q_2) := \{\text{Linie aus den Punkten mit } q_1 \text{ und } q_2 \text{ fest}\}$$

Bei den Kartesischen Koordinaten,  $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$  sind z.B. die Koordinatenlinien  $\mathcal{L}_z$  Geraden parallel zur  $z$ -Achse. Auch die Koordinatenlinien  $\mathcal{L}_x$  und  $\mathcal{L}_y$  sind jeweils Geraden. Andererseits ist aber im Fall der Zylinderkoordinaten  $\mathcal{L}_\phi$  ein Kreis. Koordinatensysteme, bei denen nicht alle Koordinatenlinien geradlinig sind, bezeichnet man als Krummlinige Koordinaten.

Natürlich kann man nach wie vor die kartesischen Basisvektoren  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$  und  $\hat{e}_z$ , beziehungsweise die entsprechenden Spaltenvektoren benutzen um auch unter Benutzung von Zylinderkoordinaten die Vektoren darzustellen. Wegen (2.4) gilt ja

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix}.$$

Häufig ist es aber effizienter, mit den gewählten Koordinaten  $q_i$  auch die zugehörigen Basisvektoren  $\hat{e}_{q_i}$  zu benutzen. Für einen Punkt  $P$  im Ortsraum, bezeichnet  $\hat{e}_{q_i}$  den Einheitsvektor, der tangential zur Koordinatenlinie  $\mathcal{L}_{q_i}$  am Punkt  $P$  verläuft und dabei in Richtung der anwachsenden Koordinate  $q_i$  weist. Aus dieser geometrischen Definition, ergibt sich die folgende Regel zur Berechnung<sup>1</sup>

$$\hat{e}_{q_i} = a \frac{\partial \vec{r}(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_i}$$

---

<sup>1</sup>Wir führen an dieser Stelle die Bezeichnung  $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$  für die partielle Ableitung der Funktion  $f$  nach der Variablen  $x$  ein. Dies bedeutet, dass bei der Ableitung der Funktion  $f$ , die von verschiedenen Variablen  $x, y, z$  abhängen soll, nur die Ableitung nach der Variablen  $x$ , so wie sie explizit vorkommt, berechnet wird. Die Variablen  $y$  und  $z$  werden bei dieser Ableitung konstant gehalten.

wobei die Normierungskonstante so zu bestimmen ist, dass  $|\hat{e}_{q_i}| = 1$  ist. Man kann leicht verifizieren, dass für das Beispiel der Zylinderkoordinaten gilt

$$\begin{aligned}\hat{e}_\rho &= \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{e}_\phi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.6)$$

Diese 3 Vektoren bilden ebenfalls ein orthogonales Basissystem, ändern sich aber mit dem jeweiligen Punkt  $P$  beziehungsweise dem zugehörigen Ortsvektor. Andererseits vereinfacht sich aber die Schreibweise des Ortsvektors in dieser Basis zu

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z.$$

Bei der Berechnung der Geschwindigkeit muss in dieser Darstellung beachtet werden, dass die Basisvektoren  $\hat{e}_\rho$  und  $\hat{e}_\phi$  sich mit dem Ortsvektor ändern. Bei der Bewegung eines Punktteilchens gilt also für die zeitliche Änderung des jeweiligen Basisvektors  $\hat{e}_\rho$

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\phi} \hat{e}_\phi$$

Damit ergibt sich für die Geschwindigkeit als Ableitung von  $\vec{r}$  aus (2.1.1) nach der Zeit

$$\vec{v} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z.$$

Die Geschwindigkeitskomponente in Richtung  $\hat{e}_\rho$  bezeichnet man häufig als Radialgeschwindigkeit und die in Richtung  $\hat{e}_\phi$  als Azimuthalgeschwindigkeit. Ganz entsprechend berechnet sich die Beschleunigung als Zeitableitung dieses Geschwindigkeitsvektors zu

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{[\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2]}_{\text{Radial-}} \hat{e}_\rho + \underbrace{[2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}]}_{\text{Azimuthalbeschl.}} \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z.$$

Ein weiteres häufig benutztes Beispiel für krummlinige Koordinaten sind die Kugelkoordinaten oder Polarkoordinaten  $r$ ,  $\theta$  und  $\phi$ . Dabei bezeichnet  $r$  die Länge des Vektors,  $\theta$  den Winkel mit der  $z$ -Achse und  $\phi$ , analog zu den Zylinderkoordinaten, den Azimuthwinkel. Es gilt also die Transformation

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta\end{aligned}\quad (2.7)$$

mit den Definitionsbereichen

$$r \in [0, \infty] \quad \theta \in [0, \pi] \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

Mit dem Einheitsvektor

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

gilt

$$\vec{r} = r \hat{e}_r.$$





## 2.2 1. und 2. Newton'sches Axiom; schwere und träge Masse

Im letzten Abschnitt haben Sie einige Begriffe wie Vektoren, Koordinatensysteme, Ort, Geschwindigkeit oder Beschleunigung kennengelernt, die ganz allgemein bei der Beschreibung der Bewegung von Massenpunkten wichtig sind.

Wir wollen uns jetzt der Bewegung einzelner Massenpunkte zuwenden, wie sie tatsächlich in der Natur realisiert sind.

Der einfachste "Bewegungs"-Zustand eines Massenpunktes (z. B. eines Balls) ist der ruhende Zustand, in dem der Ball auf einer Unterlage (z. B. Boden des Hörsaals) ruht. Wir können diesen Zustand dadurch beschreiben, dass wir dem Ball eine feste Koordinate eines (z. B. kartesischen) Koordinatensystems zuordnen, das seinerseits fest mit dem Boden des Hörsaals verbunden ist .

Als nächstes können wir den Ball über den Boden rollen lassen. Wir stellen fest, dass sich der Ball geradlinig fortbewegt und nach einer gewissen Strecke zur Ruhe kommt.

Wie können wir diese Bewegung interpretieren?

**Vermutung 1** wäre, dass eine Kraft notwendig ist, um den Ball geradlinig fortzubewegen. Diese Vorstellung geht auf Aristoteles zurück und blieb bis ins Mittelalter aktuell. Die entsprechende Kraft wurde "vis viva" genannt. Im Rahmen der Vermutung 1 ist ein ganz spezielles Bezugssystem ausgezeichnet, nämlich das, in dem der Ball ruht. In einem mittelalterlichen Weltbild, in dem die ruhende Erde den Mittelpunkt des Weltalls bildet und sich alles um die Erde dreht, war dies sehr vernünftig. Im Gegensatz dazu steht

**Vermutung 2:**

"Alle Körper verharren im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn keine äußeren Einflüsse vorhanden sind"

Diese Vermutung ist das **1. Newtonsche Axiom**, auch "**Trägheitsgesetz**" genannt.

Wenn das Trägheitsgesetz gültig ist, müssen wir erklären, warum der Ball nach einiger Zeit zur Ruhe kommt. Der Grund besteht darin, dass eine **Reibungskraft** zwischen dem Boden und dem Ball wirkt, die den Ball allmählich abbremsst.

Wir können die Reibungskraft im Versuch dadurch minimieren, dass wir anstelle des Balls eine Dose auf einem Luftkissen über eine glatte Unterlage gleiten lassen. Die Dose bewegt sich sehr lange weiter, wobei sie jeweils am der Begrenzung des Tisches reflektiert wird. Um das Luftkissen zu erzeugen, befindet sich im Innern der Dose ein Behälter mit flüssigem Stickstoff. Dieser siedet bei einer Temperatur von 77 Kelvin (-196 °C) und entwickelt dabei ständig gasförmigen Stickstoff, der durch ein Loch im Boden der Dose entweicht und so das Luftkissen aufbaut.

Das Trägheitsgesetz ist das erste von drei "Newtonschen Axiomen", auf denen die klassische Mechanik aufgebaut ist.

Wir können den Begriff der **Kraft** nun dadurch einführen, dass wir sagen, dass die Kraft die **Ursache für die Änderung des Bewegungszustands eines Körpers** ist.

Nach Newton können wir dies wie folgt definieren (**Zweites Newtonsches Axiom** oder "**Aktionsprinzip**"):

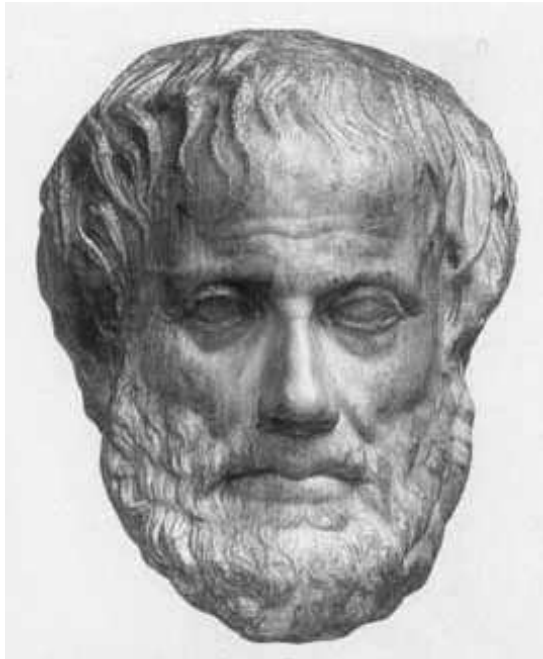


Abbildung 2.6: Aristoteles, 384-322 v. Chr. (links), Sir Isaac Newton, 1643-1727 (rechts) (aus: <http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/BiogIndex.html>; hier findet man auch die Biographien sehr vieler Physiker und Mathematiker)

”Wenn eine Kraft  $\vec{F}$  auf einen Körper wirkt, dann beschleunigt sie ihn mit:

$$\vec{F} = m_t \vec{a} \quad (2.8)$$

Hierbei ist  $m_t$  die ”träge Masse”, die durch das Aktionsprinzip definiert wird. Die Größe  $\vec{a}$  ist der Beschleunigungsvektor. Die träge Masse ist ein Skalar. Damit ist offensichtlich auch die Kraft  $\vec{F}$  ein Vektor<sup>2</sup>.

Wir können an dieser Stelle ebenfalls den **Impuls**  $\vec{p}$  einführen:

$$\vec{p} = m_t \vec{v} \quad (2.9)$$

Damit schreibt sich das Aktionsprinzip:  $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$  mit:  $\dot{\vec{p}} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}$ . (Das Zeichen ” $\equiv$ ” bedeutet ”identisch”).

Die Einführung des Impulses  $\vec{p}$  ergibt an dieser Stelle im Grunde nicht mehr als die Einsparung des Symbols  $m_t$ . Der Impuls bekommt aber erheblich mehr Bedeutung, sobald wir uns Problemen zuwenden, die mehr als einen beweglichen Massenpunkt involvieren.

Wir müssen nun einige Kräfte explizit einführen. Eine erste Kraft - die Reibungskraft - hatten wir bereits im Zusammenhang mit dem rollenden Ball kurz angesprochen. Reibungskräfte werden wir etwas später genauer diskutieren.

<sup>2</sup>Wir werden die Vektoreigenschaften der Kraft noch an einigen Beispielen demonstrieren.

Die Kraft, die wir an dieser Stelle betrachten wollen, ist die **Gewichtskraft**  $\vec{F}_g$  wie sie auf der Erdoberfläche wirkt und Massenpunkte "nach unten", d. h. in Richtung des Erdmittelpunktes zieht.

Wir wollen diese Kraft zunächst mit Hilfe einer Spiralfeder charakterisieren, an die wir unterschiedliche Objekte hängen. Wir stellen fest:

1. wenn wir Körper gleichen Materials und gleichen Volumens an die Feder hängen, wird diese jeweils gleich weit "nach unten" ausgedehnt.
2. wenn wir  $N$  Körper gleichen Materials und gleichen Volumens an die Feder hängen, wird diese proportional zu  $N$  ausgedehnt.
3. Körper gleichen Volumens, aber unterschiedlichen Materials dehnen die Feder i. allg. unterschiedlich weit aus

Auf der Basis dieser Beobachtung können wir nun die "schwere Masse"  $m_s$  eines Körpers dadurch definieren, dass wir sagen, Körper gleicher Masse sollen die Spiralfeder um gleiche Abstände in Richtung des Erdmittelpunktes ausdehnen. Die Gewichtskraft ist also proportional zu  $m_s$ . Wenn wir  $m_s$  die gleiche Einheit wie für die träge Masse geben, so hat der Proportionalitätsfaktor, den wir  $g$  nennen wollen, die Dimension einer Beschleunigung. Wir bezeichnen  $g$  als die "Erdbeschleunigung".

Wir haben also:

$$\text{Gewichtskraft:} \quad \vec{F}_g = m_s \vec{g} \quad (2.10)$$

Hierbei zeigen  $\vec{F}_g$  und  $\vec{g}$  in Richtung Erdmittelpunkt.

Die **SI-Einheit** der schweren bzw. trägen Masse ist 1 **Kilogramm**.

1 kg war ursprünglich definiert durch die Masse von 1 dm<sup>3</sup> Wasser bei 4°C und 1 bar Druck und ist jetzt definiert durch das "Archivkilogramm", einem in Paris aufbewahrten Platin-Iridium-Zylinder.

Mit der Einheit m/s<sup>2</sup> für Beschleunigungen erhalten wir als **SI-Einheit der Kraft**: 1 **Newton** (1 N = 1 kg m/s<sup>2</sup>)

Im im **cgs-System** ist die **Einheit der Kraft** 1 **dyn** = 1 gcm/s<sup>2</sup> = 10<sup>-5</sup> N.

Wir wollen nun die schwere und die träge Masse eines Körpers experimentell vergleichen. Hierzu lassen wir zunächst Körper verschiedenen Materials und unterschiedlicher schwerer Masse aus einer Höhe  $h$  auf den Boden fallen.

Die Körper sind:

- eine Stahlkugel
- eine gleich große Holzkugel, die deutlich leichter ist als die Stahlkugel
- eine (sehr leichte) Vogelfeder

Die Stahlkugel und die Holzkugel treffen praktisch gleichzeitig am Boden auf, was zur Vermutung führt, Körper unterschiedlicher schwerer Masse fallen gleich schnell. Die wesentlich größere Fallzeit der Feder scheint allerdings dagegen zu sprechen. Um zu sehen, ob dies auf Reibungskräfte zurückzuführen ist, bringen wir eine Stahlkugel und eine Daunenfeder in ein Rohr, evakuieren dieses und lassen Stahlkugel und Feder eine Strecke von 1 m fallen. Wir beobachten, dass beide Objekte gleichzeitig aufschlagen (die Fallzeit beträgt ca. 0.45 s).

Wir stellen fest: Die Fallzeit von Körpern ist unabhängig von ihrer schweren Masse. Damit scheint die Beschleunigung, die auf die Körper wirkt, für alle Massenpunkte die gleiche zu sein.

Diese Beobachtung wollen wir mit Hilfe des Aktionsprinzips quantitativ auswerten:

Es gilt:

$$\vec{F} = m_t \vec{a} \quad (\text{Aktionsprinzip}) \quad (2.11)$$

Wir setzen jetzt  $\vec{F} = \vec{F}_g$  und erhalten:  $m_s \vec{g} = m_t \vec{a}$  Hieraus folgt

$$\vec{a} = \frac{m_s}{m_t} \vec{g}. \quad (2.12)$$

Da  $\vec{a}$  aber für alle Körper gleich ist, folgt hieraus, dass das Verhältnis  $\frac{m_s}{m_t}$  für alle Körper gleich ist. **Schwere und träge Masse sind also äquivalent**; wir können ohne weitere Einschränkung  $\mathbf{m}_s = \mathbf{m}_t \equiv m$  setzen.

Nun wollen wir den Fall von Stahlkugel und Daunenfeder weiter auswerten:

Wir integrieren die Bewegungsgleichung  $m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \ddot{\vec{x}}$ ,

die wir, wenn wir den Einheitsvektor  $\vec{e}_z$  entgegen der Fallrichtung "nach oben" zeigen lassen, auch ohne Vektorpfeile als

$$m \cdot g = -m \cdot \ddot{z} \quad \text{bzw. als} \quad \ddot{z} = -g \quad (2.13)$$

schreiben können. Die Gleichung wird gelöst durch:

$$z(t) = z(0) - v(0) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.14)$$

Hierbei messen wir die Zeit  $t$  von dem Moment, in dem wir den Körper fallen lassen. Die Startgeschwindigkeit  $v(0)$  sei null, die Höhe  $z(0)$ , aus der der Körper fällt, sei  $h$  und der Aufschlagpunkt habe die Koordinate  $z = 0$ . Damit erhalten wir für den Aufschlagpunkt:

$$0 = h - \frac{1}{2}gt_a^2 \quad (2.15)$$

wobei  $t_a$  die Aufschlagszeit ist. Hieraus ergibt sich  $g = \frac{2h}{t_a^2}$ . Beim Fall der Stahlkugel und der Daunenfeder war  $h = 1$  m und  $t_a = 0.45$  s, woraus sich  $g$  zu  $9.9 \frac{m}{s^2}$  bestimmt.

Der Literaturwert beträgt:  $\mathbf{g = 9.81 \frac{m}{s^2}}$  für einen Ort auf dem **50. Breitengrad** (es stellt sich heraus, dass  $g$  leicht vom Breitengrad abhängt. Am Pol ist  $g = 9.83 \frac{m}{s^2}$ , am Äquator  $9.78 \frac{m}{s^2}$ ).

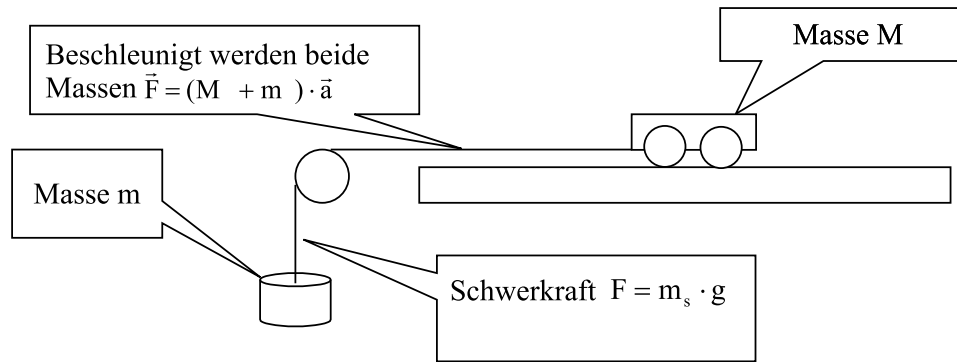


Abbildung 2.7: Wagen der Masse  $M$  auf einer Luftkissenfahrbahn, der nahezu reibungsfrei durch eine Masse  $m$  gezogen wird. Die symbolisch gezeichneten Räder des Wagens sind im Versuch nicht vorhanden. Statt dessen hebt ein von der Fahrbahn ausgehender Luftstrom den Wagen an (Zeichnung nach: Skript Ihringer).

In einem weiteren Versuch vergleichen wir nun das Verhältnis von träger zu schwerer Masse unterschiedlicher Körper. Hierzu wird ein Wagen der Masse  $M$  auf einer **Luftkissenfahrbahn** so gut wie reibungsfrei von einer Masse  $m$  gezogen (s. Abb. 2.7).

Auf die Masse  $m$  wirkt nun die Gewichtskraft  $\vec{F}_g = m_s \vec{g}$ . Diese wird durch die Rolle umgelenkt und zieht den Wagen. Beschleunigt werden die Massen  $m_t$  und  $M_t$ . Es gilt also:

$$(M_t + m_t) \cdot a = m_s \cdot g \quad (2.16)$$

Im Versuch ist zunächst  $M \approx 192$  g und  $m \approx 4,6$  g. Wir haben, da  $M \gg m$  ist:

$$a = \frac{m_s}{M_t + m_t} \cdot g \approx \frac{m_s}{M_t} \cdot g \quad (2.17)$$

d. h. wir vergleichen jetzt das Verhältnis schwere/träge Masse *verschiedener* Körper

Zur Startzeit  $t = 0$  ist die Geschwindigkeit des Wagens  $v(0) = 0$ . Wir erhalten für eine Laufstrecke  $\Delta x$ :

$$\Delta x = x(t_1) - x(0) = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \approx \frac{1}{2} \frac{m_s}{M_t} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \quad (2.18)$$

Man sieht im Experiment:

- Bei einer Änderung der Laufstrecke  $\Delta x$  von 30 cm auf 1.2 m verdoppelt sich (ungefähr) die Laufzeit  $\Delta t$
- erhöht man für  $\Delta x = 1.2$  m die Masse  $M$  um einen Faktor 4, verdoppelt sich ebenfalls ungefähr die Laufzeit
- erhöht man für  $\Delta x = 1.2$  m sowohl  $M$  als auch  $m$  um einen Faktor 4, erhält man die gleiche Laufzeit

Auch das Verhältnis träge/schwere Masse unterschiedlicher Körper lässt also keinen Unterschied zwischen schwerer und träger Masse erkennen.

## 2.3 Arbeit und Energie

Wenn sich ein Massenpunkt in einem Kraftfeld bewegt so wird er entweder beschleunigt oder abgebremst. Man sagt auch an ihm wird vom Kraftfeld eine gewisse Arbeit geleistet, die dann zu einer größeren Geschwindigkeit führt. Etwas präziser formuliert, definieren wir die Arbeit, die an einem Körper geleistet wird, wenn er in einem Kraftfeld  $\vec{F}$  die Wegstrecke  $\Delta\vec{r}$  zurücklegt durch

$$\Delta W = \vec{F} \Delta\vec{r}.$$

Zur weiteren Veranschaulichung dieser Definition machen wir die folgenden Bemerkungen:

- Bezeichnet  $\varphi$  den Winkel zwischen der Richtung der Kraft  $\vec{F}$  und der Richtung der Bewegung des Körpers  $\Delta\vec{r}$ , so können wir (2.3) auch in der Form schreiben:

$$\Delta W = |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos \varphi.$$

Die übertragene Arbeit ist also maximal, wenn  $\varphi = 0$ , also die Richtung der Kraft und die Bewegungsrichtung parallel zueinander stehen. In diesem Fall ist  $\Delta W$  positiv, der Körper wird beschleunigt. Die Beschleunigung beziehungsweise die zugeführte Arbeit wächst proportional zur Stärke der Kraft  $|\vec{F}|$  und zur Länge des Wegstückes  $|\Delta\vec{r}|$ .

- Ist die Richtung der Bewegung  $\Delta\vec{r}$  antiparallel zu  $\vec{F}$ , so ist die am Körper geleistete Arbeit negativ, der Körper wird abgebremst.
- Stehen die Vektoren  $\vec{F}$  und  $\Delta\vec{r}$  unter einem beliebigen Winkel zueinander, so können wir (2.3) entweder so interpretieren, dass nur der Anteil  $|\vec{F}| \cos \varphi$ , also der Anteil von  $\vec{F}$ , der parallel zu  $\Delta\vec{r}$  steht, auf den Körper wirkt oder dass lediglich die Wegstrecke  $|\Delta\vec{r}| \cos \varphi$  zurückgelegt wird.
- Die Arbeit wird angegeben in Einheiten einer Kraft mal den Einheiten einer Länge. Wir definieren dafür die Einheiten **Joule**, beziehungsweise **Newton-Meter [Nm]**, durch

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1 \text{ Nm}.$$

Ändert sich das Kraftfeld als Funktion des Ortes oder ist der Weg, den der Massenpunkt zurücklegt nicht gradlinig, so müssen wir die Definition der Arbeit in (2.3) auf differenziell kleine Wegstrecken  $d\vec{r}$  zurückführen und für den entsprechenden differenziell kleinen Beitrag der Arbeit  $dW$  schreiben

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Die Arbeit, die insgesamt an dem Körper geleistet wird, wenn er sich in dem Kraftfeld von einem Punkt  $\vec{r}_1$  nach einem Punkt  $\vec{r}_2$  entlang eines Weges bewegt, errechnet sich dann als die Summe dieser Elemente  $dW$ , beziehungsweise als Integral

$$W = \int_{\vec{r}_1, \text{Weg}}^{\vec{r}_2} dW = \int_{\vec{r}_1, \text{Weg}}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Wie berechnet man aber ein solches **Linien-** oder **Wegintegral**? Wie kann ich mathematisch beschreiben über welchen Weg ich mich von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  bewege?

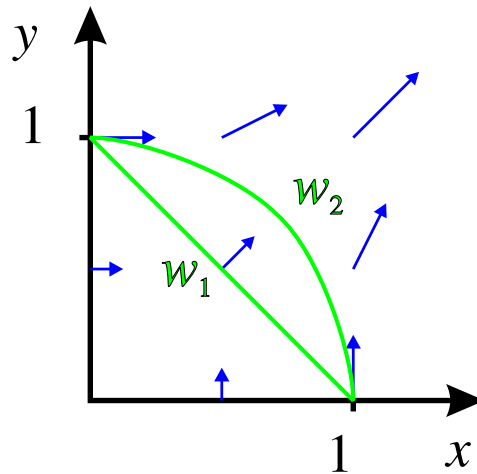


Abbildung 2.8: Beispiel für Berechnung von Wegintegralen

### 2.3.1 Berechnung von Wegintegralen

In diesem Abschnitt soll die Berechnung von Weg- oder Linienintegralen dargestellt und veranschaulicht werden. Als konkretes Beispiel wollen wir das Wegintegral

$$\int_{\vec{r}_1, \text{Weg}}^{\vec{r}_2} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r}$$

des Vektorfeldes  $\vec{A}(\vec{r})$  vom Startpunkt  $\vec{r}_1$  zum Endpunkt  $\vec{r}_2$  über einen bestimmten Weg betrachten. In unserem Beispiel seien

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} ay \\ ax \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

so wie in Abb. 2.8 dargestellt. Als ersten Weg soll die direkte Verbindungslinie von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  betrachtet werden. Diese Gerade wird parameterisiert in der Form

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t \\ &= \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

wobei man sich den Parameter  $t$  als Zeitparameter veranschaulichen kann und  $\vec{r}(t)$  als den Aufenthaltsort zur Zeit  $t$ . Man realisiert leicht, dass die Funktion  $\vec{r}(t)$  genau die Verbindungsgerade beschreibt, wobei wir zur Zeit  $t = 0$  am Startpunkt und zur Zeit  $t = 1$  am Endpunkt des Weges angelangt sind. Damit berechnet sich das Wegintegral

über diesen Weg  $W1$  zu

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_1, W1}^{\vec{r}_2} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{A}(\vec{r}(t)) \frac{d\vec{r}}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} at \\ a(1-t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 (-2at + a) dt = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Als Alternativweg  $W2$  betrachten wir den Kreisbogen in Abb. 2.8, der parameterisiert wird durch die Vektorfunktion

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} t \\ \sin \frac{\pi}{2} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit berechnet sich das entsprechende Wegintegral

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_1, W2}^{\vec{r}_2} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} a \sin \frac{\pi}{2} t \\ a \cos \frac{\pi}{2} t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t \\ \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \frac{a\pi}{2} \left( -\sin^2 \frac{\pi}{2} t + \cos^2 \frac{\pi}{2} t \right) dt \end{aligned} \quad (2.21)$$

Auch in diesem Fall ergibt die Auswertung des Integrals (nach etwas längerer Rechnung) den Wert 0. Der Wert des Integrals ist also in diesem Fall unabhängig davon, ob man entlang des Weges  $W1$  oder entlang des Weges  $W2$  integriert. Wir werden weiter unten sehen, dass dieses Ergebnis kein Zufall ist.

### 2.3.2 Gradient eines Skalarfeldes

Bei der Beschreibung von physikalischen Phänomenen werden häufig **Skalarfelder** oder auch **Vektorfelder** benutzt. Wir wollen diese Begriffe zunächst definieren und durch Beispiele konkretisieren.

**Definitionen:**

- Mathematisch gesehen ist ein Skalarfeld eine Abbildung,  $\Phi(\vec{r})$ , die jedem Ortsvektor  $\vec{r}$  des 3-dimensionalen Raumes einen Skalar, also eine Zahl  $\Phi$  zuordnet.
- Dementsprechend ist ein Vektorfeld  $\vec{A}(\vec{r})$  eine Abbildung des 3-dimensionalen Raumes nach  $\mathfrak{R}^3$ , jedem Ortsvektor  $\vec{r}$  wird eine Vektor  $\vec{A}$  zugeordnet.

Als ein Beispiel für ein Skalarfeld mit physikalischer Bedeutung kann man das Temperaturfeld  $T(\vec{r})$  betrachten: an jedem Punkt im Raum,  $\vec{r}$ , kann man die lokale Temperatur feststellen und so die gesamte Temperaturverteilung angeben. Als ein Beispiel für eine mathematisch definiertes Skalarfeld sei die Funktion

$$\Phi(\vec{r}) = |\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



aufgeführt.

Betrachtet man andererseits die Strömung eines fließenden Gewässers oder auch der uns umgebenden Luft, so können wir jedem Ortsvektor die lokale Strömung an diesem Ort, also die Richtung und den Betrag der jeweiligen mittleren Geschwindigkeiten der Wasser- oder Luftmoleküle angeben. Dieses Geschwindigkeitsfeld  $\vec{V}(\vec{r})$  ist ein Beispiel für ein Vektorfeld. Ein weiteres Beispiel für ein Vektorfeld ist das Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r})$ , das angibt, welche Kraft auf ein Testteilchen an einem gegebenen Ort  $\vec{r}$  wirkt.

Für ein beliebiges Skalarfeld  $\Phi(\vec{r})$  können wir nun den Gradienten dieses Skalarfeldes an einem Punkt  $\vec{r}_0$  definieren. Die geometrisch anschauliche Definition definiert diesen Gradienten von  $\Phi$  am Ort  $\vec{r}_0$ ,  $\text{Grad } \Phi(\vec{r}_0)$ , als den Vektor, der in die Richtung weist, in der das skalare Feld  $\Phi$  am Punkt  $\vec{r}_0$  am stärksten ansteigt. Die Länge dieses Vektors entspricht dem Betrag dieses stärksten Anstiegs.

Wir werden nun zeigen, dass aus dieser Definition folgt:

- Mit dem Gradienten Operator können wir das totale Differenzial  $d\Phi$  des Skalarfeldes umschreiben in das Skalarprodukt:

$$d\Phi = \text{Grad } \phi \cdot d\vec{r}$$

wobei  $d\vec{r}$  der infinitesimale Vektor ist mit den kartesischen Komponenten  $dx$ ,  $dy$  und  $dz$

- In der kartesischen Darstellung kann man den Gradienten einfach berechnen zu

$$\text{Grad } \Phi = \vec{\nabla} \Phi = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \Phi$$

wobei wir hier und im folgenden die Abkürzung benutzen

$$\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$$

Zum Beweis dieser Behauptungen betrachten wir die Änderung des Skalarfeldes  $\Phi(\vec{r})$ , wenn man sich um ein kleines Stück  $\Delta\vec{r}$  vom Referenzpunkt  $\vec{r}_0$  fortbewegt. Wenn der Differenzvektor  $\Delta\vec{r}$  sehr klein ist, kann man den Wert des Skalarfeldes  $\Phi$  an der Stelle  $\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}$  durch eine Taylorentwicklung von  $\Phi$  am Punkte  $\vec{r}_0$  bestimmen. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\vec{r}_0) &= \Phi(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) - \Phi(\vec{r}_0) \\ &= \Phi(\vec{r}_0) + \underbrace{\partial_x \Phi}_{=\Delta x} \Delta x + \partial_y \Phi \Delta y + \partial_z \Phi \Delta z + \dots - \Phi(\vec{r}_0) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dabei haben wir die Terme in zweiter und höherer Ordnung in den Verschiebungen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\Delta z$  der kartesischen Koordinaten von  $\Delta\vec{r}$  nicht explizit aufgeführt (dargestellt durch  $\dots$ ), da wir für kleine Verschiebungen  $\Delta\vec{r}$  diese nicht linearen Terme vernachlässigen können.

Die Differenzialform einer Funktion  $f(x_i)$ , die von Parametern  $x_i$  abhängt ist definiert als

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Aus dem Vergleich dieser Definition mit der Darstellung von  $\Delta\Phi$  in (2.22) sieht man also, dass die Differenzialform  $d\Phi$  (wobei  $\Phi$  von den Variablen  $x_i = x, y, z$  abhängt) gerade dem Grenzfall von  $\Delta\Phi$  entspricht mit  $\Delta x \rightarrow dx$ ,  $\Delta y \rightarrow dy$  und  $\Delta z \rightarrow dz$ . In diesem Grenzfall infinitesimaler Verschiebungen gilt insbesondere, dass die nichtlinearen Term in den Verschiebungen vernachlässigbar sind. Damit können wir also  $d\Phi$  interpretieren als die Änderungen von  $\Phi$  wenn eine infinitesimale Verrückung, dargestellt durch

$$d\vec{r} = \hat{e}_x dx + \hat{e}_y dy + \hat{e}_z dz,$$

vorgenommen wird. Man kann also schreiben

$$\begin{aligned} d\Phi &= \partial_x \Phi dx + \partial_y \Phi dy + \partial_z \Phi dz \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x \Phi \\ \partial_y \Phi \\ \partial_z \Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \\ &= \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} \\ &= |\vec{\nabla} \Phi| |d\vec{r}| \cos \alpha \end{aligned} \tag{2.23}$$

wobei der Winkel  $\alpha$  in der letzten Zeile gerade dem Winkel zwischen den Vektoren  $\vec{\nabla} \Phi$  und  $d\vec{r}$  bezeichnet. Bei dem Übergang zur letzten Zeile wurde also benutzt, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren sich als Produkt der Beträge multipliziert mit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels berechnet. Die Änderung des Skalarfeldes  $\Phi$ ,  $d\Phi$ , ist also dann maximal, wenn der Winkel  $\alpha = 0$  ist, wir also eine Änderung des Ortsvektors  $d\vec{r}$  betrachten, die in Richtung des Vektors  $\vec{\nabla} \Phi$  verläuft. Damit ist also der Vektor  $\vec{\nabla} \Phi$  parallel zum Vektor Grad  $\Phi$ . Ausserdem sind auch die Beträge identisch, denn für  $\cos \alpha = 1$  gilt ja

$$\frac{d\Phi}{|d\vec{r}|} = |\vec{\nabla} \Phi| = |\text{Grad } \Phi|$$

Damit ist also (2.22) bewiesen. Gleichzeitig können wir aber auch aus der dritten Zeile von (2.23) den Beweis von (2.3.2) ablesen.

Als einfaches Beispiel für die Berechnung des Gradienten nach (2.22) betrachten wir das Skalarfeld aus (2.3.2). Der Gradient berechnet sich in diesem Fall

$$\text{Grad } \Phi = \vec{\nabla} \Phi = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2\vec{r}.$$

Der Gradient kann aber natürlich in anderen Koordinaten als den kartesischen Koordinaten berechnet werden. Als Beispiel soll hier der Gradient in Zylinderkoordinaten und in Kugelkoordinaten (auch Polarkoordinaten genannt) angegeben werden.

In Zylinderkoordinaten stellt sich der Gradient dar in der Form

$$\vec{\nabla} \Phi = O_\rho \hat{e}_\rho + O_\phi \hat{e}_\phi + O_z \hat{e}_z.$$

Dabei sind die Vektoren  $\hat{e}_\rho$ ,  $\hat{e}_\phi$  und  $\hat{e}_z$  die Basisvektoren für die Zylinderkoordinaten, die wir im Abschnitt 1.1 eingeführt haben. Die Operatoren in (2.3.2) sind gegeben durch

$$\begin{aligned} O_\rho &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \\ O_\phi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \\ O_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Im Fall der Kugelkoordinaten soll der Gradient dargestellt werden in der Form

$$\vec{\nabla} \Phi = O_r \hat{e}_r + O_\theta \hat{e}_\theta + O_\varphi \hat{e}_\varphi.$$

Dabei sind  $O_r$ ,  $O_\theta$  und  $O_\varphi$  Ausdrücke, die wir im folgenden bestimmen werden. Die Einheitsvektoren für die Kugelkoordinaten sind gegeben durch

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zunächst bestimmen wir die Differenzialform für den Ortsvektor  $d\vec{r}$  (vergleiche dazu (2.3.2), hier angewandt auf die Komponenten des Vektors  $\vec{r}$ )

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= \hat{e}_r dr + r \hat{e}_\theta d\theta + r \sin \theta \hat{e}_\varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Das vollständige Differenzial für  $\Phi$ , hier als Funktion der Kugelkoordinaten, schreibt sich

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} \\ &= (O_r \hat{e}_r + O_\theta \hat{e}_\theta + O_\varphi \hat{e}_\varphi) \cdot (\hat{e}_r dr + r \hat{e}_\theta d\theta + r \sin \theta \hat{e}_\varphi d\varphi) \\ &= O_r dr + O_\theta r d\theta + O_\varphi r \sin \theta d\varphi. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dabei haben wir in der zweiten Zeile die Eigenschaft (2.3.2) ausgenutzt und in den folgenden Zeilen die Schreibweisen in (2.3.2) und (2.25). Aus dem Koeffizientenvergleich der letzten mit der ersten Zeile in (2.26) werden die in (2.3.2) gesuchten Koeffizienten bestimmt zu

$$O_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad O_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad O_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}.$$

Damit können wir nun den folgenden Integralsatz formulieren:

Kann man ein Vektorfeld  $\vec{A}$  als Gradienten eines Skalarfeldes  $\Phi$  schreiben

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \Phi,$$

so ist das Wegintegral über dieses Vektorfeld unabhängig vom aktuellen Weg und lässt sich berechnen zu

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1).$$

Der Beweis dieses Satzes ist nach den geleisteten Vorarbeiten sehr einfach. Nach (2.3.2) gilt nämlich

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} \\ &= \int d\Phi = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1). \end{aligned}$$

Als Anwendung dieses Integralsatzes verifizieren wir, dass das Vektorfeld aus (2.3.1) dem Gradienten des Skalarfeldes

$$\Phi = axy$$

entspricht. Damit ist das entsprechende Wegintegral (2.3.1) unabhängig vom gewählten Weg und berechnet sich zu

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1) = a * 0 * 1 - a * 1 * 0 = 0,$$

was wir ja auch in (2.20) und (2.21) auf etwas mühsamerer Art gefunden haben.

### 2.3.3 Konservative Kraftfelder

Mit diesen mathematischen Hilfsmitteln kehren wir nun wieder zu den physikalischen Themen zurück und definieren ein **Konservatives Kraftfeld**. Ein Kraftfeld soll konservativ heissen, wenn es sich aus einem Skalarfeld, dem **Potenzial**  $V(\vec{r})$  berechnen lässt gemäss

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}).$$

Für ein solches konservatives Kraftfeld gilt insbesondere:

1. Die Arbeit, die von einem konservativen Kraftfeld an einem Massenpunkt geleistet wird, wenn dieser sich von  $\vec{r}_A$  nach  $\vec{r}_B$  bewegt ist unabhängig vom Weg und gegeben durch

$$\Delta W = V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_B).$$

2. Bei der Bewegung eines Massenpunktes der Masse  $m$  in einem konservativen Kraftfeld bleibt die Summe aus der potenziellen Energie, das ist der Wert des Potenzials an dem Ort, an dem sich der Massenpunkt befindet, und seiner kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2}mv^2,$$

wobei  $v$  die aktuelle Geschwindigkeit bezeichnet, erhalten. Wegen dieser Energieerhaltung heisst eben dieses Kraftfeld auch konservativ.

Der Punkt 1 lässt sich mit (2.3.2) leicht beweisen durch

$$\begin{aligned}\Delta W &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} \vec{F} d\vec{r} \\ &= - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} \vec{\nabla} V d\vec{r} \\ &= - [V(\vec{r}_E) - V(\vec{r}_A)] .\end{aligned}\tag{2.27}$$

Zum Beweis des Punktes 2 nehmen wir an, dass sich der Massenpunkt entlang eines bestimmten Weges  $\vec{r}(t)$  bewegt und berechnen die zeitliche Änderung der potenziellen Energie zu

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \vec{\nabla} V \vec{v} = -\vec{F} \vec{v} .\end{aligned}\tag{2.28}$$

Andererseits berechnet sich die zeitliche Änderung der kinetischen Energie

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} [v_x^2 + v_y^2 + v_z^2] \\ &= \frac{1}{2} m \left[ 2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt} + 2v_z \frac{dv_z}{dt} \right] \\ &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} = \vec{F} \vec{v} ,\end{aligned}\tag{2.29}$$

wobei wir in der letzten Zeile die Newtonsche Bewegungsgleichung eingesetzt haben. Addiert man die Ergebnisse von (2.28) und (2.29), so ergibt sich

$$\frac{d}{dt} [T + V] = 0$$

was wir ja beweisen wollten.

Als ein Beispiel für ein konservatives Kraftfeld wollen wir die Gravitationskraft auf der Erdoberfläche anführen. Unser Koordinatensystem sei so orientiert, dass die  $z$ -Achse senkrecht zur Erdoberfläche nach oben weist, und ein Potenzial definiert durch

$$V = m g z$$

wobei  $m$  die angezogene Masse sein soll und  $g$  für die Beschleunigung der Erdanziehung steht. Mit dem Gradient Operator in kartesischen Koordinaten aus (2.22) ergibt sich für die Kraft

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -m g \hat{e}_z$$

was ja der Erdanziehung entspricht.

Zur Verdeutlichung der Energierhaltung bei der Bewegung in diesem Kraftfeld nehmen wir an, dass bei dem Start der Bewegung die Masse  $m$  sich in Ruhe auf einer Höhe  $h$  oberhalb der Erdoberfläche befindet. Am Ende der Bewegung fällt der Massenpunkt  $m$  mit der Geschwindigkeit  $v$  bei  $z = 0$ . Es gilt also

$$T + V = 0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg0$$

Daraus ergibt sich für die Endgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh}.$$

## 2.4 Fall, Wurf und Federkräfte

Sie haben jetzt die Begriffe Arbeit, potentielle und kinetische Energie, sowie die Energieerhaltung kennengelernt. Wir wollen nun einige Versuche zum Thema Fall und Wurf durchführen. Hiermit soll der Umgang mit der Newtonschen Bewegungsgleichung und mit den oben genannten Begriffen vertieft werden.

### 2.4.1 Fall und Wurf

Betrachten wir zunächst die Energieerhaltung beim **Fall einer Stahlkugel** aus einer Höhe  $h$  auf eine Stahlplatte oder eine Aluminiumunterlage (s. Abb. 2.9).

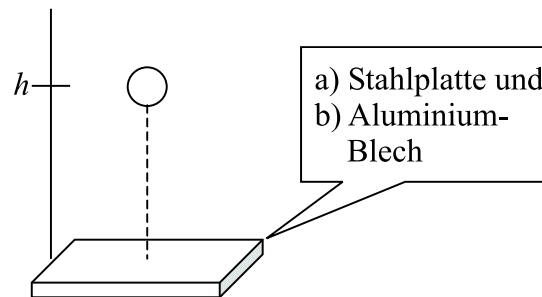


Abbildung 2.9: Eine Stahlkugel fällt auf eine Stahlplatte oder ein Aluminium-Blech (Zeichnung: Skript Ihringer)

Die potentielle Energie der Kugel in der Höhe  $h$  beträgt  $E_{pot} = mgh$ . Die Startgeschwindigkeit der Kugel ist 0, daher ist  $E_{pot}$  gleich der Gesamtenergie  $E$ .

Beim Aufschlag ist  $E_{pot} = 0$ , dafür hat die Kugel eine kinetische Energie  $E_{kin} = \frac{1}{2}mv_{auf}^2$ . Den Wert der Aufschlaggeschwindigkeit  $v_{auf}$  können wir unter Benutzung der Energieerhaltung sofort angeben, da während des gesamten Falls  $E = E_{pot} + E_{kin} = const. = mgh$  gilt. Wir haben damit beim Aufschlag:  $E = \frac{1}{2}mv_{auf}^2 = mgh$ , woraus sofort  $v_{auf} = \sqrt{2gh}$  folgt. Interessant ist nun, was nach dem Aufschlag passiert:

- Beim Fall auf die Stahlplatte springt die Kugel nahezu wieder auf die Anfangshöhe  $h$  zurück; die kinetische Energie kurz nach dem Aufschlag ist also nahezu so groß wie kurz vorher; lediglich die Richtung bzw. der Impuls der Kugel hat sich umgekehrt. Man spricht in diesem Zusammenhang auch davon, dass die Kugel einen *elastischen Stoß* mit der Stahlplatte gemacht hat.
- Beim Fall auf die Aluminiumplatte bleibt die Kugel einfach liegen. Offensichtlich ist die Energie  $E$  der Kugel in der Platte geblieben (Tatsächlich wurde die Platte beim Aufschlag verformt und schließlich etwas erwärmt). Wir sprechen hier von einem vollkommen inelastischen Stoß.

Im nächsten Versuch wollen wir nun die Fallgesetze nutzen, um herauszufinden, von welchen Höhen wir eine Serie von **N Massen fallen** lassen müssen, so dass sie in zeitgleichen Intervallen am Boden aufschlagen (s. Abb. 2.10).

Die  $n$ -te Masse befinde sich auf der Höhe  $z_n$ . Diese Masse benötigt nun nach den Newtonschen Bewegungsgleichungen eine Zeit  $\Delta t_n = \sqrt{\frac{2z_n}{g}}$ , um am Boden aufzuschlagen. Wir wollen, dass die Kugeln dies in gleichen Zeitabständen auftreffen, d. h. wir verlangen  $\Delta t_n = n \cdot \Delta t_1$ . Einsetzen liefert:

$$\frac{2}{g} \cdot \sqrt{z_n} = n \cdot \frac{2}{g} \cdot \sqrt{z_1} \quad (2.30)$$

oder  $z_n = n^2 z_1$ . Das Verhältnis  $z_n/z_1$  muss also quadratisch anwachsen. Wir demonstrieren den Effekt dadurch, dass wir ein Seil von der Decke fallen lassen, an dem in diesem Abstandsverhältnis Stahlmuttern angebracht sind. Man hört die Aufschläge in zeitgleichen Abständen.

Die Energie der  $n$ -ten Kugel war beim Start  $E = E_{pot} = mgz_n = mgn^2 z_1$ , wächst also quadratisch mit  $n$ .

Beim Aufschlag gilt:  $v_n = \sqrt{2gz_n} = n \cdot \sqrt{2gz_1}$ . Die Aufschlagsgeschwindigkeit nimmt also proportional zu  $n$  zu.

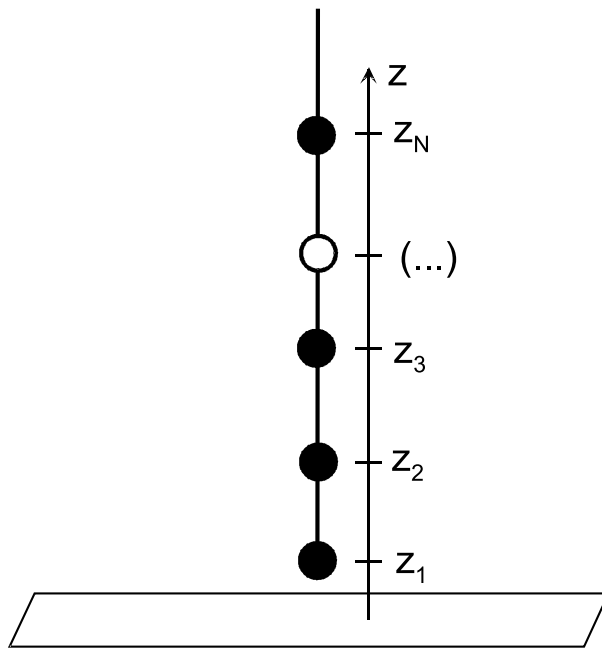


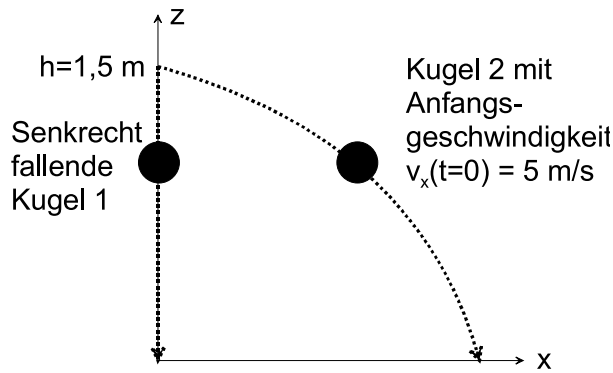
Abbildung 2.10:  $N$  fallende Massen

Im nächsten Versuch vergleichen wir den **freien Fall** und den **waagrechten Wurf** zweier Kugeln (s. Abb. 2.11). Kugel 1 wird aus einer Höhe  $h = 1,5$  m fallengelassen. Zeitgleich wird Kugel 2 aus einer Abschussvorrichtung mit einer Startgeschwindigkeit  $v_x = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  waagrecht abgeschossen.

Man hört beide Kugeln zeitgleich aufschlagen, obwohl Kugel 2 einen weiteren Weg zurückgelegt hat. Wir wollen die Bewegung beider Kugeln nun quantitativ nachvollziehen:

- Kugel 1 fällt senkrecht herunter, wobei gilt:  $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ . Die Fallzeit beträgt  $\Delta t = \sqrt{2h/g}$ , was für  $h = 1,5$  m einen Wert von ca. 0,55 s ergibt.



Abbildung 2.11: *Senkrechter Fall und waagrechter Wurf*

- Kugel 2 wird in z-Richtung mit der Gewichtskraft  $-mg$  beschleunigt und fällt genauso wie Kugel 1:  $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ , Fallzeit  $\Delta t = \sqrt{2h/g}$ .

Die Bewegung in x-Richtung ist (nach dem Abschuss) unbeschleunigt mit  $v_x(t) = v_x(t=0)$ . Man beachte, hierbei, dass sich insgesamt die Bewegungen in x- und z-Richtung überlagern. Die resultierende Bahnkurve der Kugel 2 können wir wie folgt bestimmen: Für die Bewegung in x-Richtung gilt:  $x(t) = v_x(t=0) \cdot t$ . Nach  $t$  aufgelöst und in  $z(t)$  eingesetzt ergibt dies:

$$z(t) = h - \frac{1}{2}g \left( \frac{x}{v_x(0)} \right)^2 = h - \frac{g}{2v_x^2(0)}x^2 \quad (2.31)$$

Wie haben also eine parabelförmige Bahnkurve.

Wir geben auch noch die Energien und Geschwindigkeiten der beiden Kugeln für  $t = 0$  und beim Aufschlag an:

- Kugel 1 hat beim Start  $E_{pot} = mgh$ ,  $E_{kin} = 0$  und daher eine Gesamtenergie  $E = E_{pot}$ . Die Geschwindigkeit beim Aufschlag ist  $v = v_z = \sqrt{2gh}$ , was für  $h = 1.5$  m einen Wert von 5.4 m/s ergibt.
- Kugel 2 hat beim Start  $E_{pot} = mgh$ ,  $E_{kin} = \frac{1}{2}mv_x^2(0)$  und daher eine Gesamtenergie

$$E = E_{pot} + E_{kin} = mgh + \frac{1}{2}mv_x^2(0) \quad (2.32)$$

Beim Aufschlag ist  $E_{pot} = 0$  und  $E_{kin} = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}m(v_x^2(0) + 2gh)$ . Die Geschwindigkeit der Kugel beträgt beim Aufschlag also  $v = \sqrt{v_x^2(0) + 2gh}$  ( $\approx 7.4$  m/s)

Im nächsten **Versuch** wollen wir die Bahnkurve untersuchen, die sich beim **schrägen Wurf** ergibt, d. h. wenn ein Massenpunkt mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  unter einem Winkel  $\varphi$  (wie in Abb. 2.12 gezeichnet) geworfen wird. An Stelle eines einzelnen Massenpunktes betrachten wir allerdings einen **Wasserstahl**, der die entsprechende Bahnkurve kontinuierlich darstellt.

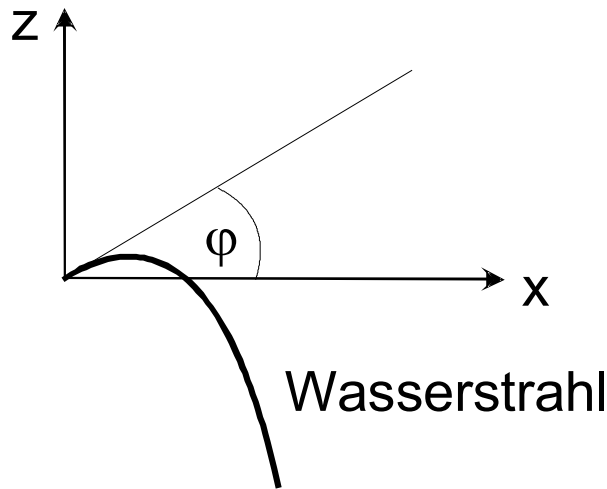


Abbildung 2.12: An einem Wasserstrahl wird die Parabelform für unterschiedliche Richtungen des "Wurfs" gezeigt

Zunächst gilt für die Anfangsgeschwindigkeit:

$$\vec{v}(\vec{0}) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos \varphi \\ 0 \\ v_0 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Die Bewegungsgleichung ist:  $\vec{F} = -m\vec{g} = m\vec{a}$ , woraus folgt:

$$\begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos \varphi \cdot t \\ 0 \\ v_0 \cdot \sin \varphi \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Wir lösen  $x(t)$  nach  $t$  auf und setzen in  $z(t)$  ein:

$$z = v \cdot \sin \varphi \frac{x}{v_0 \cos \varphi} - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \varphi} = x \cdot \tan \varphi - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} x^2 \quad (2.36)$$

Wir haben auch hier eine "Wurfparabel" vorliegen, die wir nun noch etwas genauer analysieren wollen:

In Abb. 2.13 ist zunächst die Wurfparabel für den waagrechten Wurf, d. h für  $\varphi = 0$  gezeigt. Wir messen diese Parabel dadurch aus, dass wir eine Reihe von Stäben entlang der x-Achse anbringen (s. Abb. 2.13 (links)). In Abb. 2.13 (rechts) ist einer dieser Stäbe an der Position  $x_0$  gezeichnet. Die z-Koordinate des Wasserstrahls hat hier den Wert  $-gx_0^2/2v_0^2$ , die Länge des Stabes also den Wert  $gx_0^2/2v_0^2$ . Man beachte außerdem, dass man bei vorgegebenen Stäben, die in Abständen  $x_n$  angebracht sind und die Länge  $L_n = ax_n^2$  haben, die "richtige" Parabel dadurch einstellen kann, dass man die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  so wählt, dass  $a = g/2v_0^2$  gilt.

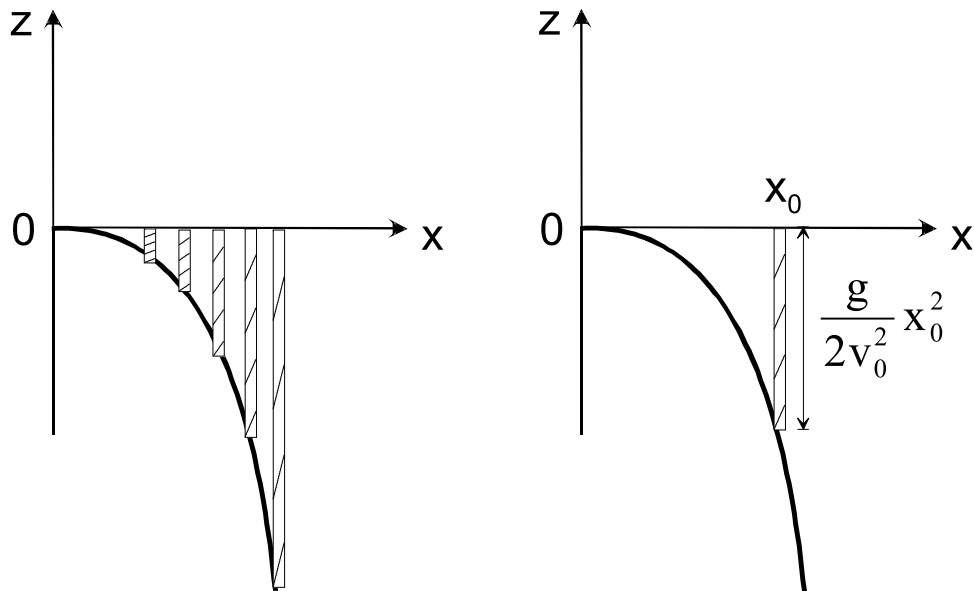


Abbildung 2.13: Ein waagrecht austretender Wasserstrahl wird durch eine Reihe von Stäben ausgemessen.

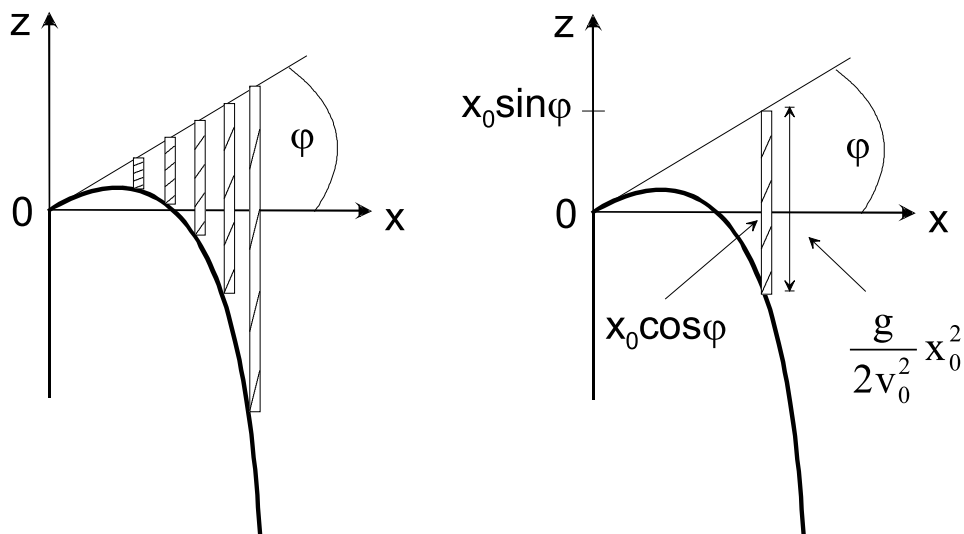


Abbildung 2.14: Der Wasserstrahl und die Messstäbe aus Abb. 2.13 werden um den Winkel  $\varphi$  gekippt.

Wir kippen nun den Wasserstrahl so, dass  $\vec{v}_0$  mit der x-Achse den Winkel  $\varphi$  einschließt. Gleichzeitig kippen wir die Aufhängungspunkte der Stäbe (d. h. die ehemalige x-Achse) um den gleichen Winkel  $\varphi$  (s. Abb. 2.14).

Dabei bekommt der Aufhängungspunkt des Stabes bei  $x_0$  die neuen Koordinaten  $x = x_0 \cos \varphi$  und  $z = x_0 \sin \varphi$ . Der Wasserstrahl wird ganz allgemein durch die Gleichung  $z(x) = x \tan \varphi - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} x^2$  beschrieben. Wir setzen hier für  $x$  den Wert  $x_0 \cos \varphi$  ein und

erhalten:

$$z(x_0) = (x_0 \cos \varphi) \tan \varphi - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} (x_0 \cos \varphi)^2 = x_0 \sin \varphi - \frac{g}{2v_0^2 x_0^2}. \quad (2.37)$$

Die Länge des Stabes war  $gx_0^2/2v_0^2$ . Der neue Aufhängungspunkt liegt bei  $z = x_0 \sin \varphi$ . Vergleichen wir dies mit obigem Ausdruck für  $z(x_0)$ , so sehen wir, dass das untere Ende des Stabes wiederum die Wasserstrahlparabel berührt. Wir können also mit unseren Stäben die Wasserstrahlparabel für alle Winkel  $\varphi$  ausmessen. Genau dies ist in Abb. 2.14 gezeigt.

## 2.4.2 Vektoreigenschaften von Kräften

Wir betrachten dazu ein zunächst **Stahlseil**, das wie in Abb.2.15 (links) gezeichnet zwischen zwei Wänden eingespannt ist. In das Seil ist eine Feder eingebaut, die Zugkraft im Seil misst. Hängt man nun in die Mitte des Seils eine Masse  $m$ , so wird das Seil wie in Abb. 2.15 (rechts) gezeigt um einen Winkel  $\varphi$  ausgelenkt.

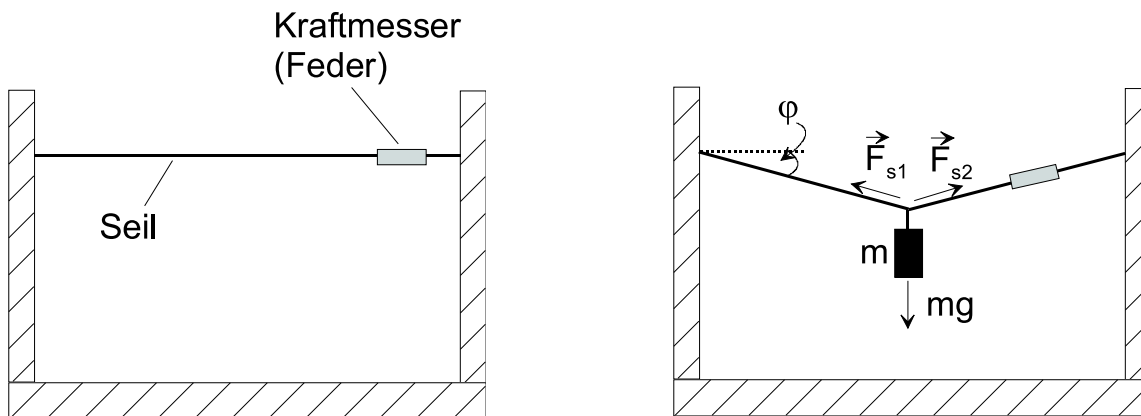


Abbildung 2.15: *Stahlseil, an das eine Masse  $m$  gehängt wird.*

In den beiden Hälften des Seils wirken nun die Kräfte  $\vec{F}_{s1}$  bzw.  $\vec{F}_{s2}$ , die wie in Abb. 2.15 (rechts) gezeigt parallel zu den Seilstücken gerichtet sind. Aus Symmetriegründen sind die Beträge dieser Kräfte gleich;  $|\vec{F}_{s1}| = |\vec{F}_{s2}| = F_s$ . Nur die Anteile  $F_s \cdot \sin \varphi$  wirken der Gewichtskraft  $mg$  entgegen.

Wir haben also  $2 \cdot F_s \cdot \sin \varphi = mg$ , oder  $F_s = mg/(2 \sin \varphi)$ .

Man beachte hierbei, dass  $F_s$  für  $\varphi \rightarrow 0$  ins Unendliche wächst. Wollten wir also das Seil wieder waagrecht spannen, würde dies nicht gelingen, sondern das Seil würde schlicht irgendwann reißen.

Eine quantitative Auswertung für verschiedene Massen  $m$  ist in Tab. 2.1 angegeben.

Die Abb. 2.16 zeigt die Funktion  $1/(2 \sin \varphi)$ , die das Verhältnis  $F_s/mg$  angibt. Für  $\varphi = 90^\circ$  ist die Funktion gleich  $1/2$ ; jede Seilhälfte kompensiert  $mg/2$ . Für einen Winkel von  $30^\circ$  ist  $1/(2 \sin \varphi)$  gleich  $1$ , für  $5^\circ$  bereits  $5.7$ .

In einem zweiten Versuch betrachten wir die **Kräfte**, die eine Masse  $M$  **auf der schiefen Ebene** erfährt. Die Ebene ist um den Winkel  $\varphi$  geneigt (s. Abb. 2.17). Auf  $M$  wirkt in  $-z$ -Richtung die Gewichtskraft  $Mg$ . Die Kraftkomponente senkrecht zur Ebene ist  $M \cdot g \cdot \cos \varphi$ ,

m [kg]	z [cm]	$F_s/g$ [kg]	$\sin \varphi \approx \varphi \approx z/L$	$mL/z$ [kg]
1	6.5	7.5	0.13	7.5
2	9.5	9.5	0.20	10.2
5	16	16	0.33	16.25

Tabelle 2.1: Verschiedene Massen  $m$  am Stahlseil der Abb. 2.15. Die Länge des Seils ist  $2L = 97.5$  cm. Die Auslenkung aus der Horizontalen ist  $z$ ; entsprechend  $\sin \varphi \approx \varphi \approx z/L$

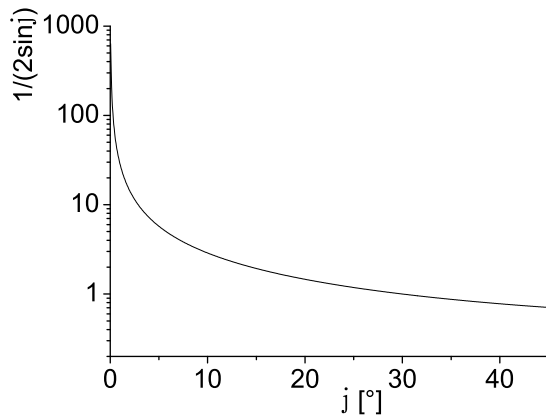


Abbildung 2.16: Funktion  $1/(2 \sin \varphi)$  für Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$

die Komponente parallel zur Ebene ist  $M \cdot g \cdot \sin \varphi$  (Hangabtriebskraft). Die Masse  $M$  ist mit einer zweiten Masse  $m$  über eine Umlenkrolle verbunden. Durch diese Masse wirkt eine Kraft  $m \cdot g$  auf  $M$ , die der Tangentialkomponente  $M \cdot g \cdot \sin \varphi$  entgegengerichtet ist. Man findet nun, dass für das Verhältnis  $\frac{M}{m} = \frac{2}{1}$  Kräftegleichgewicht herrscht, wenn  $\varphi = 30^\circ$  ist, d. h. für  $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ .

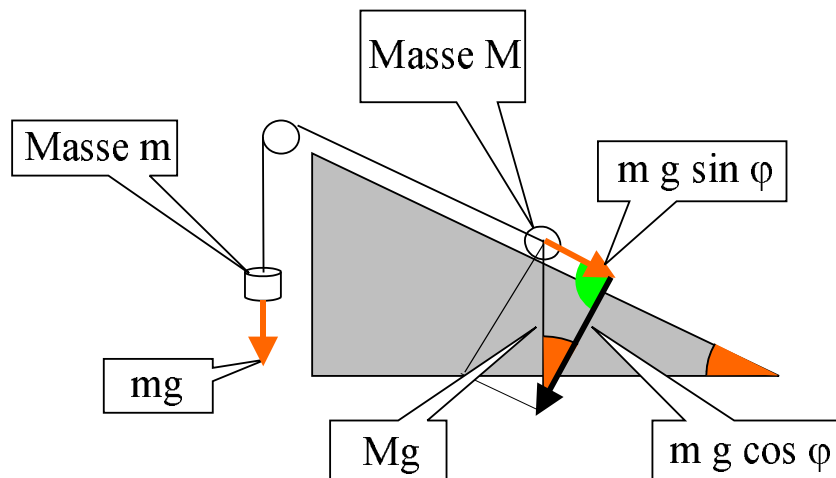


Abbildung 2.17: Masse  $M$  auf der schiefen Ebene. (aus Skript Ihringer)

Es sei hier angemerkt, dass die Kraftkomponente  $M \cdot g \cdot \cos \varphi$  durch die "Zwangskraft" kompensiert wird, die  $M$  auf der Auflage, d. h. der schiefen Ebene hält.

### 2.4.3 Federkräfte; Hooksches Gesetz

Wir hatten Federn bzw. Federkräfte ja bereits bei der Einführung der schweren Masse kurz kennengelernt. Hier hatten wir gesehen, dass eine Feder, die durch die Gewichtskraft  $mg$  belastet war, um eine Strecke  $\Delta z$  gedehnt wurde, die proportional zur angehängten Masse  $m$  war.

Wir können die Federkraft nun etwas genauer fassen:

$$F_{\text{Feder}} = C \cdot \Delta z \quad (2.38)$$

Dies ist das **Hooke'sche Gesetz**. Die Kraft, die eine Feder auf einen Massenpunkt ausübt, wächst proportional zur Dehnung der Feder. Die "Proportionalitätskonstante  $C$  ist die Federkonstante".

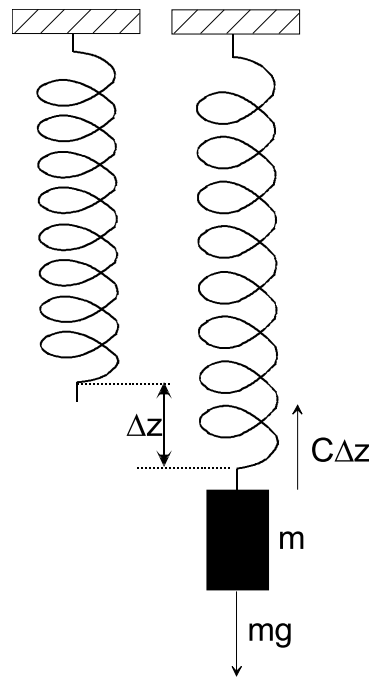


Abbildung 2.18: Zum Hookeschen Gesetz

Im Kräftegleichgewicht gilt also:  $mg = C \cdot \Delta z$

#### Parallel- und Reihenschaltungen von Federn

Wenn wir an eine Masse  $m$  zwei gleiche Federn parallel hängen, beobachten wir, dass die Auslenkung  $\Delta z$  lediglich halb so groß ist wie im Fall einer Feder gleicher Federkonstante. Wenn wir dagegen die zwei Federn hintereinander hängen, dann verdoppelt sich die Auslenkung (Abb. 2.19).

Wir können auch sagen, dass die beiden parallelen Feder sich wie *eine* Feder verhalten, die die *doppelte* Federkonstante  $2C$  hat. Die Reihenanordnung der beiden Federn entspricht ganz analog *einer* Feder mit der *halben* Federkonstanten  $\frac{C}{2}$ .

Im Fall der parallel geschalteten Federn gilt:  $F_{\text{Feder},1} + F_{\text{Feder},2} = mg$ , d. h.  $C\Delta x + C\Delta x = mg$  bzw.  $2C\Delta x = mg$ .

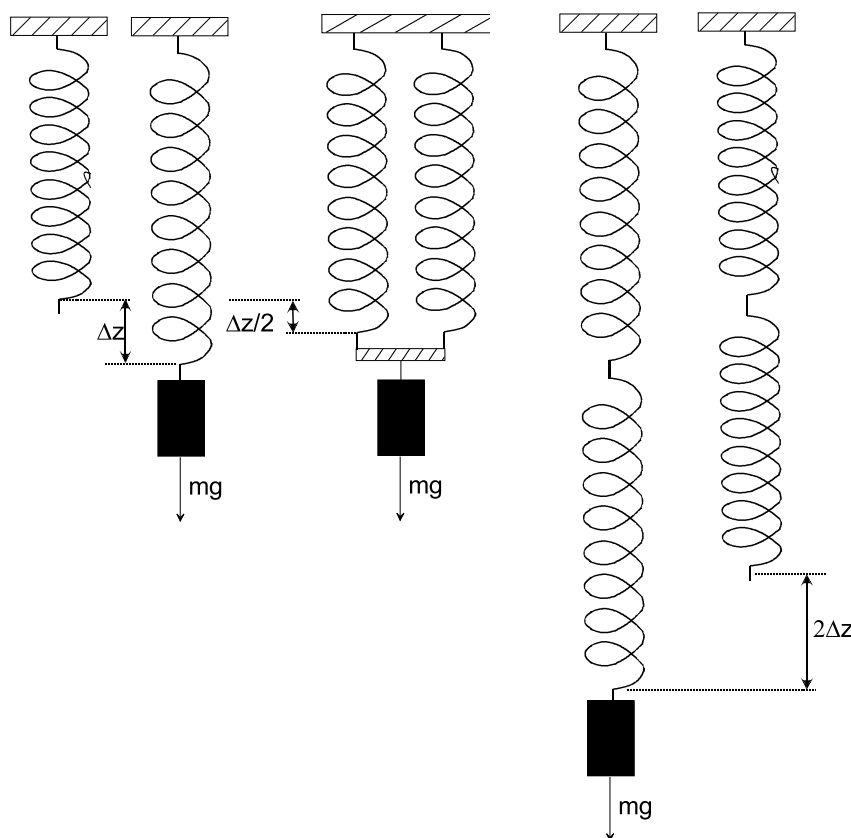


Abbildung 2.19: Parallel- und Reihenschaltungen von Federn gleicher Federkonstante  $C$ . Von links nach rechts: unbelastete Feder; eine Feder mit Masse  $m$  belastet; 2 parallele Federn mit Masse  $m$  belastet; zwei Federn in Reihe mit mit Masse  $m$  belastet.

Hieraus folgt:  $\Delta z = \frac{mg}{2C}$

Wir können dies auch sofort auf  $N$  Federn mit unterschiedlichen Federkonstanten  $C_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) verallgemeinern:

$$mg = \sum_{k=1}^N C_k \Delta z \quad \text{oder} \quad \Delta z = mg / \left( \sum_{k=1}^N C_k \right) \quad (2.39)$$

**Bei parallelgeschalteten Federn summieren sich also die Federkonstanten** der einzelnen Federn.

Im Fall der Reihenschaltung greift an jeder der beiden Federn die Kraft  $mg$  an (gilt auch allgemein bei  $N$  Federn). Jede der Federn wird also gemäß dem Hookeschen Gesetz um  $\Delta z_k = mg/C_k$  ausgelenkt. Die Gesamtauslenkung beträgt

$$\Delta z = \sum_{k=1}^N \Delta z_k = mg \sum_{k=1}^N \frac{1}{C_k}. \quad (2.40)$$

Die **Federkonstanten** sind also **bei Reihenschaltungen reziprok zu addieren**. Bei zwei Federn mit gleichen Federkonstanten  $C$  ergibt dies

$$\frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C} \quad (2.41)$$

Wir wollen zum Abschluss noch die **Energie einer Feder** mit der Federkonstanten  $C$  berechnen. Wenn wir die Feder um die infinitesimale Länge  $dz$  auslenken, verrichten wir die Arbeit  $F(z) \cdot dz$ . Bei Auslenkung von 0 auf  $\Delta z$  beträgt die gesamte Arbeit:

$$W = \int_0^{\Delta z} D \cdot dz = \int_0^{\Delta z} Cz \cdot dz = C \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{\Delta z} = \frac{C}{2} (\Delta z)^2. \quad (2.42)$$

Diese Arbeit ist (bei Vernachlässigung von Reibungseffekten) als innere Energie in Feder gespeichert. Die Energie der Feder beträgt damit

$$E_{\text{pot}} = \frac{C}{2} (\Delta z)^2 \quad (2.43)$$

wächst also quadratisch mit der Auslenkung  $\Delta z$ .



## 2.5 Federpendel, mathematisches Pendel und Uhren

### 2.5.1 Das Federpendel

Wir haben im letzten Abschnitt Federn betrachtet, die *statisch* an unterschiedlichen Federanordnungen hingen. In diesem Abschnitt wollen wir einen Schritt weitergehen und untersuchen, auf welche Weise sich diese Masse  $m$  bewegt, wenn sie aus ihrer Ruhelage ausgelenkt und dann losgelassen wird.

Wir beobachten, dass die Masse symmetrisch um diese Ruhelage  $z_0$  auf und ab schwingt (s. Abb. 2.20 (links)), wobei sie nach einiger Zeit wieder zur Ruhe kommt. Die Auslenkung aus der Ruhelage sei anfänglich  $\pm\Delta z(0)$ . Tragen wir die  $z$ -Koordinate der Masse als Funktion der Zeit auf, so ergibt sich qualitativ die in Abb. 2.20 (rechts)) gezeigte Kurve.

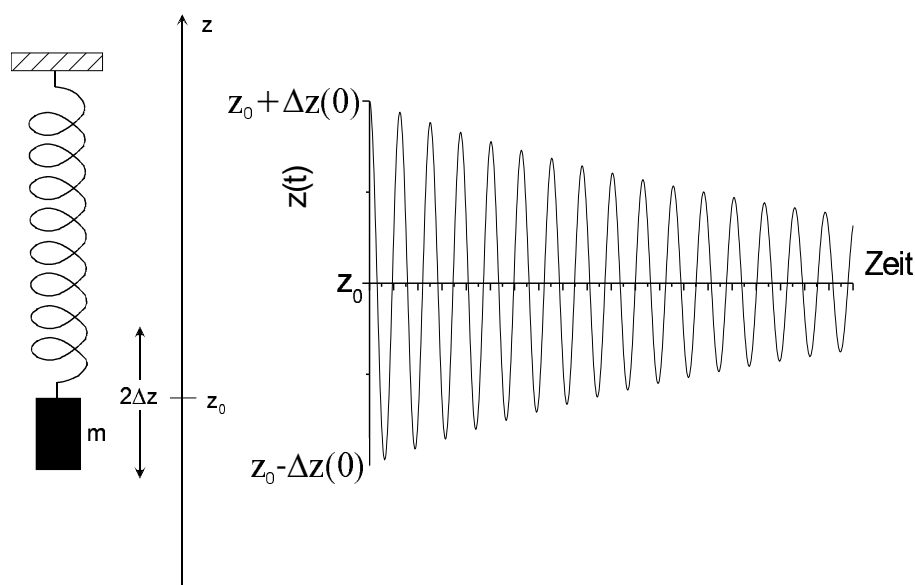


Abbildung 2.20: An einer Feder schwingende Masse  $m$ : (links) Schemazeichung; (rechts) Position  $z(t)$  der Masse als Funktion der Zeit  $t$ .

Wir wollen nun die Beobachtungen auf der Basis der Newtonschen Gleichungen grob<sup>3</sup> analysieren.

Wir stellen zunächst die **Bewegungsgleichung** auf, wobei wir den Einfluss von **Reibung vernachlässigen**.

Zunächst wurde die unbelastete Feder ( $z$ -Koordinate des Aufhängepunkts der unbelasteten Feder:  $z = 0$ ) durch Anhängen der Masse  $m$  gemäß dem Hooke'schen Gesetz gedehnt, bis die Ruhelage  $z_0$  erreicht wurde. Diese Ruhelage bestimmt sich aus dem Kräftegleichgewicht  $mg = Cz_0$ . Lenken wir die Feder um eine Distanz  $-\Delta z$  nach unten aus, so *vergrößert* sich die Federkraft auf  $C(z_0 + \Delta z)$ . Die Summe aus Gewichtskraft und Federkraft wirkt also in Richtung  $+z$ . Lenken wir umgekehrt die Masse um  $\Delta z$  nach oben, so *verringert* sich die Federkraft auf  $C(z_0 - \Delta z)$ . Die Summe aus Gewichtskraft  $mg$  und Federkraft wirkt in Richtung  $-z$ .

<sup>3</sup>Eine genaue theoretische Beschreibung finden Sie in den Theorie-Abschnitten 2.8 bis 2.9.

Generell erhalten wir:

$$m\ddot{z} = F_{\text{Feder}} - mg = -C \cdot z - mg \quad (2.44)$$

Wenn die Masse  $m$  ruht, ist  $\ddot{z} = 0$  und wir erhalten die Ruhelage  $z_0$  aus  $0 = -Cz_0 - mg$ . Wir können nun  $mg$  aus Gleichung 2.44 unter Benutzung von  $mg = -Cz_0$  eliminieren und erhalten<sup>4</sup>:

$$m\ddot{z} = -C \cdot (z - z_0) \quad (2.45)$$

Unterstellen wir, dass das Pendel auf Grund von Reibungseffekten - die wir in Gleichung 2.45 vernachlässigt haben - wieder zur Ruhe kommt, dann legt die beobachtete Bewegung der Masse  $m$  nahe, einen

$$\mathbf{Ansatz 1:} \quad \mathbf{z(t) = z_0 + \Delta z \cdot \cos \omega t} \quad (2.46)$$

zu versuchen. Setzen wir dies in Gleichung 2.45 ein, so erhalten wir mit  $\dot{z} = -\Delta z \cdot \omega \sin \omega t$ ,  $\ddot{z} = -\Delta z \cdot \omega^2$ :

$$-m \cdot \Delta z \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t = -C \cdot \Delta z \cdot \cos \omega t \quad (2.47)$$

Wir kürzen  $\Delta z \cdot \cos \omega t$  und erhalten:

$$\omega^2 = \frac{C}{m} \quad \text{oder} \quad \omega = \sqrt{\frac{C}{m}} \quad (2.48)$$

Offensichtlich hat also  $\omega$  einen ganz bestimmten, durch  $C$  und  $m$  bestimmten Wert, die "Eigenfrequenz" des Pendels.

Hätten wir einen **Ansatz 2:**  $\mathbf{z(t) = z_0 + \Delta z \cdot \sin \omega t}$  gewählt, so hätte auch dieser die Bewegungsgleichung Gleichung 2.45 gelöst, wobei wir wiederum  $\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$  erhalten hätten. Ebenso hätten wir einen **Ansatz 3:**  $\mathbf{z(t) = z_0 + \Delta z_1 \cdot \sin \omega t + z_2 \cdot \cos \omega t}$  oder einen **Ansatz 4:**  $\mathbf{z(t) = z_0 + \Delta z_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi)}$  machen können. Es stellt sich also die Frage, wie viele Ansätze Gleichung 2.45 lösen.

Es zeigt sich (Näheres siehe Abschnitt 2.6):

Eine "lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung" wie die Gleichung Gleichung 2.45 besitzt genau zwei unabhängige Lösungen, z. B. Ansatz 1 und Ansatz 2. Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination aus diesen beiden Lösungen, etwa in der Form des Ansatzes 3. Der Ansatz 4 lässt sich in diese Linearkombination umrechnen.

Die Linearkombination des Ansatzes 3 enthält zwei<sup>5</sup> noch nicht näher bestimmte Parameter  $\Delta z_1$  und  $\Delta z_2$ . Diese können wir durch Anfangsbedingungen für  $z(t = 0)$  und für  $\dot{z}(t = 0)$  festlegen.

Es sei beispielsweise  $t = 0$  am oberen Umkehrpunkt. Wir haben dann:  $z(t = 0) = z_0 + \Delta z(0)$  und  $\dot{z}(t = 0) = 0$ .

Ansatz 3 liefert:  $z(t = 0) = z_0 + \Delta z_2$ , sowie  $\dot{z}(t = 0) = \omega \Delta z_1$ .

Wegen  $\dot{z}(t = 0) = 0$  ist  $\Delta z_1 = 0$  und wegen  $z(t = 0) = z_0 + \Delta z(0)$  ist  $\Delta z_2 = \Delta z(0)$ .

Im **Experiment** überprüfen wir einige Eigenschaften des Federpendels:

<sup>4</sup>Es liegt an dieser Stelle nahe, den Koordinatenursprung nach  $z_0$  zu verlegen. Wir wollen hier aber darauf verzichten.

<sup>5</sup>Die Ruhelage  $z_0$  ist kein freier Parameter, sondern durch  $z_0 = -mg/C$  gegeben.

1. Die Unabhängigkeit der Schwingungsdauer  $T$  bzw der Kreisfrequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  von der Amplitude
2. Die Wirkung unterschiedlicher Federkonstanten; Überprüfung  $\omega \propto \sqrt{C}$
3. Der Einfluss unterschiedlicher Massen; Überprüfung  $\omega \propto \sqrt{\frac{1}{m}}$

Zum Abschluss dieses Abschnittes über die ungedämpfte Schwingung eines Federpendels wollen wir einige **Betrachtungen zur Energie des Pendels** anstellen.

Abb. 2.21 stellt zunächst die Energie  $mgz + \frac{1}{2}Cz^2$  des Federpendels graphisch dar (genauer gesagt die normierte Energie  $\frac{E_{pot}}{mg|z_0|} = \frac{z}{|z_0|} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_0}\right)^2$ .) Die Energie wächst quadratisch vom Minimum bei  $z_0 = -mg/C$  (bzw.  $z/|z_0| = -1$ ) aus an. Genau in diesem Minimum ist die Ruhelage der belasteten Feder. Wenn die Masse schwingt, wächst die Energie symmetrisch um  $z_0$  herum an; man erkennt sofort, dass die Schwingung symmetrisch um  $z_0$  sein wird.

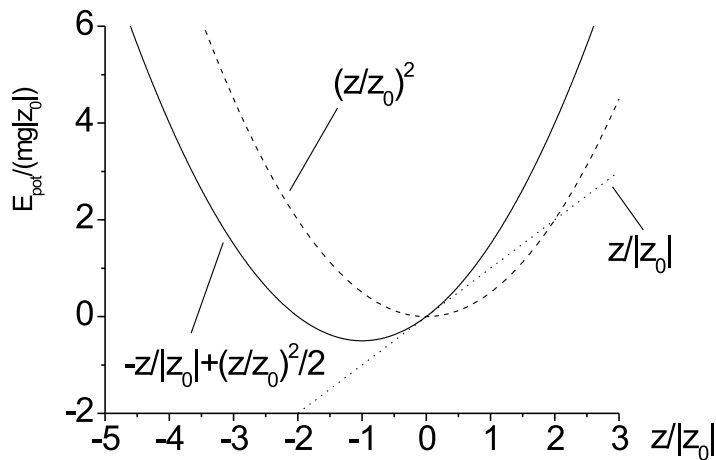


Abbildung 2.21: Normierte Energie  $\frac{E_{pot}}{mg|z_0|} = \frac{z}{|z_0|} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_0}\right)^2$  eines mit einer Masse  $m$  belasteten Federpendels zusammen mit den beiden Summanden  $z/|z_0|$  und  $(z/z_0)^2/2$ .

Betrachten wir nun "zu Fuß" die Energien, die auftreten, wenn wir die Masse  $m$  an die ungelastete Feder hängen und dann loslassen:

- Zunächst müssen wir die Masse  $m$  eine gewisse Höhe  $h$  (von Tisch bis zum Aufhängepunkt  $z = 0$  hochheben, was die potentielle Energie der Masse erhöht.
- Wir hängen jetzt die Masse an die Feder und lassen sie los. Die Masse "fällt" dann über die Ruhelage  $z_0$  hinaus bis zum unteren Umkehrpunkt  $z_0 - \Delta z$ . Hierbei wird verliert die Masse die potentielle Energie<sup>6</sup>  $-mg(z_0 - \Delta z)$  und spannt dabei die

<sup>6</sup>Man beachte, dass  $z_0 - \Delta z$  eine negative Zahl ist.

Feder, deren Energie um  $\frac{1}{2}C \cdot (z - \Delta z)^2$  anwächst. Am unteren Umkehrpunkt ist die kinetische Energie der Masse gleich null, so dass gilt:

$$-mg(z_0 - \Delta z) = \frac{1}{2}C \cdot (z_0 - \Delta z)^2 \quad (2.49)$$

oder  $z_0 - \Delta z = -2 \cdot \frac{mg}{C}$ , was gerade  $2z_0$  ist.

- Die Masse schwingt dann zurück. Bei  $z = z_0$  ist die Energie der Feder  $\frac{1}{2}Cz_0^2$ , und der Verlust an potentieller Energie im Gravitationsfeld gegenüber  $z = 0$  beträgt  $-mgz_0$ . Die Differenz  $-mgz_0 - \frac{1}{2}Cz_0^2$  tritt jetzt als kinetische Energie der Masse  $m$  auf. Mit  $z_0 = -mg/C$  erhalten wir  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}Cz_0^2$ .  $E_{\text{kin}}$  ist bei  $z = 0$  also genauso groß wie die in der Feder gespeicherte Energie.

## 2.6 Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung für den Harmonischen Oszillator

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0,$$

ist ein Beispiel für eine Differenzialgleichung, bei der eine Funktion  $x(t)$  gesucht wird, die eben genau diese leichung erfüllt. Zur Klassifikation von verschiedenen Typen von Differenzialgleichungen führen wir die folgenden Definitionen ein:

- Eine Differenzialgleichung für eine gesuchte Funktion  $f(t)$  heisst **Differenzialgleichung n-ter Ordnung**, wenn in dieser Gleichung Ableitungen der Funktion  $f$  nach der Variablen  $t$  bis zur Ordnung  $n$  vorkommen. In unserem Beispiel (2.6) treten Ableitung der Funktion  $x$  nach der Zeit in nullter (das ist einfach die Funktion  $x(t)$  selbst) und zweiter Ordnung auf, es handelt sich also um einen Differenzialgleichung zweiter Ordnung nach der Zeit.
- Eine Differenzialgleichung heisst **linear** genau dann, wenn in jedem Term (Summand) die gesuchte Funktion oder eine ihre Ableitung linear auftritt. Eine Gleichung vom Typ

$$\frac{df}{dt} - \sqrt{f(t)} = 0$$

wäre also ein Beispiel für eine nicht lineare Differenzialgleichung, da die gesuchte Funktion in einer Wurzel auftritt.

- Eine Differenzialgleichung heisst **homogen**, wenn alle Terme in dieser Differenzialgleichung die gesuchte Funktion oder eine ihrer Ableitungen enthält. Ein Beispiel für eine nicht lineare Differenzialgleichung ist durch

$$\frac{df}{dt} = \alpha$$

gegeben. Häufig schreibt man alle Terme, die  $f$  und ihre Ableitungen enthalten auf die eine Seite der Gleichung und die übrigen, die  $f$  nicht enthalten, die sogenannten Inhomogenitäten, auf die andere Seite.

Nach diesen Kriterien ist das Beispiel (2.6) also eine lineare, homogene Differenzialgleichung zweiter Ordnung. Eine etwas allgemeinere Schreibweise für eine solche lineare, homogene Differenzialgleichung zweiter Ordnung ergibt sich durch

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \alpha \frac{df(t)}{dt} + \beta f(t) = 0.$$

Nehmen wir nun an, dass wir bereits 2 Lösungen  $f_1(t)$  und  $f_2(t)$  für diese Gleichung gefunden haben. (Wir werden später sehen, dass es für eine solche Differenzialgleichung zweiter Ordnung stets 2 voneinander unabhängige Lösungen gibt.) In diesem Fall ist auch die Linearkombination

$$f(t) = A f_1(t) + B f_2(t),$$

mit zwei Konstante  $A$  und  $B$ , die nicht von der Zeit  $t$  abhängen, eine Lösung der Differenzialgleichung (2.6). Zum Beweis dieser Behauptung berechnen wir die erste und zweite Ableitung von  $f$  nach der Zeit:

$$\frac{df(t)}{dt} = A \frac{df_1(t)}{dt} + B \frac{df_2(t)}{dt}, \quad (2.50)$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = A \frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} + B \frac{d^2 f_2(t)}{dt^2}. \quad (2.51)$$

Multipliziert man nun die Gleichung (2.50) mit  $\alpha$ , Gleichung (2.6) mit  $\beta$  und addiert diese beiden Gleichungen zu (2.51), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \alpha \frac{df(t)}{dt} + \beta f(t) &= \\ A \frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} + B \frac{d^2 f_2(t)}{dt^2} + \alpha \left[ A \frac{df_1(t)}{dt} + B \frac{df_2(t)}{dt} \right] &+ \beta [A f_1(t) + B f_2(t)] \\ = A \left[ \frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} + \frac{df_1(t)}{dt} + f_1(t) \right] + B \left[ \frac{d^2 f_2(t)}{dt^2} + \frac{df_2(t)}{dt} + f_2(t) \right] & \\ = A 0 + B 0 = 0, & \end{aligned} \quad (2.52)$$

was bedeutet, dass die auch die in (2.6) definierte Funktion  $f(t)$  eine Lösung der Gleichung (2.6) ist. (Bei dem Übergang zur letzten Zeile in (2.52) wurde ausgenutzt, dass die Funktion  $f_i$  Lösungen der Gleichung (2.6) sind).

Dieses Ergebnis lässt sich natürlich sofort erweitern auf lineare homogene Differenzialgleichungen einer beliebigen Ordnung  $n$ .

Dieses allgemeine Ergebnis, dass die Überlagerung von Lösungen homogener linearer Differenzialgleichungen, wiederum eine Lösung dieser Gleichung liefern, wollen wir nun auf das Beispiel der Bewegungsgleichung (2.6) anwenden. Wir wissen oder können uns leicht davon überzeugen, dass die Funktionen

$$x_1(t) = \sin(\omega t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = \cos(\omega t)$$

Lösungen für die Bewegungsgleichung des Harmonischen Oszillators sind. Damit ist aber auch

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t),$$

eine Lösung. Da es für Differentialgleichung der Ordnung  $n = 2$  genau 2 unabhängige Lösung gibt, ist dies die allgemeine Form der Lösung. Zur Bestimmung der "richtigen" Lösung, denn nur eine eindeutige Lösung können wir zur Beschreibung zulassen, müssen wir noch die Konstanten  $A$  und  $B$  bestimmen. Es reicht also nicht aus, die Bewegungsgleichung für ein Problem zu formulieren, wir müssen auch noch 2 Zusatzinformationen liefern, damit die Lösung eindeutig ist. Diese Zusatzinformationen können wir z.B. durch 2 Aussagen über den Zustand des Systems zur Zeit  $t = 0$  machen, etwa in der Form, dass das Teilchen zur Zeit  $t = 0$  sich an der Stelle  $x_0$  befindet mit einer Geschwindigkeit von null:

$$x(0) = x_0 \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dt}(t = 0) = 0$$

Leiten wir (2.6) nach der Zeit ab und fordern diese Startbedingung

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t) \\ \underbrace{\quad}_{t=0} A\omega &= 0, \end{aligned} \tag{2.53}$$

so ergibt sich daraus sofort  $A = 0$ . Setzen wir dieses Ergebnis in (2.6) ein und berechnen  $x(t = 0)$ , so erhalten wir

$$x_0 = B \cos(\omega 0) = B$$

womit also die beiden Unbekannten  $A$  und  $B$  in (2.6) durch die Startbedingungen (2.6) festgelegt worden sind.

An diesem Beispiel sollte demonstriert werden wie man allgemein an die Bestimmung der gesuchten Koordinatenfunktion  $x(t)$  für die Bewegung eines Teilchens herangehen sollte in den folgenden Schritten:

- Stelle die Bewegungsgleichung für die gesuchte Funktion  $x(t)$  auf. Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit. Handelt es sich um eine Bewegung in 3 Raumrichtungen gibt es ein System von 3 gekoppelten Differentialgleichungen für die Koordinaten  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$ .
- Finde Lösungen dieser Differentialgleichungen: Dabei existieren stets 2 voneinander unabhängige Lösungen.
- Zur Bestimmung einer eindeutigen Lösung, müssen noch 2 zusätzliche Informationen geliefert werden. Dies sind z.B. die Startbedingungen, also etwa der Ort und die Geschwindigkeit des Teilchens zur Zeit  $t = 0$ .
- Sind die Bewegungsgleichungen homogen und linear, so kann die allgemeine Lösung in Form einer Linearkombination vom Typ (2.6) angesetzt werden und die Unbekannten aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich auch, dass die Bewegung eines Teilchens eindeutig für alle Zeiten bestimmt ist, wenn die Bewegungsgleichungen bekannt sind und Ort und Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt vorgegeben sind. Man bezeichnet diese Angabe von Ort und Geschwindigkeit auch als Position des Teilchens im **Phasenraum**, der durch Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten aufgespannt ist.

### 2.6.1 Mathematisches Pendel, Uhren und andere schwingende Systeme

Neben dem Federpendel existieren eine Vielzahl weiterer schwingender Systeme wie etwa das in Abb. 2.22 skizzierte mathematische Pendel, das um die Ruhelage  $\varphi = 0$  schwingt.

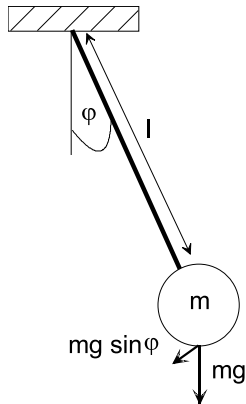


Abbildung 2.22: *Mathematisches Pendel*

Falls  $\varphi$  klein genug ist, so dass  $\sin \varphi \approx \varphi$  ist die Schwingung harmonisch, mit einer Frequenz  $\omega = \sqrt{g/l}$  (Details: siehe Abschnitt 2.6.2). Bei bekannter Länge  $l$  lässt sich aus der Schwingungsdauer  $T = 2\pi/\omega$  gut die Konstante  $g$  bestimmen. Umgekehrt kann die Länge  $l$  - etwa durch Verschieben der Masse  $m$  so eingestellt werden, dass die Periode  $T$  einen ganz bestimmten Wert - beispielsweise 1 s hat.

Dies wird bei der **Pendeluhr** ausgenutzt. Abb. 2.23 zeigt das Prinzip.

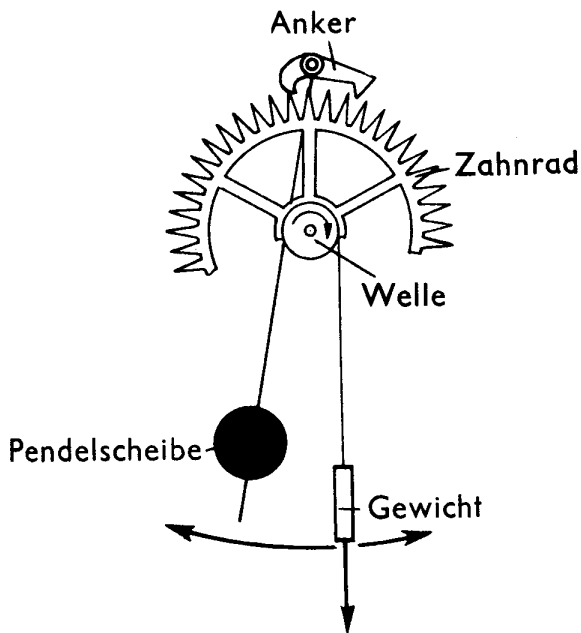


Abbildung 2.23: *Prinzip der Pendeluhr* (aus: "Wie funktioniert das? Bibliographisches Institut, Mannheim, 1963; Überlassung durch Hrn. Henne).

An der Welle greift ein Gewicht an, so dass das Zahnrad sich drehen müsste. Die Drehbewegung wird jedoch durch den Anker blockiert. Würde dieser sich periodisch heben und

senken, so würde sich das Zahnrad in jeder Periode um einen Zahn weiterdrehen und über weitere Zahnräder die Uhrzeiger antreiben. Diese periodische Bewegung des Ankers wird durch ein Pendel erreicht, das starr mit dem Anker verbunden ist. Hat das Pendel seinen größten Ausschlag erreicht, gibt der Anker einen Zahn frei und sperrt dann wieder. Bei der Freigabe des Zahns bekommt das Pendel gleichzeitig einen Stoß, was den Energieverlust des Pendels durch Reibung kompensiert.

Abb. 2.24 zeigt, wie die Bewegung des treibenden Zahnrad auf die Zeiger übertragen wird. Das Minutenrad inkl. Minutenzeiger wird vom Triebwerk in einer Stunde um  $360^\circ$  gedreht. Über das Wechselrad und den Wechseltrieb wird dabei das Stundenrad und der Stundenzeiger nur um  $1/12$  seines Umfangs weitergedreht.

Abb. 2.25 zeigt das Prinzip der Taschenuhr. Hier sorgt ein an einer Spiralfeder angebrachtes oszillierendes Rad (die Unruh) für die periodische Bewegung. Auch das Triebrad wird durch eine Spiralfeder (Aufzugsfeder) angetrieben.

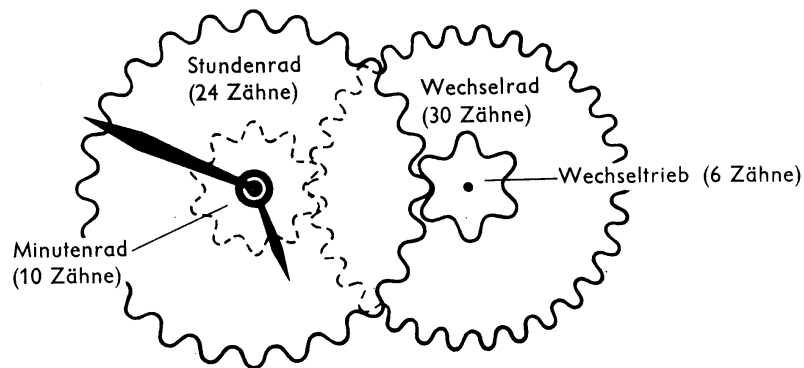


Abbildung 2.24: *Bewegung des Minuten- und Stundenzeigers (aus: "Wie funktioniert das? Bibliographisches Institut, Mannheim, 1963; Überlassung durch Hrn. Henne).*

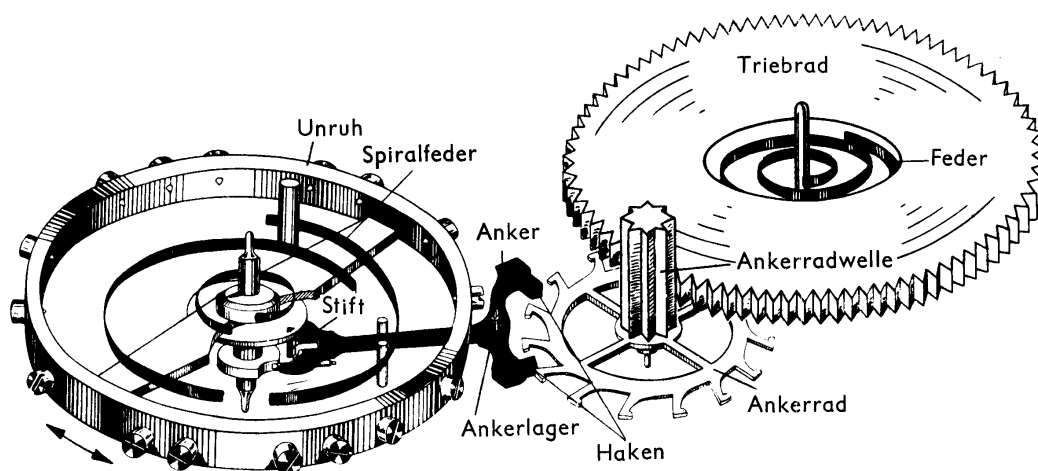


Abbildung 2.25: *Antriebssystem einer Taschenuhr (aus: "Wie funktioniert das? Bibliographisches Institut, Mannheim, 1963; Überlassung durch Hrn. Henne).*



Im folgenden listen wir einige Daten zur (europäischen) Geschichte der Uhr auf (aus: <http://hometown.aol.com/Reveille26/GeschUhr.html>; hier sind noch wesentlich mehr Daten zu finden)

um 1000

Der Mönch Gerbert aus Aurillac / Frankreich, der spätere Papst Silvester II, soll auf den Gedanken gekommen sein, eine Räderuhr zu bauen oder bauen zu lassen.

1240

Villard de Honnecourgt beschreibt ein Objekt, das später als die Hemmung einer mechanischen Vorrichtung gedeutet wird.

1269

Der Begriff "Uhrmacher" taucht erstmals in einem Dokument auf.

1345

Die Stunde wird spätestens ab diesem Jahr in 60 Minuten, und diese in 60 Sekunden eingeteilt.

1410

In Montpellier wird der Turmwächter wegen wiederholter Trunkenheit seines Amtes enthoben und durch eine Uhr mit Schlagwerk ersetzt. Damit wird zum ersten Mal der Ersatz eines Menschen durch eine Maschine urkundlich erwähnt.

um 1511

Der Nürnberger Schlosser Peter Henlein baut sehr beliebte tragbare Uhren, die 40 Stunden gehen. Vermutlich gab es aber bereits zuvor tragbare Uhren.

1641 (nach anderen Quellen 1636, 1637)

Der italienische Astronom Galileo Galilei entwickelt die Idee einer Pendeluhr, unternimmt Versuche und erstellt Zeichnungen, setzt diese aber nicht in die Praxis um (vgl. Abb. 2.26). Angeblich soll Galileis Sohn Vincenzo diese Uhr gebaut und in einem wahnhaften Anfall wieder zerstört haben.

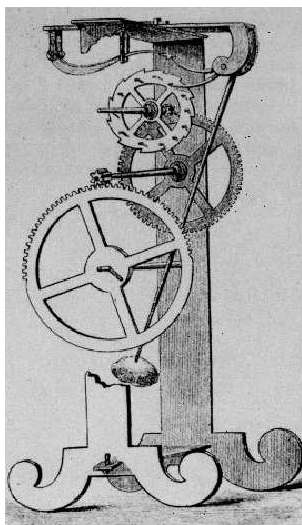


Abbildung 2.26: *Galileis Entwurf einer Pendeluhr*, Quelle: F. Balck, TU Clausthal;

<http://www.pe.tu-clausthal.de/AGBalck/vorlesung/server/mess2001/>

1645

(nach anderer Quelle 1656) Christiaan Huygens baut die erste Uhr mit Pendel (vg. Abb. 2.27). Nach einer Quelle sind ihm die Erkenntnisse Galileis bekannt, nach anderer Quelle hingegen nicht. 1657 meldet Huygens diese Uhr zum Patent an.

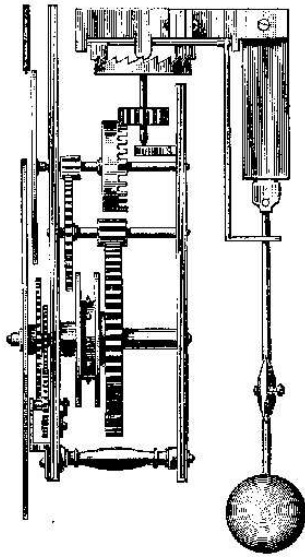


Abbildung 2.27: *Pendeluhr von Huyghens; aus Skript Ihringer; Quelle: Meyers Großes Konversationslexikon, 1908.*

1691

Clement baut die erste Pendeluhr mit Ankerhemmung.

1730

Anton Ketterer aus Schönwald im Schwarzwald baut die erste Kuckucksuhr.

um 1765

Im Schwarzwald werden die ersten Pendeluhren gebaut anstelle der bis dahin gebräuchlichen Waaguhren.

1927

W. A. Marrison entwickelt in den USA die erste Quarzuhr.

*(hier wird durch den sog. piezoelektrischen Effekt eine Art "Stimmgabel" aus Quarz durch Anlegen einer Wechselspannung zum Schwingen angeregt und elektronisch geregelt.*

## 2.6.2 Mathematisches Pendel

Als ein Pendel bezeichnet man eine Masse  $m$ , die über einen Faden oder eine Stange der Länge  $l$  im Schwerfeld der Erde aufgehängt und dort frei schwingen kann. Unter dem Begriff "Mathematisches Pendel" versteht man ein Pendel, bei dem man die Masse als eine punktförmige Masse beschreiben kann und die Masse des Fadens oder der Stange für die Aufhängung gegenüber  $m$  vernachlässigen kann. Zur Behandlung des Mathematischen Pendels, das in Abb. 2.22 dargestellt ist, benutzen wir Zylinderkoordinaten und zwar in der Form, dass der Koordinatenursprung mit dem Aufhängepunkt des Pendels definiert ist, und die  $z$ -Achse senkrecht zur Schwingungsebene, das ist die Ebene der Darstellung in Abb. 2.22, steht. Die  $x$ -Achse zeigt vom Aufhängepunkt nach unten, so dass der Azimutwinkel  $\varphi$  mit dem Winkel für die Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage identifiziert wird.

Da wir nur eine Bewegung in der Schwingungsebene betrachten wollen, können wir die  $z$ -Komponente aller Vektoren ausser Acht lassen. So ergibt sich also für die Kraft, die auf

den Massenpunkt wirkt, die Zerlegung

$$\vec{F} = F_\rho \hat{e}_\rho + F_\varphi \hat{e}_\varphi, \quad (2.54)$$

wobei  $\hat{e}_\rho$  und  $\hat{e}_\varphi$ , die Basisvektoren für die entsprechenden Zylinderkoordinaten sind. Die Kraft  $\vec{F}$  ist die Kraft durch die Erdbeschleunigung, die den Betrag  $mg$  besitzt und senkrecht nach unten weist. Hinzu kommt aber noch die Kraft, mit der der Massenpunkt auf seiner Kreisbahn um den Aufhängepunkt gehalten wird. Diese Zusatzkraft bezeichnet man auch als Zwangskraft  $\vec{Z}$ , da sie den Massenpunkt auf die Kreisbahn mit konstantem Abstand  $\rho = l$  zum Aufhängepunkt (gleichzeitig der Koordinatenursprung) hält. Diese Zwangskraft hat nur eine Komponente in Richtung  $\hat{e}_\rho$ , die wir mit  $Z_\rho$  bezeichnen. Daraus ergeben sich die Komponenten

$$\begin{aligned} F_\rho &= mg \cos(\varphi) + Z_\rho \\ F_\varphi &= -mg \sin(\varphi). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Die Newtonsche Bewegungsgleichung liefert dann

$$\vec{F} = F_\rho \hat{e}_\rho + F_\varphi \hat{e}_\varphi = m(a_\rho \hat{e}_\rho + a_\varphi \hat{e}_\varphi), \quad (2.56)$$

mit den Komponenten des Beschleunigungsvektors  $a_\rho$  und  $a_\varphi$ . Multipliziert man diese Gleichung mit dem Basisvektor  $\hat{e}_\rho$ , so erhält man wegen der Orthogonalität der Basisvektoren die Komponente der Bewegungsgleichung in radialer Richtung

$$mg \cos(\varphi) + Z_\rho = m a_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2), \quad (2.57)$$

wobei wir den Ausdruck für die radiale Beschleunigung aus (2.1.1) übernommen haben. Für die Masse gilt  $\rho = l$  also auch  $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ . Damit können wir (2.57) umformen nach

$$Z_\rho = -mg \cos(\varphi) - ml\dot{\varphi}^2. \quad (2.58)$$

Multipliziert man Gleichung (2.56) mit dem Basisvektor  $\hat{e}_\varphi$ , so erhält man die zweite Komponente der Bewegungsgleichung

$$-mg \sin(\varphi) = ma_\varphi = m(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) = ml\ddot{\varphi},$$

die wir umschreiben in

$$l\ddot{\varphi} = -g \sin(\varphi) = -g \left\{ \varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 + \dots \right\}, \quad (2.59)$$

wobei der Ausdruck in den geschweiften Klammern die ersten 3 Glieder der Taylorreihe für die Sinusfunktion darstellt. Für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage, also kleine Winkel  $\varphi$  ist es eine akzeptable Näherung nur das erste Glied dieser Taylorreihe zu berücksichtigen. Dies führt uns zu

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2.60)$$

Eine allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung lautet

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t + \delta).$$

Die Konstanten in dieser Lösung,  $A$  und  $\delta$  werden durch die Randbedingungen ( $\varphi$  und  $\dot{\varphi}$  zur Startzeit  $t = 0$ ) festgelegt. Für diese Funktion  $\varphi(t)$  können wir dann die Winkelgeschwindigkeiten

$$\dot{\varphi} = \omega A \cos(\omega t + \delta)$$

bestimmen und daraus mit (2.58) die Stärke der Zwangskraft.



## 2.7 Reibungskräfte

Nach diesem Exkurs über Uhren wollen wir uns wieder etwas näher mit der Physik der Schwingungsvorgänge befassen und als nächstes verschiedene Arten von **Reibungskräften** vorstellen:

Je nach Art des sich bewegenden Körpers und des Mediums, das seine Oberfläche berührt werden unterschiedliche Formen von Reibung beobachtet:

- liegt ein fester Körper auf einer Unterlage auf haben wir zunächst die **Haftreibung**. Ihr Betrag ist proportional zur Kraft ("Normalkraft"), mit der der Körper senkrecht auf die Unterlage drückt:  $\mathbf{F}_H = \mu_H \mathbf{F}_N$ , mit  $\mu_H \ll 1$ : **Haftreibungskoeffizient**

Die Haftreibung wirkt offensichtlich der Kraft entgegen, mit der man an dem Körper parallel zur Unterlage zieht. Setzt sich der Körper über eine trockene Unterlage in Bewegung, dann spricht man von "**trockener Reibung**" oder "**Coulomb-Reibung**". Der Körper kann gleiten ("**Gleitreibung**") oder rollen ("**Rollreibung**"). Auch hier gilt:  $\mathbf{F}_R = \mu \mathbf{F}_N$ , wobei  $\mu < \mu_H$  ist.

Die Coulomb-Reibung ist weitgehend von der Geschwindigkeit unabhängig, mit der sich der Körper über die Unterlage bewegt.

*Wir demonstrieren die Haft- und Gleitreibung im Versuch: Ein an einer Federwaage befestigter Körper wird auf ein Rollband gelegt und dieses dann mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegt.*

- bewegt sich ein Körper durch ein "Fluid" (Gas oder Flüssigkeit) so liegt
  - **Stokes'sche Reibung** vor, solange sich der Körper nicht zu schnell bewegt und nicht zu groß ist.  
Es gilt:  $F_r = \text{const.} \cdot v$ ,  
wobei  $\text{const.} = 6\pi\eta r$  für eine **Kugel mit Radius r**;  $\eta$  ist hierbei die "Viskosität" des Fluids
  - "**Newton'sche Reibung**" vor, wenn sich ein größerer Körper schnell bewegt.  
Diese Reibungskraft ist proportional zu  $v^2$ :

$$F_r = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2 \quad (2.61)$$

mit:  $\rho$ : Dichte des Fluids;

$A$ : Querschnitt des Körpers in Bewegungsrichtung;

$c_w$ : Widerstandsbeiwert

Die Stokes- und der Newton-Reibung gelten bei unterschiedlichen Strömungsvorgängen. Im Fall der Stokes-Reibung ist die Strömung laminar, bei der Newton-Reibung turbulent. Es sei außerdem angemerkt, dass es neben den obigen Reibungsmechanismen noch eine Reihe anderer Reibungsgesetze gibt. So ist die beispielsweise die Reibungskraft zwischen geölten oder geschmierten Flächen proportional zu  $\sqrt{v}$ .

Im Folgenden wird (im Abschnitt 2.8) die **Stokes'sche Reibung bei der Beschreibung des gedämpften Pendels** (ohne und mit äußerem Antrieb) angewendet.

## 2.8 Kleine Schwingungen

In der Theoretischen Physik betrachtet man häufig das Beispiel eines Massenpunktes, der sich im Potenzial des Harmonischen Oszillators

$$U(x) := \frac{1}{2}kx^2,$$

bewegt. Ein Grund für die Beliebtheit dieses Beispiels ist die Tatsache, dass man die Lösungen für die Bewegungsgleichungen in diesem Oszillatorpotenzial sowohl in der Mechanik als auch in der Quantenmechanik relativ einfach analytisch bestimmen kann. Ein zweiter Grund für die häufige Betrachtung dieses Beispiels ist aber die Tatsache, dass das Potenzial in vielen Fällen eine ganz gute Näherung für ein komplizierteres Problem darstellt.

Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir die Eigenschaften eines Potenzials eines zweiatomigen Moleküls als Funktion des Abstandes zwischen den beiden Atomen. Bei sehr großen Atomabständen,  $r = |\vec{r}|$ , spüren die Atome nichts voneinander, die potenzielle Energie ist eine Konstante, für die wir den Wert  $V(r) = 0$ , vereinbaren können. Bringt man die Atome näher zusammen, so gewinnt das System Energie, das Potenzial wird negativ, so wie das auch in der Abb. 2.28 bei mittleren und großen Abständen dargestellt ist. Bei sehr kleinen Abständen stoßen sich die positiven Ladungen der Atomkerne, die bei diesen Abständen nicht mehr durch die Elektronen abgeschirmt sind, ab. Diese repulsive Kraft wird durch ein Potenzial beschrieben was mit kleinerem Abstand  $r$  immer stärker ansteigt, so dass

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} > 0$$

die Kraft also in Richtung größerer Abstände wirkt. Dies führt schliesslich für kleine Abstände zu einer positiven potenziellen Energie (siehe auch Abb. 2.28). Die Atome “lieben” es nicht so nahe zusammen zu sein, man muss deshalb eine Energie zuführen, um sie so nahe zusammenzubringen. Dies ist genau so wie wenn man eine Masse  $m$  im Schwerfeld der Erde auf eine größere Höhe transportiert. Auchh dazu muss Energie aufgebracht werden, was zu einer größeren potenziellen Energie der Masse  $m$  führt.

Dieses Verhalten des molekularen Potenzials bei sehr großen und sehr kleinen Abständen impliziert aber, dass es einen mittleren Relativabstand  $r_0$  gibt, bei dem das Potenzial minimal ist. Bei diesem Punkt gilt also

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r}(r_0) &= 0 \quad \text{und} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(r_0) &= k > 0. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Befinden sich die Atome bei diesem Abstand  $r_0$  so wirkt also keine Kraft, da ja die Ableitung des Potenzials nach dem Abstand verschwindet. Bei jeder Auslenkung aus dieser Ruhelage wirkt eine Kraft, die die Atome auf den optimalen Abstand  $r_0$  zurückzuführen versucht. Eine solche Auslenkung, die z.B. durch die Einstrahlung einer elektromagnetischen Welle verursacht werden könnte, würde also zu einer Schwingung des Moleküls um diesen Gleichgewichtsabstand  $r_0$  führen.

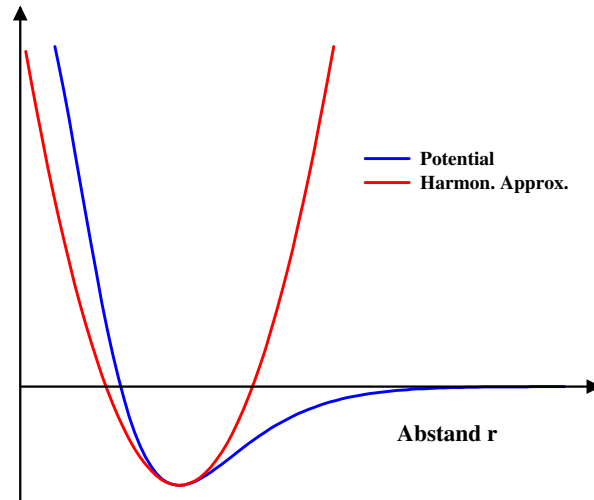


Abbildung 2.28: Schematische Darstellung für das Potenzial eines zweiatomigen Moleküls als Funktion des Relativabstandes und die Harmonische Näherung

Die Berechnung dieser Molekülschwingung kann bei komplizierten Potenzialformen  $V(r)$  recht aufwendig sein. Wenn jedoch die Störung des Moleküls nur zu kleinen Auslenkungen aus der Ruhelage führt, kann man versuchen das exakte Potenzial  $V(r)$  in der Nähe des Minimums durch die Taylorreihe zu entwickeln

$$\begin{aligned} V(r) &= V(r_0) + \frac{\partial V}{\partial r}(r_0)[r - r_0] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(r_0)[r - r_0]^2 + \dots \\ &\approx \text{Konst.} + \frac{1}{2}k[r - r_0]^2. \end{aligned} \quad (2.63)$$

In der zweiten Zeile haben wir die Terme dritter und höherer Ordnung vernachlässigt, was ja bei kleinen Abständen  $r - r_0$  gerechtfertigt ist. Ausserdem haben wir die Eigenschaften des Minimums aus (2.62) übernommen und finden so, dass das Potenzial für kleine Auslenkungen aus dem Minimum durch das Potenzial eines Harmonischen Oszillators approximiert wird, da ja eine Konstante im Potenzial irrelevant ist. Diese Harmonische Oszillatornäherung ist auch in Abb. 2.28) dargestellt.

Die Kraft auf ein Teilchen im Potenzial des Harmonischen Oszillators (2.8) berechnet sich als negativer Gradient des Potentials. Identifizieren wir nun die Auslenkung aus der Ruhelage mit

$$x = r - r_0$$

und betrachten den Fall einer Bewegung in dieser radialen Raumrichtung  $x$ , so erhalten wir für die Kraft:

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx.$$

Die Kraft ist also linear in der Auslenkung aus der Ruhelage  $x$  und wirkt der Auslenkungsrichtung entgegen: bei positiven Werten von  $x$  wirkt die Kraft in die Richtung der negativen  $x$ -Achse, bei negativen Werten von  $x$  zieht sie das Teilchen parallel zur  $x$ -Achse. Dies entspricht dem Hookeschen Gesetz bei der Feder.

## 2.9 Gedämpfter Harmonischer Oszillator

In diesem Abschnitt wollen wir die Bewegung eines Massenpunktes betrachten, der sich in einer Raumrichtung  $x$  in einer Harmonischen Schwingung um die Ruhelage  $x = 0$  bewegen, beziehungsweise schwingen kann. Dies kann ein Massenpunkt sein, der an einer Feder hängt. Es kann aber auch ein Pendeln sein, von dem wir ja gesehen haben, dass wir bei kleinen Auslenkung aus der Ruhelage eine Bewegungsgleichung für den Winkel  $\varphi$  bekommen, die genau dem der Federschwingung entspricht. In jedem Fall haben wir eine lineare Rückstellkraft

$$F = -\frac{\partial V_{HO}}{\partial x} = -C x, \quad \text{mit} \quad V_{HO} = \frac{1}{2} C x^2.$$

Dabei steht  $x$  also z.B. für die Auslenkung der Feder aus der Ruhelage oder aber für den Winkel des Pendels oder auch für eine ganz andere Koordinate für die wir kleine Auslenkungen aus der Ruhelage betrachten. Wir sprechen in diesem Fall vom Problem des **Harmonische Oszillators** und bezeichnen das Potenzial  $V_{HO}$  als Harmonisches Oszillatorpotenzial. Die Kraft ist linear in der Auslenkung aus der Ruhelage  $x$  und wirkt der Auslenkungsrichtung entgegen: bei positiven Werten von  $x$  wirkt die Kraft in die Richtung der negativen  $x$ -Achse, bei negativen Werten von  $x$  zieht sie das Teilchen parallel zur  $x$ -Achse.

Wir wollen neben dieser Rückstellkraft des Harmonischen Oszillatorpotenzials auch noch eine Kraft berücksichtigen, die eine Reibung simuliert. Diese Kraft soll, was ja typisch für die Stokesche Reibung ist, mit der Geschwindigkeit zunehmen: Bei positiven Geschwindigkeiten, also Geschwindigkeiten in Richtung der  $x$ -Achse, soll die Kraft bremsend d.h. antiparallel zur  $x$ -Achse wirken, bei negativen Geschwindigkeiten entsprechend parallel. Dies erreicht man durch eine einfache Darstellung der Reibungskraft, der sogenannten Stokeschen Reibung

$$F_{\text{Reibung}} := -\alpha \dot{x}$$

Setzt man die Summe aus der Rückstellkraft des Harmonischen Oszillators (2.9) und dieser Stokeschen Reibung in die Newtonsche Bewegungsgleichung ein, so ergibt sich für ein Teilchen mit der Masse  $m$  die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -C x - \alpha \dot{x}.$$

Zur Lösung dieser Differenzialgleichung betrachten wir den Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Setzt man diesen Ansatz in die Bewegungsgleichung (2.9) ein, so ergibt sich

$$\{m\lambda^2 + C + \alpha\lambda\} e^{\lambda t} = 0.$$

Da die Exponentialfunktion von Null verschieden ist, muss der Ausdruck in der geschweiften Klammer identisch null sein, was zu der quadratischen Gleichung für die Unbekannte  $\lambda$  führt

$$\lambda^2 + \frac{\alpha}{m}\lambda + \frac{C}{m} = 0$$



mit den bekannten Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \frac{C}{m}}.$$

Zunächst wollen wir den Fall ohne Reibung betrachten, für den wir ja bereits 2 Lösungen

$$x_1(t) = \sin(\omega_0 t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = \cos(\omega_0 t) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}},$$

geraten haben, was dann ja zu der allgemeinen Lösung

$$x(t) = B_1 \sin(\omega_0 t) + B_2 \cos(\omega_0 t)$$

führt, wobei die Konstanten  $B_1$  und  $B_2$  durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind.

Der Fall ohne Reibung bedeutet, dass wir in (2.9)  $\alpha = 0$  zu setzen haben. In diesem Fall ist

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega_0.$$

Eine Lösung der Bewegungsgleichung erhält man also, wenn man den Wert  $\lambda_1 = i\omega_0$  in den Ansatz (2.9) einsetzt, eine weitere wenn man  $\lambda_2 = -i\omega_0$  benutzt. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung kann als Linearkombination dieser beiden Lösungen dargestellt werden und ergibt sich in der Form

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 \exp -i\omega_0 t.$$

Auf dem ersten Blick erscheint es etwas abwegig zu sein, dass wir die Auslenkung  $x(t)$  durch eine Funktion beschreiben wollen, die komplex ist. Bevor wir aber diese Lösung verwerfen, wollen wir uns zunächst in einem Einschub mit einigen Eigenschaften der komplexen Zahlen beschäftigen.

### 2.9.1 Einige Rechenregeln für komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl  $c$  kann in allgemeiner Form geschrieben werden

$$c = a + ib \quad \text{mit} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Dabei bezeichnet sind  $a$  und  $b$  reelle Zahl. Die Zahl  $a$  bezeichnet man als den **Realteil** von  $c$ ,  $b$  als den **Imaginärteil**. Ist  $b = 0$ , so ist  $c = a$  eine gewöhnliche reelle Zahl. Ist andererseits  $a = 0$ , so ist  $c = ib$  eine rein imaginäre Zahl.

Im Folgenden wollen wir die Addition und Multiplikation zweier komplexer Zahlen  $c_1$  und  $c_2$  betrachten, die jeweils durch die Realteile  $a_1, a_2$  und die Imaginärteile  $b_1, b_2$  definiert sind. Bei der Addition ergibt sich

$$c_1 + c_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

Der Realteile der Summe der komplexen Zahl  $c_1$  und  $c_2$  ist also gleich der Summe der Realteile  $a_1 + a_2$ . Entsprechendes gilt für den Imaginärteil. Bei der Multiplikation erhalten wir

$$\begin{aligned} c_1 c_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) &&= a_1 a_2 + ib_1 a_2 + a_1 ib_1 + i^2 b_1 b_2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_2 b_1). \end{aligned} \tag{2.64}$$

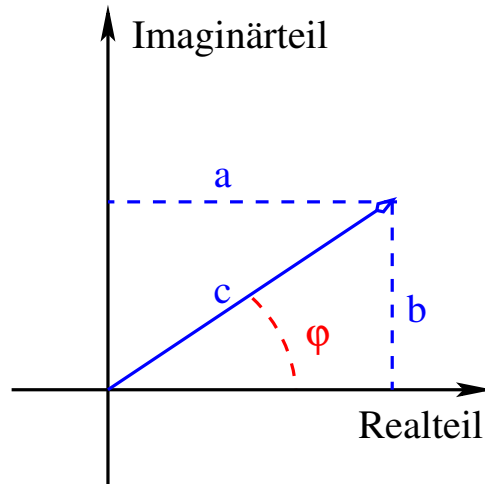


Abbildung 2.29: Darstellung einer komplexen Zahl durch Real- und Imaginärteil beziehungsweise in der Polardarstellung

Beim Übergang zur zweiten Zeile in dieser Gleichung haben wir ausgenutzt, dass  $i^2 = -1$  und die Terme nach Real- und Imaginärteil geordnet. Wir definieren nun die zu  $c$  **komplex konjugierte Zahl**  $c_*$  dadurch, dass sie den gleichen Realteil wie  $c$  besitzt aber einen Imaginärteil mit umgekehrtem Vorzeichen. Es gilt also für

$$c = a + ib \quad \text{ist} \quad c^* = a - ib.$$

Damit ist auch klar, dass die zu  $c^*$  komplex konjugierte Zahl  $c$  ist. Das Produkt

$$cc^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

ergibt eine positive reelle Zahl und wir bezeichnen deshalb

$$|c| = \sqrt{cc^*} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

als  $|c|$  Betrag der komplexen Zahl  $c$ . Die Bedeutung dieses Begriffes Betrag von  $c$  wird vielleicht aus der Skizze der Abbildung 2.29 deutlich. In dieser Darstellung wird jede komplexe Zahl durch einen Punkt in der Ebene, der Ebene der komplexen Zahlen, dargestellt. Die horizontale Koordinate repräsentiert den Realteil, die vertikale den Imaginärteil. Jede komplexe Zahl entspricht also einem Vektor in dieser Ebene, den wir entweder durch horizontale und vertikale Koordinate oder aber auch durch die Länge des Vektors und seine Richtung definieren können. Diese Richtung ist eindeutig definiert durch den Winkel  $\varphi$  des Vektors mit der horizontalen Achse (siehe Abb. 2.29). Wie man aus dieser Zeichnung auch entnehmen kann ist die Länge des Vektors zur Darstellung von  $c$  gerade der in (2.9.1) definierte Betrag und für den Winkel  $\varphi$  gilt:

$$\sin(\varphi) = \frac{b}{|c|} = \frac{\text{Imag}(c)}{|c|} \quad \text{und} \quad \cos(\varphi) = \frac{a}{|c|} = \frac{\text{Real}(c)}{|c|}.$$

Diese Beziehungen können wir aber auch umschreiben in der Form

$$c = a + ib = |c| (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)).$$

Eine elegantere Darstellung ergibt sich hierfür, wenn wir die **Eulersche Formel** benutzen:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi).$$

Zum Beweis dieser Eulerschen Formel betrachten wir die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

für das rein imaginäre Argument  $x = i\varphi$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} \\ &= 1 + i\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots \\ &= \left( \underbrace{1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots}_{=\cos \varphi} \right) + i \left( \underbrace{\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots}_{=\sin \varphi} \right). \end{aligned}$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile dieser Gleichung haben wir die Potenzen  $i^n$  ausmultipliziert und die ersten charakteristischen Glieder der Reihe explizit angegeben. In der dritten Zeile sind diese Glieder dann nach Real- und Imaginärteil geordnet, wobei man dann sieht, dass diese eingeklammerten Summen gerade den Reihenentwicklungen für die Kosinus- bzw. die Sinusfunktion entsprechen.

Mit dieser Eulerschen Formel ergibt sich die für die komplexe Zahl  $c$  in (2.9.1) die sogenannte Polardarstellung

$$c = |c|e^{i\varphi}.$$

Diese Polardarstellung ist gerade für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen sehr geschickt:

$$c_1 c_2 = (|c_1|e^{i\varphi_1}) (|c_2|e^{i\varphi_2}) = |c_1||c_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

## 2.9.2 Bearbeitung der komplexen Lösung

Mit diesem mathematischen Werkzeug können wir zur eigentlichen Aufgabe zurückkehren und die Lösung der Bewegungsgleichung für den Harmonischen Oszillator ohne Dämpfung in (2.9 weiter behandeln. Wir müssen lediglich noch die beiden Konstanten  $A_1$  und  $A_2$  bestimmen, die wir als komplexe Zahlen der Form

$$A_j = \beta_j + i\gamma_j$$

ansetzen. Diese Konstanten bestimmen wir aus den Anfangsbedingungen der betrachteten Bewegung, d.h. den Werten für die Position und die Geschwindigkeit des Teilchens zur Zeit  $t = 0$ , die mit  $x_0$  und  $v_0$  bezeichnet sein sollen. Setzt man  $t = 0$  in (2.9) ein, so ergibt sich

$$x_0 := x(t = 0) = A_1 + A_2 = (\beta_1 + i\gamma_1) + (\beta_2 + i\gamma_2)$$

Da die Position  $x_0$  eine reelle Zahl ist erhalten wir

$$\gamma_2 = -\gamma_1 \quad \text{und} \quad \beta_1 + \beta_2 = x_0.$$

Leitet man (2.9) nach der Zeit ab und setzt dann  $t = 0$  so ergibt sich als zweite Gleichung aus den Anfangsbedingungen

$$v_0 := v(t = 0) = i\omega_0 A_1 - i\omega_0 A_2 = i\omega_0(\beta_1 - \beta_2) - \omega_0(\gamma_1 - \gamma_2).$$

Da auch  $v_0$  reell ist bedeutet dies

$$\beta_1 - \beta_2 = 0 \quad \text{und} \quad \omega_0(\gamma_1 - \gamma_2) = v_0.$$

Zusammengefasst ergibt sich also aus (2.9.2) und (2.9.2)

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{x_0}{2} \quad \text{und} \quad -\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{v_0}{2\omega_0}$$

was eingesetzt in (2.9) zu der allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) + \frac{v_0}{2i\omega_0} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) \\ &= x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned} \tag{2.65}$$

Die Position des Teilchens  $x(t)$  wird also durch eine Kosinus beziehungsweise Sinusfunktion beschrieben. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  ist über (2.9) durch die Oszillatorkonstante  $k$  und die Masse  $m$  bestimmt. Die Amplitude und Startphase,  $\varphi$  der Schwingung sind durch die Anfangsbedingungen,  $x_0$  und  $v_0$ , festgelegt.

Dieser Startpunkt bezeichnet einen Punkt im (in diesem Fall) zweidimensionalen Phasenraum mit den Koordinaten  $x_0$  und  $v_0$ . Zu jedem anderen Zeitpunkt ist die Bewegung des Teilchens ebenfalls durch die Koordinaten  $x(t)$  aus (2.65) und der zugehörigen Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} v(t) &= -x_0 \omega \sin(\omega_0 t) + v_0 \cos(\omega_0 t) \\ &= -\omega_0 \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \sin(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned} \tag{2.66}$$

festgelegt. Die Bewegung des Teilchens beschreibt also eine Bahn oder Trajektorie im Phasenraum. Im Fall des ungedämpften Harmonischen Oszillators ist diese Trajektorie eine Ellipse oder, wenn die Skalierung auf den Achsen geeignet gewählt ist, ein Kreis (siehe Abb. 2.30), der bei der dort gewählten Anordnung der Koordinaten im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Durch den Startpunkt der Trajektorie ist die ganze Bahn eindeutig festgelegt. Dieses Prinzip gilt nicht nur für den hier behandelten Fall sondern ganz allgemein für die Lösung der Bewegungsgleichung. Die Bewegungsgleichung ist ja eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit, beziehungsweise ein System von solchen Differenzialgleichungen,

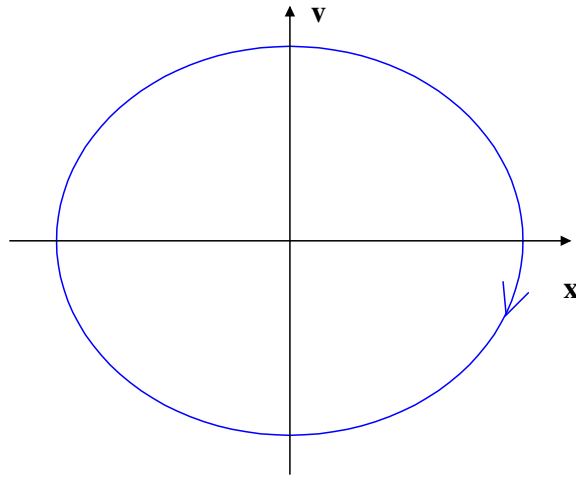


Abbildung 2.30: *Trajektorie des ungedämpften Harmonischen Oszillators im Phasenraum*

wenn wir mehr als eine Koordinate betrachten. Für eine solche Differenzialgleichung zweiter Ordnung existieren zwei linear unabhängigen Lösungen. Die allgemeine Lösung ist die entsprechende Linearkombination (wie in (2.9)). Die Koeffizienten der Überlagerung sind durch den Wert der Koordinate und der zugehörigen Geschwindigkeit zur Startzeit  $t = 0$  festgelegt. Bei  $N$  Koordinaten besitzt der Phasenraum die Dimension  $2N$  und man benötigt entsprechend  $2N$  Startwerte für die Koordinaten und Geschwindigkeiten.

### 2.9.3 Schwache Dämpfung

Im nächsten Schritt behandeln wir nun eine schwache Dämpfung, d.h. wir nehmen an, dass für den Koeffizienten  $\alpha$ , der ja in (2.9) die Stärke der Reibungskraft definiert, gilt:

$$\frac{\alpha^2}{4m^2} = \delta^2 < \frac{C}{m}.$$

In diesem Fall haben die Lösungen in der Gleichung (2.9) die Gestalt

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\frac{C}{m} - \delta^2} = -\delta \pm i\omega_1,$$

wobei die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  natürlich kleiner ist als die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  der ungedämpften Schwingung in (2.9). Mit dieser Darstellung der Konstanten  $\lambda$  ergibt sich die allgemeine Lösung für die Ortskoordinate analog zu (2.9) zu

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{(-\delta+i\omega_1)t} + A_2 e^{(-\delta-i\omega_1)t} \\ &= e^{-\delta t} A \cos(\omega_1 t + \varphi). \end{aligned} \tag{2.67}$$

Dabei sind die Konstanten  $A_i$  beziehungsweise  $A$  und  $\varphi$  wieder durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Die Schwingung entspricht also einer eventuell phasenverschobenen Kosinusfunktion, deren Amplitude exponentiell mit der Zeit abnimmt. Dieses Zeitverhalten ist in Abb. 2.31 dargestellt.

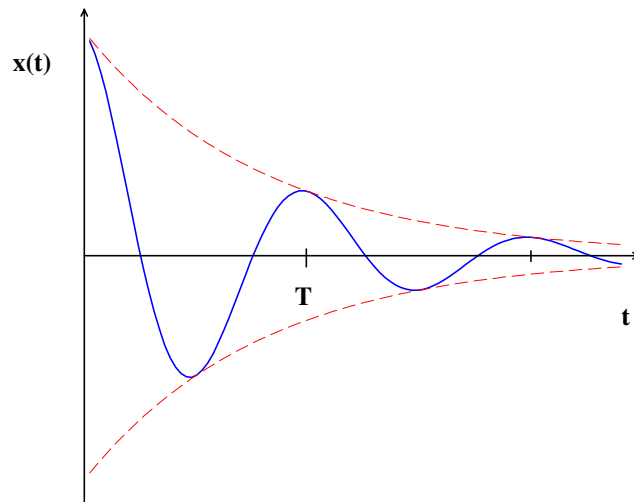


Abbildung 2.31: Ortskoordinate des schwach gedämpften Oszillators nach (2.67) zusammen mit der exponentiell abfallenden Amplitude

Durch die Ableitung dieser Funktion nach der Zeit ergibt sich die Geschwindigkeit zu

$$v(t) = -\delta e^{-\delta t} A \cos(\omega_1 t + \varphi) - \omega_1 e^{-\delta t} A \sin(\omega_1 t + \varphi).$$

Damit kann man auch die zugehörige Trajektorie im Phasenraum bestimmen, so wie sie in Abb. 2.32 skizziert ist. In diesem Fall erhält man keine geschlossene Kurve. Die Trajektorie läuft in einer Spiralforn auf den Koordinatenursprung zu. Dies reflektiert das Verhalten des gedämpften Oszillators. Mit zunehmender Zeit  $t$  nimmt die jeweilige maximale Auslenkung einer Schwingung ab, genau so wie die Geschwindigkeiten bei der Position  $x = 0$ . Dies wird fortgesetzt bis das Pendel schliesslich am Phasenraumpunkt  $x = 0$  und  $v = 0$  zur Ruhe kommt. Natürlich bleibt bei dieser gedämpften Bewegung die Energie des Pendels nicht erhalten.

## 2.9.4 Starke Dämpfung

Im Fall sehr starker Dämpfung gilt im Gegensatz zu (2.9.3)

$$\frac{\alpha^2}{4m^2} = \delta^2 > \frac{k}{m}.$$

In diesem Fall erhalten wir die Konstanten  $\lambda_i$  nach (2.9) in der Form

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \phi$$

womit sich für die Koordinate und die Geschwindigkeit der allgemeinen Lösung ergibt:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{(-\delta+\phi)t} + A_2 e^{(-\delta-\phi)t} \\ v(t) &= A_1 (-\delta + \phi) e^{(-\delta+\phi)t} + A_2 (-\delta - \phi) e^{(-\delta-\phi)t}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

In diesem Fall entwickelt sich also keine Schwingung, sondern die Koordinate als Funktion der Zeit wird durch Exponentialfunktionen beschrieben. Die Konstanten  $A_i$  können nun z.B. so gewählt werden, dass die Geschwindigkeit  $v$  oder auch die Position des Teilchens  $x$  zur Zeit  $t = 0$  identisch 0 sind. Die daraus resultierenden Funktionen  $x(t)$  und die entsprechenden Trajektorien im Phasenraum sind in Abb. 2.33 abgebildet.

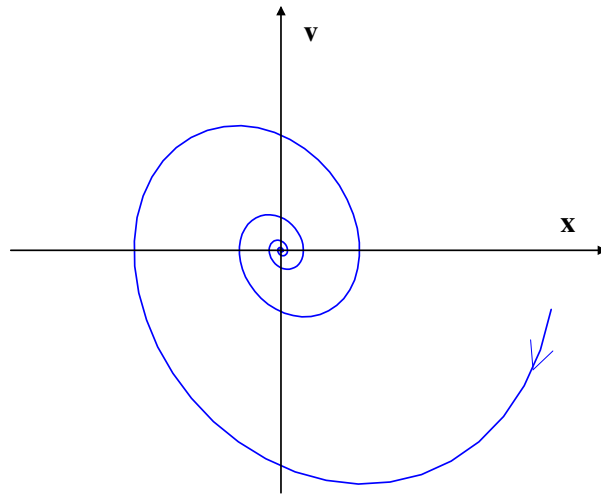


Abbildung 2.32: *Trajektorie des schwach gedämpften Harmonischen Oszillators im Phasenraum*

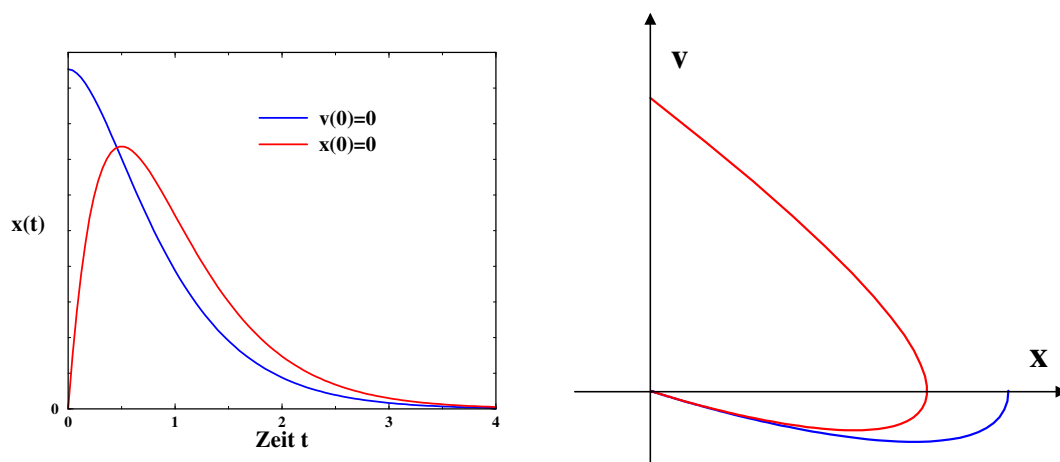


Abbildung 2.33: *Koordinaten und Trajektorie im Phasenraum im Fall des stark gedämpften Harmonischen Oszillators*

## 2.10 Angetriebener Harmonische Oszillator

Wir können der Bewegungsgleichung des Harmonischen Oszillators aus dem vorhergehenden Abschnitt auch noch eine externe Kraft hinzufügen. Sehen wir die Harmonische Näherung z.B. wieder als Modell für die Schwingung der Atome eines Moleküls um den Gleichgewichtsabstand an, so kann diese externe Kraft durch ein elektromagnetisches Wechselfeld gegeben sein. Die Kraft fluktuiert also als Funktion der Zeit in Form einer Kosinus Schwingung mit der vorgegebenen Frequenz  $\Omega$ . Eine andere Realisierung ist aber auch das Federpendel, das in der Vorlesung über einen Motor angetrieben wurde. Die Bewegungsgleichung für den Massenpunkt  $m$  erhält mit einer solchen antreibenden Kraft die Form

$$m\ddot{x} = -Cx - \alpha\dot{x} + F_0 \cos(\Omega t).$$

Dies ist die Differentialgleichung für den Harmonischen Oszillator mit Dämpfung und externer Kraft  $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ ; man spricht auch vom angetriebenen Harmonischen Oszillator. Wenn wir diese Gleichung durch die Masse  $m$  dividieren, und ausnutzen, dass

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}}$$

die Winkelgeschwindigkeit des freien Oszillators, definiert erhalten wir die Gleichung (2.10) in der Form

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{\alpha}{m} \dot{x} = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t).$$

Dabei wurden die Terme so angeordnet, dass auf der linken Seite der Gleichung alle Terme mit der gesuchten Funktion  $x(t)$  und deren Ableitungen stehen, während auf der rechten Seite der Term steht, der unabhängig von dieser Funktion  $x(t)$  ist. Ist dieser Term auf der rechten Seite von 0 verschieden, so bezeichnet man eine solche Differentialgleichung als **inhomogene Differentialgleichung**. Die rechte Seite bezeichnet man als Inhomogenität und die Differentialgleichung ohne diese Inhomogenität als zugehörige homogene Differentialgleichung. In unserem Fall ist also die zu (2.10) zugehörige homogene Differentialgleichung gegeben durch

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{\alpha}{m} \dot{x} = 0.$$

Ist  $x_0(t)$  irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung (2.10) und  $x_1(t)$  eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung (2.10), so ist die Linearkombination

$$x_2(t) = x_0(t) + \alpha x_1(t)$$

eine weitere Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.10). Zum Beweis setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \frac{\alpha}{m} \dot{x}_2 &= \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \frac{\alpha}{m} \dot{x}_0 + \alpha \underbrace{\left( \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \frac{\alpha}{m} \dot{x}_1 \right)}_{=0 \text{ wg. (2.10)}} \\ &= \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t), \end{aligned}$$



was ja gerade zeigt, dass  $x_2(t)$  Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung ist. Es gilt aber noch mehr: Die inhomogene Differenzialgleichung ist in unserem Fall eine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung, sie besitzt also 2 linear unabhängige Lösungen. Dies gilt aber auch für die zugehörige homogene Differenzialgleichung. Damit ist gezeigt, dass (2.10) auch bereits die allgemeine Lösung für die inhomogene Differenzialgleichung darstellt. Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differenzialgleichung lässt sich darstellen als die Summe aus einer beliebigen Lösung der inhomogenen Gleichung plus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung.

Wir werden also zur Lösung unseres Problems zunächst einmal eine Lösung der inhomogenen Gleichung (2.10) suchen und schreiben sie dazu um in die Form

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z + \frac{\alpha}{m} \dot{z} = \frac{F_0}{m} e^{-i\Omega t}.$$

bei der wir komplexe Funktionswerte für die gesuchte Funktion  $z(t)$  zulassen und auch die rechte Seite der Gleichung eine komplexwertige Funktion enthält. Beachte, dass der Realteil der rechten Seite dieser Gleichung gerade die Kosinusfunktion ergibt also die Inhomogenität der Gleichung (2.10). Die Differenzialgleichung (2.10) entspricht also gerade dem Realteil der Gleichung (2.10). Wir benutzen die komplexe Erweiterung lediglich, weil viele Rechenoperationen in der komplexen Darstellung einfacher sind. Für die gesuchte Funktion  $z(t)$  betrachten wir den Ansatz:

$$z(t) = A e^{-i\Omega t},$$

mit einer komplexwertigen Amplitude  $A$ . Setzt man diesen Ansatz in die zu lösende Gleichung (2.10) ein, ergibt sich

$$\left\{ A \left( -\Omega^2 + \omega_0^2 - i \frac{\alpha}{m} \Omega \right) - \frac{F_0}{m} \right\} e^{-i\Omega t} = 0.$$

Da diese Gleichung für alle Zeiten  $t$  erfüllt sein muss, ist also der Ausdruck in der geschweiften Klammer gleich Null und es ergibt sich für die komplexe Amplitude

$$\begin{aligned} A &= \frac{F_0}{m \left[ \omega_0^2 - \Omega^2 - i \frac{\alpha}{m} \Omega \right]} \\ &= |A| e^{i\varphi}. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Für den Betrag der Amplitude  $A$  gilt damit

$$|A| = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\alpha^2 \Omega^2}{m^2}}}$$

und

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Real}(A)}{|A|} = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\alpha^2 \Omega^2}{m^2}}}.$$

Damit ist die gesuchte Lösung, der Realteil des Ansatzes von (2.10)

$$x(t) = \operatorname{Real}(z(t)) = |A| \cos(\Omega t - \varphi),$$

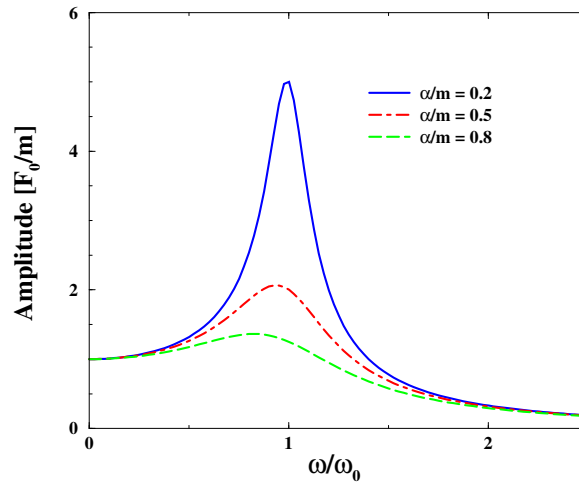


Abbildung 2.34: Amplitude der Schwingung des angetriebenen Harmonischen Oszillators als Funktion der Frequenz  $\omega$  der antreibenden Kraft für verschiedene Dämpfungen  $\alpha$  (siehe (2.10)).

gegeben in der Form

$$x(t) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\alpha^2 \Omega^2}{m^2}}} \cos(\Omega t - \varphi).$$

Die allgemeine Form der Lösung für den angetriebenen Harmonischen Oszillator erhält man also dadurch, dass man zu dieser Lösung eine beliebige Lösung von (2.10) hinzuaddiert, also eine Lösung des Harmonischen Oszillators mit Dämpfung aber ohne externe Kraft. Die Parameter in dieser allgemeinen Lösung können dann so angepasst werden, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind.

Dies soll uns aber jetzt gar nicht interessieren, denn wir wissen ja aus der obigen Diskussion, dass die Lösungen des gedämpften Harmonischen Oszillators ohne externen Antrieb nach einer gewissen Zeit gegen Null gehen. Für solche Zeiten verbleibt also nur noch die Lösung in (2.10). Das ist eine Harmonische Schwingung mit der Frequenz  $\Omega$  der antreibenden Kraft. Die Amplitude  $|A|$  dieser Schwingung ist als Funktion der Frequenz  $\Omega$  für verschiedene Werte der Dämpfungskonstante  $\alpha$  in Abb. 2.34 dargestellt. Man sieht aus dieser Darstellung, dass die Amplitude maximal ist, wenn die Dämpfung gering ist und die Frequenz  $\Omega$  nahe an der charakteristischen Frequenz  $\omega_0$  des nicht angetriebenen Systems ist.

Nehmen wir als Beispiel wieder die Schwingung der Atome eines Moleküls, auf das eine elektromagnetisches Wechselfeld wirkt, so sehen wir, dass das Molekül besonders dann zu Schwingungen angetrieben wird, wenn die Frequenz der Strahlung  $\omega$  mit der charakteristischen Frequenz des Moleküls  $\omega_0$  übereinstimmt. Die antreibende Kraft ist dann resonant mit dem System.

Die Schwingung des angetriebenen Oszillators ist im Allgemeinen nicht genau in Phase mit der antreibenden Kraft. Die Phasendifferenz ist durch  $\varphi$  gegeben. Zur Diskussion dieser Phase  $\varphi$  betrachten wir noch einmal die komplexe Amplitude  $A$  aus (2.69) und zwar

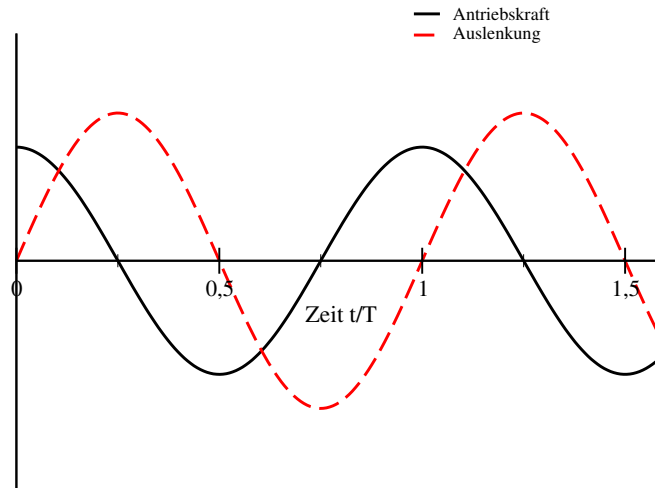


Abbildung 2.35: Schwingung des angetriebenen Harmonischen Oszillators und Antriebskraft als Funktion der Zeit für den Fall der Resonanz  $\Omega = \omega_0$ .

sowohl in der Polardarstellung als auch in der Darstellung über Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned}
 A &= |A|e^{i\varphi} \\
 &= \frac{F_0}{m \left[ (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\alpha^2 \Omega^2}{m^2} \right]} \left\{ (\omega_0^2 - \Omega^2) + i \frac{\alpha \Omega}{m} \right\}. \quad (2.70)
 \end{aligned}$$

Ist also die Winkelgeschwindigkeit der antreibenden Kraft  $\Omega$  identisch mit der Frequenz  $\omega_0$  des ungedämpften Oszillators, so ist der Realteil von  $A$  identisch 0 und der Phasenwinkel  $\varphi = \pi/2$ . Dies bedeutet nach (2.10), dass die Auslenkung  $x(t)$  der Amplitude um diesen Winkel  $\pi/2$  hinterherhinkt (siehe Abb. 2.35). Zu dem Zeitpunkt zu der die Auslenkung des Massenpunktes aus der Ruhelage 0 ist, ist die Antriebskraft in Richtung der Bewegung maximal. Wenn die Auslenkung maximal ist, durchläuft die Antriebskraft gerade den Nullpunkt um anschliessend in die neue Richtung anzutreiben. Es ist klar, dass bei dieser Phasenlage der Kraftübertrag von der antreibenden Kraft auf den Massenpunkt optimal ist.

Ist die Frequenz des Antriebs  $\Omega$  größer als die Frequenz  $\omega_0$ , so wird der Massenpunkt der optimalen Antriebsphase nachlaufen. Mathematisch äussert sich das darin, dass der Realteil von  $A$  in (2.70) negativ ist, was einem Phasenwinkel  $\varphi > \pi/2$  entspricht. Bei Antriebsgeschwindigkeiten  $\Omega$  kleiner als  $\omega_0$  ist der Realteil von  $A$  größer als Null. Dies entspricht einer Phase  $\varphi < \pi/2$ . Physikalisch interpretiert bedeutet dies, dass die Eigenfrequenz des Oszillators zu schnell ist für den Antrieb. Im Grenzfall  $\Omega=0$  verschwindet der Imaginärteil von  $A$  und es gilt  $\varphi = 0$ .

## 2.11 Zur numerischen Lösung der Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichung für ein mechanisches System, wie z.B. für den angetriebenen Harmonischen Oszillator, hat die allgemeine Form

$$\ddot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t), t) .$$

Es handelt sich also um eine Differentialgleichung 2.Ordnung in der Zeit, bei der die gesuchte Funktion  $x(t)$ , deren Zeitableitung  $\dot{x}(t)$  und im allgemeinen Fall auch noch ein inhomogener Anteil (also unabhängig von  $x$  oder  $\dot{x}$ ), der eine explizite Zeitabhängigkeit enthalten kann, auftreten. Bisher haben wir einfache Probleme behandelt, bei denen eine analytische Lösung dieser Bewegungsgleichung recht leicht zu erzielen war. In vielen Fällen wird man jedoch keine analytische Lösung finden können und man kann versuchen die Differentialgleichung (2.11) mit rein numerischen Methoden zu lösen. An dieser Stelle sollen einige einfache Methoden für eine solche numerische Lösung vorgestellt werden. Wir werden dazu zwei Schritte vornehmen:

- In einem ersten Schritt wird die Differentialgleichung zweiter Ordnung umgeformt in ein System von 2 Differentialgleichungen erster Ordnung.
- Im zweiten Schritt werden wir eine einfache Methode für die numerische Lösung eines solchen Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung vorstellen.

Für die Umformung der Differentialgleichung (2.11) definieren wir die Funktionen

$$\begin{aligned} y_1(t) &:= x(t) \\ y_2(t) &:= \dot{x}(t) . \end{aligned} \tag{2.71}$$

Damit können wir die Differentialgleichung (2.11) umschreiben auf die Form

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2(t) = f_1(y_1, y_2, t) , \\ \dot{y}_2(t) &= f_2(y_1, y_2, t) . \end{aligned} \tag{2.72}$$

Dabei ist die Funktion  $f_2$  identisch mit der Funktion  $f$  aus (2.11). Wir haben also so ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit für die 2 gesuchten Funktionen  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$ . Dabei sind die Ableitung der gesuchten Funktionen  $y_i(t)$  nach der Zeit durch Funktionen  $f_i$  gegeben sind, die von allen  $y_j(t)$  und im Fall von inhomogenen Differentialgleichungen auch noch explizit von der Zeit  $t$  abhängen können. Zur Lösung der Differentialgleichung für  $y_1$  muss  $y_2$  bekannt sein und entsprechendes gilt umgekehrt für die Lösung der Differentialgleichung für  $y_2$ . Wir sprechen deshalb von einem System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung.

Man kann dieses Verfahren direkt verallgemeinern und aus einer Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung für eine gesuchte Funktion  $y_1(t)$  ein System von  $n$  gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung für entsprechende  $n$  Funktionen  $y_1$  bis  $y_n$  generieren.

Wie löst man nun solche Differentialgleichungen erster Ordnung mit rein numerischen Methoden. Ziel ist es dabei, die unbekanntenen Funktionen  $y_i(t)$  durch ihren Wert an diskreten Stützstellen der Zeit

$$t_k := k * h \quad \text{für} \quad k = 0 \dots N ,$$

zu bestimmen. Das gesamte uns interessierende Zeitintervall  $[t_0 = 0, t_F = N * h]$  ist so in äquidistante Teilintervalle aufgeteilt. Die Schrittweite  $h$  soll dabei so klein gewählt sein, dass die Information über die Werte der Funktion  $y_i$  an diesen Stützstellen  $t_k$  ausreicht um die Funktion zu charakterisieren.

Die einfachste Möglichkeit für eine numerische Lösung der Gleichungen (2.72) bietet das sogenannte **Euler Verfahren**. Dazu nimmt man an, dass die Schrittweite  $h$  so klein gewählt ist, dass man bei der Taylor Entwicklung der gesuchten Funktionen

$$y_i(t+h) = y_i(t) + h \left. \frac{dy_i}{dt} \right|_t + \mathcal{O}(h^2)$$

die Terme von quadratischer Ordnung in  $h$  und höheren Potenzen getrost vernachlässigen kann. Das Verfahren enthält also Fehler von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^2)$ . In dieser Näherung kann man die Zeitableitungen von  $y_i$  gemäß (2.72) ersetzen und erhält

$$y_i(t+h) = y_i(t) + h f_i(y_1(t), y_2(t), t).$$

Ausserdem können wir davon ausgehen, dass die Werte der gesuchten Funktionen  $y_i$  am Anfang der zu beschreibenden Bewegung bekannt sind. Dies sind ja gerade die Randbedingungen  $y_1(0) = x(0)$  und  $y_2(0) = v(0)$ , die auch bei einer analytischen Lösung vorgegeben werden müssen. Daraus können wir dann mit Hilfe von (2.11) berechnen

$$\begin{aligned} x(t_1) &= y_1(t_1) = y_1(0) + h f_1(y_1(0), y_2(0), 0) \\ v(t_1) &= y_2(t_1) = y_2(0) + h f_2(y_1(0), y_2(0), 0). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Damit sind Ort und Geschwindigkeit an der nächsten Stützstelle in der Zeit  $t_1$  berechnet und man kann das gleiche Verfahren benutzen um damit die gesuchten Funktionswerte an der nächsten Stützstelle  $t_2$  zu bestimmen. Nach  $N$  Schritten ist man dann am Endpunkt angekommen.

Um dieses Verfahren konkret vorzuführen ist in Abb. 2.36 das Protokoll einer MAPLE Sitzung dargestellt, in der mit dem Euler Verfahren zu Testzwecken die Differenzialgleichungen für den Harmonischen Oszillator ohne Dämpfung berechnet wird. Zunächst wurde dabei eine Prozedur *harmoni* definiert, die als Input die Größen Schrittweite  $h$ , Zahl der Stützstellen  $n$  und die Anfangswerte  $x_0$  und  $v_0$  benötigt. Die Prozedur berechnet dann die Werte für  $x$ ,  $v$  und  $t$  an den Stützstellen  $t_i = i * h$  aus und speichert sie als Elemente eines Vektors  $x[i]$ ,  $v[i]$  beziehungsweise  $t[i]$ . In der Prozedur werden durch die lokalen Variablen  $\omega = 1$  und  $\alpha = \beta = 0$  die Eigenschaften des Beispiels festgelegt. Nach dem Aufruf der Prozedur mit den Werten  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = 1$ ,  $h = 0.01$  und  $n = 700$  werden die Ergebnisse für  $x(t)$  und  $v(t)$  beziehungsweise die zugehörige Trajektorie geplottet. Die entsprechenden Ergebnisse sind in Abb. 2.37 dargestellt.

Man sieht insbesondere bei der Trajektorie im Phasenraum, dass das Ergebnis nicht sehr zufriedenstellend ist. Die Trajektorie schliesst sich nicht genau zu einer Ellipse. Die Ursache dafür ist die Ungenauigkeit des benutzten Verfahrens. Man könnte nun die Ergebnisse dadurch verbessern, dass die Schrittweite  $h$  verringert wird. Dies führt in der Tat zu gewissen Verbesserungen, jedoch wird der numerische Aufwand entsprechend größer. Bei komplizierteren Systemen von Differenzialgleichungen kann eine solche Erhöhung der Zahl der Stützstellen (also Verkleinerung von  $h$ ) schliesslich dazu führen, dass die Zahl

```

Maple V -- vor2.ms
File Edit View Options Help
Input Interrupt Pause
> v[j]:=v[i-1]-(x[i-1]*ww+v[i-1]*bet)*h;
> od
> end;

harmo1 := proc(x0,v0,h,n,x,v,t)
  local i,ww,bet;
  ww := 1. ;
  bet := 0;
  x[0] := x0;
  v[0] := v0;
  t[0] := 0;
  for i to n do
    t[i] := t[i-1]+h;
    x[i] := x[i-1]+v[i-1]*h;
    v[i] := v[i-1]-(x[i-1]*ww+v[i-1]*bet)*h
  od
end

> harmo1(0,1,0.01,700,x,v,t);
.7809133941

> plot([seq([t[j]*10],x[j]*10],j=1..70)],seq([t[i]*10],v[i]*10],i=1..70)),0..7,-1.2..1.2,style=point);
> plot([seq([x[j]*10],v[j]*10],j=1..70)],-1.2..1.2,-1.2..1.2,style=line,color=blue);
>
Maple Memory: 831K Maple CPU Time: 0.2 sec Interface Memory: 16.0K

```

Abbildung 2.36: MAPLE Protokoll für Das Euler Verfahren, siehe Diskussion im Text

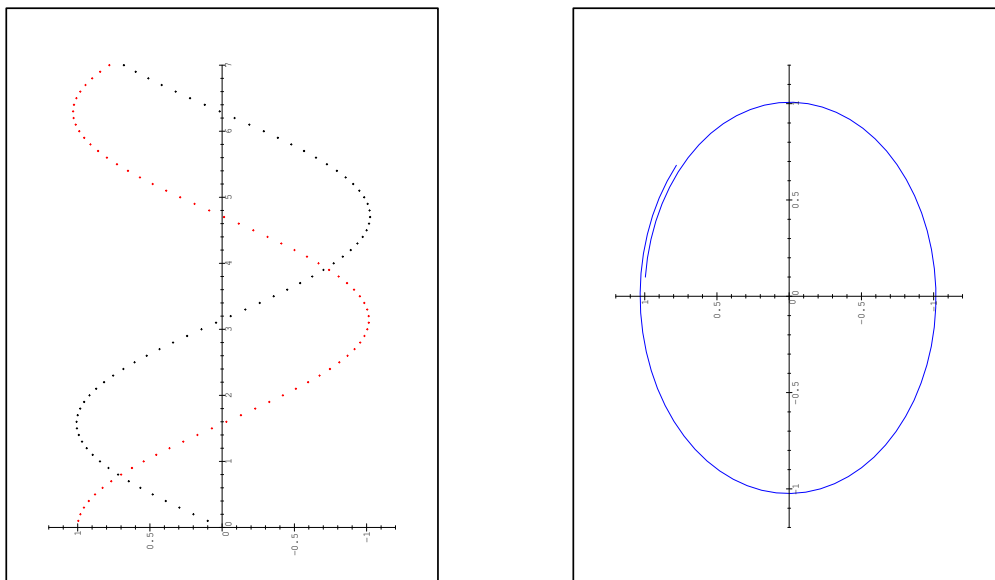


Abbildung 2.37: Ergebnisse für die numerische Berechnung des Harmonischen Oszillators mit dem Euler Verfahren nach Abb. 2.36, links  $x(t)$  und  $v(t)$ , rechts die Trajektorie im Phasenraum.

der benötigten Rechenoperationen so groß wird, dass die Berechnung durch numerische Rundungsfehler ungenau wird.

Es lohnt sich also offensichtlich den Algorithmus zur numerischen Lösung der Differenzialgleichungen zu verbessern. Wir wollen an dieser Stelle eine erste Verbesserung des Euler Verfahrens diskutieren, das **Runge-Kutta Verfahren 2.Ordnung**. Im Gegensatz zum Euler Verfahren (2.11) berücksichtigt man dabei auch die Terme quadratischer Ordnung in der Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} y_i(t+h) &= y_i(t) + h \frac{dy_i}{dt} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \mathcal{O}(h^3) \\ &= y_i(t) + h \frac{dy_i}{dt} + \frac{h^2}{2} \frac{df_i}{dt} + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \quad (2.74)$$

Bei der Berechnung der Zeitableitung der Funktion  $f_i$  nach der Zeit macht man nun wieder die lineare Näherung und ersetzt

$$\begin{aligned} \frac{df_i}{dt} &\approx \frac{f_i[y_j(t+h)] - f_i[y_j(t)]}{h} \\ &\approx \frac{f_i[y_j(t) + hf_j[y_k(t)]] - f_i[y_j(t)]}{h}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Insgesamt macht man in diesem Fall nur Fehler der Ordnung  $h^3$ , die Terme bis zur 2.Ordnung in  $h$  werden korrekt behandelt. Deshalb heisst dieses Verfahren auch ein Verfahren 2.Ordnung. Mit den Gleichungen (2.74) und (2.75) kann man nun eine schrittweise Lösung der Differenzialgleichungen durchführen ganz analog zum oben diskutierten Euler Verfahren. Natürlich kann man die Verfahren weiter verbessern. Als Beispiel sei die MAPLE Prozedur für ein Runge-Kutta Verfahren 4.Ordnung angegeben <sup>7</sup>.

```
harmo2 := proc(x0,v0,h,n,x,v,t)
  local i,ww,bet,k1,k2;
  ww := 1.
  bet := .1 ;
  x[0] := x0;
  v[0] := v0;
  t[0] := 0;
  for i to n do
    t[i] := t[i-1]+h;
    k1[1] := h*v[i-1];
    k2[1] := -h*(x[i-1]*ww+v[i-1]*bet);
    k1[2] := h*(v[i-1]+.5*k2[1]);
    k2[2] := -h*((x[i-1]+.5*k1[1])*ww+(v[i-1]+.5*k2[1])*bet);
    k1[3] := h*(v[i-1]+.5*k2[2]);
    k2[3] := -h*((x[i-1]+.5*k1[2])*ww+(v[i-1]+.5*k2[2])*bet);
    k1[4] := h*(v[i-1]+k2[3]);
```

---

<sup>7</sup>Eine Übersicht über verschiedene numerische Methoden zur Lösung von Differenzialgleichungen und deren Umsetzung in Programmiersprachen findet man z.B. in W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling: *Numerical Recipes, the art of scientific computing*. Dort ist auch dieses Runge Kutta Verfahren näher beschrieben.

```
k2[4] := -h*((x[i-1]+k1[3])*ww+(v[i-1]+k2[3])*bet);
x[i] := x[i-1]+1/6*k1[1]+1/3*k1[2]+1/3*k1[3]+1/6*k1[4];
v[i] := v[i-1]+1/6*k2[1]+1/3*k2[2]+1/3*k2[3]+1/6*k2[4]
od
end
```

Diese verbesserten Verfahren sind sehr viel zuverlässiger als das Euler Verfahren. Die Testrechnung am Beispiel des Harmonischen Oszillators, die wir in Abb. 2.36 mit dem Euler Verfahren diskutiert haben, führte bei einer Schrittweite von  $h = 0.01$  nur zu bedingt zufriedenstellenden Ergebnissen. Eine entsprechende Rechnung mit dem Runge-Kutta Verfahren 4.Ordnung liefert sogar bei einer sehr viel größeren Schrittweite von  $h = 0.1$  eine nahezu perfekte ellipsenförmige Trajektorie im Phasenraum.



## 2.12 Zentrale Kraftfelder

In diesem Abschnitt sollen die Eigenschaften von **Zentralen Kraftfeldern** betrachtet werden. Unter einem zentralen Kraftfeld versteht man eine Kraft, die stets in die Richtung eines zentralen Punktes, dem Kraftzentrum wirkt. Auf jedes Probelteilchen wirkt also eine Kraft, die versucht dieses Teilchen in die Richtung des Kraftzentrums zu bewegen. In diesem Fall spricht man von einer attraktiven Zentralkraft. Eine Zentralkraft kann aber auch repulsiv sein. In diesem Fall weist die Kraft stets in die Richtung vom Kraftzentrum weg.

Als Beispiel für eine solche Zentralkraft kennen wir die Kraft, die von einer elektrischen Punktladung auf eine Probeladung ausgeübt wird. In diesem Fall entspricht die Position der Punktladung dem Kraftzentrum. Wenn Punktladung und Probeladung unterschiedliches Vorzeichen besitzen, so ist die Zentralkraft auf die Probeladung attraktiv. Im Falle von Ladungen mit gleichem Vorzeichen ist die Kraft repulsiv. Insbesondere ist also die Kraft, die ein Atomkern mit  $Z$  Protonen auf ein Elektron ausübt, eine solche attraktive Zentralkraft.

Betrachtet man das Koordinatensystem, das sich in natürlicher Weise anbietet, nämlich das, bei dem der Koordinatenursprung mit dem Kraftzentrum zusammenfällt, so schreibt sich diese Coulombkraft in der Form

$$\vec{F} = -\frac{Ze^2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

wobei  $e$  für den Betrag der Elementarladung steht, die ja bis auf das Vorzeichen der Ladung des Elektrons wie auch der Ladung des Protons entspricht.  $\vec{r}$  ist der Ortsvektor des Elektrons und  $r$  der Betrag dieses Ortsvektors also gerade der Abstand zwischen dem Elektron und dem Atomkern im Koordinatenursprung.

Allgemein ist also ein **Zentrales Kraftfeld** so definiert, dass es in einem Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung im Kraftzentrum die Form besitzt

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r})\vec{r}.$$

Dabei ist  $f(\vec{r})$  ein Skalarfeld, also eine reellwertige Funktion, deren Funktionswert, die Stärke der Kraft, sowohl vom Abstand  $|\vec{r}|$  als aber im allgemeinen Fall auch von der Richtung des Vektors  $\vec{r}$  abhängen kann.

Handelt es sich bei dem zentralen Kraftfeld ausserdem noch um ein konservatives Kraftfeld, so hängt die Stärke der Kraft nur vom Abstand  $|\vec{r}|$  ab. Es gilt also

$$\vec{F} \text{ zentral und konservativ} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)\vec{r}.$$

Zum Beweis dieser Behauptung betrachten wir die Darstellung der Vektoren in Kugelkoordinaten (mit dem Koordinatenursprung im Kraftzentrum). Da  $\vec{F}$  konservativ sein soll, kann man  $\vec{F}$  als Gradient eines Potentials  $U$  schreiben (2.3.3)

$$\begin{aligned} \vec{F}(r, \theta, \phi) &= -\vec{\nabla}U(r, \theta, \phi) \\ &= -\frac{\partial U}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\hat{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}\hat{e}_\phi. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile dieser Gleichung wurde die Darstellung des Gradienten in Kugelkoordinaten von (2.3.2) übernommen. Da  $\vec{F}$  ausserdem eine Zentralkraft sein soll, also lediglich eine Komponente parallel zu  $\hat{e}_r$  besitzt, gilt

$$\vec{F}(r, \theta, \phi) = f(r, \theta, \phi)r\hat{e}_r,$$

die Komponenten des Kraftfeldes in Richtung der Einheitsvektoren  $\hat{e}_\theta$  und  $\hat{e}_\phi$  sind demnach identisch null. Aus der Darstellung von  $\vec{F}$  in (2.76) folgt

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0 \end{array} \right\} \text{ also } U(r, \theta, \phi)$$

das Potenzial  $U$  hängt nur vom Abstand  $r$  ab. Dies gilt dann natürlich auch für die Ableitung von  $U$  nach  $r$  und der Vergleich von (2.76) mit (2.12) zeigt

$$f = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Dadurch ist also gezeigt, dass die Stärke des konservativen zentralen Kraftfeldes nur vom Abstand vom Kraftzentrum  $r$  abhängt, womit (2.12) bewiesen ist.

Eine konservative Zentralkraft  $\vec{F}$  ist also dadurch gekennzeichnet, dass es ein entsprechendes Potenzial  $U(r)$  gibt, das nur vom Abstand  $r$  abhängt. Es gilt

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}\hat{e}_r.$$

Man bezeichnet ein solches Potenzial,  $U(r)$ , auch häufig als **Zentralpotenzial**.

Natürlich kann man sich zentrale Kraftfelder vorstellen, die nicht konservativ sind, und bei denen die Stärke der Kraft nicht nur vom Abstand zum Kraftzentrums sondern auch von der Richtung des Ortsvektors abhängt.

Bei der Beschreibung einer Bewegung von Massenpunkten in konservativen Kraftfeldern ist es nützlich, den Drehimpuls des bewegten Massenpunktes zu definieren. Der **Drehimpuls**,  $\vec{l}$ , eines Teilchens der Masse  $m$  am Ort  $\vec{r}$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ist definiert durch

$$\vec{l} := m\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p},$$

mit  $\vec{p}$ , dem Impuls des Teilchens. Es ist klar, dass dieser Drehimpuls von dem Koordinatensystem anhängt, in dem die Bewegung des Teilchens beschrieben wird: Bewegt sich ein Teilchen im Koordinatenursprung eines Koordinatensystems, so ist der Drehimpuls des Teilchens zu diesem Zeitpunkt  $\vec{l} = 0$ , da ja  $\vec{r} = 0$ . In einem Koordinatensystem mit einem anderen Ursprung ist aber  $\vec{r}' \neq \vec{0}$ , so dass hier auch der Drehimpuls  $\vec{l}'$  im Allgemeinen von Null verschieden sein wird.

Hier soll die Bewegung in einem zentralen Kraftfeld betrachtet werden und deshalb werden wir im Folgenden ein natürliches Koordinatensystem betrachten, bei dem der Koordinatenursprung im Kraftzentrum liegt. In diesem Fall gilt:

Bei der Bewegung eines Teilchens in einem zentralen Kraftfeld bleibt der Drehimpuls des Teilchens, bezogen auf ein Koordinatensystem mit Ursprung im Kraftzentrum, erhalten

Zum Beweis dieses Satzes betrachten wir die Ableitung des Drehimpulsvektors nach der Zeit

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{l}}{dt} &= m \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) \\
 &= m \underbrace{(\vec{v} \times \vec{v})}_{=0} + m \left( \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \\
 &= \left( \vec{r} \times \vec{F} \right) \\
 &= f(\vec{r}) (\vec{r} \times \vec{r}) = \vec{0}.
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Damit ist also gezeigt, dass der Drehimpuls eine Konstante der Bewegung ist.

Aus der dritten Zeile dieser Gleichung lesen wir ausserdem ab, dass für jedes Kraftfeld gilt

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \left( \vec{r} \times \vec{F} \right) = \vec{N}.$$

Die Änderung des Drehimpulses ist danach gegeben durch das Vektorprodukt aus dem Ortsvektor des Teilchens  $\vec{r}$  und der wirkenden Kraft  $\vec{F}$ . Man bezeichnet diese Größe als das **Drehmoment**, das auf das Teilchen wirkt.

Ist aber der Vektor  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$  während des ganzen Bewegungsablaufes konstant, so bedeutet das ja auch, dass sowohl der Ortsvektor  $\vec{r}$  wie auch der Impulsvektor  $\vec{p}$  zu jeder Zeit senkrecht zu diesem konstanten Vektor  $\vec{l}$  stehen müssen. Das bedeutet aber, dass sich die Bewegung in einer Ebene abspielt und der Drehimpulsvektor steht senkrecht auf dieser Ebene. Identifizieren wir also die Richtung des Drehimpulses mit der  $z$ -Achse des Koordinatensystems, so ist der Ortsvektor des Teilchens eindeutig durch die  $x$  und  $y$ -Koordinate beziehungsweise auch durch die Zylinderkoordinaten  $\rho$  und  $\phi$  definiert. Ja es gilt sogar, dass die  $z$ -Koordinate identisch null sein muss, die Ebene, in der die Bewegung abläuft enthält also den Koordinatenursprung, das Kraftzentrum. Wäre nämlich die  $z$ -Komponente von  $\vec{r}$  ungleich null, so hätte die Kraft, die ja in Richtung  $\vec{r}$  zeigt eine Komponente, die das Teilchen aus der Ebene herausziehen würde, was aber im Widerspruch zur Drehimpulserhaltung stünde.

So werden die Bewegungsgleichung, die ja im Allgemeinen drei Differenzialgleichungen für die Bestimmung von den drei Koordinaten des Teilchens als Funktion der Zeit sind, im Fall eines zentralen Kraftfeldes reduziert auf zwei Differenzialgleichungen für die zwei unbekannt Funktionen der Teilchenkoordinaten in einer Ebene.

Die Bewegungsgleichungen werden noch weiter reduziert, wenn die Bewegung in einem zentralen konservativen Kraftfeld abläuft. Dazu schreiben wir die Newtonschen Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten und legen das Koordinatensystem so, dass der Koordinatenursprung mit dem Kraftzentrum übereinstimmt und die  $z$ -Achse parallel zum Drehimpuls des Teilchens liegt. Damit verläuft die Bewegung ausschliesslich in der  $xy$ -Ebene und wird durch die Zylinderkoordinaten  $\rho$  und  $\phi$  ( $z=0$ ) beschrieben. Die Ausdrücke für den Ortsvektor  $\vec{r}$ , die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und die Beschleunigung  $\vec{a}$  reduzieren sich damit von (2.1.1) - (2.1.1) auf

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= \rho \hat{e}_\rho \\
 \vec{v} &= \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi \\
 \vec{a} &= \left[ \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \right] \hat{e}_\rho + \left[ 2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi} \right] \hat{e}_\phi
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

Daraus können wir direkt den Drehimpuls berechnen zu

$$\begin{aligned}\vec{l} &= m\vec{r} \times \vec{v} = m\rho\hat{e}_\rho \times \left[ \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi \right] \\ &= m\rho^2\dot{\phi}\hat{e}_z\end{aligned}\quad (2.79)$$

Damit wird noch einmal bestätigt, dass bei dem hier gewählten Koordinatensystem der Drehimpuls parallel zur  $z$ -Achse liegt und der Betrag des Drehimpulses,  $|\vec{l}|$  durch  $m\rho^2\dot{\phi}$  gegeben ist. Da wir die Bewegung in einem konservativem Zentralkraftfeld beschreiben wollen berechnet sich die Kraft  $\vec{F}$  als Gradient eines Potentials  $U(\rho)$ , das nur vom Abstand vom Kraftzentrum und damit in der  $z = 0$ -Ebene lediglich von der Zylinderkoordinate  $\rho$  abhängt.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\rho) = -\frac{\partial U}{\partial \rho}\hat{e}_\rho$$

Aus dieser Gleichung zusammen mit der Darstellung der Beschleunigung in (2.78) erhalten wir also für die Komponente der Newtonschen Bewegungsgleichung  $\vec{F} = m\vec{b}$ , in Richtung von  $\hat{e}_\rho$

$$\begin{aligned}-\frac{\partial U}{\partial \rho} &= m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 \\ &= m\ddot{\rho} + \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{|\vec{l}|^2}{2m\rho^2}.\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man umschreiben auf die Form

$$\begin{aligned}m\ddot{\rho} &= -\frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{|\vec{l}|^2}{2m\rho^2} \\ &= -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \rho} \quad \text{mit} \quad U_{\text{eff}} = U(\rho) + \frac{|\vec{l}|^2}{2m\rho^2}.\end{aligned}\quad (2.80)$$

Die Differenzialgleichung für die radiale Koordinate entspricht also der Bewegungsgleichung eines Teilchens in einer Raumdimension mit einem effektiven Potenzial, das neben dem Potenzialterm, der die wirkende Kraft darstellt,  $U(\rho)$ , noch einen sogenannten Zentrifugalterm enthält, der proportional zum Quadrat des Betrages des Drehimpulses  $\vec{l}$  ist. Eine solche Summe aus attraktivem Potenzial und dem Zentrifugalterm zu einem effektiven Potenzial ist beispielhaft in Abb. 2.38 dargestellt.

Zum Verständnis der Ursache dieses Zentrifugalterms in der radialen Bewegungsgleichung (2.80) betrachten wir die Energie des Teilchens, die ja in dem vorliegenden konservativen Kraftfeld während der Bewegung erhalten bleibt:

$$\begin{aligned}E &= \frac{m}{2}\vec{v}^2 + U(\rho) \\ &= \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{m}{2}\rho^2\dot{\phi}^2 + U(\rho) \\ &= \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \underbrace{\frac{|\vec{l}|^2}{2m\rho^2}}_{=U_{\text{eff}}} + U(\rho).\end{aligned}\quad (2.81)$$

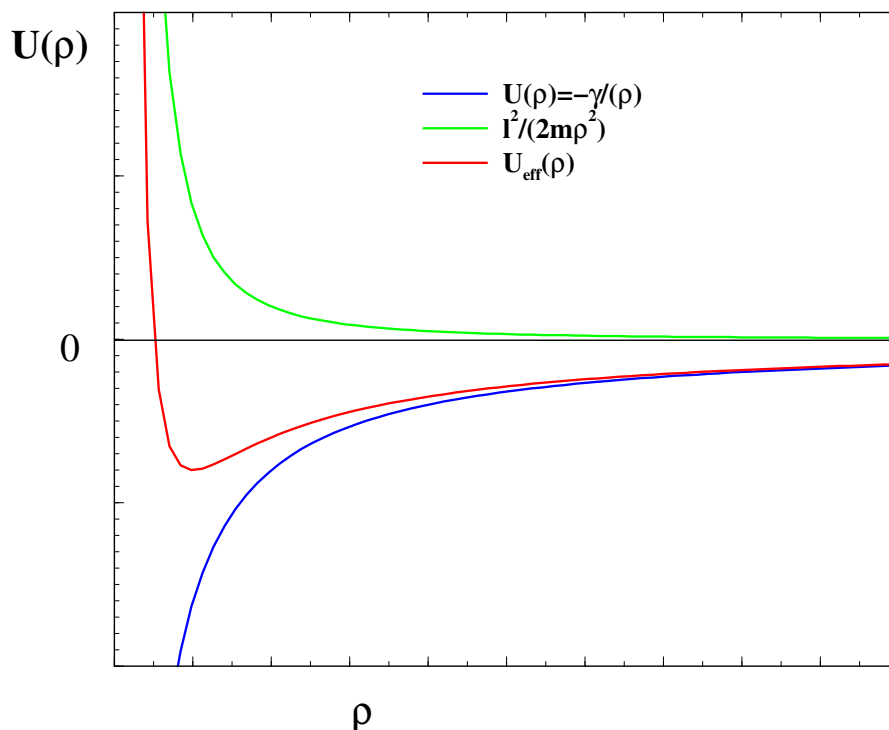


Abbildung 2.38: *Effektives Potenzial als Summe von Potenzial und Zentrifugalpotenzial*

Der Zentrifugalterm hat also seinen Ursprung in der kinetischen Energie des Teilchens. Nähert sich ein Teilchen in einem zentralen Kraftfeld dem Kraftzentrum, so muss die Azimutalkomponente der kinetischen Energie erhöht werden, damit der Betrag des Drehimpulses bei kleiner werdendem  $\rho$  konstant bleibt. Diese Erhöhung der kinetischen Energie wirkt in der Bewegungsgleichung für die Abstandskoordinate  $\rho$  wie ein repulsiver Beitrag zum Potenzial.



## 2.13 Newton'sches Gravitationsgesetz, Planetenbewegung und Kepler'sche Gesetze

### 2.13.1 Das Newton'sche Gravitationsgesetz

Bislang hatten wir die Schwerkraft, die auf eine Masse  $m$  nahe der Erdoberfläche wirkt, in der Form  $\vec{F} = -m\vec{g}$  betrachtet. Die Frage ist nun, wie sich dieses Gesetz ändert, wenn wir die Masse  $m$  sehr weit von der Erdoberfläche entfernen. Naheliegender ist, dass die Gravitationskraft gegen Null geht, wenn wir uns unendlich weit von der Erdoberfläche entfernen.

Gesucht ist also ein allgemeineres Gravitationsgesetz, das zum einen die Abhängigkeit vom Abstand  $r$  der beiden anziehenden Massen (Masse  $m$  und Erde) wiedergibt, aber auch die Abhängigkeit von der Erdmasse enthält.

Betrachten wir zunächst die **Abstandsabhängigkeit**. Mit der naheliegenden Annahme  $F_g \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$  können wir einen **Ansatz**  $F_g = \text{const.} \cdot \frac{m}{r^\alpha}$  versuchen. Es liegt außerdem nahe, dass  $F_g$  in Richtung des Verbindungsvektors  $\vec{r}$  zwischen der Erde und  $m$  wirkt, so dass wir schreiben können:

$$\vec{F}_g = -\text{const.} \cdot \frac{m}{r^\alpha} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (2.82)$$

Vergleichen wir dies mit  $\vec{F} = -m\vec{g}$ , so erhalten wir:  $g = \frac{\text{const.}}{r_E^\alpha}$ , wobei  $r_E$  der Erdradius ist.

Um  $\alpha$  zu bestimmen, vergleichen wir den Wert von  $F_g$  auf der Erdoberfläche mit dem Wert von  $F_g$  auf der Mondbahn. Der Mond läuft im Abstand  $r_{MB}$  um die Erde. Nähern wir eine Bahn durch eine Kreisbahn (tatsächlich handelt es sich um eine Ellipsenbahn, wie wir später sehen werden), so erhalten wir aus dem Kräftegleichgewicht zwischen  $F_g$  und der Zentripetalkraft  $m\omega^2 r_{MB}$ :

$$\text{const.} \cdot \frac{m}{r^\alpha} = m\omega^2 r_{MB}. \quad (2.83)$$

Die Beschleunigung  $a_{MB}$  des Mondes ist:  $a_{MB} = \omega^2 r_{MB} = \left(\frac{2\pi}{T_{MB}}\right)^2 \cdot r_{MB}$ .

Die Umlaufzeit  $T_{MB}$  des Mondes beträgt 28 Tage =  $2.4 \cdot 10^6$  s

Der Radius  $r_{MB}$  beträgt ca.  $3.8 \cdot 10^8$  m  $\approx 60 r_E$

Wir erhalten hieraus:  $a_{MB} \approx 2.6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx \frac{g}{3770} \approx \frac{g}{(60)^2}$ .

Entsprechend unserem Ansatz für  $F_g$  können wir das Verhältnis  $\frac{a_{MB}}{g}$  schreiben:

$$\frac{a_{MB}}{g} = \frac{1/(r_{MB})^\alpha}{1/(r_E)^\alpha} = \left(\frac{r_E}{r_{MB}}\right)^\alpha \quad (2.84)$$

Wir haben also mit  $r_{MB} \approx 60r_E$ :  $\left(\frac{r_E}{r_{MB}}\right)^\alpha \approx \left(\frac{1}{60}\right)^\alpha$ , woraus sich mit unserer Abschätzung  $a_{MB} \approx \frac{g}{(60)^2}$  unmittelbar  $\alpha \approx 2$  ergibt.

Wir vermuten deshalb ein **quadratisches Abstandsgesetz**.

Es bleibt noch die Abhängigkeit von der Erdmasse  $M$  zu untersuchen. Hierzu folgendes Gedankenexperiment (s. Abb. 2.39):

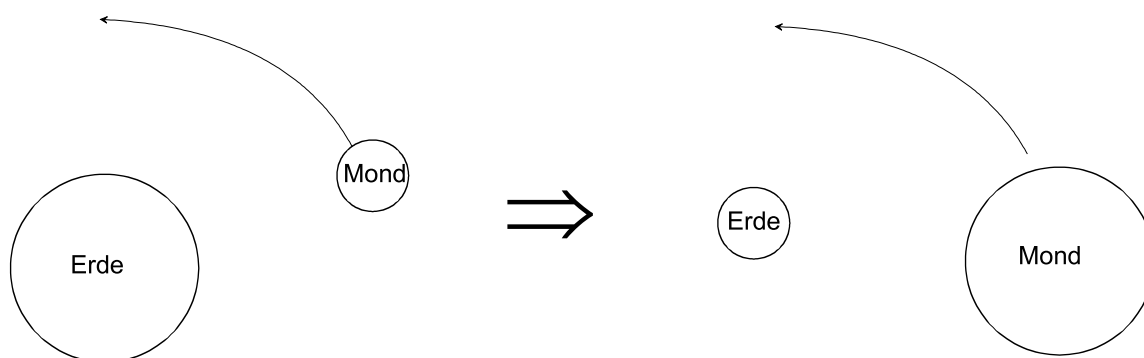


Abbildung 2.39: *Gedankenexperiment zur Abhängigkeit des Gravitationsgesetzes von der Erdmasse: Vergrößern des Mondes und Verkleinern der Erde zur*

Wir vergrößern den Mond auf die Größe und Masse der Erde und verkleinern die Erde auf die Größe und die Masse des Mondes. Mond und Erde haben dann völlig symmetrisch ihre Rollen vertauscht, was sich auch in der Kraft zwischen den beiden widerspiegeln sollte

Es liegt also nahe, dass  $m$  und  $M$  symmetrisch in gleicher Form in  $F_g$  eingehen, d. h. als Produkt  $m \cdot M$ . Wir haben damit endgültig das

$$\text{Newton'sche Gravitationsgesetz: } \vec{F}_g = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.85)$$

mit der noch unbekanntenen **Gravitationskonstanten  $G$** .

Historisch gesehen hat Newton das Gravitationsgesetz auf der Basis von Kepler's Gesetzen über die Planetenbewegungen gefunden. Wir werden hierauf etwas später eingehen. Insbesondere sei hier aber darauf hingewiesen, dass sich  **$G$**  ähnlich wie die Vakuumlichtgeschwindigkeit als eine **universelle Konstante** erweist, die für alle Massen die gleiche ist.

Wüssten wir an dieser Stelle die Masse der Erde, so könnten wir  $G$  aus der Kenntnis von  $g$  und  $r_E$  sofort angeben. Um  $G$  tatsächlich zu bestimmen, muss die Gravitationskraft zwischen zwei bekannten Massen  $M$  und  $m$  gemessen werden.

Ein irdischer **Versuch zur Bestimmung der Gravitationskraft zwischen zwei Massen  $m$  und  $M$**  und damit auch der Bestimmung von  $G$  wurde bereits 1798 von **Cavendish** durchgeführt. Ein derartiges Experiment ist keineswegs trivial. Man bedenke, dass es der Masse der ganzen Erde benötigt, um eine Gravitationsbeschleunigung  $g$  von eben  $9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  auf der Erdoberfläche zu erreichen.

Dass ein Experiment zur Messung von  $\vec{F}_g$  bei relativ moderaten Massen im kg-Bereich dennoch gelingen kann, liegt daran, dass man den Messaufbau so wählen kann, dass die Gravitationskraft, die die Erde auf die Massen ausübt, keinen Einfluss auf das Experiment hat. Der Aufbau ist in Abb. 2.40 skizziert.

An einem sehr dünnen Draht (Durchmesser  $10 \mu\text{m}$ ) hängen leicht drehbar zwei Massen  $m = 50 \text{ g}$  wie in Abb. 2.40 (links) in der Seitenansicht gezeichnet. Der vertikale Abstand der beiden Massen beträgt ca.  $25 \text{ cm}$ . An diese beiden Massen können zwei fest verankerte



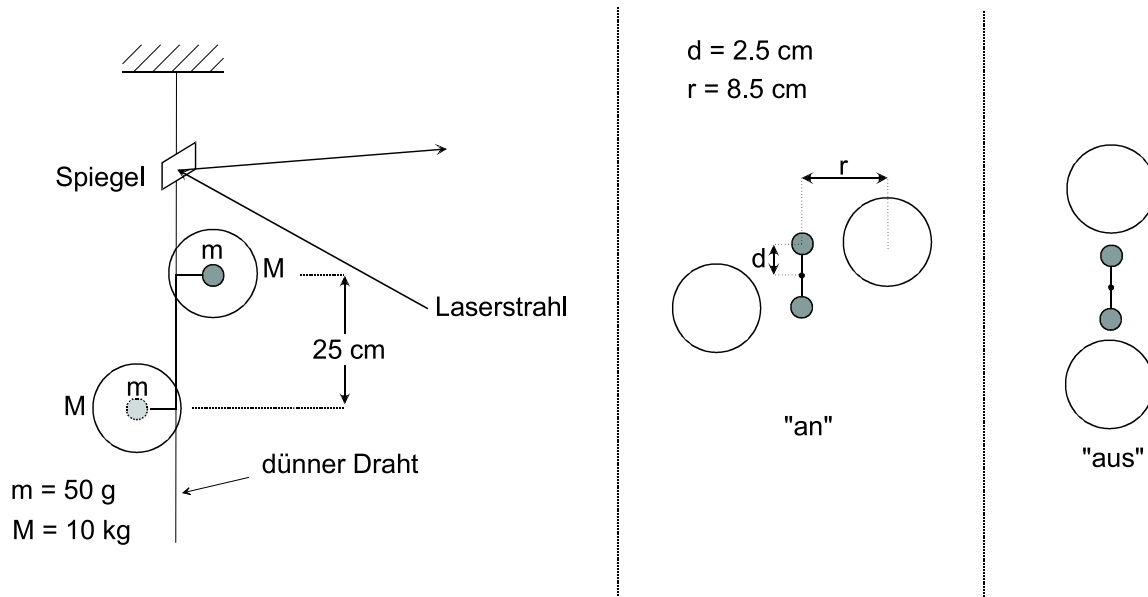
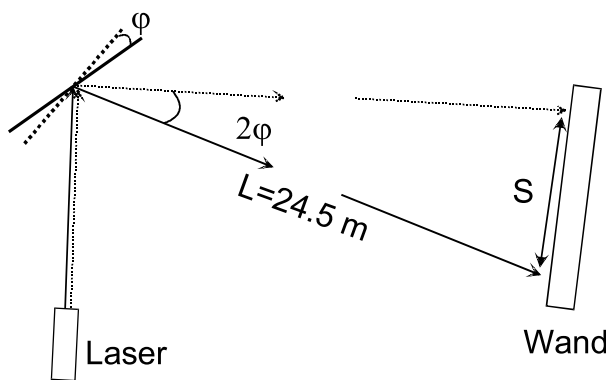


Abbildung 2.40: Schematischer Aufbau des Cavendish-Versuchs

Massen  $M = 10$  kg auf den relativen Abstand  $r = 8.5$  cm zwischen den Kugelmittelpunkten herangebracht werden, wie in der mittleren Abbildung in der Aufsicht gezeichnet. Der Abstand der Mittelpunkte der kleinen Massen beträgt  $2d = 5$  cm.

In der im mittleren Bild gezeichneten Konfiguration "an" ist die Gravitationskraft zwischen den Massen in azimuthaler Richtung gerichtet und wird dazu führen, dass sich die kleinen Massen in Richtung der großen Massen drehen. In der Stellung "aus" erfolgt dagegen keine Drehung.

Um die Drehbewegung der kleinen Massen bzw. des Drahtes nachzuweisen, ist am Draht ein kleiner Spiegel befestigt, der von einem Laserstrahl beleuchtet wird. Drehen sich die Massen  $m$  und damit der Draht um den Winkel  $\varphi$ , dann wird der Laserstrahl um den Winkel  $2\varphi$  abgelenkt, wie man sich an Hand von Abb. 2.41 klarmachen kann.

Abbildung 2.41: Abbildung der Drehung der Massen  $m$  mittels des Spiegels

Bevor wir hier weitermachen, wollen wir zunächst eine Anmerkung über die Gravitationskraft zwischen zwei Massen endlicher Ausdehnung machen. Die Massen  $m$  und  $M$  sind ja relativ nahe beieinander, so dass wir deren Ausdehnung sicher nicht ignorieren können.

Nun zeigt sich aber (die genaue Rechnung werden Sie etwas später kennenlernen), dass zwischen homogenen kugelförmigen Massenverteilungen die **Gravitationskraft** genau so **wirkt, als sei die Masse im Mittelpunkt der Kugeln vereinigt**. Damit können wir unsere Massen doch wieder als Punktteilchen auffassen.

Im Experiment bringen wir nun zunächst die Massen  $M$  von der Position "aus" in die Position "an". Die Massen  $m$  werden durch die Gravitationskraft zwischen  $m$  und  $M$  an die Massen  $M$  herangezogen, wodurch sich der Draht etwas verdreht. Der Draht übt seinerseits eine rückstellende Kraft auf die Massen aus, die (analog zum Hooke'schen Gesetz) proportional zum Auslenkwinkel  $\varphi$  ist:  $F_D = -\kappa\varphi$ .

Im Gleichgewicht haben wir  $F_D = 2 \cdot F_g$ , wobei der Faktor 2 daher rührt, dass zwei Massen den Draht drehen. Hierbei vernachlässigen wir die Gravitationskraft zwischen der tiefer (höher) gelegenen Masse  $M$  und der höher (tiefer) angebrachten Masse  $m$ . Wir bezeichnen die Differenz der Auslenkwinkel in den Ruhelagen "an" und "aus" als  $\varphi_0$ . Dieser Winkel ergibt sich aus der Beziehung

$$\kappa\varphi_0 = 2G \frac{mM}{r^2}. \quad (2.86)$$

Aufgelöst nach  $G$  ergibt sich:

$$G = \frac{\kappa\varphi_0 r^2}{2mM}. \quad (2.87)$$

Nun ist die Drehbewegung der Massen  $m$  um die Drahtachse nur sehr schwach gedämpft. Wie wir gleich sehen werden, führen diese Massen deshalb eine Drehschwingung um die Drahtachse aus. Die Frequenz bzw. Periode dieser Schwingung können wir nutzen, um die uns unbekannte Größe  $\kappa$  zu eliminieren.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung für die Drehschwingung betrachten wir nochmals die Anordnung des Fadenpendels, die Sie schon kennengelernt haben (Abb.2.42).

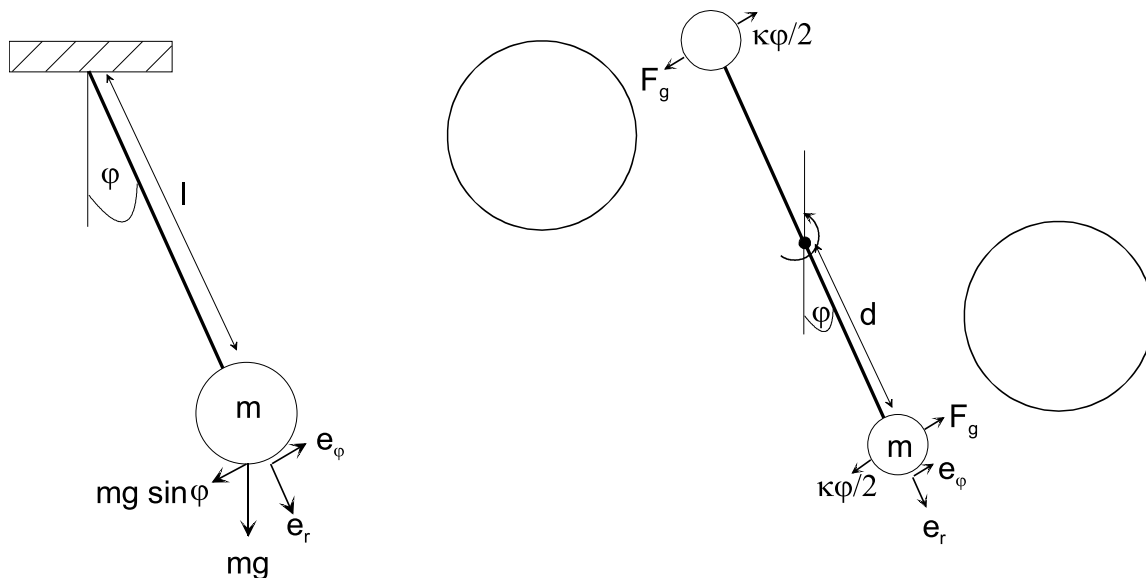


Abbildung 2.42: links: Fadenpendel; rechts: schwingende Massen beim Cavendish-Versuch

Beim Fadenpendel hatten wir zunächst Zylinderkoordinaten eingeführt und dann die auf die Masse  $m$  wirkende Schwerkraft in einen radialen und einen azimuthalen Anteil zerlegt.

Für die Beschleunigung in azimuthaler Richtung ergab sich für eine konstante Länge  $l$  des Fadenpendels:  $a_\varphi = l \cdot \ddot{\varphi} = \frac{F_\varphi}{m} = -g \cdot \sin \varphi$ .

Wir können dieses Resultat nun unmittelbar übernehmen, um die Drehschwingung der beiden Massen  $m$  zu behandeln. Hierbei ist:  $F_\varphi = -\frac{\kappa}{2}\varphi$ . Ersetzen wir noch die Länge  $l$  des Fadenpendels durch den halben Abstand  $d$  der beiden Massen, so erhalten wir bei Vernachlässigung von Dämpfungstermen:

$$m \cdot d \cdot \ddot{\varphi} + \frac{\kappa}{2}\varphi = 0 \quad (2.88)$$

was eine Schwingungsgleichung für  $\varphi$  ist.

Die Eigenfrequenz dieser Drehschwingung beträgt

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\kappa}{2md}}. \quad (2.89)$$

Mit diesem Ergebnis können wir in Gleichung 2.87 die Größe  $\kappa$  eliminieren und erhalten:

$$G = \frac{r^2 d}{M} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \varphi_0. \quad (2.90)$$

Für den Auslenkwinkel  $\varphi_0$  betrage die Auslenkung des Laserstrahls an der Wand  $S_0$  (s. Abb. 2.41). Der Abbildung entnimmt man:  $2\varphi_0 \approx S_0/L$ , so dass wir schließlich  $G$  aus

$$G = \frac{r^2 d}{M} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{S_0}{2L} \quad (2.91)$$

bestimmen können. Für die Oszillationsperiode messen wir  $T = 7.5 \text{ min} = 450 \text{ s}$ . Das System schwingt dabei um die Ruhelage  $S_0 = 1 \text{ m}$ .

Einsetzen aller Zahlenwerte in 2.91 liefert:  $G \approx 7.2 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}}{\text{kg}^2}$ .

Der Literaturwert beträgt:  $\mathbf{G} \approx \mathbf{6.67} \cdot \mathbf{10^{-11} \frac{Nm}{kg^2}}$ .

Unsere Messung ist also nicht allzu weit von diesem Ergebnis entfernt.

Es lohnt hier, nochmals eine genauere Fehlerabschätzung vorzunehmen.

Wir hatten  $G$  als Funktion der 6 Messgrößen  $r, d, M, T, S_0$  und  $L$  bestimmt. Jede dieser Größen hat einen endlichen (zufälligen) Messfehler. Nach den Regeln der Fehlerfortpflanzung haben wir allgemein für eine Größe  $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ :

$$(\delta f)^2 = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \delta x_n \right)^2. \quad (2.92)$$

Hierbei ist  $\frac{\partial f}{\partial x_n}$  die partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_n$  (alle anderen Variablen  $x_k, k \neq n$ , sehen wir als fest an) und  $\delta x_n$  ist der Messfehler von  $x_n$ . Angewendet auf  $G(r, d, M, T, S_0, L)$  ergibt dies:

$$(\delta G)^2 = G^2 \cdot \left\{ \left(2\frac{\delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\delta S_0}{S_0}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{L}\right)^2 + \left(2\frac{\delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 \right\} \quad (2.93)$$

Nehmen wir an, dass wir jede der Größen auf 3% genau bestimmt haben, so addiert sich der zufällige relative Fehler zu  $\delta G/G = 0.03 \cdot \sqrt{8} \approx 10\%$ .

Wir wollen außerdem zwei systematische Fehler diskutieren:

- Wir hatten den Einfluss der diagonal gegenüberliegenden Masse  $M$  vernachlässigt. Der Mittelpunkt dieser Kugel hat von der Masse  $m$  einen Abstand  $z_0$  in z-Richtung von ca. 25 cm, ist also um den Abstandsvektor  $r_2 = \sqrt{z_0^2 + r^2 + (2d)^2} \approx 27$  cm von  $m$  entfernt. Das Verhältnis  $r_1/r_2$  beträgt ca. 0.3. Die durch die zweite Masse  $M$  auf  $m$  ausgeübte Gravitationskraft  $F_{g2}$  ist also vom Betrag her etwa  $(0.3)^2 \approx 0.1$  der Gravitationskraft  $F_{g1}$  durch die nahe benachbarte Masse  $M$ . Davon ist der Anteil  $F_{g2} \sin(r_1/r_2) \approx 0.3F_{g2} \approx 0.03F_{g1}$  antiparallel zu  $F_{g1}$  gerichtet. Er führt zu einer Überschätzung von  $G$  um etwa 3%.
- Bei der Berechnung der Schwingungsdauer  $T$  hatten wir nur die Massen  $m$  der beiden kleinen Kugeln berücksichtigt, aber nicht die Masse der Aufhängung selbst. Diese Masse führt zu einer leichten Erhöhung von  $T$  und damit zu einer Unterschätzung von  $G$ . Der systematische Fehler beträgt hier 5-10%.

Wir haben damit einen zufälligen Fehler von ca. 10 % und einen systematischen Fehler von ca. 5%. Unser Ergebnis wich um ca. 7% vom Literaturwert ab, liegt also innerhalb der Fehlergrenzen.

Wir wollen uns nun der **Planetenbewegung** zuwenden und zunächst einige **historische Anmerkungen** geben.

- bereits im 4. Jh. v.Chr beschäftigten sich die Babylonier mit den Sternen. Die Vorstellung war, dass "Sphären" um die Erde kreisen, an denen die Sterne bzw. Planeten angebracht waren.
- dieses geozentrische Weltbild wurde im 2. Jh. v.Chr. von Ptolemäus (85-165, Ägypten) nochmals verfeinert, der die Bewegung der Planeten auf den Sphären durch zusätzliche "Epizyklen" beschrieb.
- im 16. Jh. stellte Kopernikus (1473-1543) die Vermutung auf, Erde und Planeten kreisten auf Kreisbahnen um die Sonne. Dieses heliozentrische Weltbild lieferte allerdings zunächst deutlich schlechtere Vorhersagen als das geozentrische Bild von Ptolemäus.
- im 17. Jh. führte der dänische Astronom Tycho Brahe (1546-1601) zahlreiche Stern- und Planetenbeobachtungen durch. Eine seiner Beobachtungen war, dass keine Bewegung der Sterne durch den Effekt der Parallaxe zu erkennen war. Um dies zu erklären, musste entweder die Erde ruhen, oder es mussten die Sterne extrem weit entfernt sein. Brahe schloss das letztere aus; die Erde musste also ruhen.
- 1610/1611 wurden durch Galilei und Kepler die ersten Fernrohre konstruiert.
- bereits 1610 erkannte Galilei mit seinem Fernrohr, dass Monde um den Jupiter kreisen (Galilei erkannte 4 Monde). Die Monde kreisten dabei "hinter" dem Jupiter hindurch, was im Bild der Sphären sehr problematisch ist.

In der Folgezeit setzte sich trotz heftiger Widerstände mehr und mehr das heliozentrische Weltbild durch. Ein wesentlicher Meilenstein waren hierbei

- die Kepler'schen Gesetze (s. unten), die 1609 bzw. 1619 formuliert wurden.

Auf ihrer Basis fand schließlich eine Generation später

- 1666 Isaac Newton das nach ihm benannte Gravitationsgesetz.

### 2.13.2 Die Kepler'schen Gesetze

1. "Die Planeten durchlaufen Ellipsenbahnen, wobei die Sonne in einem der Brennpunkte steht" (1609, s. Abb. 2.43).

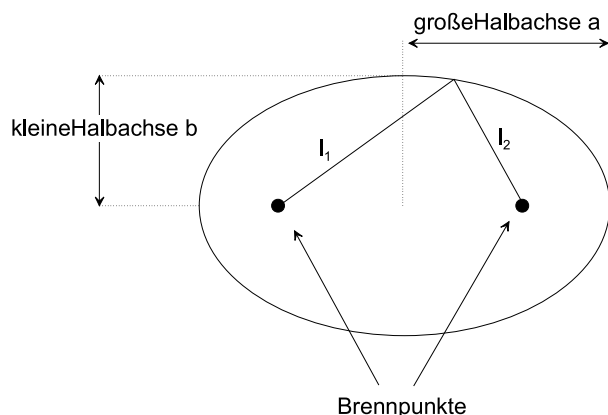


Abbildung 2.43: Zur Geometrie der Ellipse; auf dem gesamten Umfang gilt:  $l_1 + l_2 = \text{const} = 2a$

2. "Der 'Fahrstrahl' von der Sonne zu den Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen" (1609, s. Abb. 2.44).

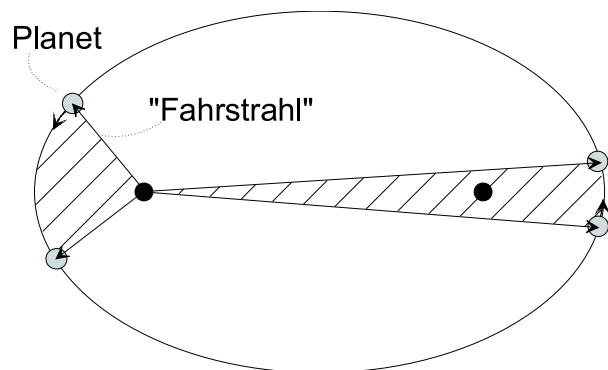


Abbildung 2.44: Zum 2. Kepler'schen Gesetz. Die beiden schraffierten Flächen, die ein Planet in gleichen Zeiten durchläuft, sind gleich groß.

3. "Das Verhältnis der Kuben der großen Halbachse  $a$  zum Quadrat der Umlaufzeit  $T$  ist für alle Planeten das gleiche", d. h.  $a^3/T^2 = \text{const.}$  (1619).

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie aus den drei Kepler'schen Gesetzen die Newton'sche Gravitationskraft folgt.

Mit Aufbauten wie dem Cavendish-Experiment können wir die Gravitationskraft, die eine der fundamentalen Naturkräfte ist, auf Längenskalen cm bis m testen (im Prinzip können wir die Massen  $m$  und  $M$ , und den Abstand  $r$  variieren). Die Planetenbewegung liefert uns Messdaten auf der Größenskala des Sonnensystems. Wesentlich schwieriger oder gar unmöglich werden solche Tests aber, wenn wir zu extremen Skalen gehen.

- Bei atomaren oder subatomaren Abständen überwiegen andere Kräfte (wie etwa die elektrostatische Kraft zwischen den Elektronen und dem Atomkern) die Gravitationskraft um viele Größenordnungen. Bis heute ist es nicht gelungen, die Gravitationskraft bei sehr kleinen Abständen mit den übrigen Wechselwirkungen in Einklang zu bringen. Spätestens bei Abständen im von Bereich  $10^{-35}$  m (der Planck-Skala) versagt die heutige Theorie.
- Große Massenansammlungen bewirken eine Änderung der Struktur von Raum und Zeit, die im Rahmen von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie verstanden werden kann. Sie liefert ein über das Newton'sche Gravitationsgesetz bzw. die Newton'sche Mechanik hinausgehene Beschreibung von Raum, Zeit und Gravitation, die wichtig wird, wenn wir Effekte der Gravitation in der Nähe sehr großer Massen oder auf der Größenskala von Galaxien beschreiben wollen.

### 2.13.3 Theorie: Keplersche Gesetze

Die Lebensgeschichte von Johannes Kepler ist in besonderer, wenn auch nicht immer für ihn erfreulichen Weise mit der Universität Tübingen verbunden (siehe Kurzbiographie in 2.45). Weltweit ist er auch heute noch bekannt wegen der Keplerschen Gesetze, mit denen er sehr präzise die Planetenbahnen beschrieb. In einer freien Übersetzung dieser natürlich ursprünglich in Latein formulierten Gesetze lauten diese:

#### Keplersche Gesetze:

- 1) Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
- 2) Der von der Sonne zum Planeten gerichtete Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
- 3) Das Verhältnis  $a^3/T^2$ , wobei  $a$  die große Halbachse der Ellipsenbahn und  $T^3$  die Umlaufzeit ist, ist für alle Planeten gleich.

Die Gesetze 1) und 2) wurden 1609 in dem Werk "Astronomia Nova" veröffentlicht, das dritte Gesetz erst im Jahr 1619 in "Harmonices Mundi".

Die Ellipsenbahn eines Planeten ist in der Abbildung 2.46 dargestellt. Die Ellipse ist charakterisiert durch die große Halbachse  $a$  und die kleine Halbachse  $b$ , beziehungsweise den daraus abgeleiteten Größen Halbparameter  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} := \frac{b^2}{a}, \quad \text{und} \quad \varepsilon := \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \text{ Exzentrizität}$$

Sind die Halbachsen  $a$  und  $b$  identisch, so wird die Exzentrizität  $\varepsilon = 0$  und die Ellipse zu einem Kreis mit dem Radius  $P = a = b$ . Wir wollen die Planetenbahn in Zylinderkoordinaten beschreiben, wobei der Brennpunkt der Ellipse, in dem die Sonne steht, mit dem Koordinatenursprung identifiziert werden soll die Planetenbahn in der Ebene mit  $z = 0$  liegt und die  $x$ -Achse in die Richtung des sonnenfernsten Punktes der Bahn zeigt. Mit

### Kurzbiographie Johannes Kepler

1571: Geboren am 27.12. in Weil der Stadt

1587: Studium der Astronomie und Mathematik an der “Artistenfakultät” (Schüler des Astronomen Michael Maestlin) in Tübingen, Studium der Protestantischen Theologie, anschliessend als Mathematiklehrer nach Graz



1600: geht auf Einladung Tycho Brahes nach Prag, die Keplerschen Gesetze basieren auf den Beobachtungsdaten von Tycho Brahe, der selbst allerdings das heliozentrische Weltbild des Kopernikus ablehnte. Nach dem Tode Tycho Brahes übernimmt Kepler seine Stelle als Kaiserlicher Mathematiker

1609: Veröffentlichung *Astronomia Nova* (Erstes und Zweites Keplersches Gesetz)

1611: Konstruktionsprinzip des “Keplerschen Fernrohrs”

1613: Landvermesser in Linz; er bewirbt sich auf eine Professur nach Tübingen

1619: Veröffentlichung *Harmonices Mundi* (Drittes Keplersches Gesetz)

1620: nach langem Hin und Her wird die Bewerbung Keplers nach Tübingen wegen theologischer Differenzen endgültig abgelehnt.

1628: Astrologe Wallensteins

1630: stirbt am 15.11. in Regensburg

Abbildung 2.45: Kurzbiographie und Bild von Johannes Kepler

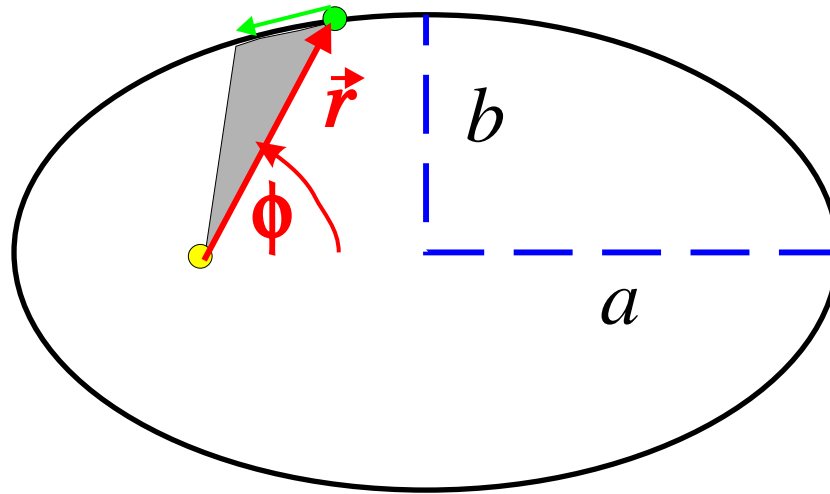


Abbildung 2.46: Ellipse als Planetenbahn, die graue Fläche entspricht der vom Fahrstrahl überstrichenen Fläche, wenn der Planet die Strecke zurückgelegt hat, die durch den grünen Pfeil angedeutet ist

dieser Wahl des Koordinatensystems ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen der Radiuskoordinate  $\rho$  und dem Azimutwinkel  $\varphi$  des Ortsvektors für den Planeten

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\mathcal{P}}{1 - \varepsilon \cos(\varphi)} \\ \vec{r} &= \rho \hat{e}_\rho.\end{aligned}\quad (2.94)$$

Neben der Darstellung des Ortsvektors  $\vec{r}$  in den Zylinderkoordinaten benötigen wir auch die entsprechenden Ausdrücke für die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und die Beschleunigung  $\vec{a}$ . Nach unseren Rechnungen im Abschnitt über die Zylinderkoordinaten sind diese gegeben durch

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \hat{e}_\varphi.\end{aligned}\quad (2.95)$$

Dabei haben wir bereits berücksichtigt, dass bei der Planetenbewegung in der Ebene  $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$  gilt.

Wenn der Planet eine Wegstrecke  $d\vec{r}$  zurückgelegt hat (siehe den grünen Pfeil in der Skizze von Abb. 2.46), so ist die vom “Fahrstrahl überstrichene Fläche”,  $dF$ , die im zweiten Keplerschen Gesetz erwähnt wird, gerade die Hälfte der Fläche des Parallelogramms, das durch die Vektoren  $\vec{r}$  und  $d\vec{r}$  aufgespannt wird. Damit gilt also für die überstrichene Fläche pro Zeiteinheit  $dt$

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \\ &= \frac{1}{2m} \left| \vec{r} \times m\vec{v} \right| \\ &= \frac{1}{2m} \left| \vec{l} \right|.\end{aligned}\quad (2.96)$$

Beim Übergang zur letzten Zeile haben wir die Definition des Bahndrehimpulse  $\vec{l}$  übernommen. Andererseits können wir nun aber auch die Ausdrücke für den Ortsvektor  $\vec{r}$  und



die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  aus (2.94) und (2.95) übernehmen was zu dem Ausdruck führt

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \frac{1}{2}|(\rho\hat{e}_\rho) \times (\dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi)| \\ &= \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi} \\ &= \frac{1}{2m}|\vec{l}|.\end{aligned}\quad (2.97)$$

Das zweite Keplersche Gesetz entspricht also der Beobachtung, dass die Drehimpulse der Bewegung der Planeten, bezogen auf ein Koordinatensystem mit der Sonne im Koordinatenursprung, erhalten bleiben. Daraus können wir also schon schliessen, dass die Planetenbewegung in einem zentralen Kraftfeld erfolgt mit der Sonne als Kraftzentrum. Andererseits können wir aus (2.97), dass der Betrag dieses Drehimpulses durch  $|\vec{l}| = m\rho^2\dot{\varphi}$  gegeben ist. Die Erhaltung des Drehimpulses bedeutet aber auch, dass

$$\frac{d\rho^2\dot{\varphi}}{dt} = 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho^2\ddot{\varphi} = 0.$$

Dies entspricht aber gerade der Azimutalkomponente der Beschleunigung (vergleiche 2.95), womit wiederum gezeigt ist, dass bei der Planetenbewegung eine Beschleunigung ausschließlich in radialer Richtung also in Richtung auf die Sonne erfolgt. Diese Beschleunigung ergibt sich zu

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2.$$

Für die Berechnung dieser Beschleunigung greifen wir auf die Parametrisierung der Ellip-senbahn in (2.94) zurück und berechnen

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\dot{\varphi} \\ &= -\frac{\mathcal{P}\varepsilon\sin\varphi}{(1-\varepsilon\cos\varphi)^2}\dot{\varphi} \\ &= -\frac{\varepsilon\sin\varphi}{\mathcal{P}}\rho^2\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon\sin\varphi}{\mathcal{P}}\frac{|\vec{l}|}{m},\end{aligned}\quad (2.98)$$

wobei ja die Masse des Planeten  $m$  und sein Bahndrehimpuls  $|\vec{l}|$  während der Bewegung konstant bleiben. Damit erhält man

$$\ddot{\rho} = -\frac{\varepsilon\cos\varphi}{\mathcal{P}}\frac{|\vec{l}|}{m}\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon\vec{l}^2}{\mathcal{P}\rho^2m^2}\cos\varphi.$$

Eingesetzt in (2.13.3) ergibt sich damit für die radiale Beschleunigung

$$\begin{aligned}a_\rho &= -\frac{\varepsilon\vec{l}^2}{\mathcal{P}\rho^2m^2}\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\vec{l}^2}{m^2\rho^2} \\ &= -\frac{\vec{l}^2}{m^2\rho^2}\left(\frac{\varepsilon\cos\varphi}{\mathcal{P}} + \frac{1-\varepsilon\cos\varphi}{\mathcal{P}}\right) \\ &= -\frac{\vec{l}^2}{m^2\mathcal{P}}\frac{1}{\rho^2}.\end{aligned}\quad (2.99)$$

Bei dem Übergang zur dritten Zeile wurde  $1/\rho$  nach (2.94) ersetzt. Bahndrehimpuls  $\vec{l}$ , Masse  $m$  und Halbparameter  $\mathcal{P}$  der Planetenbahn sind Konstanten der Planetenbewegung. Aus (2.99) wird also deutlich, dass die radiale Beschleunigung und damit die Kraft, die von der Sonne auf den Planeten wirkt eine konservative Zentralkraft ist, die proportional zum Quadrat des Abstandes Planet - Sonne abfällt.

Das dritte Keplersche Gesetz verknüpft nun die Daten der verschiedenen Planetenbahnen miteinander. Nach dem zweiten Keplerschen Gesetz ist die pro Zeiteinheit vom Fahrstrahl überstrichene Fläche konstant. Diese Geschwindigkeit ist natürlich berechenbar als die Gesamtfläche innerhalb der Ellipsenbahn,  $F = \pi ab$  dividiert durch die Umlaufzeit  $T$ . Andererseits gilt aber nach (2.97)

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2m} |\dot{\vec{l}}| = \frac{\pi ab}{T}.$$

Mit dieser Gleichung können wir den Quotienten des dritten Keplerschen Gesetzes umschreiben

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{T^2} &= \frac{a^3 \vec{l}^2}{(2m\pi ab)^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\vec{l}^2}{m^2 \mathcal{P}}, \end{aligned} \quad (2.100)$$

(siehe Definition des Halbparameters  $\mathcal{P}$  in (2.13.3)). Der Quotient  $a^3/T^2$  ist also bis auf den Faktor  $4\pi^2$  identisch mit der Konstanten in der radialen Beschleunigung des jeweiligen Planeten (2.99). Das dritte Keplersche Gesetz sagt also aus, dass die radiale Beschleunigung für alle Planeten von der Form

$$a_\rho = -\frac{\text{const}}{\rho^2}$$

ist. Das dritte Keplersche Gesetz ist also eine historisch vorweggenommene Bestätigung für die anziehende Gravitationskraft der Sonne auf die Planeten mit

$$\begin{aligned} F_\rho &= ma_\rho = -m \frac{\text{const}}{\rho^2} \\ &= -\gamma \frac{m M_S}{\rho^2}, \end{aligned} \quad (2.101)$$

wobei  $M_S$  für die Masse der Sonne steht und  $\gamma$  die Konstante der Gravitationskraft bezeichnet.

Wir haben also hier gezeigt, dass wir aus der experimentellen Beobachtung, die zu den Keplerschen Gesetzen führte, die Form der Kraft herleiten konnten, die die Planeten auf ihrer Umlaufbahn hält. Dabei wurde nicht nur gezeigt, dass es sich hier um ein zentrales Kraftfeld mit dem Kraftzentrum Sonne handelt. Darüber hinaus konnten wir auch zeigen, dass diese Kraft die Form der Newtonschen Gravitationskraft hat also mit  $1/r^2$  beziehungsweise  $1/r^2$  abfällt.

### 2.13.4 Trajektorien im Gravitationsfeld

In diesem Abschnitt wollen wir nun zeigen welche Bahnen (Trajektorien) Massenpunkte zurücklegen, wenn sie sich in einem zentralen Kraftfeld der Form

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^3}\vec{r} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r.$$

Ist die Konstante  $\alpha$  positiv, so handelt es sich hier um ein attraktives Kraftfeld, in dem die Massenpunkte zum Kraftzentrum hingezogen werden. Beispiele hierfür sind die Gravitationskraft aber auch die elektrostatische Anziehung, die Coulombkraft, mit der z.B. Elektronen (mit ihrer negativen Ladung) von einem positiv geladenen Atomkern im Kraftzentrum angezogen werden. Bei negativen Werten von  $\alpha$  liegt eine abstoßende Kraft vor. Ein entsprechendes Beispiel ergibt sich durch die Repulsion, die ein elektrisch positiv geladenes Proton durch einen ebenfalls positiv geladenen Atomkern erfährt.

Für ein solches Kraftfeld betrachten wir die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = -\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}.$$

Hier und im folgenden steht  $\vec{p} = m\vec{v}$  für den Impuls des Teilchens. Da es sich bei  $\vec{F}$  um ein zentrales Kraftfeld handelt, ist der Drehimpuls  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$  eine Konstante der Bewegung und wir können die Gleichung (2.13.4) von rechts mit diesem Drehimpuls multiplizieren:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} \times \vec{l} &= -\frac{\alpha}{r^3} [\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{p})] \\ &= \frac{\alpha}{r^3} [r^2\vec{p} - \vec{r}(\vec{r}\vec{p})]. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile haben wir die allgemein gültige Vektorrelation

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}),$$

ausgenutzt und  $\vec{r}\vec{r} = r^2$  eingesetzt. Zur weiteren Berechnung bestimmen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{|\vec{r}|} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \dot{x} + \frac{d}{dy} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \dot{y} + \frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \dot{z} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \dot{x} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \dot{y} - \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \dot{z} \\ &= -\frac{\vec{r}\vec{v}}{r^3} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für

$$\frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{v}}{r} - \vec{r} \frac{\vec{r}\vec{v}}{r^3}$$

Damit ergibt sich für die rechte Seite der Gleichung (2.102) (letzte Zeile):

$$\frac{\alpha}{r^3} [r^2\vec{p} - \vec{r}(\vec{r}\vec{p})] = \alpha m \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Für die linke Seite haben wir aber

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{l}) = \dot{\vec{p}} \times \vec{l} + \vec{p} \times \dot{\vec{l}} = \dot{\vec{p}} \times \vec{l},$$

da ja  $\vec{l}$  konstant ist. Setzt man diese beiden Seiten der Gleichung (2.102) zusammen, ergibt sich

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{l}) = \frac{d}{dt} \left( \alpha m \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right)$$

beziehungsweise

$$\vec{p} \times \vec{l} = \alpha m \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} - \vec{C}.$$

wobei der Vektor  $\vec{C}$ , der sogenannte **Lenz'sche Vektor** konstant, sein muss. Man kann sich nun davon überzeugen, dass dieser Lenz'sche Vektor senkrecht zu  $\vec{l}$  steht und damit also in der Ebene der Bewegung liegt. Dazu multiplizieren wir die Gleichung (2.13.4) skalar mit dem Vektor  $\vec{l}$

$$\underbrace{\vec{l} (\vec{p} \times \vec{l})}_{=0} = \alpha m \underbrace{\frac{\vec{l}\vec{r}}{|\vec{r}|}}_{=0} - \vec{l}\vec{C}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist identisch Null, da der Vektor  $\vec{p} \times \vec{l}$  senkrecht zu  $\vec{l}$  steht. Der erste Term auf der rechten Seite ist Null, da der Ortsvektor  $\vec{r}$  in der Ebene der Bewegung liegt, die senkrecht zu  $\vec{l}$  ist. Daraus folgt also  $\vec{l}\vec{C} = 0$ , was ja bedeutet, dass der Lenz'sche Vektor  $\vec{C}$  in der Bewegungsebene liegt.

Für die weitere Rechnung multiplizieren wir die Gleichung (2.13.4) skalar mit  $\vec{r}$

$$\vec{r}(\vec{p} \times \vec{l}) = \alpha m \frac{r^2}{r} - \vec{r}\vec{C}.$$

Mit der allgemeinen Vektorbeziehung

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}),$$

können wir (2.13.4) umschreiben

$$\begin{aligned} \vec{l}(\vec{r} \times \vec{p}) = l^2 &= \alpha m r - \vec{r} \times \vec{C} \\ &= \alpha m r - r \left| \vec{C} \right| \cos(\varphi), \end{aligned} \quad (2.103)$$

wobei  $\varphi$  den Winkel zwischen  $\vec{r}$  und  $\vec{C}$  bezeichnet. Da der Lenz'sche Vektor  $\vec{C}$  in der Ebene der Bewegung des Teilchens liegt, können wir  $\vec{C}$  als die  $x$ -Achse für diese Ebene annehmen und  $\varphi$  beziehungsweise  $r = \rho$  als Zylinderkoordinaten in der Ebene interpretieren. Damit ergibt sich aus (2.103) die Beziehung

$$\rho = \frac{l^2}{\alpha m \left( 1 - \frac{C}{\alpha m} \cos(\varphi) \right)} = \frac{\mathcal{P}}{1 - \varepsilon \cos(\varphi)},$$

also die Gleichung der Ellipsenbahn (2.94) mit

$$\mathcal{P} = \frac{l^2}{\alpha m} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{C}{\alpha m}.$$

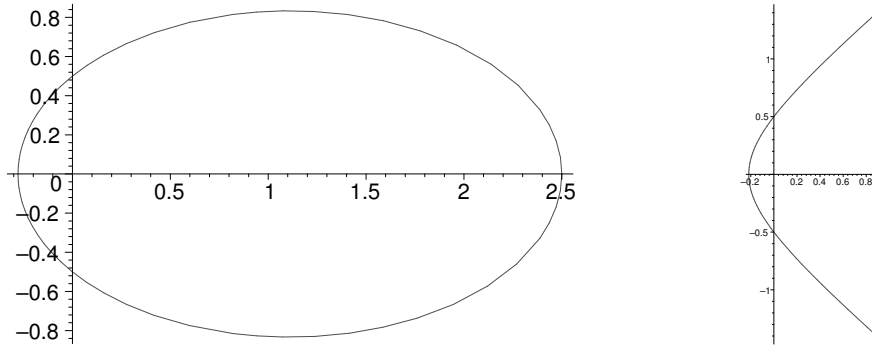


Abbildung 2.47: *Ellipse und Hyperbel als Trajektorie eines Massenpunktes im Gravitationsfeld. Die Ellipse im linken Teil der Figur hat eine Exzentrizität von  $\varepsilon = 0.8$ , die Hyperbel  $\varepsilon = 1.4$ . Solche Plots können z.B. mit dem MAPLE Kommando “`plot([0.5/(1-0.8*cos(phi)),phi,phi=0..2*Pi], coords=polar)`” generiert werden. Dabei Achtung mit der Winkelkkordinate  $\phi$  bei einer Parabel oder Hyperbel*

Diese Parametrisierung der Trajektorie (2.13.4) steht aber nicht nur für eine Ellipse. Es gilt vielmehr allgemein, dass für

$$\begin{aligned}
 \varepsilon = 0 &: && \text{ein Kreis,} \\
 0 < \varepsilon < 1 &: && \text{eine Ellipse,} \\
 \varepsilon = 1 &: && \text{eine Parabel,} \\
 1 < \varepsilon &: && \text{eine Hyperbel,}
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

beschrieben wird. Die Form der Trajektorie hängt also von der Exzentrizität  $\varepsilon$  und damit wegen (2.13.4) vom Betrag des Lenz’schen Vektors  $C$  ab. Beispiele für eine Ellipsenbahn ( $\varepsilon = 0.8$ ) und eine Hyperbel ( $\varepsilon = 1.4$ ) sind in Abb. 2.47 gegeben.

Was ist also nun die physikalische Bedeutung dieses Lenz’schen Vektors? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir die Gleichung (2.13.4) zur Definition von  $\vec{C}$  und berechnen

$$C^2 = (\vec{p} \times \vec{l})^2 + \alpha^2 m^2 - 2\alpha m \frac{\vec{r}}{r} (\vec{p} \times \vec{l}) .$$

Der Geschwindigkeits- und damit auch der Vektor des Impulses  $\vec{p} = m\vec{v}$  sind in der Ebene der Bewegung und damit senkrecht zum Vektor des Drehimpulse  $\vec{l}$  (das ergibt sich natürlich auch schon aus der Definition des Drehimpulses  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ ). Damit ist der Betrag des Vektors  $\vec{p} \times \vec{l}$  gleich dem Produkt der Beträge  $p$  und  $l$ . Für das Vektorprodukt im letzten Term dieser Gleichung benutzen wir die Beziehung (2.13.4) in der Form

$$\vec{r} (\vec{p} \times \vec{l}) = \vec{l} (\vec{r} \times \vec{p}) = l^2 .$$

Damit erhalten wir für (2.13.4)

$$C^2 = p^2 l^2 + \alpha^2 m^2 - \frac{2\alpha m l^2}{r}$$

und mit (2.13.4) ergibt sich

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &= 1 + \frac{2l^2}{\alpha^2 m} \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} \right) \\ &= 1 + \frac{2l^2}{\alpha^2 m} E.\end{aligned}\tag{2.105}$$

In der Klammer in der ersten Zeile dieser Gleichung steht nämlich mit  $p^2/(2m)$  gerade die kinetische Energie des Teilchens und mit  $-\alpha/r$  die jeweilige potenzielle Energie, die als Summe die Energie  $E$  ergeben. Für negative Werte der Energie kann das Teilchen dem attraktiven Potenzial nicht entfliehen: Für  $r \rightarrow \infty$  geht ja das Potenzial gegen Null und damit wäre eine negative kinetische Energie erforderlich um die Energieerhaltung zu bewahren. Dies ist aber wegen der Positivität der kinetischen Energie ( $mv^2/2$ ) nicht möglich. In diesem Fall negativer Energien liefert (2.105) eine Exzentrizität  $\varepsilon < 1$ , was bedeutet, dass die Trajektorie eine Ellipse ist.

Für positive Energien ist aber die kinetische Energie so groß, dass das Masseteilchen sich auch beliebig weit von dem Kraftzentrum entfernen kann. In diesem Fall wird das Teilchen am Kraftzentrum gestreut und durchläuft die Trajektorie einer Hyperbel. Beispiele für solche Hyperbelbahnen finden sich in der Astronomie, wenn z.B. ein Satellit mit ausreichender Geschwindigkeit an einem Planeten vorbeifliegt. Die gleichen Trajektorien erhält man aber auch, wenn man die Streuung eines Elektrons an einem Atomkern beschreibt. In diesem Fall ist das attraktive Zentralfeld durch die Coulomb Anziehung zwischen dem elektrisch positiv geladenen Atomkern und dem Elektron gegeben. Die Bahnen der gebundenen Elektronen wären auch hier Ellipsen. Man muss jedoch beachten, dass zur Beschreibung der Phänomene bei diesen extrem kleinen Abständen die Effekte der Quantenmechanik zu berücksichtigen sind.

# Kapitel 3

## Vielteilchensysteme

### 3.1 Dynamik zweier oder mehrerer Massenpunkte

#### 3.1.1 Das dritte Newton'sche Axiom

In den vorangegangenen Kapiteln hatten wir diskutiert, wie sich einzelne Massenpunkten unter dem Einfluss von Kräften bewegen. Wir hatten dabei nicht weiter berücksichtigt, dass diese Kräfte i. allg. ebenfalls von Körpern ausgehen, die sich bewegen können. Dies war bei den Experimenten, die wir durchgeführt hatten, eine gute Annahme. So waren beispielsweise die Federn und Pendel, die wir betrachtet hatten, an massiven Stativen bzw. der Decke fest verankert. Die Stative bzw. die Decke waren so ausgelegt, dass sie Kräfte, die die schwingenden oder hängenden Massen auf sie ausübten, nicht zu deren Zusammenbruch führten. Auch im Fall der Planetenbewegung ist es so, dass sich die erheblich schwerere Sonne selbst (fast!) nicht bewegt, obwohl sie selbst der Gravitationskraft unterliegt, die die Planeten auf sie ausüben. Im Fall der Sonne ist diese Aussage aber etwas weniger klar ersichtlich wie im Fall der Stative und der Decke. Wir werden im Verlauf des Kapitels aber sehen, wie stark die Rückwirkung der Planeten auf die Sonne ist.

Um die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben, genauer zu fassen, führen wir zunächst einige Experimente durch:

1. Wir ziehen an zwei identischen Federn, die miteinander verbunden sind (Abb. 3.1). Ziehen wir symmetrisch von beiden Seiten mit jeweils der gleichen Kraft (Abb. 3.1a), beobachten wir, dass beide Federn gleich weit gedehnt werden. Dieser symmetrische Fall ist nicht sehr überraschend. Jetzt verankern wir Feder 1 und ziehen nur an Feder 2 (Abb. 3.1b). Wiederum werden beide Federn gleich stark gedehnt. Das gleiche Ergebnis erhalten wir, wenn wir Feder 2 verankern und an Feder 1 ziehen (Abb. 3.1c)
2. Wir drücken auf der Luftkissenbahn zwei Wagen gegeneinander. An jedem Wagen befinden sich Metallringe, die wie eine Feder wirken (s. Abb. 3.2). Wir lassen dann die Wagen voneinander weglaufen. Drücken die beiden Metallringe gegeneinander, bewegen sich die Wagen symmetrisch mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten voneinander weg. Das gleiche Ergebnis erhalten wir aber auch, wenn nur einer der beiden Wagen mit seinem Metallring gegen den anderen Wagen "drückt".

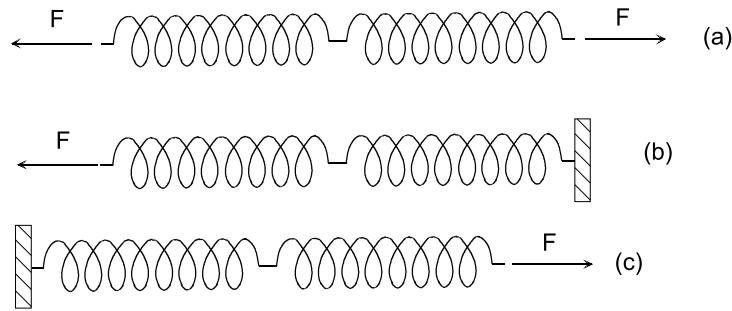


Abbildung 3.1: Kräfte auf zwei aneinandergehängte Federn

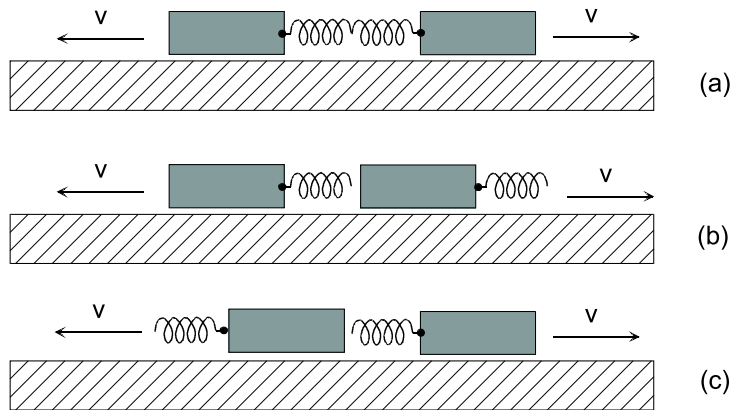


Abbildung 3.2: Abstoßung zweier identischer Wagen auf der Luftkissenbahn. An den Wagen befinden sich Metallringe, die durch eine Feder symbolisiert sind.

Offensichtlich waren in beiden Fällen die Kräfte, die die beiden Körper aufeinander ausgeübt hatten, sehr symmetrisch, auch wenn die Geometrie wie in den Fällen (b) und (c) der Abb. 3.1 und 3.2 asymmetrisch war.

Diese Beobachtung können wir nun abstrahieren:

”Wenn die Kraft  $\vec{F}_{12}$ , die auf einen Körper 1 wirkt, ihren Ursprung in einem anderen Körper 2 hat, so wirkt auf diesen die entgegengesetzt gleiche Kraft  $-\vec{F}_{12}$ ”.

Dies ist die Aussage des **3. Newtonschen Axioms**, das die Newtonschen Axiome vervollständigt. In kürzerer Form lässt sich dieses Axiom, das auch als ”**Reaktionsprinzip**” bezeichnet wird, ”**actio**” = ”**reactio**” schreiben. Abb. 3.3 stellt das Reaktionsprinzip graphisch dar.



Abbildung 3.3: Zum Reaktionsprinzip.



### 3.1.2 Gesamtimpuls, Schwerpunkts- und Relativbewegung

Wir wollen nun die **Bewegungsgleichungen** für zwei bzw. verallgemeinernd auch für  $N$  Massenpunkte aufstellen:

Zunächst können wir ganz allgemein schreiben:

$$\vec{F}_1 = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{p}}_1 \quad (3.1)$$

$$\vec{F}_2 = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{p}}_2 \quad (3.2)$$

bzw. für  $N$  Massenpunkte:  $\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{p}}_i$ , mit  $i = 1, \dots, N$ .

Nun wollen wir den **Gesamtimpuls**  $\vec{P}$  einführen: .

Addieren wir die Gleichungen 3.1 und 3.2, so ergibt sich für 2 Massen:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = \dot{\vec{P}} \quad (3.3)$$

bzw. für  $N$  Massen:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{P}} \quad (3.4)$$

Um nun weiterzukommen, zerlegen wir die Kraft  $\vec{F}_i$ , die auf Masse  $i$  wirkt, in eine von außen wirkende Kraft  $\vec{F}_i^{(a)}$  und in die **inneren Kräfte**  $\vec{F}_{ik}$ , die von den anderen Massen  $k$  ausgehen (man beachte, dass  $\vec{F}_{ii}$  gleich null ist, da der  $i$ -te Körper keine Kraft auf sich selbst ausübt<sup>1</sup>). Die **äußeren Kräfte**  $\vec{F}_i^{(a)}$  können zum Beispiel durch die Schwerkraft der Erde gegeben sein. Mit dieser Zerlegung schreibt sich die Kraft auf den  $i$ -ten Massenpunkt:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_{ik} \quad (i, k = 1, \dots, N) \quad (3.5)$$

Nun setzen wir dies in  $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \dot{\vec{P}}$  ein:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i,k=1}^N \vec{F}_{ik} \quad (3.6)$$

Die beiden Indizes unter dem zweiten Summenzeichen auf der rechten Seite der Gleichung deuten an, dass sowohl über  $i$  als auch über  $j$  summiert wird (beide laufen von 1 bis  $N$ ).

Im Fall zweier Massen erhalten wir:

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}_1^{(a)} + \vec{F}_2^{(a)} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}. \quad (3.7)$$

Nun ist aber nach dem Reaktionsprinzip  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ , bzw.  $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$  ( $i, k=1 \dots N$ ). Wenn wir also über alle  $i$ 's und  $k$ 's summieren, so heben sich diese Beiträge gerade auf und wir erhalten:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \quad (3.8)$$

---

<sup>1</sup>Dies folgt auch aus dem Reaktionsprinzip:  $\vec{F}_{ii} = -\vec{F}_{ii}$ , woraus sich  $\vec{F}_{ii} = 0$  ergibt.

**Der Gesamtimpuls wird also nur durch die äußeren Kräfte geändert. Die inneren Kräfte haben keinen Einfluss.**

Speziell für den Fall, dass diese äußeren Kräfte verschwinden, bleibt der Gesamtimpuls erhalten, ganz egal, wie kompliziert die inneren Kräfte zwischen den Massenpunkten sind.

Es liegt nun nahe, ganz in Analogie zur Definition des Impulses für einen Massenpunkt,  $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ , auch für das gesamte Ensemble aus  $N$  Teilchen einen Vektor  $\vec{R}$  einzuführen, so dass gilt:  $\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$ . Hierbei ist  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  die **Gesamtmasse**. Der Vektor  $\vec{R}$  ist die "Schwerpunktskoordinate" oder kurz der "**Schwerpunkt**".

Mit der Definition des Gesamtimpulses gilt:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}} = \left( \sum_{i=1}^N m_i \right) \cdot \dot{\vec{R}}. \quad (3.9)$$

Der Schwerpunktsvektor  $\vec{R}$  ist also gegeben durch:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (3.10)$$

Im Englischen nennt man den Schwerpunkt "center of mass", was offensichtlich sehr angebracht ist.

Entsprechend können wir durch  $\dot{\vec{R}} = \vec{v}_s$  auch eine **Schwerpunktsgeschwindigkeit**  $\vec{v}_s$  definieren.

Es gilt:

$$\dot{\vec{P}} = M \ddot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \quad (3.11)$$

Diese Beziehung ist sehr erstaunlich. Sie besagt nämlich, dass sich **der Schwerpunkt so bewegt, als ob alle äußeren Kräfte  $\vec{F}_i^{(a)}$  in ihm angriffen**, obwohl der Vektor möglicherweise einen Punkt zeigt, in dem sich nicht einmal ein Massenpunkt befindet. **Die inneren Kräfte  $\vec{F}_{ik}$  haben dagegen auf die Schwerpunktsbewegung keinen Einfluss.**

Wir wollen nun für zwei Massenpunkte herausfinden, wo sich der Schwerpunkt in Bezug auf die beiden Massen befindet. Zunächst gilt entsprechend der Definition von  $\vec{R}$ :

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.12)$$

Für den Spezialfall  $m_1 = m_2$  ergibt sich:  $\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$ , was wir auch als  $\vec{R} = \vec{r}_1 + \frac{1}{2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$  schreiben können. Der Vektor  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  zeigt vom Massenpunkt 1 zum Massenpunkt 2. Für den Fall gleicher Massen liegt der Schwerpunkt also genau zwischen den beiden Massenpunkten.

Um die Lage des Schwerpunkts für ungleiche Massen zu finden, führen wir zwei Vektoren  $\vec{r}_{1,s}$  und  $\vec{r}_{2,s}$  ein via:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_{1,s} \quad (3.13)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}_{2,s} \quad (3.14)$$

Der Vektor  $\vec{r}_{1,s}$  zeigt also vom Schwerpunkt zum Massenpunkt 1, der Vektor  $\vec{r}_{2,s}$  vom Schwerpunkt zum Massenpunkt 2.

Nun gilt:

$$\vec{r}_{1,s} = \vec{r}_1 - \vec{R} = \vec{r}_1 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (3.15)$$

Analog ergibt sich:

$$\vec{r}_{2,s} = \vec{r}_2 - \vec{R} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (3.16)$$

Die Vektoren  $\vec{r}_{1,s}$  und  $\vec{r}_{2,s}$  und damit der **Schwerpunkt** liegen **auf der Verbindungsline zwischen den beiden Massenpunkten**.

Die Beträge dieser Vektoren verhalten sich wie:  $\frac{|\vec{r}_{1,s}|}{|\vec{r}_{2,s}|} = \frac{m_2}{m_1}$ . **Die Abstände der beiden Massen vom Schwerpunkt verhalten sich also umgekehrt wie die Massen selbst.**

Die Abb. 3.4 demonstriert die besonderen Eigenschaften des Schwerpunkts an Hand einer mehrfach belichteten Aufnahme des Wurfs einer Hantel. Der Schwerpunkt ist schwarz markiert. Die Hantel selbst dreht sich beim Wurf, so dass die beiden Kugeln der Hanteln relativ komplizierte Bahnkurven durchlaufen. Der Schwerpunkt folgt allerdings schlichtweg einer Wurfparabel.

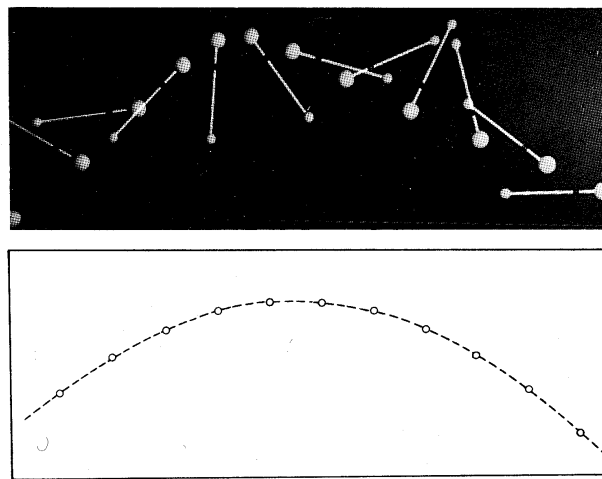


Abbildung 3.4: *Wurf einer Hantel. Der Schwerpunkt (oben schwarz markiert, unten nochmals gegen  $x$  aufgetragen) folgt dabei einer Wurfparabel (aus: Brand/Dahmen, Mechanik, S. 76)*

Im Hörsaal demonstrieren wir die Eigenschaften des Schwerpunkts an einer Reihe von Versuchen:

- Hochheben eines im Schwerpunkt gelagerten Holzstabes, an dessen Ende sich zwei Gewichte (Massen  $m_1$  und  $m_2$ ) befinden (s. Abb. 3.5(a)). Auf den Schwerpunkt wirkt sehr wohl die Gewichtskraft  $(m_1 + m_2 + m_{\text{Holzstab}}) \cdot g$ , es gibt aber beispielsweise keine Kräfte, die den Stab drehen. Genau dies passiert aber, wenn der Stab außerhalb des Schwerpunkts gelagert wird.
- schnelle Drehung einer Hantel um eine Achse senkrecht zur Verbindungslinie zwischen den Kugeln (Abb. 3.5(b)). Geht die Rotationsachse durch den Schwerpunkt, dreht sich die Hantel lediglich um sich selbst. Andernfalls fliegt die Hantel in radialer Richtung weg.

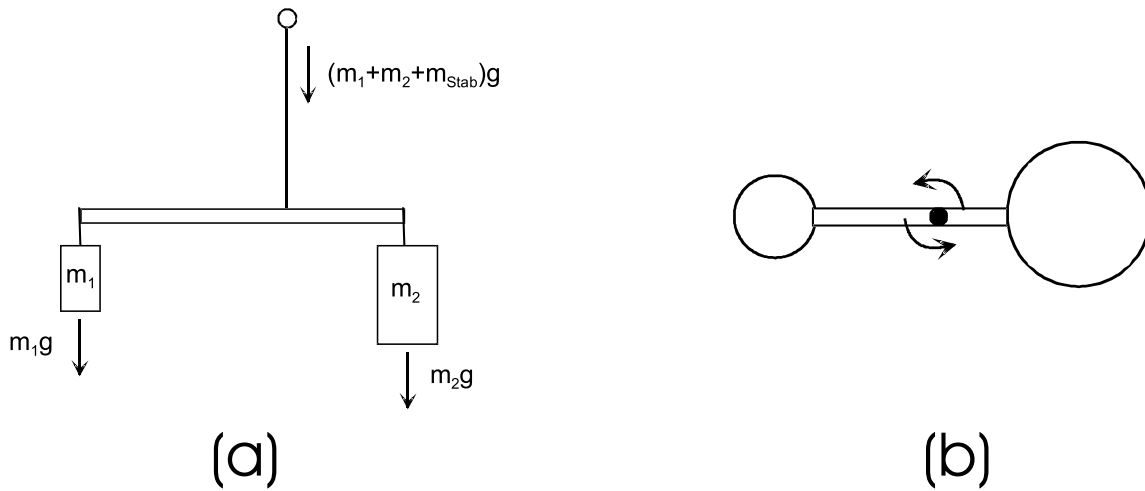


Abbildung 3.5: (a) Hochheben eines im Schwerpunkt gelagerten Holzstabes, an dem zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  hängen; (b) Drehung einer im Schwerpunkt gelagerten Hantel.

- Auf der Luftkissenbahn sind zwei sich bewegende Wagen durch eine Feder verbunden. Die Wagen schwingen zwar gegeneinander, der Schwerpunkt (Markierung durch Pfeilspitze) bewegt sich aber mit konstanter Geschwindigkeit entlang der Bahn.

Wir wollen jetzt untersuchen, welchen Einfluss die inneren Kräfte  $\vec{F}_{ik}$  auf die Bewegung der Massenpunkte haben. Dazu verwenden wir nochmals die Gleichungen 3.1 und 3.2:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{p}}_1 \\ \vec{F}_2 &= m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{p}}_2\end{aligned}$$

Wir multiplizieren Gleichung 3.1 mit  $m_2$ , Gleichung 3.2 mit  $m_1$  und bilden die Differenz:

$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1) = m_1 \vec{F}_2 - m_2 \vec{F}_1 \quad (3.17)$$

Nehmen wir weiter an, dass die äußeren Kräfte  $\vec{F}_1^{(a)}$  und  $\vec{F}_2^{(a)}$  verschwinden, so ergibt sich:

$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1) = m_1 \vec{F}_{12} - m_2 \vec{F}_{21} \quad (3.18)$$

Auf Grund des Reaktionsprinzips ist  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$  und wir erhalten:

$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1) = (m_1 + m_2) \vec{F}_{12} \quad (3.19)$$

oder:

$$\vec{F}_{12} = \mu \ddot{\vec{r}} \quad (3.20)$$

mit:  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  ("reduzierte Masse") und:  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  ("Relativkoordinate").

Gleichung 3.20 hat genau die gleiche Form wie die Gleichungen 3.1 und 3.2.

**Man kann also das Zweikörperproblem wie ein Einkörperproblem behandeln und beispielsweise Lösungen, die wir in vorangegangenen Abschnitten erhalten haben (z. B. Planetenbewegungen, Schwingungen) direkt verwenden. Man muss in der Lösung des Einteilchenproblems lediglich die Masse durch die reduzierte Masse und die Koordinate durch die Relativkoordinate ersetzen.**

Vom Schwerpunkt aus betrachtet bewegt sich dann Körper 1 mit der Koordinate  $\vec{r}_{1,s}(t) = -\vec{r}(t) \cdot \frac{m_2}{m_1}$  und Körper 2 mit  $\vec{r}_{2,s}(t) = \vec{r}(t) \cdot \frac{m_1}{m_2}$ .

Beispielsweise bewegen sich nun sowohl die Planeten als auch die Sonne auf Ellipsenbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt, der in der Nähe des Sonnenzentrums liegt. Wie nahe, können wir leicht aus folgenden Daten berechnen:

Masse der Erde:  $m_E \approx 6 \cdot 10^{24}$  kg

Masse der Sonne:  $m_S \approx 333000 m_E$

Sonnendurchmesser:  $2r_S \approx 1.4 \cdot 10^6$  km

Abstand zwischen Erde und Sonne:  $r_{SE} \approx 1.5 \cdot 10^8$  km.

Das Verhältnis der Abstände der Sonne bzw. der Erde vom Schwerpunkt ist  $r_{1,s}/r_{2,s} = 1/333000 \approx 3 \cdot 10^{-6}$ . Mit  $r_{SE} = r_{1,s} + r_{2,s} \approx r_{2,s}$  ergibt dies  $r_{1,s} \approx 450$  km, was wesentlich weniger ist als der Radius der Sonne.

Die reduzierte Masse ist  $\mu = \frac{m_E m_S}{m_E + m_S} = m_E \left( \frac{1}{1 + m_E/m_S} \right) \approx m_E \left( 1 - \frac{m_E}{m_S} \right) \approx m_E (1 - 3 \cdot 10^{-6})$ , weicht also nur um  $3 \cdot 10^{-6}$  von der Erdmasse ab.

Es war also eine sehr gute Näherung, die Planetenbewegung so zu behandeln, als wäre die Sonne unbeweglich. Hätten wir anstelle der Erde den 318 mal schwereren und 5.2 mal weiter entfernten Jupiter betrachtet, so wäre die reduzierte Masse um ca.  $10^{-3}$  von der Jupitermasse abgewichen und der Schwerpunkt wäre etwa  $7.5 \cdot 10^5$  km vom Sonnenzentrum weg, also etwa am Sonnenrand.

Wir wenden uns nun Prozessen zu, bei denen zwei Körper voneinander weggeworfen bzw. weggeschossen werden. Hierzu zunächst folgendes Gedankenexperiment:

Ein **Astronaut** (Masse inkl. aller Gegenstände, die er bei sich trägt:  $m_1$ , Geschwindigkeit  $\vec{v}_1 = 0$ ) schwebt im Weltall und **wirft** einen **Gegenstand** (Masse  $m_2$ , Geschwindigkeit  $\vec{v}_0$ ) von sich **weg**. Der Schwerpunkt und der Gesamtimpuls ist in Ruhe und bleibt dies auch, da keine äußeren Kräfte vorliegen. Nach dem Wurf müssen sich also Astronaut und Gegenstand so voneinander wegbewegen, dass weiterhin  $\vec{P} = 0$  gilt. Die Geschwindigkeit des nun um  $m_2$  leichteren Astronauten nach dem Wurf sei  $\vec{v}'_1$ .

Es gilt also

$$\vec{P} = 0 = (m_1 - m_2) \vec{v}'_1 = m_2 \vec{v}_0 \quad (3.21)$$

woraus folgt:

$$\vec{v}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 - m_2}\vec{v}_0. \quad (3.22)$$

Nun soll der Astronaut nochmals einen Gegenstand (Masse  $m_2$ , Geschwindigkeit  $\vec{v}_0$  relativ zum Astronauten) von sich wegwerfen. Beobachtet dies ein weiterer Astronaut der sich mit der gleichen Geschwindigkeit  $\vec{v}'_1$  wie der Astronaut vor dem zweiten Wurf bewegt, so stellt er fest, dass der Astronaut sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}''_1 = -\frac{m_2}{m_1 - 2m_2}\vec{v}_0$  entgegen der Wurfrichtung bewegt (der Summand  $2m_2$  im Nenner entsteht dadurch, dass der Astronaut zum zweiten mal um die Masse  $m_2$  leichter wurde). Addiert man hier die Geschwindigkeit  $\vec{v}'_1$  hinzu, die der Astronaut schon nach dem ersten Wurf hatte, so erhält man eine Gesamtgeschwindigkeit von  $\vec{v}'_1 + \vec{v}''_1 = -m_2\left(\frac{1}{m_1 - m_2} + \frac{1}{m_1 - 2m_2}\right)\vec{v}_0$ . Man kann diesen Vorgang nun weiter fortsetzen, wobei aber zu beachten ist, dass die Masse des Astronauten nicht beliebig klein oder gar negativ werden kann. **Der Astronaut kann also durch wiederholtes Wegwerfen von Gegenständen immer schneller werden.** Man beachte aber, dass bei dem Vorgang der Schwerpunkt des Ausgangssystems (Astronaut + viele Massen  $m_1$ ) in Ruhe bleibt.

Genau dieses Prinzip kann benutzt werden, um eine **Rakete** zu beschleunigen.

*Wir pumpen eine Rakete mit Luft auf den Druck von einigen bar auf und lassen dann die Luft ausströmen. Die Rakete fliegt sehr mäßig weit.*

Die Rakete habe eine Anfangsmasse  $M_{anf}$  und eine Anfangsgeschwindigkeit<sup>2</sup>  $v_{anf} = 0$ . Aus der Schubdüse der Rakete sollen sehr leichte Massen  $dm$  mit einer Geschwindigkeit  $-v_0$  entgegen der Flugrichtung austreten. Nach einer gewissen Zeit hat die Geschwindigkeit der Rakete den Wert  $v$  und ihre Masse ist  $m$ . Ihr Impuls ist dann  $m \cdot v$ . Nach dem Austritt der nächsten Masse sei die Geschwindigkeit der Rakete gleich  $v + dv$ . Die Geschwindigkeit der austretenden Masse relativ zum ruhenden Beobachter ist  $v - v_0$ , ihr Impuls beträgt  $dm \cdot (v - v_0)$  (s. Abb. 3.6). Die Erhaltung des Gesamtimpulses verlangt:

$$m \cdot v = (m - dm) \cdot (v + dv) + (v - v_0) \cdot dm \quad (3.23)$$

Ausmultipliziert ergibt dies:

$$m \cdot v = m \cdot v + m \cdot dv - dm \cdot v - dm \cdot dv + v \cdot dm - v_0 \cdot dm \quad (3.24)$$

oder, wenn wir den sehr kleinen Term  $dm \cdot dv$  vernachlässigen:

$$0 = m \dot{v} - v_0 \cdot \dot{m}. \quad (3.25)$$

Wir lösen nach  $dv$  auf:  $dv = v_0 \frac{dm}{m}$ .

Diese Gleichung müssen wir nun vom Anfangswert ( $m = M_{anf}$ ,  $v = 0$ ) bis zum Endwert ( $m = M_{end}$ ,  $v = v_{end}$ ) integrieren:

$$\int_0^{v_{end}} dv = v_0 \int_{M_{anf}}^{M_{end}} \frac{dm}{m} \quad (3.26)$$

---

<sup>2</sup>Wir nehmen an, dass die Bahnkurve der Rakete gerade ist (eindimensionale Bewegung) und lassen deshalb die Vektorpfeile weg.

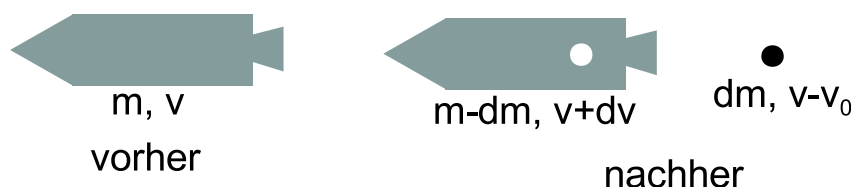
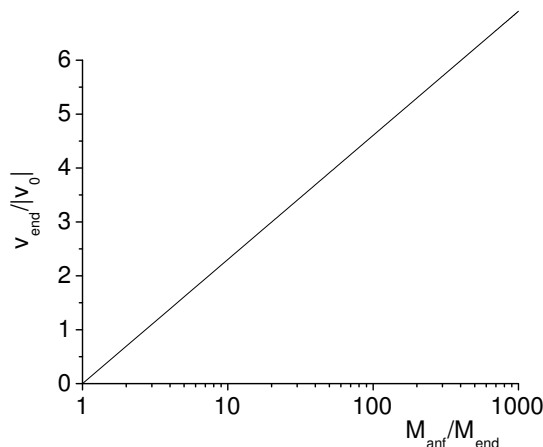


Abbildung 3.6: Zum Prinzip des Raketenantriebs

Die linke Seite liefert:  $\int_0^{v_{end}} dv = v_{end}$ , die rechte Seite liefert:

$$v_0 \int_{M_{anf}}^{M_{end}} \frac{dm}{m} = v_0 \ln m \Big|_{M_{anf}}^{M_{end}} = v_0 \cdot \ln \frac{M_{end}}{M_{anf}} = -v_0 \cdot \ln \frac{M_{anf}}{M_{end}}. \quad (3.27)$$

Die Endgeschwindigkeit ist also:  $v_{end} = -v_0 \cdot \ln \frac{M_{anf}}{M_{end}}$ . Die Funktion ist in Abb. 3.7 dargestellt. Man beachte den logarithmischen Maßstab auf der  $x$ -Achse.

Abbildung 3.7: Endgeschwindigkeit der Rakete in Abhängigkeit von  $M_{anf}/M_{end}$ 

Für  $M_{anf} = M_{end}$  ist  $v_{end} = 0$ . Dies macht auch Sinn, da  $M_{anf} = M_{end}$  bedeutet, dass keine Masse ausgestoßen wurde. Der Wert  $v_{end} = -v_0$  wird für  $M_{anf}/M_{end} = e \approx 2.718$  erreicht. Soll die Rakete die 4-fache Austrittsgeschwindigkeit des Treibstoff erreichen, so müsste  $M_{anf}/M_{end}$  bereits etwa 55 betragen.

Um die Rakete effektiv fliegen zu lassen, sollte also  $v_0$  möglichst hoch sein und ein möglichst großer Teil der Masse abgegeben werden.

*Wir demonstrieren den zweiten Effekt - Abgabe eines großen Teils der Anfangsmasse - dadurch, dass wir die Spielzeugrakete mit Wasser füllen. Den ersten Effekt - hohe Austrittsgeschwindigkeit - demonstrieren wir anhand eines Go-Carts, das durch den Gasaustritt aus einer 200 bar Druckflasche angetrieben wird.*

Zum Schluss dieses Abschnitts besprechen wir noch kurz ein Experiment, bei dem ein **Pfeil von einer Schaukel** geschossen wird. Man findet:

1. Fliegt der Pfeil von der Schaukel weg, so schlägt die Schaukel entgegen der Flugrichtung des Pfeiles aus und Pendel gedämpft nach. Die Schaukel hat durch den Schuss einen Impuls erhalten, der dem Impuls des Pfeils entgegengesetzt gleich ist<sup>3</sup>.
2. Schlägt der Pfeil in einem Brett ein, das mit der Schaukel verbunden ist, so "wackelt" das System Schaukel/Pfeil kurz während des Schusses, ist dann aber schnell wieder in Ruhe. Es hat (nach Einschlag) kein Impuls die Schaukel verlassen, so dass diese in Ruhe bleibt.

---

<sup>3</sup>Aus dem Ausschlag der Schaukel können wir im Prinzip den Impuls bzw. bei bekannter Masse die Geschwindigkeit des Pfeils bestimmen. Wir werden eine analoge Rechnung im nächsten Abschnitt beim "ballistischen Pendel" durchführen



## 3.2 Volumenintegrale

Wenn man Systeme von vielen Massenpunkten  $m_\alpha$  an Positionen  $\vec{r}_\alpha$  beschreiben will, so muss z.B. die Gesamtmasse  $M$  des Systems, den Vektor des Schwerpunktes  $\vec{R}$  oder aber auch die Kraft  $\vec{F}$  ausgerechnet werden, die durch die Gravitationswechselwirkung all dieser Teilchen auf einen weiteren Massenpunkt  $\mu$  an der Position  $\vec{r}$  ausgeübt wird. Es treten also Summen auf vom folgenden Typ auf:

$$M = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha$$

$$\vec{R} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha}{M} \quad (3.28)$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\gamma \mu m_\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}_\alpha|^3} (\vec{r} - \vec{r}_\alpha) \quad (3.29)$$

Diese Summen kann man leicht ausführen, wenn es sich um  $N = 3$  oder  $N = 10$  Massenpunkte handelt. Es wird jedoch unmöglich, wenn es sich bei den Massenpunkte z.B. um die Moleküle  $H_2O$  in einem Wassertropfen handelt. In einem Mol Wasser, das sind 18 Gramm Wasser, befinden sich nämlich

$$N = N_L \approx 6 \cdot 10^{23}$$

Moleküle, wobei  $N_L$  die **Loschmidtsche Zahl** bezeichnet. Wenn man einen modernen Computer benutzen würde, der in einer Sekunde etwa 1 Millionen Summanden in der Summe (3.28) aufsummieren könnte, so wäre dieser Computer immerhin etwa  $1.9 \cdot 10^{10}$  Jahre beschäftigt. Das ist erheblich länger als das Alter des Universums, der Computer wäre also sicher kaputt bevor er so eine einfache Aufgabe *Berechne den Schwerpunkt eine Menge von 18 g Wasser* erfüllt hätte. Wir müssen uns also nach einer anderen Rechen-technik umsehen.

Wir könnten z.B. das uns interessierende Volumen  $V$  in  $k$  kleine Untervolumina der Größe  $\Delta V$  einteilen (mit  $V = k\Delta V$ ). Dieser Teilvolumina könnten z.B. Quader sein mit einer Kantenlänge von  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\Delta z$  in  $x$ -,  $y$ - beziehungsweise der  $z$ -Richtung sein. Es gilt also

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z .$$

Man kann dann bestimmen, wie viele der Massenpunkte  $m_\alpha$  typischerweise in dem Teilvolumen  $\Delta V$  an der Stelle  $\vec{r}_i$  befinden (siehe auch Abb. 3.8). Wir definieren also eine Teilchendichte mit

$$\rho(\vec{r}_i) = \frac{n_i}{\Delta V} ,$$

wobei  $n_i$  die Zahl der Teilchen in diesem Volumen bezeichnet. Damit könnte man nun

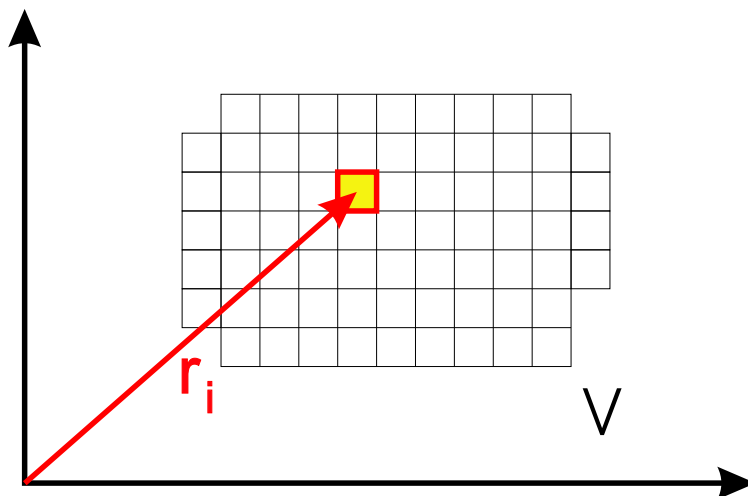


Abbildung 3.8: Teilvolumina  $\Delta V$  zur Berechnung z.B. des Schwerpunktsvektors  $\vec{R}$ . Hier wird speziell der Beitrag eines Elementes  $i$  an der Position  $\vec{r}_i$  betrachtet.

berechnen

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{i=1}^k \rho(\vec{r}_i) \Delta V, \\
 M &= m \sum_{i=1}^k \rho(\vec{r}_i) \Delta V, \\
 \vec{R} &= \frac{m}{M} \sum_{i=1}^k \vec{r}_i \rho(\vec{r}_i) \Delta V.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Dabei haben wir angenommen, dass die Massen aller Teilchen gleich sind  $m_\alpha = m$ . In diesem Fall ist es für viele Fälle geschickter, an Stelle der Teilchendichte die Massendichte

$$\tilde{\rho}(\vec{r}_i) = m\rho(\vec{r}_i) = \frac{mn_i}{\Delta V},$$

einzuführen. Diese ist auch in der Regel einfach zu bestimmen aus dem Quotienten Masse in einem Volumen  $\Delta V$  dividiert durch dieses Volumen.

Eine solche Aufteilung oder Diskretisierung des Volumens ist aber problematisch, wenn sich die Teilchendichte sehr stark mit dem Ort  $\vec{r}_i$  ändert. In diesem Fall müsste man sehr viele und sehr kleine Teilvolumina definieren, die Kantenlängen würden infinitesimal klein:

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \quad \rightarrow \quad dV = dx dy dz$$

Aus der Summe wird dann ein Integral über die drei Raumrichtungen  $x$ ,  $y$  und  $z$  wie z.B. bei der Summe in (3.30):

$$\sum_{i=1}^k \rho(\vec{r}_i) \Delta V \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{r}) dz \right] dy \right] dx.$$

Als ein erstes einfaches Beispiel für die Berechnung eines solchen Volumenintegrals betrachten wir den Fall, dass die Massenteilchen auf das Volumen eines Quaders mit den Kantenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$  beschränkt sind. Die Funktion der Teilchendichte ist also definiert durch

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit können wir das Integral aus (3.2) berechnen:

$$\begin{aligned} \iiint \rho dV &= \int_0^a \left[ \int_0^b \left[ \int_0^c \rho_0 dz \right] dy \right] dx \\ &= \int_0^a \left[ \int_0^b \rho_0 c dy \right] dx \\ &= \rho_0 abc = \rho_0 V \end{aligned}$$

Die Teilchenzahl ergibt sich also als Produkt der konstanten Teilchenzahldichte  $\rho$  und dem Volumen  $V$  des Quaders, ein Ergebnis, das offensichtlich richtig ist. Ganz ähnlich können wir nun auch den Vektor des Schwerpunktes dieses Quaders berechnen. Als Beispiel betrachten wir hier die Berechnung der  $x$ -Komponente dieses Schwerpunktvektors und berechnen dazu:

$$\begin{aligned} m \iiint x \rho dV &= m \int_0^a \left[ x \int_0^b \left[ \int_0^c \rho_0 dz \right] dy \right] dx \\ &= m \int_0^a x \rho_0 b c dx \\ &= m \rho_0 \frac{a^2}{2} b c = m \rho_0 V \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Entsprechende Ergebnisse erhält man für die beiden anderen Komponenten, so dass der Vektor des Schwerpunktes gegeben ist durch

$$\vec{R} = \frac{m}{m \rho_0 V} \iiint \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rho dV = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

ein Ergebnis, das natürlich auch unseren Erwartungen entspricht.

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir eine Teilchenverteilung, die eine konstante Dichte innerhalb des Volumens eines Zylinders besitzt. In diesem Fall ergibt sich

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } 0 \leq z \leq c, 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen wir das Volumenintegral für diese Dichteverteilung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \iiint \rho dV &= \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^c dz \rho_0 \\
 &= c\rho_0 \int_{-R}^R dx 2\sqrt{R^2-x^2} \\
 &= 2c\rho_0 R^2 \int_{-1}^1 dx' \sqrt{1-x'^2} \\
 &= 2c\rho_0 R^2 \left[ \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin(x) \right]_{-1}^1 \\
 &= \rho_0 c \pi R^2 = \rho_0 V
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

wobei wir  $c\pi R^2$  als Volumen des Zylinders  $V$  identifiziert haben. Einfacher kann man diese Rechnung in Zylinderkoordinaten durchführen. Dazu müssen wir allerdings zunächst das Volumenelement  $dV$  in Zylinderkoordinaten bestimmen. Dies ergibt sich aus dem Produkt der 3 Vektoren

$$d\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial i} di$$

wo die Ableitung des Ortsvektors  $\vec{r}$  nach jeweils einer der 3 Koordinaten berechnet wird (die beiden anderen Koordinaten werden festgehalten) und das Ergebnis dann mit dem Differenzial dieser koordinate  $di$  multipliziert wird. Als Beispiel betrachten wir für den Fall der Zylinderkoordinaten, wo ja der Ortsvektor dargestellt wird durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

den Vektor  $d\vec{r}_\varphi$ , der ja die infinitesimale Änderung des Ortsvektors beschreibt, wenn sich der Azimuthwinkel  $\varphi$  infinitesimal ändert. Dieser berechnet sich nach (3.2) für  $i = \varphi$  zu

$$d\vec{r}_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi = r \hat{e}_\varphi d\varphi.$$

Dabei haben wir wieder auf die Einheitsvektoren  $\hat{e}_\varphi$  der Zylinderkoordinaten zurückgegriffe, die wir ja bereits bei der Definition der Zylinderkoordinaten eingeführt hatten. Entsprechende Rechnungen für die anderen beiden Vektoren  $d\vec{r}_i$  liefern:

$$d\vec{r}_r = \hat{e}_r dr \quad \text{und} \quad d\vec{r}_z = \hat{e}_z dz.$$

Alle drei Vektoren stehen also senkrecht aufeinander. Deshalb ergibt sich für das Volumenelement in Zylinderkoordinaten

$$dV = r dr d\varphi dz$$

Bevor wir dieses Volumenelement in Rechnungen benutzen, zunächst noch 2 Anmerkungen zum Faktor  $r$  in diesem Volumenelement. Einerseits ist natürlich klar, dass ein Volumenelement  $dr d\varphi dz$  nicht richtig sein kann, da ein solches Element lediglich die Dimension

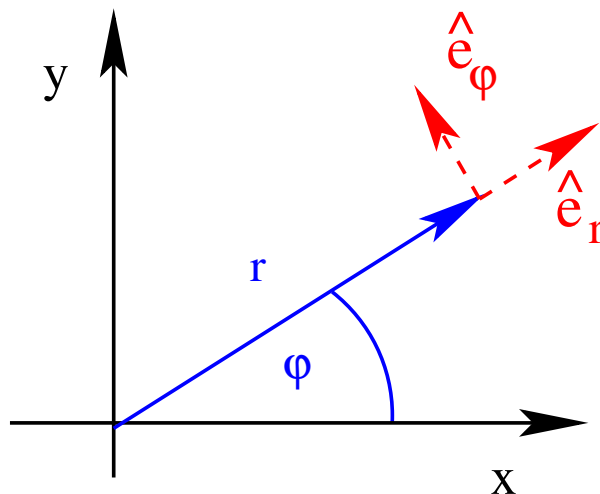


Abbildung 3.9: Darstellung eines Vektor in Zylinderkoordinaten und zugehörige Basisvektoren. Diskussion im Text.

einer Länge zum Quadrat (also z.B. Meter zum Quadrat  $m^2$ ) besäße, was aber die Dimension einer Fläche und nicht eines Volumens wäre (Winkel  $\varphi$  werden ja in dimensionslosen Einheiten gemessen). Der Faktor  $r$  in (3.2) “sorgt” also dafür, dass  $dV$  die richtige Dimension ( $m^3$ ) eines Volumens besitzt. Diesen Faktor  $r$  können wir aber auch geometrisch verstehen. Dazu betrachten wir die Skizze der Abb. 3.9. Es ist klar, dass eine Verschiebung des Ortes  $\vec{r}$  durch eine Vergrößerung des Winkels  $\varphi$  in Richtung des Basisvektors  $\hat{e}_\varphi$  erfolgt. Die Länge der Strecke, die die Spitze des Ortsvektors dabei zurücklegt ist proportional zu der Änderung des Winkels  $d\varphi$  aber auch proportional zum Abstand vom Koordinatenursprung  $r$ . Insgesamt ergibt das Produkt  $dr$  mal  $rd\varphi$  eine infinitesimale Fläche der Form, wie sie durch die gestrichelten Vektoren in Abb. 3.9 angedeutet ist. Multipliziert man diese Fläche noch mit einem Vektorelement  $dz$  senkrecht zur dargestellten Ebene, so ergibt sich das gesamte Volumenelement  $dV$ .

Wir diskutieren hier nur die Rechenregeln für Volumenelemente im 3-dimensionalen Raum für den Fall, dass die Basisvektoren der betrachteten Koordinatensysteme  $\hat{e}_i$  ein orthogonales Basissystem bilden. Allgemein ergeben sich Volumenelemente bei der Transformation von den kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  auf Koordinaten  $u, v, w$  durch die Beziehung

$$dx dy dz = \left| \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \right| du dv dw .$$

Dabei steht der Ausdruck zwischen den Betragstrichen für den Betrag der sogenannten Jakobideterminante.<sup>4</sup> Wir werden dies später in dieser Vorlesung behandeln.

Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten und dem zugehörigen Volumenelement aus (3.2) kann man das Volumenintegral aus (3.31) einfacher berechnen mit

$$\begin{aligned} \iiint \rho dV &= \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^c dz \rho_0 \\ &= \rho_0 c 2\pi \frac{1}{2} R^2 = \rho_0 V , \end{aligned} \tag{3.32}$$

<sup>4</sup>siehe z.B.: H. Fischer, H. Kaul: *Mathematik für Physiker I*, 23, oder Bronstein - Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*, 3.1.11

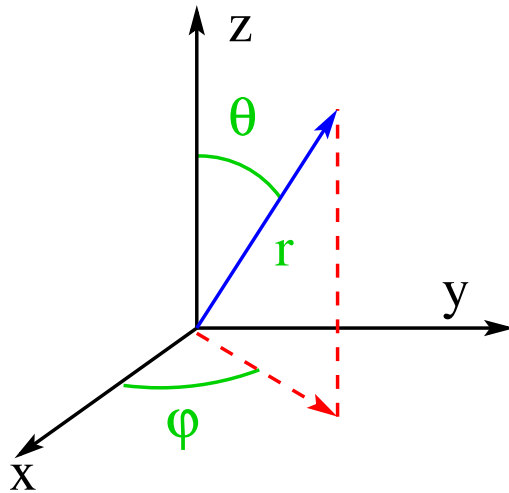


Abbildung 3.10: Darstellung eines Vektor in Kugelkoordinaten.

was natürlich das identische Ergebnis wie in (3.31) ist.

In vielen Anwendungen sind jedoch die Kugelkoordinaten noch geeigneter als die hier diskutierten Zylinderkoordinaten. Die geometrische Bedeutung der Winkelvariablen  $\vartheta$  (der Winkel zwischen dem Vektor  $\vec{r}$  und der  $z$ -Achse) und  $\varphi$  (der Winkel, den die Projektion von  $\vec{r}$  auf die  $xy$ -Ebene mit der  $x$ -Achse bildet) ist in Abb. 3.10 dargestellt.

Daraus ergibt sich für die Darstellung des Vektors in Kugelkoordinaten die Form

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Für eine vollständige Abdeckung des Raumes überstreicht der Winkel  $\vartheta$  den Bereich  $[0, \pi]$  und der Winkel  $\varphi$  nimmt Werte aus  $[0, 2\pi]$  an. Mit diesen Definitionen und den oben skizzierten Rechenregeln berechnet sich das Volumenelement in Kugelkoordinaten zu

$$dV = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

und ein Volumenintegral schreibt etwa über eine Kugel mit dem Radius  $R$  schreibt sich:

$$\int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

In diesem dreifachen Integral betrachten wir speziell die Integration über den Winkel  $\vartheta$  und definieren

$$\chi = \cos \vartheta.$$

Daraus ergibt sich

$$d\chi = \frac{d\chi}{d\vartheta} d\vartheta = -\sin \vartheta d\vartheta$$

Das zweite Integral aus (3.2) kann also umgeschrieben werden auf die Form

$$\int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = - \int_{\cos(0)}^{\cos \pi} d\chi = \int_{-1}^1 d\chi$$

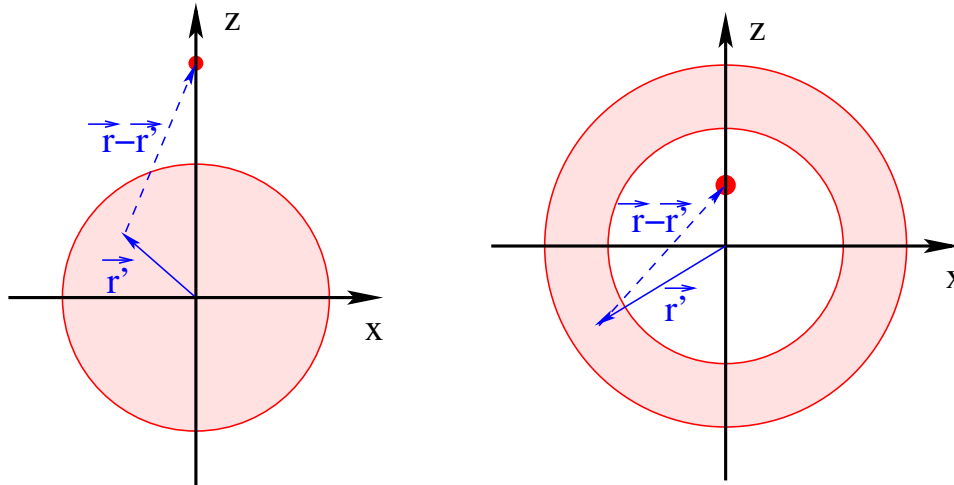


Abbildung 3.11: Berechnung des Gravitationspotenzials einer kugelförmigen Massenverteilung auf ein Teilchen auf der  $z$ -Achse (links) und für ein Teilchen innerhalb einer Massenschale (rechtes Teilbild).

womit das Volumenintegral von (3.2) die Gestalt annimmt

$$\int_0^R r^2 dr \int_{-1}^1 d\chi \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

was für viele Rechnungen eine sehr geeignete Darstellung ist. Das einfachste Beispiel ist es wohl, das Volumen der Kugel zu berechnen mit

$$V = \int_0^R r^2 dr \int_{-1}^1 d\chi \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 \cdot 2\pi.$$

Als eine erste physikalisch motivierte Anwendung betrachten wir jetzt die Berechnung des Gravitationspotenzials einer ausgedehnten kugelförmigen Masse mit Radius  $R$  und konstanter Dichte auf eine Testmasse  $\mu$ , die ausserhalb dieser Masse an der Position  $\vec{r}$  liegt (siehe linkes Teilbild der Abb. 3.11). Dies ist ein Modell z.B. für die Anziehung, die die Erde (die ja sicher keine Punktmasse ist) auf den Probekörper  $\mu$  ausübt. Dazu betrachten wir zunächst einmal den Beitrag, den ein infinitesimales Volumenelement  $dV'$  an der Position  $\vec{r}'$  dazu leistet. Dieser Beitrag ist gegeben durch

$$\delta U(\vec{r}) = -\frac{\gamma \mu \tilde{\rho}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Dabei steht  $\tilde{\rho}(\vec{r}')$  für die Massendichte an der Stelle  $\vec{r}'$ , so dass  $\tilde{\rho} dV'$  gleich der Masse im Volumen  $dV'$  ist und  $\gamma$  bezeichnet die Newtonsche Gravitationskonstante. Berechnet man nämlich z.B. die  $x$ -Komponente der zu diesem Potenzial zugehörige Kraft

$$\begin{aligned} \delta F_x(\vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\gamma \mu \tilde{\rho} dV'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \\ &= -\frac{\gamma \mu \tilde{\rho} dV'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}^3} (x-x') \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für die  $y$ - und die  $z$ -Komponente, so dass insgesamt

$$\delta\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\delta U(\vec{r}) = -\frac{\gamma\mu\tilde{\rho}dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

also eine Kraft entsteht, eine Anziehung des Punktteilchens  $\mu$  zur Teilmasse  $\rho dV'$  an der Position  $\vec{r}'$ . Addieren wir nun all diese infinitesimalen Beiträge  $\delta U$  der Volumenelemente  $dV'$  in (3.2) auf, so ergibt sich das gesamte Potenzial durch das Volumenintegral

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= -\int_0^R r'^2 dr' \int_{-1}^1 d\chi' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\gamma\mu\tilde{\rho}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ &= -\int_0^R r'^2 dr' \int_{-1}^1 d\chi' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\gamma\mu\tilde{\rho}(\vec{r}')}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\chi'}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

In der zweiten Zeile dieser Gleichung nehmen wir an, dass das Koordinatensystem so ausgerichtet ist, dass die Testmasse  $\mu$  auf der  $z$ -Achse liegt. Damit wird der Kosinus des Winkels zwischen  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  gleich der Integrationsvariablen  $\chi' = \cos(\vartheta')$ . Das Integral über den Azimutwinkel  $\varphi$  liefert den Faktor  $2\pi$ . Ausserdem benutzen wir

$$\int_{-1}^1 d\chi' \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\chi'}} = -\frac{\sqrt{(r-r')^2} - \sqrt{(r+r')^2}}{rr'},$$

Für den hier relevanten Fall  $r > r'$  ist dieses Integral gerade  $2/r$ . Damit ergibt sich insgesamt für das Integral in (3.33)

$$U(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{r}\gamma\mu\tilde{\rho} \int_0^R r'^2 dr' = -\gamma\mu\tilde{\rho} \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{1}{r} = -\frac{\gamma\mu M}{r}$$

also gerade das Potenzial einer Punktmasse der Masse  $M$  (gleich dem Produkt aus Massendichte  $\tilde{\rho}$  und dem Volumen der Kugel mit Radius  $R$ ) im Koordinatenursprung also im Zentrum der kugelförmigen Masse. Damit haben wir also jetzt bestätigt, dass wir die Gravitationsanziehung der Erde durch das der entsprechenden Punktmasse im Zentrum der Erde beschreiben können, so lange wir uns auf Teilchen beschränken, die sich ausserhalb des Erdradius bewegen.

Welche Gravitationskraft spüren aber Teilchen, die sich im Inneren der Erde befinden. Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir nun die Berechnung des Gravitationspotenzials einer kugelförmigen Massenschale auf das Teilchen  $\mu$ , das sich im inneren Hohlraum dieser Massenschale befindet (rechtes Teilbild von Abb. 3.11). Auch in diesem Fall betrachten wir das gleiche Volumenintegral, wir müssen aber die Integration über die radiale Koordinate  $r'$  auf den Bereich zwischen dem Radius der inneren Hohlkugel  $R_i$  und dem Aussenradius  $R_a$  umschreiben. Ausserdem müssen wir natürlich für das Integral (3.2) annehmen, dass  $r' > r$  ist, was zu einem Ergebnis für dieses Integral von  $2/r'$  führt. Damit erhalten wir also in diesem Fall ein Potenzial der Form

$$U(\vec{r}) = -4\pi\gamma\mu\tilde{\rho} \int_{R_i}^{R_a} \frac{r'^2}{r'} dr'.$$

Es ist nicht erforderlich dieses Integral weiter auszuwerten. Wir sehen, dass der Wert nicht von der Position  $\vec{r}$  des Teilchens  $\mu$  abhängt. Die Kraft, berechnet als negativer



Gradient des Potentials ist also identisch Null. Die Beiträge der verschiedenen Teilmassen der Kugelschale zur Gesamtkraft auf die Testmasse im Inneren heben sich also gerade gegenseitig auf.

Betrachten wir nun also den allgemeinen Fall, dass sich unser Testteilchen  $\mu$  an einer beliebigen Position in einer Massenverteilung  $\tilde{\rho}$  mit kugelförmiger Symmetrie befindet. Die Bereiche der Massenverteilung, die einen Abstand vom Zentrum dieser Kugel haben, die größer ist als der Abstand  $r$  des Teilchens  $\mu$  tragen, wie wir gerade gezeigt haben, nicht zur Gravitationskraft bei. Der Anteil der Massenverteilung, der innerhalb der Kugel mit dem Radius  $r$  liegt, wir bezeichnen ihn mit der Massenfunktion  $M(r)$  übt eine Kraft aus, als ob diese Masse  $M(r)$  im Zentrum der Kugel, also im Koordinatenursprung läge. Wir erhalten also mit diesen Bezeichnungen für die resultierende Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\gamma\mu M(r)}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Nimmt man an, dass unser ausgedehnter Körper eine konstante Dichte für  $0 \leq r' \leq R$  besitzt, die ausserhalb des Radius  $R$  direkt auf Null absinkt, so ergibt sich für  $M(r)$

$$M(r) = \begin{cases} \frac{M r^3}{R^3} & \text{für } r \leq R \\ M & \text{für } r > R \end{cases}$$

Damit ergibt sich also für den Betrag der Kraft als Funktion von  $r$

$$F(r) = \begin{cases} \frac{\gamma\mu M}{R^3} r & \text{für } r \leq R \\ \frac{\gamma\mu M}{r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

Eine interessante Anwendung ergibt sich, wenn wir annehmen, dass die Massenverteilung einer Galaxie kugelförmig ist. Sterne in dieser Galaxie würden also durch die Anziehung ihrer Mitsterne, eine anziehende Kraft auf das Zentrum der Galaxie von der Form (3.2) spüren. Dabei ist  $r$  der Abstand des jeweiligen Sterns von diesem Zentrum. Ist die Galaxie in einem stabilen Zustand, so werden sich die Sterne auf Ellipsen um das Zentrum bewegen (genau so wie die Planeten um die Sonne). Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, dass es sich hier um Kreisbahnen handelt, bei denen die Anziehung der Gravitation durch die Zentripetalkraft kompensiert wird:

$$\mu r \dot{\varphi}^2 = \gamma\mu \frac{M(r)}{r^2}.$$

Für die Geschwindigkeit der Sterne auf ihrer Bahn ergibt sich also

$$v^2 = r^2 \dot{\varphi}^2 = \gamma \frac{M(r)}{r}.$$

Wäre die Massendichte homogen, so sollte diese Geschwindigkeit proportional zu  $r$  ansteigen, am Rande der Galaxie aber dann mit  $1/\sqrt{r}$  abfallen. Man beobachtet auch den linearen Anstieg im Inneren der Galaxie, stellt aber fest, dass im Aussenbereich die Geschwindigkeit einen konstanten Wert  $v$  annimmt.

Diese Beobachtung wird als ein Indiz (neben anderen) für die Existenz der sogenannten dunklen Materie angenommen. Danach besteht der überwiegende Anteil der Materie, die

Gravitationskräfte auf Sterne und Galaxien ausübt, nicht aus Materie von uns bekannter Art (Materie von Sonnen, Planeten, ausgebrannte Sonnen, die zu schwarzen Löchern kollabiert sind ...) sondern eben aus dieser dunklen Materie, die sich nur durch die Gravitation bemerkbar macht. Ein Halo aus solch dunkler Materie um die leuchtenden Sterne einer Galaxie könnte diese Daten erklären.

Alternativ kann man diese Geschwindigkeiten auch mit einer modifizierten Newtonschen Gleichung beschreiben. Diese Parametrisierung hat den schönen Namen MOND für MOdified Newtonian Dynamics<sup>5</sup>. Man nimmt dazu an, dass für sehr schwache Kräfte (unterhalb einer Minimalkraft) die bekannte Beziehung  $F = ma$  ersetzt werden muss durch

$$F = \beta ma^2.$$

Die Kraft ist also in diesem Fall proportional zur Beschleunigung  $a$  zum Quadrat. Für die Sterne am Rande einer Galaxie sollte die Anziehungskraft so gering sein, dass (3.2) anzuwenden ist. Aus der Beziehung (3.2) würde also

$$\mu\beta r^2 \dot{\phi}^4 = \gamma\mu \frac{M(r)}{r^2}.$$

was das Geschwindigkeitsverhalten erklären könnte. Der Ansatz (3.2) ist natürlich nur ein Versuch einer Parametrisierung eines beobachteten Effektes, keine wirkliche Theorie, mit der auch ganz andere Phänomene beschrieben würden. Vielleicht verbirgt sich aber hinter dieser Parametrisierung eine Theorie, die die Forderung nach der Existenz der dunklen Materie überflüssig machen könnte

---

<sup>5</sup>Eine allgemeinverständliche Darstellung dieser MOND Beschreibung findet sich in der Zeitschrift *Spektrum der Wissenschaften*, Oktober 2002

### 3.3 Stöße zwischen zwei Körpern

#### 3.3.1 Allgemeine Anmerkungen

Wir wollen im folgenden Abschnitt Stoßprozesse zwischen zwei Körpern der Masse  $m_1$  bzw.  $m_2$  betrachten.

- Im "Anfangszustand" weit weg vom Stoßpunkt sollen die beiden Massen Geschwindigkeiten  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  bzw. Impulse  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  haben.
- die beiden Körper sollen dann aufeinander zufliegen und wie in Abb. 3.12 skizziert miteinander stoßen.

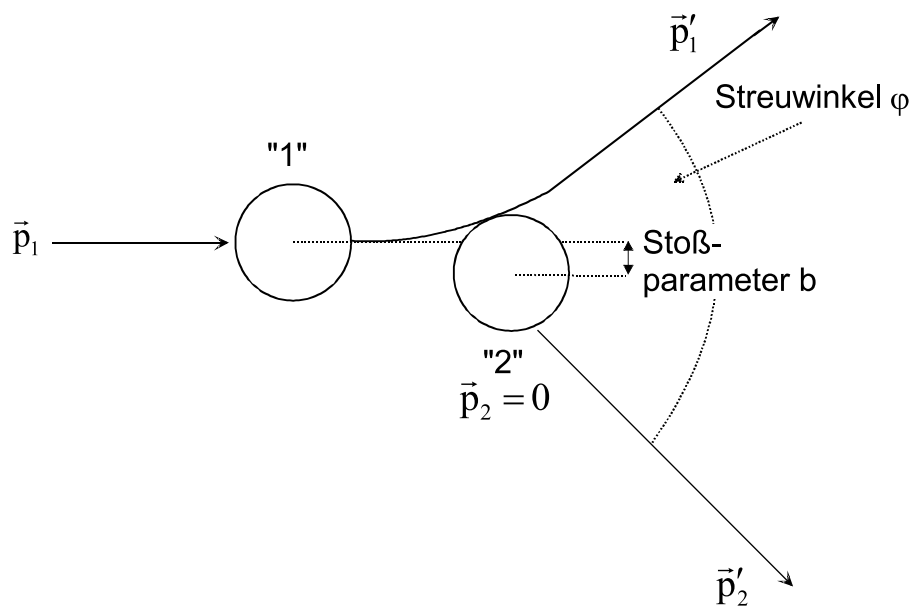


Abbildung 3.12: *Stoß zwischen zwei Körpern: Schematische Darstellung*

- nach dem Stoß entfernen sich die beiden Massen wieder voneinander und haben im "Endzustand" weit weg vom Stoßpunkt die Geschwindigkeiten  $\vec{v}_1', \vec{v}_2'$  bzw. Impulse  $\vec{p}_1', \vec{p}_2'$ .

Man kann sich in Bezug auf den obigen Prozess eine Reihe von Grundfragen stellen wie etwa:

1. wie ist bei gegebenem Anfangszustand (gegeben etwa durch die Impulse  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  und dem Stoßparameter  $b$ , der den Abstand angibt, an dem Körper 1 ohne Wechselwirkung am Körper 2 vorbeifliegen würde) der Ablenkwinkel der beiden Teilchen bzw. wo treffen die Körper auf?
2. Wie war bei bekanntem Endzustand der Anfangszustand?

3. wie war bei bekannten Anfangs- und Endzuständen die Art der Wechselwirkung zwischen den beiden Körpern; welche Art Körper bzw. Teilchen lagen vor?
4. Wie war die Energie und Masse des einfallenden Teilchens?
5. Welche innere Energie wurde an die Körper übertragen?

Fragestellung 1. ist z. B. beim Billiard interessant, Fragestellung 2 bei der Ermittlung des Schuldigen bei einem Autounfall.

Die Fragestellungen 3 und 4 sind insbesondere in der Kern- und Teilchenphysik von großen Interesse. Man untersucht Teilchen der Größe eines Atomkerns und darunter oft dadurch, dass man Ausgangsteilchen wie Elektronen oder Protonen (aber auch schwerere Teilchen) mit bekanntem Impuls und bekannter Energie auf die Atomkerne eines "Targets" schießt. In einigen Fällen lässt man auch gegenläufige Elektronen- oder Protonenstrahlen gegeneinanderprallen.

Ein frühes Experiment wurde beispielsweise von Rutherford, Geiger und Marsden 1910 durchgeführt. Sie bestrahlten Atomkerne mit " $\alpha$ -Teilchen" (He-Kernen) und stellten fest, dass diese Teilchen die Atome nahezu ungehindert durchdringen. Die beobachteten Ablenkungswinkel zeigten im Widerspruch zur gängigen Vorstellung über Atome, dass praktisch die gesamte Masse des Atoms in einem sehr kleinen Kern konzentriert war.

Bei sehr hochenergetischen Stoßprozessen muss keineswegs die Zahl der Teilchen konstant bleiben. Werden beispielsweise in großen Beschleunigeranlagen Protonenstrahlen sehr hoher Energie bis in den TeV-Bereich<sup>6</sup> gegeneinandergeführt, so entstehen beim Stoß eine Vielzahl neuer Elementarteilchen oder auch angeregte Zustände bekannter Elementarteilchen. Die Untersuchung dieser Teilchen und der Wechselwirkung zwischen diesen Teilchen ist eines der wichtigen Themengebiete der Elementarteilchenphysik. Weitere Stoßprozesse, die hier genannt werden sollten, sind die zwischen sehr schweren Atomkernen ("Schwerionenreaktionen"), in denen beispielsweise neue Zustände der (Kern-)Materie erforscht werden. Bei diesen Reaktionen entsteht beim Stoß in der Regel eine sehr große Zahl von Teilchen. Unter geeigneten Bedingungen erlauben Stöße zwischen schweren Ionen aber auch die Erzeugung neuer Atomkerne und damit die Erweiterung des Periodensystems der Elemente zu immer schwereren Atomen.

Die Abb. 3.13 zeigt beispielhaft zwei Aufnahmen von Stößen eines  $\alpha$ -Teilchens bzw. eines Protons mit Atomkernen.

Fragestellung 5 ist beispielsweise im Bereich der Astronomie und der Astrophysik wichtig. Aus dem Weltall treffen ungeheuer energiereiche Teilchen (mit Energien bis zu  $10^{20}$  eV, entspricht einem schnellen Tennisball) auf die Atmosphäre und erzeugen dort in einer Kaskade von Stoßprozessen einen ganzen Schauer von Teilchen, der dann auf der Erde nachgewiesen werden kann. Eine wesentliche Fragestellung ist, woher diese Teilchen kommen bzw. welche Mechanismen sie auf ihre hohe Energie beschleunigt haben. Die Details solcher Stoßprozesse werden Sie in einer späteren Phase Ihres Studiums kennenlernen. An dieser Stelle wollen wir uns den Grundprinzipien der Stöße zwischen zwei Körpern widmen. Wir werden dabei sehr starken Gebrauch vom Impuls- und Energieerhaltungssatz machen und außerdem annehmen, dass die Zahl der beteiligten Körper erhalten bleibt.

---

<sup>6</sup>1 Elektronvolt = 1 eV =  $1.6 \cdot 10^{-19}$  J; dies ist die Energie, die ein Elektron beim Durchlaufen einer elektrischen Spannung von 1 Volt gewinnt

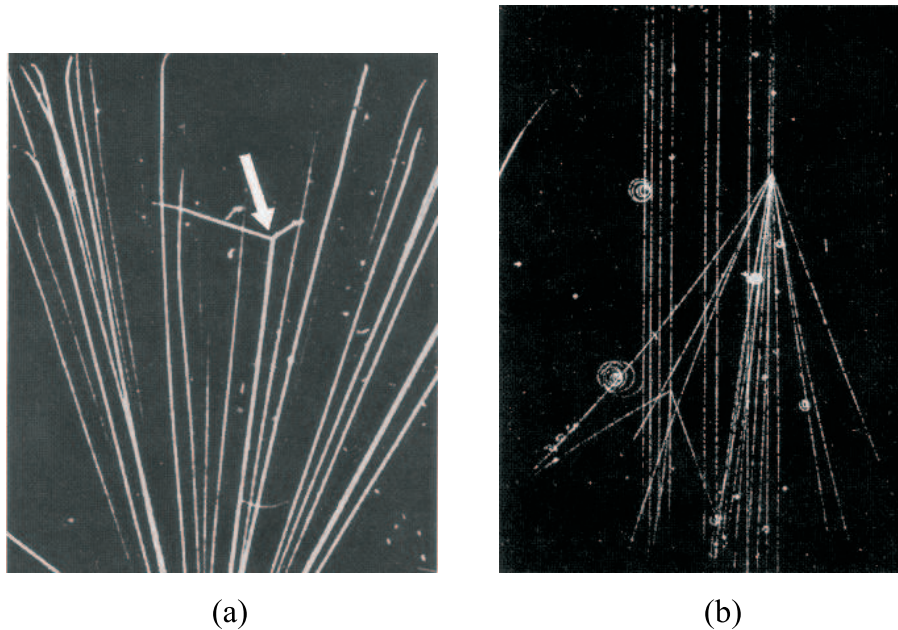


Abbildung 3.13: *Teilchenstöße in der Kernphysik: (a) Stoß eines  $\alpha$ -Teilchens mit einem Kern (Pfeil) (b) Erzeugung von 12 Teilchen beim Stoß eines Protons (Energie: 24 GeV) mit einem Atomkern. Abb. 3.13a wurde in einer "Nebelkammer" angefertigt. In der Nebelkammer befindet sich ein wasserdampfgesättigtes Gas. Der Wasserdampf kondensiert entlang der Bahn ionisierender Teilchen. Abb. 3.13(b) wurde in einer Blasenkammer angefertigt. Sie enthält eine überhitzte Flüssigkeit, in der sich entlang der Teilchenbahnen Blasen bilden. (aus: Gerthsen Physik, 21. Auflage: (a) S. 840; (b) S. 849).*

Betrachten wir zunächst die **Impulserhaltung**.

Wenn ganz allgemein  $K$  Teilchen miteinander stoßen und nach dem Stoß  $N$  Teilchen auseinanderlaufen, so gilt:

$$\sum_{i=1}^K \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i' \quad (3.34)$$

Für den Fall von zwei stoßenden Teilchen, die beim Stoß intakt bleiben, reduziert sich dies zu:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (3.35)$$

Die **Energieerhaltung** müssen wir etwas genauer diskutieren. Betrachten wir hierzu ein System von  $N$  wechselwirkenden Massenpunkten, auf die ausschließlich konservative Kräfte wirken sollen.

Zunächst haben wir die gesamte **kinetische Energie** der Massenpunkte, die durch die Summe der kinetischen Energien aller Massenpunkte gegeben ist:

$$E_{kin} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} \quad (3.36)$$

Die Kraft auf das  $i$ -te Teilchen können wir wiederum zerlegen in eine äußere Kraft  $\vec{F}_i^{(a)}$  und eine innere Kraft  $\vec{F}_{ik}$ , die zwischen Teilchen  $i$  und Teilchen  $k$  wirkt. Das dritte Newtonsche Axiom verlangt:  $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ .

Die äußeren Kräfte  $\vec{F}_i^{(a)}$  können wir nun aus Potentialen  $V_i^{(a)}(\vec{r}_i)$  via  $\vec{F}_i^{(a)} = -\vec{\nabla}_i V_i^{(a)}(\vec{r}_i)$  gewinnen. Der Gradient soll sich dabei auf die Koordinate des Teilchens  $i$  beziehen:

$$\vec{\nabla}_i V_i^{(a)} = \left( \frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial z_i} \right) \quad (3.37)$$

Ganz entsprechend können wir auch die Kräfte  $\vec{F}_{ik}$  aus Potentialen  $V_{ik}$  gewinnen. Wir nehmen hierzu an, dass die  $V_{ik}$  von der Differenz der Koordinaten  $\vec{r}_i$  und  $\vec{r}_k$  abhängt:  $V_{ik} = V_{ik}(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$ . Die Kraft  $\vec{F}_{ik}$  ergibt sich dann aus:  $\vec{F}_{ik} = -\vec{\nabla}_i V_{ik}(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$ . Man beachte hierbei, dass  $V$  nur nach der Koordinate  $\vec{r}_i$  differenziert wird. Da das  $i$ -te Teilchen keine Kraft auf sich selbst ausübt, können wir verlangen:  $V_{ii} = 0$ . Außerdem wollen wir verlangen, dass  $V_{ik} = V_{ki}$  ist. Damit gilt:

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{\nabla}_i V_{ik}(\vec{r}_i - \vec{r}_k) = -\vec{\nabla}_i V_{ki}(\vec{r}_i - \vec{r}_k) = +\vec{\nabla}_k V_{ki}(\vec{r}_i - \vec{r}_k) = -\vec{F}_{ki} \quad (3.38)$$

Die Beziehung  $\vec{\nabla}_i V_{ki}(\vec{r}_i - \vec{r}_k) = -\vec{\nabla}_k V_{ki}(\vec{r}_i - \vec{r}_k)$  ergibt sich, da  $V_{ki}$  von der Differenz  $\vec{r}_i - \vec{r}_k$  abhängt und daher die Differentiation nach  $\vec{r}_k$  ein negatives Vorzeichen liefert.

Wir können damit die Gesamtenergie der  $N$  Massenpunkte schreiben als:

$$E = E_{kin} + V_{ges} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^N V_{ik}. \quad (3.39)$$

Der Faktor  $\frac{1}{2}$  vor der Doppelsumme über  $i$  und  $k$  ist nötig, weil wir bei der Doppelsumme jedes Potential zwischen  $i$  und  $k$  doppelt zählen (nämlich vom Körper  $i$  aus und vom Körper  $k$  aus). Man macht sich dies leicht für zwei Massenpunkte klar, die durch eine Feder verbunden sind. Die potentielle Energie  $V_{ik} = \frac{1}{2}C(\vec{r}_i - \vec{r}_k)^2$  der Feder dürfen wir nur einmal zählen!

Wir werden im Folgenden Stoßprozesse bei Abwesenheit äußerer Kräfte, betrachten, d. h. Prozesse für die die äußeren Potentiale  $V_i^{(a)}$  gleich null (bzw. konstant<sup>7</sup>) sind. Wesentlich ist aber der Term  $\frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^N V_{ik}$ . Er besagt letztlich, dass die beiden Stoßpartner, die ja ihrerseits aus sehr vielen Atomen bestehen, beim Stoß innere Energie speichern oder evtl. auch freigeben können. Die Summe der kinetischen Energien der Stoßpartner vor dem Stoß ist also auch bei Abwesenheit äußerer Kräfte nicht notwendig gleich der Summe der kinetischen Energien nach dem Stoß. Gilt dies aber, so sprechen wir von einem **elastischen Stoß**:

$$\sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} = \sum_{i=1}^N \frac{p'_i{}^2}{2m_i} \quad (3.40)$$

Andernfalls sprechen wir von einem inelastischen Stoß. Speziell bewegen sich beim **vollkommen inelastischen Stoß** die Stoßpartner nach dem Stoß mit gleichem Impuls weiter (sie "kleben" z. B. zusammen).

Wir wollen nun zunächst

---

<sup>7</sup>Wir vergleichen Energien vor und nach dem Stoß. Konstante Terme sind daher nicht von Belang.

### 3.3.2 Eindimensionale Stöße

betrachten, bei der sich die Stoßpartner nur entlang einer Linie (z. B. der x-Koordinate) bewegen können.

Der einfachste Fall ist der Stoß eines Körpers der Masse  $m_1$  mit einem unendlich schweren, ruhenden Körper (einer Wand):

#### Stoß mit einer Wand

Diese Situation ist in Abb. 3.14 gezeigt.

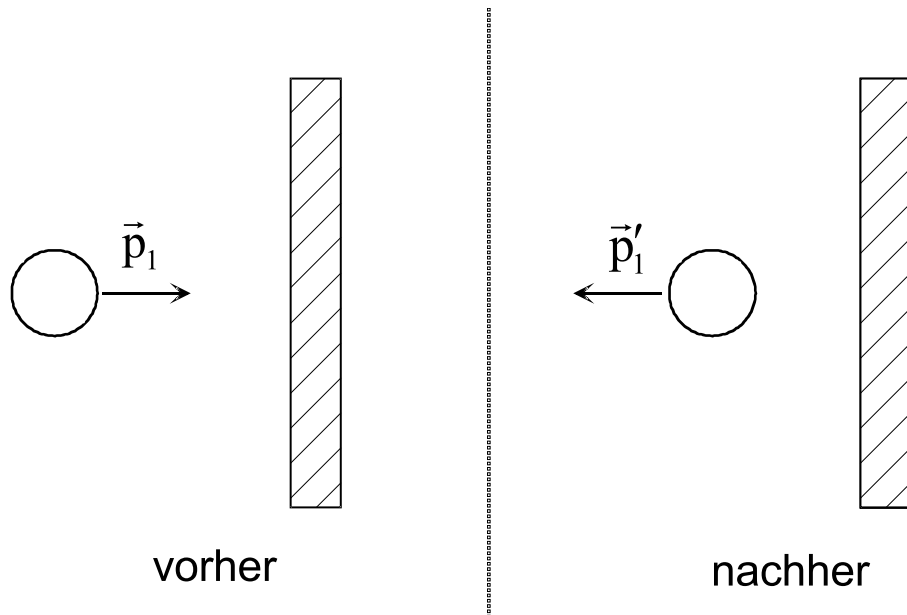


Abbildung 3.14: Ein Massenpunkt (Masse  $m_1$ ) stößt an eine Wand und wird an dieser reflektiert.

Für einen elastischen Stoß gilt:

$$E_{kin} = E'_{kin} \quad \text{bzw.} \quad \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_{wand}^2}{2m_{wand}} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_{wand}'^2}{2m_{wand}} \quad (3.41)$$

Da die Wand unendlich schwer ist, ist  $\frac{p_{wand}^2}{2m_{wand}} = \frac{p_{wand}'^2}{2m_{wand}} = 0$ , d. h. es gilt:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} \quad (3.42)$$

Hieraus folgt:  $|p_1| = |p_1'|$ , bzw.  $p_1 = \pm p_1'$ .

Im Fall des Vorzeichens ”-“ wird der Massenpunkt an der Wand reflektiert. Im Fall des Vorzeichens ”+“ würde der Massenpunkt durch die Wand (z. B. durch ein Loch in der Wand!) hindurchlaufen.

Betrachten wir nun die Impulserhaltung<sup>8</sup>:

$$p_1 + p_{\text{wand}} = p'_1 + p'_{\text{wand}} \quad (3.43)$$

Aus der Energieerhaltung wissen wir im Fall der Reflexion:  $p_1 = -p'_1$ . Damit erhalten wir für  $p_{\text{wand}} = 0$ :  $p'_{\text{wand}} = 2p_1$ . Auf die Wand wird also durchaus Impuls übertragen. Die Geschwindigkeit der (unendlich schweren) Wand nach dem Stoß ist aber gleich 0:  $v' = p'_{\text{wand}}/m_{\text{wand}} = 0$ , wie zu erwarten war.

Im Fall eines inelastischen Stoßes ist  $|p_1| \neq |p'_1|$ . Speziell bleibt beim vollkommen inelastischen Stoß der Massenpunkt an der Wand kleben und verliert dabei vollständig seinen Impuls und seine kinetische Energie.

Die nächste Situation, die wir betrachten wollen, ist ein

### Elastischer Stoß zwischen zwei Massenpunkten endlicher Masse $m_1$ und $m_2$

Die beiden Massen sollen zunächst mit entgegengesetzten Impulsen  $p_1$  und  $p_2$  aufeinander zukommen, d. h. es gelte:  $p_1 = -p_2$  (s. Abb. 3.15) .



Abbildung 3.15: Eindimensionaler elastischer Stoß zwischen zwei Massenpunkten, die mit entgegengesetzten Impulsen aufeinander zufliegen.

Für den Gesamtimpuls gilt:  $P = p_1 + p_2 = 0$ . Damit ist die Schwerpunktsgeschwindigkeit  $v_s = \frac{P}{m_1 + m_2} = 0$ .

Der Schwerpunkt ruht also bei diesem speziellen Stoß.

Impulserhaltung:

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 = 0 \quad (3.44)$$

Energieerhaltung:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2} \quad (3.45)$$

Aus 3.44 folgt:

$$p_1 = p_2 \quad \text{und} \quad p'_1 = -p'_2. \quad (3.46)$$

Aus 3.45 folgt dann:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_1^2}{2m_2} = \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_1}{2m_2}. \quad (3.47)$$

Hierbei haben wir unter Benutzung von  $p_1 = -p_2$  und  $p'_1 = -p'_2$  die Impulse  $p_2$  und  $p'_2$  eliminiert.

<sup>8</sup>Wir verzichten bei den eindimensionalen Stößen auf die Vektorpfeile.



Wir erhalten dann:

$$\frac{p_1^2}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{p_1'^2}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \quad (3.48)$$

oder mit der reduzierten Masse  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ :

$$\frac{p_1^2}{2\mu} = \frac{p_1'^2}{2\mu} \quad \text{bzw.} \quad |p_1| = |p_1'| \quad (3.49)$$

Alle Impulse sind damit vom Betrag her gleich. Der Fall  $p_1' = -p_1$  entspricht gerade der Reflexion, der Fall  $p_1' = p_1$  bedeutet, dass die beiden Massen ohne Wechselwirkung aneinander vorbeilaufen.

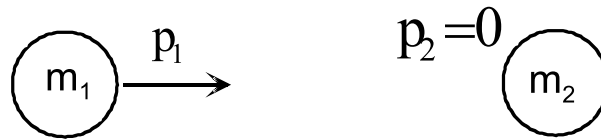


Abbildung 3.16: *Eindimensionaler elastischer Stoß zwischen zwei Massenpunkten; Masse  $m_2$  ruht.*

Nun ruhe die Masse  $m_2$  vor dem Stoß, d. h.  $p_2 = 0$  (s. Abb. 3.16) Impulserhaltung:

$$p_1 = p_1' + p_2' \quad (3.50)$$

Energieerhaltung:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \quad (3.51)$$

Wir lösen 3.50 nach  $p'$  auf und quadrieren:

$$p_1'^2 = (p_1 - p_2')^2 = p_1^2 + p_2'^2 - 2p_1 p_2' \quad (3.52)$$

Einsetzen in 3.51 und Multiplikation mit  $2m_1$  ergibt:

$$p_1^2 = (p_1^2 + p_2'^2 - 2p_1 p_2') + \frac{m_1}{m_2} p_2'^2 \quad (3.53)$$

oder:

$$p_2'^2 \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) = 2p_1 p_2' \quad (3.54)$$

Falls  $p_2' \neq 0$  ist (der Fall  $p_2' = 0$  bedeutet wiederum, dass keine Wechselwirkung vorlag), folgt hieraus:  $p_2' \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) = 2p_1$  oder:

$$p_2' = \frac{2p_1}{1 + m_1/m_2} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} p_1 \quad (3.55)$$

Setzen wir dies in (I) ein, so erhalten wir  $p'_1$  als Funktion von  $p_1$ :

$$p'_1 = p_1 - p'_2 = p_1 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2}p_1 = p_1 \left(1 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}p_1 \quad (3.56)$$

Für die entsprechenden Geschwindigkeiten ergibt sich:

$$\begin{aligned} v'_2 &= \frac{p'_2}{m_2} = \frac{2}{m_1 + m_2}m_1v_1 = \frac{2m}{m_1 + m_2}v_1 \\ v'_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \end{aligned}$$

Wir wollen diese Ausdrücke nun für verschiedene Grenzfälle diskutieren:

1.  $m_2 \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} p'_2 &\rightarrow 2p_1 & v'_2 &\rightarrow 0 \\ p'_1 &\rightarrow -p_1 & v'_1 &\rightarrow -v_1 \end{aligned}$$

Dieser Grenzfall entspricht genau dem schon besprochenen elastischen Stoß mit einer Wand.

2.  $m_2 \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} p'_2 &\rightarrow \frac{2m_2}{m_1}p_1 \rightarrow 0 & v'_2 &\rightarrow 2v_1 \\ p'_1 &\rightarrow p_1 & v'_1 &\rightarrow v_1 \end{aligned}$$

In diesem Grenzfall stößt ein sehr schwerer Körper elastisch mit einem sehr leichten. Impuls und Geschwindigkeit des schweren Körpers ändern sich praktisch nicht, der leichte wird dagegen auf die doppelte Geschwindigkeit des stoßenden Körpers beschleunigt.

3.  $m_1 = m_2$ :

$$\begin{aligned} p'_2 &= p_1 & v'_2 &\rightarrow v_1 \\ p'_1 &= 0 & v'_1 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis mag etwas überraschen. Die stoßende Masse kommt zur Ruhe, die vor dem Stoß ruhende Masse läuft mit dem Impuls bzw. der Geschwindigkeit der stoßenden Masse weiter. Die beiden Massen gaben gewissermaßen ihre Rolle getauscht.

*Dieser Grenzfall, aber auch die Fälle  $m_1 = 2m_2, m_2 = 2m_1$  werden auf der Luftkissenbahn vorgeführt.*

Für  $m_1 = 2m_2$  (schwerer Wagen auf leichten) gilt dabei:

$$p'_2 = \frac{4}{3}p_1 \quad v'_2 = \frac{2}{3}v_1 \quad p'_1 = -\frac{1}{3}p_1 \quad v'_1 = -\frac{1}{3}v_1$$

Für  $2m_1 = m_2$  (leichter Wagen auf schweren) gilt:

$$p'_2 = \frac{4}{3}p_1 \quad v'_2 = \frac{2}{3}v_1 \quad p'_1 = -\frac{1}{3}p_1 \quad v'_1 = -\frac{1}{3}v_1$$

**Allgemeiner elastischer Stoß, Massen  $m_1, m_2$ , Impulse  $p_1, p_2$  (s. Abb. 3.17)**



Abbildung 3.17: *Eindimensionaler elastischer Stoß zwischen zwei Massenpunkten (allgemeiner Fall)*

Wir wollen zunächst **vom Laborsystem in das Schwerpunktsystem** übergehen, in dem der Schwerpunkt der beiden Stoßpartner ruht. Hierzu müssen wir offensichtlich von jeder Geschwindigkeit (d. h. von  $v_1, v'_1, v_2, v'_2$ ) gerade die **Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_s = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$  des Schwerpunkts abziehen**.

Wir wollen die verschiedenen Größen **im Schwerpunktsystem (SPS)** mit einem Index "s" kennzeichnen. Damit erhalten wir:

Impulserhaltung:

$$p_1^s + p_2^s = p_1'^s + p_2'^s = 0. \quad (3.57)$$

Energieerhaltung:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{(p_i^s)^2}{2m_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{(p_i'^s)^2}{2m_i}. \quad (3.58)$$

Aus 3.57 folgt:

$$p_1^s = -p_2^s \quad \text{und} \quad p_1'^s = -p_2'^s. \quad (3.59)$$

Mit 3.58 folgt weiter, wenn wir hier  $p_1^s = -p_2^s$  und  $p_1'^s = -p_2'^s$  einsetzen:

$$p_1^s = \pm p_1'^s \quad \text{und} \quad p_2^s = \pm p_2'^s. \quad (3.60)$$

Hierbei bedeutet das Vorzeichen "+" wiederum, dass keine Wechselwirkung stattfand.

Im anderen Fall sehen wir, dass alle Impulse gleichen Betrag haben, wobei die Impulse der einlaufenden wie der auslaufenden Teilchen gegeneinander gerichtet sind.

Für die Geschwindigkeiten im SPS gilt dann:  $v_1^s = -v_1'^s$  und  $v_2^s = -v_2'^s$ .

Wir übertragen jetzt dieses Ergebnis **vom Schwerpunktsystem auf das Laborsystem**. Hierzu müssen wir zu jeder der Geschwindigkeiten des SPS (d. h.  $v_1^s, v_2^s, v_1'^s, v_2'^s$ ) die **Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_s$  des Schwerpunkts** wieder **hinzuaddieren**.

Wir erhalten:  $v_1' = v_1'^s + v_s = -v_1^s + v_s = -(v_1 - v_s) + v_s = 2v_s - v_1$ .

Hierbei haben wir zunächst das Ergebnis  $v_1'^s = -v_1^s$  dann  $v_1^s = v_1 - v_s$  benutzt.

Wir erhalten schließlich:

$$\begin{aligned} v'_1 &= 2v_s - v_1 = 2\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_1 = \frac{2m_1v_1 + 2m_2v_2 - m_1v_1 - m_2v_1}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 3m_2v_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Ganz analog erhält man:

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 3m_1v_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.62)$$

Damit konnten wir durch die Transformation Laborsystem  $\rightarrow$  Schwerpunktsystem, lösen der Gleichungen im Schwerpunktsystem und anschließende Rücktransformation ins Laborsystem sehr leicht die resultierenden Impulse und Geschwindigkeiten im Laborsystem bestimmen. Wir hätten selbstverständlich Impuls- und Energieerhaltung direkt im Laborsystem erhalten können. Die entsprechenden Rechnungen wären aber wesentlich aufwändiger gewesen.

Wir behandeln jetzt den

**Vollkommen inelastischen Stoß zwischen zwei Massenpunkten  $m_1$  und  $m_2$  (s. Abb. 3.18)**

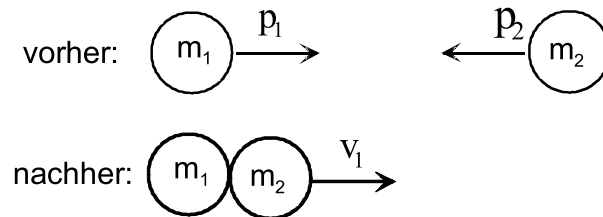


Abbildung 3.18: *Vollkommen inelastischer Stoß zwischen zwei Massenpunkten*

Beim vollkommen inelastischen Stoß bewegen sich die beiden Massen nach dem Stoß gemeinsam mit der Geschwindigkeit  $v'_1 = v'_2 = v'$ . Nach wie vor gilt die Impulserhaltung:  $p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$

Wir haben damit  $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v'$ :

oder:

$$v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.63)$$

was genau der Ausdruck für die Schwerpunktschwindigkeit ist. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da sich ja die beiden Massen nach dem Stoß zusammen bewegen. Speziell gilt im Schwerpunktsystem:  $v' = 0$ , d. h. die beiden Massen fliegen mit entgegengesetztem Impuls aufeinander zu und ruhen dann.

Auf der Luftkissenbahn demonstrieren wir diese Effekte mit Massen  $m_1 = m_2$ , sowie  $m_1 = 2m_2$  und  $m_2 = 2m_1$ .

Für die kinetischen Energien gilt im Schwerpunktsystem:

vor dem Stoß:

$$E_{kin}^s = \frac{(p_1^s)^2}{2m_1} + \frac{(p_2^s)^2}{2m_2} = (p_1^s)^2 \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) = \frac{(p_1^s)^2}{2\mu} \quad (3.64)$$

nach dem Stoß:

$$E_{kin}^{\prime s} = 0 \quad (3.65)$$

Im Schwerpunktsystem geht also die gesamte kinetische Energie verloren.

Im Laborsystem, mit  $p_2 = 0$  gilt:

vor dem Stoß:

$$E_{kin} = \frac{p_1^2}{2m_1} \quad (3.66)$$

nach dem Stoß:

$$E_{kin}' = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} = \frac{p_s^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{p_1^2}{2(m_1 + m_2)} \quad (3.67)$$

Die Differenz der beiden Energien geht verloren. Für  $m_1 = m_2$  ist das gerade 50% von  $E_{kin}$ . Für  $m_1 \gg m_2$  erhalten wir  $E_{kin}' = E_{kin}$ , d. h. praktisch keinen Verlust an kinetischer Energie. Für  $m_2 = m_1$  ist  $E_{kin}' \approx \frac{m_1}{m_2} E_{kin} \approx 0$ , d. h. wir erhalten einen praktisch vollständigen Verlust der kinetischen Energie. Die beiden letzten Grenzfälle entsprechen der Situation eines fahrenden Autos, das eine ruhende Fliege prallt, bzw. der Situation eines ruhenden Autos, gegen das eine Fliege prallt. Im ersten Fall erwarten wir keine Änderung der kinetischen Energie des Autos, im zweiten Fall dagegen den vollständigen Verlust der kinetischen Energie (und nicht nur der Energie!) der Fliege.

Die Gesetze des vollkommen inelastischen Stoßes wenden wir nun an beim **ballistischen Pendel**, das in Abb. 3.19 schematisch dargestellt ist.

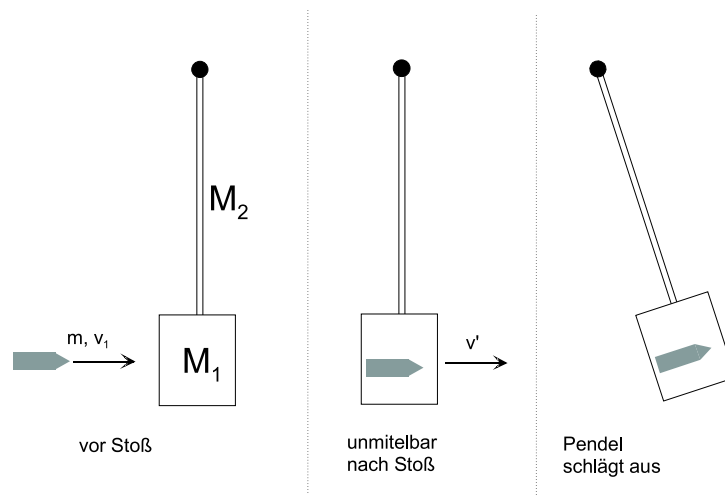


Abbildung 3.19: *Das ballistische Pendel*

Das ballistische Pendel dient zur **Bestimmung von Geschossgeschwindigkeiten**.

Es besteht wie in Abb. 3.19 angedeutet aus einem Stab (Masse  $M_S = 358$  g, Stablänge  $l_{Stab} = 94.5$  cm) und einem würfelförmigen Ende (Masse  $M_W = 581$  g, Kantenlänge  $d = 9.5$  cm). Die Gesamtmasse des Pendels ist  $M_P = M_s + M_W = 939$  g.

Ein Geschoss (Masse  $m = 1.0$  g, Geschwindigkeit  $v_1$ ) trifft auf das ruhende Pendel und bleibt darin stecken.

Die Impulserhaltung ergibt für diesen Vorgang:

$$p_{geschoss} = (m + M_P)v' \quad (3.68)$$

bzw. mit  $p_{geschoss} = mv_1$ :

$$v' = \frac{m}{m + M_P}v_1. \quad (3.69)$$

Die kinetische Energie kurz nach dem Aufschlag (d. h. nachdem das Geschoss steckengeblieben ist, sich aber das Pendel noch nicht wesentlich bewegt hat) beträgt:

$$E'_{kin} = \frac{1}{2}(m + M_P) \cdot v'^2 = \frac{1}{2}(m + M_P) \frac{m^2}{(m + M_P)^2} v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2}{m + M_P} v_1^2 \quad (3.70)$$

Jetzt schlägt das Pendel aus. Bei vernachlässigbarer Reibung kommt das Pendel zur Ruhe, sobald die anfängliche kinetische Energie in die potentielle Energie im Schwerfeld der Erde umgewandelt ist. Entscheidend ist hierbei das "Anheben" des Schwerpunkts.

Hierbei gilt:

$$(m + M_P) \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} E'_{kin} \quad (3.71)$$

wobei  $h$  die Höhe sei, um die der Schwerpunkt angehoben wurde. Damit ergibt sich die Geschwindigkeit der Kugel aus:

$$(m + M_P) \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} E'_{kin} = \frac{1}{2} \frac{m^2}{m + M_P} v_1^2 \quad (3.72)$$

oder:

$$v_1 = \frac{M_P + m}{m} \sqrt{2gh}. \quad (3.73)$$

Im Experiment wird allerdings nicht die Höhe  $h$  direkt gemessen, sondern der Ausschlag  $\Delta x$  parallel zur Erdoberfläche, der an einem am unteren Ende des Pendels angebrachten Zeiger (Abstand  $l_{ges} = 1,12$  m von der Stehachse zur Zeigerspitze) abgelesen wird. Im Experiment ergibt sich  $\Delta x = 13$  cm. Wir müssen jetzt zum einen  $\Delta x$  in Verbindung mit  $h$  bringen und zum andern die Position des Schwerpunkts ermitteln.

Zur Lösung des ersten Problems betrachten wir Abb. 3.20.

Abb. 3.20(a) entnimmt man, dass für kleine Auslenkwinkel  $\varphi \approx \Delta x / l_{ges}$  ist. Der Schwerpunkt befinde sich nun in einem Abstand  $l_s$  von der Drehachse. Bei Auslenkung um den Winkel  $\varphi$  ist  $h$  gerade gegeben durch  $h = l_s - l_s \cos \varphi = l_s(1 - \cos \varphi) \approx l_s(1 - 1 + \varphi^2/2) = l_s \varphi^2/2$ .

Damit erhalten wir:

$$v_1 = \frac{M_P + m}{m} \sqrt{2gh} \approx \frac{M_P}{m} \sqrt{2gl_s \varphi^2/2} = \frac{M_P}{m} \cdot \varphi \cdot \sqrt{gl_s} = \frac{M_P}{m} \frac{\Delta x}{l_{ges}} \cdot \sqrt{gl_s}. \quad (3.74)$$

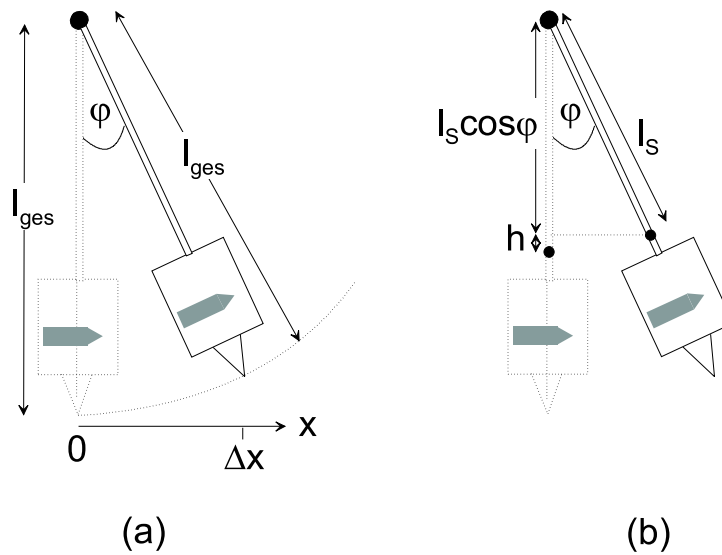


Abbildung 3.20: Zur Auslenkung des ballistischen Pendels

Nun müssen wir den Abstand  $l_s$  des Schwerpunkts vom Drehzentrum bestimmen. Allgemein gilt für den Schwerpunkt:

$$\vec{R}_s = \frac{\iiint \rho \cdot \vec{r} \cdot dV}{M_p} \quad (3.75)$$

Wir legen den Koordinatenursprung in das Drehzentrum und schreiben die Massendichte  $r$  als Summe über die Massendichte des Stabes  $r_S$  und der Massendichte  $r_W$  des unteren würfelförmigen Teil des Pendels,  $\rho = \rho_S + \rho_W$ . Die z-Koordinate zeige vom Drehzentrum zur Pendelspitze. Wir erhalten dann:

$$\vec{R}_s = \frac{\iiint (\rho_S + \rho_W) \cdot \vec{r} \cdot dV}{M_p} = \frac{\iiint \rho_S \cdot \vec{r} \cdot dV + \iiint \rho_W \cdot \vec{r} \cdot dV}{M_p} \quad (3.76)$$

Das Integral über  $r_S$  liefert aus Symmetriegründen gerade  $M_S \cdot \frac{l_{stab}}{2} \cdot \vec{e}_z$ . Beim zweiten Integral müssen wir über den Würfel integrieren, wobei die z-Koordinate von  $l_{Stab}$  bis  $l_{Stab} + d$  läuft. Diese Integral ergibt wiederum aus Symmetriegründen  $M_W \cdot (l_{Stab} + \frac{d}{2}) \cdot \vec{e}_z$ . Hiermit finden wir dass der Schwerpunkt bei

$$l_s = \frac{M_S \cdot \frac{l_{stab}}{2} + M_W \cdot (l_{Stab} + \frac{d}{2})}{M_S + M_W} \quad (3.77)$$

liegt.

Einsetzen der Zahlenwerte liefert  $l_s = 79$  cm.

Setzt man alle Größen in  $v_1 \approx \frac{M_P}{m} \cdot \frac{\Delta x}{l_{ges}} \cdot \sqrt{gl_S}$  ein, so erhält man  $v_1 \approx 304$  m/s, was im Rahmen des Messfehlers mit dem direkt gemessenen Wert von 292 m/s (vgl. Einleitung) gut übereinstimmt.

### 3.3.3 Nicht-zentrale Stöße

Wir wenden uns nun Stößen in 3 Dimensionen zu. Auch hier wollen wir konsequent von der Impuls- und Energieerhaltung Gebrauch machen.

Impulserhaltung:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (3.78)$$

Energieerhaltung:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_1} + Q \quad (3.79)$$

Hierbei haben wir die Änderung der kinetischen Energie mit  $Q$  bezeichnet. Es entspricht:

$Q = 0$  elastischer Stoß

$Q \neq 0$ : inelastischer Stoß mit

$Q > 0$ : "endothermer" Stoß (d. h. kinetische Energie geht in innere Energie über)

$Q < 0$ : "exothermer" Stoß (d. h. innere Energie geht in kinetische Energie über)

Die Energie- und Impulserhaltung stellen jetzt ein System von 4 Gleichungen dar. Dem stehen die 6 Variablen  $\vec{p}_1'$  und  $\vec{p}_2'$  gegenüber, die i. allg. unbekannt sind. Es bleiben also zwei Variablen unbestimmt. Eine der Variablen kann beispielsweise der Streuwinkel  $\varphi$  bzw. der Stoßparameter  $b$  sein. Es bleibt dann noch eine freie Variable. Wir hatten bislang noch nicht berücksichtigt, dass die Vektoren  $\vec{p}_1'$  und  $\vec{p}_2'$  i. allg. nicht in der gleichen Ebene liegen müssen wie die Vektoren  $\vec{p}_1$  und  $\vec{p}_2$ . Die letzte freie Variable kann also der Winkel sein, um den  $\vec{p}_1'$  und  $\vec{p}_2'$  aus der durch  $\vec{p}_1$  und  $\vec{p}_2$  aufgespannten Ebene herausgedreht sind. In einigen Bezugssystemen findet aber der Stoß in einer Ebene statt. Dies gilt speziell, wenn Körper 2 ruht. Dann spannen die Vektoren  $\vec{p}_1'$  und  $\vec{p}_2'$  eine Ebene auf, in der auch  $\vec{p}_1$  liegt. Im Schwerpunktsystem ist  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$  und  $\vec{p}_1' = -\vec{p}_2'$ . Auch hier sind damit alle Vektoren in einer Ebene; allerdings werden  $\vec{p}_1$  und  $\vec{p}_1'$  um einen Winkel  $\varphi_1'$  gegeneinander verdreht sein.

Bevor wir uns einigen speziellen Stößen zuwenden, wollen wir zunächst betrachten, wie sich die Energie  $Q$  beim Übergang vom Laborsystem zum Schwerpunktsystem ändert. Dort sei  $Q^s$  die Differenz der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß.

Wir haben also im Laborsystem:

Impulserhaltung:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (3.80)$$

Energieerhaltung:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \quad (3.81)$$

und im Schwerpunktsystem:

Impulserhaltung:

$$\vec{p}_1^s + \vec{p}_2^s = \vec{p}_1'^s + \vec{p}_2'^s \quad (3.82)$$

Energieerhaltung:

$$\frac{(\vec{p}_1^s)^2}{2m_1} + \frac{(\vec{p}_2^s)^2}{2m_2} = \frac{(\vec{p}_1'^s)^2}{2m_1} + \frac{(\vec{p}_2'^s)^2}{2m_2} + Q^s. \quad (3.83)$$



Wir lösen nach  $Q$  auf:

$$Q = \frac{p_1^2 - p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2^2 - p_2'^2}{2m_2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i (\vec{v}_i^2 - \vec{v}_i'^2) \quad (3.84)$$

Mit  $\vec{v}_i = \vec{v}_i^s + \vec{v}_s$ ,  $\vec{v}_i' = \vec{v}_i'^s + \vec{v}_s$  ergibt sich:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i [(\vec{v}_i^s - \vec{v}_s)^2 - (\vec{v}_i'^s - \vec{v}_s)^2] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i [(\vec{v}_i^s)^2 - (\vec{v}_i'^s)^2] - \sum_{i=1}^2 m_i (\vec{v}_i^s - \vec{v}_i'^s) \vec{v}_s \quad (3.85)$$

Nun ist  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i [(\vec{v}_i^s)^2 - (\vec{v}_i'^s)^2] = Q^S$ , während die zweite Summe  $\sum_{i=1}^2 m_i (\vec{v}_i^s - \vec{v}_i'^s) \vec{v}_s$  verschwindet, da sich die Summanden paarweise aufheben ( $\vec{p}_1^s = -\vec{p}_2^s$ ;  $\vec{p}_1'^s = -\vec{p}_2'^s$ ).

Also ist  $Q = Q^S$ , d. h. die "Wärmetönung" hängt nicht vom Bezugssystem ab, wie auch zu vermuten war.

Weiter liefert die Energieerhaltung im Schwerpunktsystem zusammen mit  $\vec{p}_1^s + \vec{p}_2^s = \vec{p}_1'^s + \vec{p}_2'^s$ :

$$\frac{(\vec{p}_1^s)^2}{2m_1} + \frac{(-\vec{p}_1^s)^2}{2m_2} = \frac{(\vec{p}_1'^s)^2}{2m_1} + \frac{(\vec{p}_2'^s)^2}{2m_2} + Q \quad (3.86)$$

oder:

$$\frac{(\vec{p}_1^s)^2}{2\mu} = \frac{(\vec{p}_1'^s)^2}{2\mu} + Q; \quad \mu: \text{reduzierte Masse} \quad (3.87)$$

Hieraus folgt:

$$p_i'^s = \sqrt{(p_i^s)^2 - 2\mu Q} \quad (i = 1, 2) \quad (3.88)$$

Für  $Q = 0$  sind die Beträge aller Impulse gleich, für  $Q > 0$  ( $Q < 0$ ) sind die Impulsbeträge nach dem Stoß kleiner (größer) als die vor dem Stoß. Dies ist in Abb. 3.21 dargestellt.

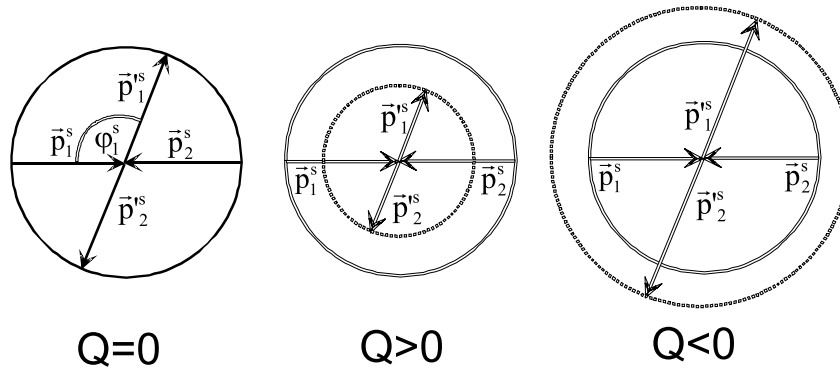


Abbildung 3.21: Impulse vor und nach dem Stoß im Schwerpunktsystem

Betrachten wir nun einige spezielle Stoßprozesse.

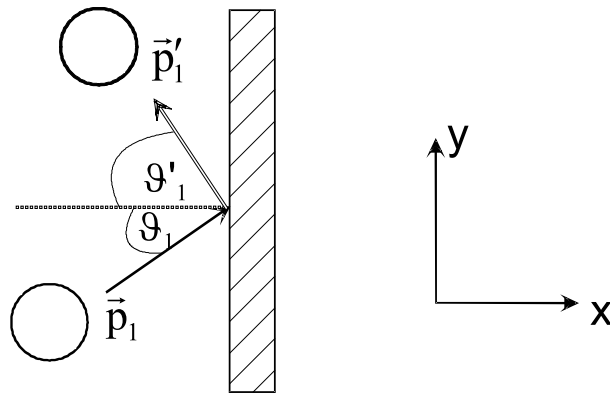


Abbildung 3.22: Nicht-zentraler Stoß mit einer Wand

### Stoß mit einer Wand

Der Stoß laufe in der  $(x,y)$ -Ebene ab. Dann ist:

$$\vec{p}_1 = p_1 \begin{pmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.89) \quad \text{und} \quad \vec{p}'_1 = p_1 \begin{pmatrix} -\cos \vartheta'_1 \\ \sin \vartheta'_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

Beim elastischen Stoß bleibt der Betrag des Impulses erhalten,  $p_1 = p'_1$ . Wenn wir weiter annehmen, dass beim Stoß die Bewegung *parallel* zur Wand kräftefrei ist, so haben wir  $\sin \vartheta_1 = \sin \vartheta'_1$  bzw.  $\vartheta_1 = \vartheta'_1$ . Die  $x$ -Komponente kehrt damit wie beim zentralen Stoß ihr Vorzeichen um (Reflexion an der Wand). Andernfalls sind beliebige Streuwinkel  $\vartheta'_1$  möglich; erst durch die konkrete Angabe der Wechselwirkung kann  $\vartheta'_1$  bestimmt werden. Umgekehrt kann die Messung von  $\vec{p}'_1$  Rückschlüsse über die Kräfte zwischen Wand und Kugel erlauben.

### Nichtzentraler Stoß zwischen zwei Kugeln, $m_2 \rightarrow \infty$ .

Falls wie beim elastischen Stoß mit der Wand wiederum die Impulskomponente in Richtung der Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpunkte beim Stoß ihre Richtung umkehrt, erhalten wir  $\vartheta_1 = \vartheta'_1$ . Die Kugel 2 bleibt auf Grund ihrer unendlichen Masse in Ruhe.

### Elastischer Stoß gleicher Massen im Laborsystem

Wir betrachten den Stoß im Laborsystem, in dem Masse 2 ruht.

Impulserhaltung:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad (3.91)$$

Energieerhaltung:

$$\frac{p_1^2}{2m} = \frac{p_1'^2}{2m} + \frac{p_2'^2}{2m} \quad (3.92)$$

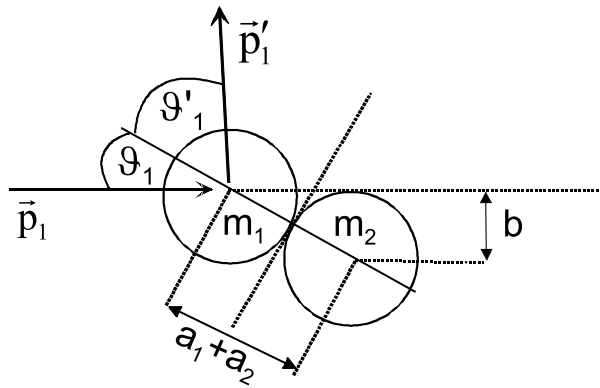


Abbildung 3.23: Nichtzentraler Stoß zwischen zwei Kugeln (Kugel 1: Masse  $m_1$ , Radius  $a_1$ , Impuls  $\vec{p}_1$ ; Kugel 2: Masse  $m_2 \rightarrow \infty$ , Radius  $a_1$ , Impuls  $\vec{p}_2 = 0$ ) im Moment des Zusammenstoßes

Wir quadrieren 3.91:

$$p_1^2 = (\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2)^2 = \vec{p}'_1{}^2 + \vec{p}'_2{}^2 + 2\vec{p}'_1\vec{p}'_2 \quad (3.93)$$

und setzen in 3.92  $\cdot 2m$  ein:

$$\vec{p}'_1{}^2 + \vec{p}'_2{}^2 + 2\vec{p}'_1\vec{p}'_2 = \vec{p}_1{}^2 + \vec{p}_2{}^2. \quad (3.94)$$

Hieraus folgt

$$2\vec{p}'_1\vec{p}'_2 = p'_1 p'_2 \cos \varphi = 0 \quad (3.95)$$

mit den Lösungen:  $\cos \varphi = 0$  oder  $p'_1 = 0$  oder  $p'_2 = 0$ .

Interessant ist insbesondere die Lösung  $\cos \varphi = 0$ . Sie bedeutet, dass die **beiden Teilchen nach dem Stoß im rechten Winkel** auseinanderfliegen. Diese Lösung tritt ein, wenn die Teilchen nicht zentral aufeinandertreffen. Abb. 3.24 zeigt dies für den Stoß von Billiardkugeln, sowie für den Stoß zwischen zwei Protonen. Beim zentralen Stoß gilt die zweite Lösung  $p'_1 = 0$  (Masse 1 bleibt stehen, Masse 2 bewegt sich weiter); Lösung 3 schließlich bedeutet, dass keine Wechselwirkung stattgefunden hat.

Im Experiment demonstrieren wir den nicht-zentralen Stoß gleicher Massen an Hand einer Kugel, die von einer Schanze herunterläuft und mit variierbarem Stoßparameter eine ruhende Kugel trifft. Außer beim zentralen Stoß fliegen die Kugeln im rechten Winkel auseinander. Alle Kugeln liegen anschließend auf einem Kreis, wie in Abb. 3.25 angedeutet.

Im Schwerpunktsystem sind die Impulsbeträge der beiden Stoßpartner vor und nach dem Stoß gleich  $\frac{v_1}{2}$ . Da die beiden Körper gleiche Masse haben, sind auch die Beträge aller Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem gleich ( $= \frac{v_1}{2}$ ). Dies ist in Abb. 3.26 (links) dargestellt. Alle Geschwindigkeitsvektoren liegen auf einem Kreis mit Radius  $\frac{v_1}{2}$ . Um ins Laborsystem zurückzukehren müssen wir zu jeder Geschwindigkeit die Schwerpunkts-geschwindigkeit (Ebenfalls gleich  $\frac{v_1}{2}$ ) addieren. Wir erhalten das rechte Diagramm der Abb. 3.26.

Beim Fall von der Schanze ist die Fallzeit für alle Kugeln gleich ( $t_{fall} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ). Sie legen dann in der (x,y)-Ebene vom Schanztisch gerechnet den Weg  $(x, y) = (v_x, v_y) \cdot t_{fall}$  zurück, so dass die Aufschlagpunkte gerade die Verteilung der Stossgeschwindigkeiten im Laborsystem abbilden.

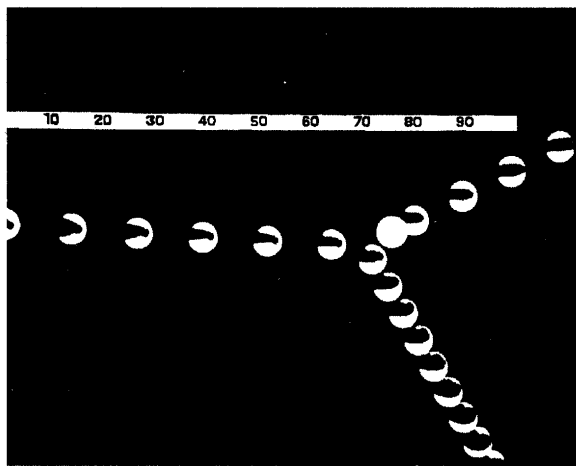
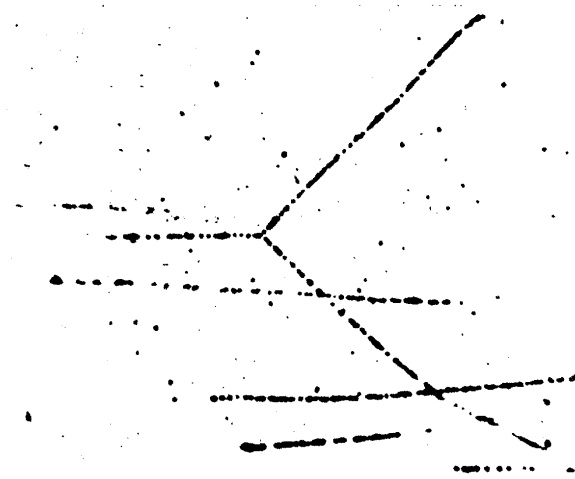


Abbildung 3.24: *Elastischer Stoß zwischen zwei Protonen (oben) bzw. zwischen zwei Billiard-Kugeln (unten) [aus: Dransfeld/Kienle/Kalvius, Physik I, S. 139].*

### Elastischer Stoß im Schwerpunktsystem: Streuwinkel und Stoßparameter

Abb. 3.27 skizziert den elastischen Stoß zweier Massen im Schwerpunktsystem. Nehmen wir wiederum an, dass sich die Bewegung parallel zur Verbindungslinie der beiden Massen kräftefrei ist, ergibt sich wiederum  $\vartheta_1 = \vartheta'_1$ .

Wir wollen hier unsere Ausführungen über Stöße zwischen zwei Körpern beenden. Weitere Zusammenhänge wie etwa die Umrechnung von Streuwinkeln im Schwerpunktsystem in die Streuwinkel im Laborsystem oder der Zusammenhang zwischen Streuwinkel und Stoßparameter werden in Übungsaufgaben behandelt. Es sei aber nochmals darauf hingewiesen, dass insbesondere die Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Streuwinkel und Stoßparameter, aber auch die Bestimmung von  $Q$  die Angabe der Kräfte zwischen den Stoßpartnern (bzw. die Lösung der entsprechenden Bewegungsgleichungen) erfordert. Im System der Relativkoordinaten ( $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ) ist dies aber äquivalent zur Lösung des

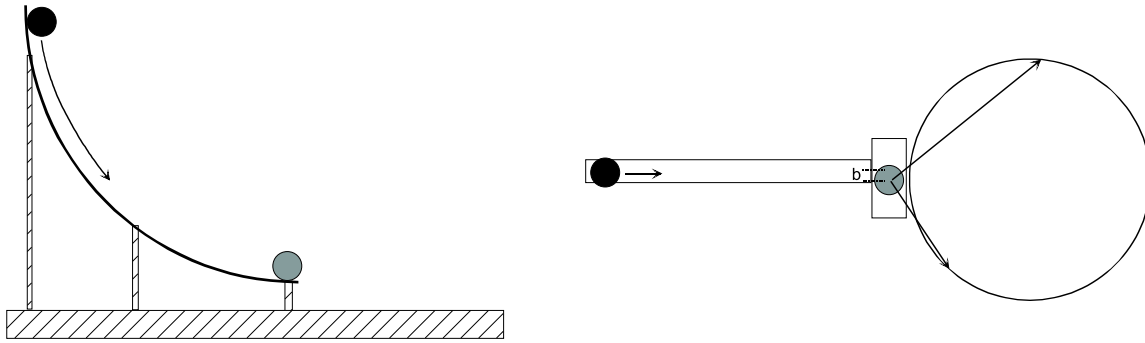


Abbildung 3.25: Nichtzentraler elastischer Stoß zweier Kugeln gleicher Masse. Links: Seitenansicht des Versuchsaufbaus; rechts: Aufsicht.

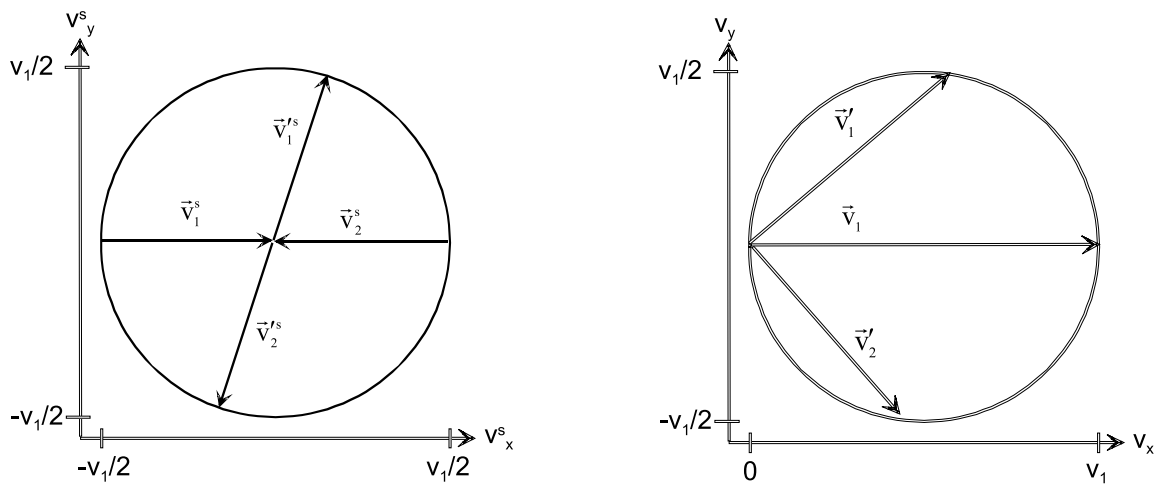


Abbildung 3.26: Geschwindigkeiten der Stoßpartner vor und nach dem Stoß: links: Schwerpunktsystem; rechts: Laborsystem

entsprechenden Einkörperproblems<sup>9</sup>. Es sei im Einkörperproblem  $\vec{r}_1$  der Radiusvektor,  $m_1$  die Masse. Man erhält dann als Lösung den Vektor  $\vec{r}_1(t)$ , der auch von  $m_1$  abhängen kann. Wir ersetzen dann  $\vec{r}_1(t)$  durch  $\vec{r}(t)$  und  $m_1$  durch  $\mu$ . Vom Schwerpunkt aus bewegen sich die beiden Massen mit den Vektoren  $\vec{r}_1^s(t) = -\frac{m_2}{m_1}\vec{r}(t)$  und  $\vec{r}_2^s(t) = \frac{m_1}{m_2}\vec{r}(t)$ . Addieren wir noch die Bewegung  $\vec{R}(t)$  des Schwerpunkts, so haben wir die Bewegung der beiden Massen vollständig charakterisiert.

<sup>9</sup>Eine entsprechende Methode zur Behandlung von mehr als zwei Körpern existiert leider nicht.

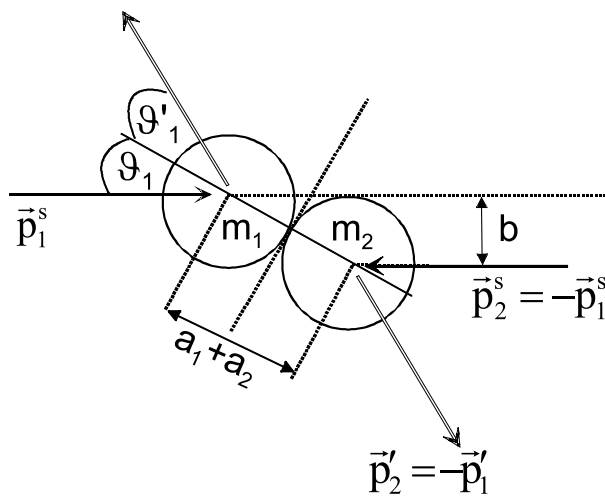


Abbildung 3.27: *Stoß zweier Massen im Schwerpunktsystem*

### 3.4 Der Virialsatz

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch den Virialsatz formulieren und beweisen. Der Virialsatz findet Anwendung bei einem System von Massenpunkten (natürlich auch bei einem einzelnen Massenpunkt), die sich in einem Kraftfeld bewegen. Dabei ist es egal, ob dieses Kraftfeld auf gegenseitige Wechselwirkungen oder auf ein externes Kraftfeld basiert. Die Kräfte  $\vec{F}_i$  sollen die Massenpunkte (mit Massen  $m_i$  und Ortsvektoren  $\vec{r}_i$ ) in einem endlichen Volumen zusammenhalten. Nach dem Virialsatz gilt dann für den zeitlichen Mittelwert der kinetischen Energie des Systems  $T$

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i}$$

Der zeitliche Mittelwert einer zeitabhängigen Größe  $A(t)$  ist dabei definiert durch

$$\bar{A} := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau A(t) dt.$$

Zum Beweis des Virialsatzes betrachten wir das Produkt aus den Impulsen und den Ortsvektoren der einzelnen Teilchen, summiert über alle Teilchen

$$G = \sum_i \vec{p}_i \vec{r}_i.$$

Bildet man die Ableitung dieser Größe nach der Zeit  $t$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \sum_i \dot{\vec{p}}_i \vec{r}_i + \sum_i \vec{p}_i \dot{\vec{r}}_i \\ &= \sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i + \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \\ &= \sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i + 2T \end{aligned} \tag{3.96}$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile haben wir die Newtonsche Bewegungsgleichung ausgenutzt und die Zeitableitung des Impulses  $\vec{p}_i$  durch die wirkende Kraft ersetzt. Berechnet man den Mittelwert dieser Zeitableitung

$$\begin{aligned}\overline{\frac{dG}{dt}} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)] \\ &= 0.\end{aligned}\tag{3.97}$$

Dieser Ausdruck ist null, da nach Voraussetzung die Ortsvektoren  $\vec{r}_i$  und damit auch die Impulsvektoren  $\vec{p}_i$  endlich sind, so dass auch  $G(t)$  für alle Zeiten endliche Werte annimmt. Aus (3.96) und (3.97) folgt

$$\overline{\frac{dG}{dt}} = \overline{\sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i} + 2\overline{T} = 0$$

und damit der Virialsatz (3.4).

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir die Bewegung eines Teilchens in einem konservativen Zentralfeld, das durch ein Potenzial der Form

$$V(r) = \alpha r^{n+1},$$

gegeben ist. Dies ergibt eine Kraft der Form

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -(n+1)\alpha r^{n-1}\vec{r}$$

und es ergibt sich nach dem Virialsatz

$$\overline{T} = \frac{n+1}{2} \overline{\alpha r^{n+1}} = \frac{n+1}{2} \overline{V}.$$

Im Falle des Potenzials eines Harmonischen Oszillators ( $n = 1$ ) ergibt sich also

$$\overline{T} = \overline{V}$$

während z.B. im Fall des Coulomb oder Gravitations - Potenzial ( $n = -2$ ) gilt

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{V}.$$





# Kapitel 4

## Rotationen

### 4.1 Drehung eines Koordinatensystems

In diesem Kapitel soll untersucht werden, welchen Einfluss ein rotierendes Koordinatensystem auf die Beschreibung von Bewegungen hat. Jedes Koordinatensystem, das z.B. im Bezug zur Erde fixiert ist, unterliegt einer solchen Rotation, da sich ja die Erde mit einer Geschwindigkeit von  $\omega$  gleich  $2\pi$  pro Tag um ihre Rotationsachse dreht. In einem ersten Schritt wird in diesem Abschnitt behandelt, wie man mathematisch die Rotation eines Vektors beschreiben kann. Dazu betrachten wir einen Vektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 + c\hat{e}_3,$$

den wir in einem kartesischen Koordinatensystem ( $\hat{e}_1$  bezeichnet dabei den Einheitsvektor in  $x$  Richtung,  $\hat{e}_2$  in  $y$  und  $\hat{e}_3$  in  $z$ -Richtung) mit den Koordinaten  $a$ ,  $b$  und  $c$  eindeutig festlegen. Wir wollen uns nun ansehen, wie der gleiche Vektor  $\vec{r}$  in einem Koordinatensystem beschrieben wird, das den gleichen Koordinatenursprung besitzt aber relativ zum ursprünglichen Koordinatensystem gedreht ist.

Als erstes Beispiel betrachten wir den Fall, dass das gedrehte Koordinatensystem durch eine Drehung um die  $z$ -Achse um einen Winkel  $\alpha$  aus dem ursprünglichen Koordinatensystem hervorgeht. Zur Definition einer solchen Drehung benutzen wir die sogenannte "rechte-Hand-Regel". Diese besagt: Positioniere deine rechte Hand so, dass der ausgestreckte Daumen parallel zur Drehachse steht (also in unserem Beispiel parallel zur  $z$ -Achse). Die leicht gekrümmten Finger dieser Hand zeigen dann an, in welche Richtung die  $x$ - und  $y$ -Achse gedreht werden. Bei einer solchen Drehung um die  $z$ -Achse behält also die  $z$ -Achse ihre Richtung. Die Richtungen der  $x$ - und  $y$ -Achse wird bei einer Drehung um den Winkel  $\alpha$  so gedreht, wie das in Abb. 4.1 dargestellt ist.

Als erstes sehen wir uns an, wie der Vektor  $a\hat{e}_1$  in der neuen Basis dargestellt wird. Aus der Abbildung 4.1 wird deutlich, dass die Projektion von  $a\hat{e}_1$  auf die "neue"  $x$ -Achse eine Koordinate  $a \cos \alpha$  ergibt, während die Projektion auf die neue  $y$ -Achse, in der Abbildung mit  $y'$  bezeichnet den Wert  $-a \sin \alpha$  liefert. In dem gedrehten Koordinatensystem wird

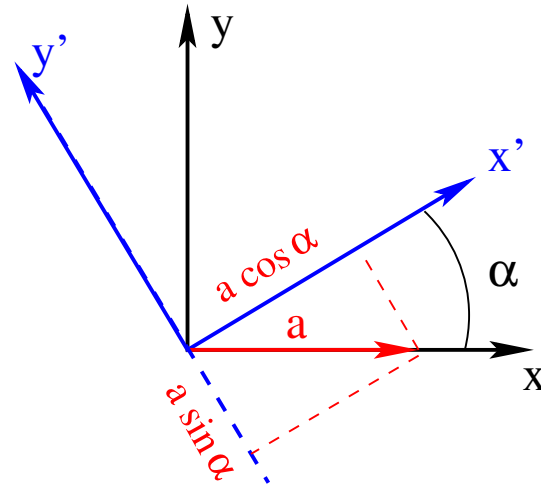


Abbildung 4.1: Drehung des Koordinatensystems um die  $z$ -Achse um einen Winkel  $\alpha$ . Die  $z$ -Achse steht senkrecht zur Darstellungsebene und zwar so, dass sie aus der Ebene in Richtung des Betrachters zeigt.

also

$$a\hat{e}_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Drehung}} a\hat{e}'_1 = \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ -a \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Drehung}} \hat{e}'_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bei dem Vektor  $\hat{e}'_1$  handelt es sich also um die Darstellung des Vektors  $\hat{e}_1$  im gedrehten Koordinatensystem. Ganz entsprechend gilt für den Einheitsvektor  $\hat{e}_2$  in Richtung der  $y$ -Achse des ursprünglichen Koordinatensystems

$$\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Drehung}} \hat{e}'_2 = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

während die Darstellung von  $\hat{e}_3$  unverändert bleibt

$$\hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Drehung}} \hat{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{e}_3.$$

Mit diesen drei Beziehungen (4.1) - (4.1) und der Darstellung unseres Vektor  $\vec{r}$  aus (4.1) können wir jetzt die Darstellung des Vektors  $\vec{r}$  im gedrehten Koordinatensystem berech-

nen:

$$\begin{aligned}
 \vec{r}' &= a\hat{e}'_1 + b\hat{e}'_2 + c\hat{e}'_3 \\
 &= a \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a \cos \alpha & +b \sin \alpha & +0 \\ -a \sin \alpha & +b \cos \alpha & +0 \\ 0 & +0 & +c \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

In der letzten Zeile dieser Gleichung haben wir eine neue Schreibweise eingeführt, der Spaltenvektor  $\vec{r}'$  wird hier multipliziert mit einer Matrix aus 3 Zeilen und 3 Spalten, die wir für diesen Fall der Drehung um die  $z$ -Achse um einen Winkel  $\alpha$  mit  $R^z(\alpha)$  bezeichnen wollen. Damit lautet die Gleichung (4.1) in kompakter Form

$$\vec{r}' = R^z(\alpha)\vec{r},$$

mit

$$R^z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allgemein hat eine Matrix  $A$  mit drei Zeilen und drei Spalten, eine  $3 \times 3$  Matrix, also 9 Einträge:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

mit Matrixelementen  $A_{ij}$  in der Zeile  $i$  und der Spalte  $j$ . So ist also das Matrixelement der zweiten Zeile und ersten Spalte von  $R^z(\alpha)$  in (4.1) gegeben durch

$$R_{21}^z(\alpha) = -\sin(\alpha).$$

Bezeichnen wir mit  $r'_i$  und  $r_j$  die Elemente der Spalten Vektoren  $\vec{r}'$  (beziehungsweise  $\vec{r}$ ) in der  $i$ -ten (beziehungsweise  $j$ -ten Zeile, so ist die Matrixmultiplikation aus (4.1) definiert durch

$$r'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij}^z(\alpha)r_j.$$

Dies bedeutet also z.B. für die erste Zeile unseres Beispiels aus (4.1)

$$r'_1 = R_{11}^z(\alpha)a + R_{12}^z(\alpha)b + R_{13}^z(\alpha)c = a \cos \alpha + b \sin \alpha + c0.$$

Im nächsten Schritt sollen 2 Drehungen hintereinander ausgeführt werden. Beschränken wir uns zunächst wiederum auf Drehungen um die  $z$ -Achse, eine erste Drehung um den Winkel  $\alpha$  führt nach (4.1) zur Darstellung  $\vec{r}'$ . Eine zweite Drehung um den Winkel  $\beta$  erzeugt dann hieraus

$$\vec{r}'' = R^z(\beta)\vec{r}' = R^z(\beta)[R^z(\alpha)\vec{r}].$$

Führen wir dies Matrixoperationen explizit in der Indexschreibweise der (4.1) aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 r''_k &= \sum_i R^z(\beta)_{ki} r'_i \\
 &= \sum_{i,j} R^z(\beta)_{ki} (R^z(\alpha)_{ij} r_j) \\
 &= \sum_j \left[ \sum_i R^z(\beta)_{ki} R^z(\alpha)_{ij} \right] r_j \\
 &= \sum_j X_{kj} r_j. \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Komponenten  $r''_k$  direkt aus den Komponenten des Ausgangsvektors  $r_j$  durch Anwendung der Matrix

$$X_{kj} = \sum_i R^z(\beta)_{ki} R^z(\alpha)_{ij}.$$

Wir definieren entsprechend das Produkt von 2 Matrizen  $A$  und  $B$  als  $C = AB$  mit der Rechenvorschrift

$$C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}.$$

Das Hintereinanderausführen von 2 Drehungen wird dann dargestellt durch das Produkt der beiden zugehörigen Rotationsmatrizen, wobei die Matrix der ersten Drehung rechts von der zweiten geschrieben wird.

Als Beispiel rechnen wir das Matrixelement in der ersten Zeile und ersten Spalte von  $X$  gemäß (4.1) aus zu

$$\begin{aligned}
 X_{11} &= R^z(\beta)_{11} R^z(\alpha)_{11} + R^z(\beta)_{12} R^z(\alpha)_{12} + R^z(\beta)_{13} R^z(\alpha)_{31} \\
 &= \cos(\beta) \cos(\alpha) + \sin(\beta)(-\sin(\alpha)) + 0 \\
 &= \cos(\alpha + \beta). \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

Bei dem Übergang zur letzten Zeile haben wir eine der trigonometrischen Beziehungen ausgenutzt. Entsprechend berechnen sich die anderen Matrixelemente von  $X$ , so dass wir insgesamt für (4.1) erhalten

$$X = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die resultierende Matrix

$$X = R^z(\alpha + \beta)$$

ist also gerade die Matrix für eine Drehung um die  $z$ -Achse mit dem Gesamtwinkel  $\alpha + \beta$ , wie ja zu erwarten war. An der Darstellung in (4.1) kann man sich auch eine geometrische Veranschaulichung der Matrixmultiplikation verdeutlichen: Das Matrixelement  $X_{ij}$ , das ist das Element in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte der Ergebnismatrix, ergibt sich durch die Multiplikation der  $i$ -ten Zeile von  $R^z(\beta)$  mit der  $j$ -ten Spalte von  $R^z(\alpha)$ . Dieses Produkt

einer Zeile mit einer Spalte bedeutet, das das erste Element der Zeile mit dem ersten Element der Spalte multipliziert wird und dazuaddiert wird das Produkt des zweiten Elementes der Zeile mit dem zweiten Element der Spalte plus dem Produkt aus drittem Element der Zeile mit dem dritten Element der Spalte.

Ein Spezialfall dieser Hintereinanderausführung von 2 Drehungen ist der Fall  $\beta = -\alpha$  in (4.1). In diesem Fall ergibt sich

$$R^z(\alpha - \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R^z(-\alpha)R^z(\alpha) = 1.$$

Die Ergebnismatrix mit den Diagonalelementen 1 und nichtdiagonalen Elementen 0 nennt man die "Eins" der Matrixmultiplikation. Wendet man nämlich diese "Eins" Matrix auf einen beliebigen Vektor an, so ergibt sich genau wieder dieser Vektor. Dies entspricht ja genau unserer Vorstellung von den Drehungen: Dreht man das Koordinatensystem um  $\alpha$  um es dann in einem zweiten Schritt um genau diesen Winkel wieder zurückzudrehen, so ist das genau so als hätte man gar nicht gedreht.

Die Matrix  $R^z(-\alpha)$  nennt man auch die zur Matrix  $R^z(\alpha)$  inverse Matrix und schreibt

$$R^z(-\alpha) = (R^z(\alpha))^{-1}$$

Allgemein ist die zu  $A$  inverse Matrix  $A^{-1}$  definiert durch

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1.$$

Ausserdem definieren wir die zu  $A$  transponierte Matrix  $A^t$  durch die Beziehung zwischen den Matrixelementen

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}.$$

Die transponierte Matrix  $A^t$  entsteht also aus der Matrix  $A$  dadurch, dass Zeilen- und Spaltenindices vertauscht sind. Für Matrizen,  $R$ , die Rotationen darstellen gilt

$$R^{-1} = R^t,$$

was man am Beispiel  $R = R^z(\alpha)$  leicht verifizieren kann. Aber Achtung diese Beziehung (4.1) gilt nur für die sogenannten orthogonalen Transformationen, also für die Matrizen, die Rotationen darstellen.

Bisher haben wir uns auf Drehungen um die  $z$ -Achse beschränkt und dabei war es gleichgültig, ob wir erst um den Winkel  $\alpha$  und dann um den Winkel  $\beta$  gedreht haben, oder umgekehrt. Die Ergebnismatrix ist in beiden Fällen gleich

$$R^z(\alpha + \beta) = R^z(\beta)R^z(\alpha) = R^z(\alpha)R^z(\beta).$$

Im allgemeinen gilt aber für die Multiplikation zweier Matrizen

$$AB \neq BA,$$

das Kommutativgesetz gilt nicht für die Matrixmultiplikation. Als Beispiel betrachten wir eine Drehung um die  $z$ -Achse um den Winkel  $\pi/2$

$$R^z(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und eine Drehung um die  $x$ -Achse, ebenfalls um den Winkel  $\pi/2$ , die durch

$$R^x(\pi/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) \\ 0 & -\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Drehen wir unser Koordinatensystem zunächst um die  $x$ -Achse und dann um die  $z$ -Achse ergibt sich

$$R^z(\pi/2)R^x(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies können wir experimentell überprüfen, indem wir ein Koordinatensystem genau diesen Drehungen unterziehen (beachte rechte Hand Regel für die Drehungen). Die Darstellung des ursprünglichen Basisvektors  $\hat{e}^1$  ( $x$ -Richtung im ungedrehten System) im Koordinatensystem nach den Drehungen wird durch die Koordinaten gegeben, die in der ersten Spalte der Matrix von (4.1) zu finden ist. Dieser Basisvektor  $\hat{e}_1$  ist also antiparallel zur  $y$ -Achse des gedrehten Koordinatensystems. Entsprechend zeigt die 2. Spalte der Matrix in (4.1) das der ursprüngliche Basisvektor  $\hat{e}_2$  antiparallel zur  $z$ -Koordinate des gedrehten Systems liegt.

Betrachten wir nun die Drehung des Koordinatensystems, wenn zunächst um die  $z$ -Achse und dann um die  $x$ -Achse gedreht wird, so ergibt sich

$$R^x(\pi/2)R^z(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

eine ganz andere Matrix aber auch ein ganz anders orientiertes Koordinatensystem. Auch hier können wir die Rechnung durch das ‘‘Experiment’’ überprüfen. Insgesamt sieht man also aus dem Vergleich (4.1) und (4.1), dass das Ergebnis von 2 Drehungen im Allgemeinen von der Reihenfolge abhängt, was in der Matrizenrechnung dadurch zum Ausdruck kommt, dass auch das Ergebnis einer Multiplikation von 2 Matrizen von der Reihenfolge abhängt, dass also (4.1) gilt.

Neben der Multiplikation zweier Matrizen (4.1) können wir auch die Addition von 2 Matrizen  $C = A + B$  definieren durch

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij},$$

sowie die Multiplikation mit einer Zahl  $\lambda$ :  $C = \lambda A$ :

$$C_{ij} = \lambda A_{ij}.$$

Es gilt das Distributivgesetz für Matrizen

$$A(B + C) = AB + AC,$$

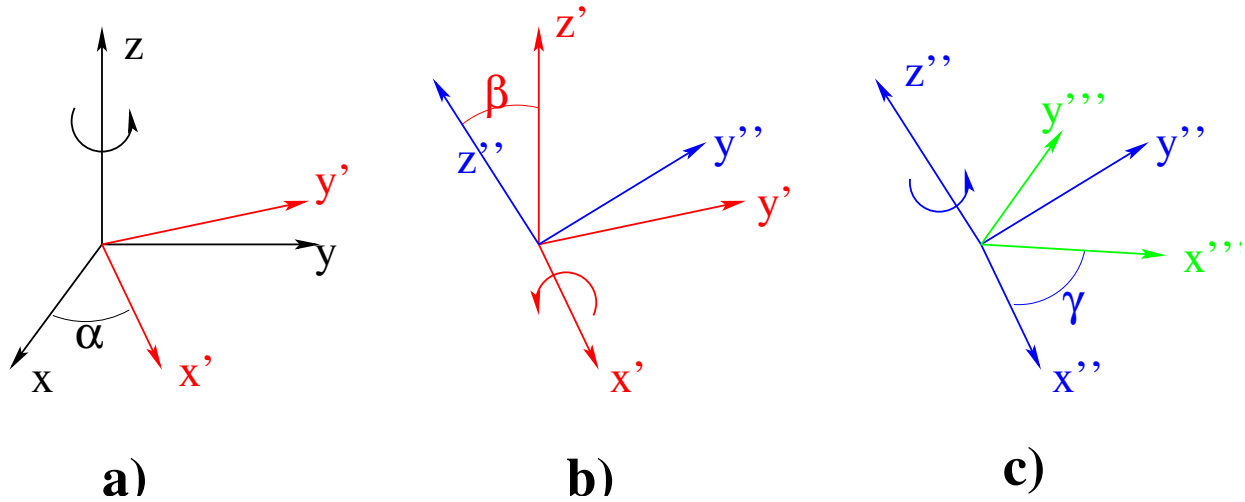


Abbildung 4.2: 3 Schritte zu Drehungen des Koordinatensystems in eine beliebige Orientierung zur Definition der Euler Winkel. Siehe Diskussion im Text.

wie wir leicht durch die folgende Rechnung beweisen können:

$$\begin{aligned}
 (A(B + C))_{ij} &= \sum_k A_{ik}(B + C)_{kj} \\
 &= \sum_k A_{ik}(B_{kj} + C_{kj}) \\
 &= \left( \sum_k A_{ik}B_{kj} \right) + \left( \sum_k A_{ik}C_{kj} \right) \\
 &= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = (AB + AC)_{ij}
 \end{aligned}$$

Kehren wir nun von allgemeinen Rechenregeln für die Matrizenrechnung wieder zu den Rotationen. Wir werden uns nun davon überzeugen, dass eine beliebige Rotation durch 3 Winkel eindeutig charakterisiert werden kann. Dazu wollen wir hier die sogenannten **Euler Winkel** heranziehen. Die 3 Rotationen und zugehörigen Winkel, die vom Ausgangssystem zum gewünschten Endsystem führen, sind in den 3 Teilbildern von Abb. 4.2 dargestellt.

In einem ersten Schritt soll die  $z$ -Achse des Koordinatensystems in ihre endgültige Position gekippt werden. Dazu benötigen wir die Drehung um 2 Winkel: Zunächst eine Drehung um die  $z$ -Achse um einen Winkel  $\alpha$  aus dem Intervall  $[0, 2\pi]$ . Dann eine Drehung um die  $x$ -Achse mit einem Winkel  $\beta$  aus dem Intervall  $[0, \pi]$ . Diese beiden Drehungen sind in den Teilbildern a und b von Abb. 4.2 dargestellt.

Es folgt dann noch eine Drehung um die resultierende  $z$ -Achse (siehe Teilbild c von Abb. 4.2) mit einem Winkel  $\gamma$  aus dem Intervall  $[0, 2\pi]$ . Die Rotationsmatrix, die zu der gesamten Drehung gehört berechnet sich also zu

$$R^{\text{Euler}}(\alpha, \beta, \gamma) = R^z(\gamma)R^x(\beta)R^z(\alpha)$$

Das Ergebnis dieser Matrizenmultiplikationen ist:

$$\begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \cos \beta \sin \alpha & \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \beta \cos \alpha & \sin \gamma \sin \beta \\ -\sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha & -\sin \gamma \sin \alpha + \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha & \cos \gamma \sin \beta \\ \sin \beta \sin \alpha & -\sin \beta \cos \alpha & \cos \beta \end{pmatrix}.$$



## 4.2 Zeitableitung eines Vektors im rotierenden Koordinatensystem

Bisher haben wir uns in unseren Überlegungen auf Koordinatensysteme beschränkt, die wir uns als fest im Raum fixiert vorgestellt haben. Genau genommen gilt dies aber zum Beispiel auch für ein Koordinatensystem, das fest mit der Erde verbunden ist (also eins was wir an die Wandtafel zeichnen), nicht. Ein solches erdfestes Koordinatensystem rotiert mit der Eigenrotation der Erde, so dass die Koordinatenachsen ständig ihre Richtungen ändern, bis auf solch eine, die zufällig parallel zur Drehachse der Erde steht. Beschreibt man die Position eines Teilchens in einem solchen Koordinatensystem durch eine Vektorfunktion  $\vec{r}(t)$ , so erhält man bei der Berechnung der Geschwindigkeit als Ableitung dieser Vektorfunktion  $\vec{r}(t)$  ein anderes Ergebnis, als wenn man die Bewegung und die zugehörige Geschwindigkeit in einem nicht-rotierenden Koordinatensystem beschrieben hätte.

Zur Illustration dieses Unterschiedes betrachten wir zwei Koordinatensysteme mit identischem Koordinatenursprung, die zum Zeitpunkt  $t = 0$  auch ihre kartesischen Achsen parallel orientiert haben. Das eine, das Laborsystem soll ruhen, das zweite, das wir das rotierende Koordinatensystem nennen wollen, rotiert mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse, die ja in beiden Systemen die gleiche ist. Zu einem Zeitpunkt  $t$  ist also das rotierende System relativ zum Laborsystem um einen Winkel

$$\varphi = \omega t,$$

gedreht. Betrachten wir nun eine Fliege, die sich auf der  $x$ -Achse des rotierenden Systems befindet in einem Abstand  $a$  vom Koordinatenursprung. Aus der Sicht des rotierenden Systems, also aus der Sicht eines Beobachters, der sich mit dem Koordinatensystem mitbewegt, hat die Fliege zu jeder Zeit den Ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Fliege ändert ihre Position nicht und daher ist die Geschwindigkeit der Fliege aus der Sicht des rotierenden Koordinatensystem

$$\left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{RK}} = \vec{0}.$$

(Der Index RK bei dieser Zeitableitung steht nicht für Reinhold Kleiner, sondern für Rotierendes Koordinatensystem). Aus der Sicht eines Beobachters, der sich nicht mit dem Koordinatensystem dreht, also aus der Sicht des Laborsystems hat die Fliege aber natürlich eine von Null verschiedene Geschwindigkeit. Wir wollen im folgenden zeigen, dass diese Geschwindigkeit, gemessen aus der Sicht des Laborsystems, sich nach

$$\left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{Lab}} = \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{RK}} + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

berechnet. Dabei steht der Vektor der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  für den Vektor mit dem Betrag entsprechend der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  des rotierenden Systems mit der Rich-

tung parallel zur Drehachse. In unserem Beispiel ist also

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix},$$

parallel zur  $z$ -Achse. Zm Beweis der Gleichung (4.2) für unser Beispiel führen wir uns zunächst vor Augen, dass der Ortsvektor der Fliege im Laborsystem zur Zeit  $t$  gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\text{Lab}}(t) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ a \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ a \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

In der ersten Zeile dieser Gleichung haben wir den Ortsvektor der Fliege, der zum Zeitpunkt  $t$  im rotierenden Koordinatensystem durch (4.2) Anwenden der Rotationsmatrix  $R^z(-\varphi)$  ins Laborsystem transformiert. Dabei haben wir berücksichtigt, dass das Laborsystem relativ zum rotierenden System um den Winkel  $(-\varphi)$  gedreht ist. In der zweiten Zeile wird die Zeitabhängigkeit des Ortsvektors im Laborsystem dadurch explizit zum Ausdruck gebracht, dass wir  $\varphi = \omega t$  aus (4.2) einsetzen. Wenn wir diesen Ortsvektor nach der Zeit ableiten, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{Lab}} = \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{Lab}} &= \begin{pmatrix} -\omega a \sin(\omega t) \\ \omega a \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ a \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

In der letzten Zeile haben wir die Darstellung des Vektors der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  aus (4.2) und des Ortsvektors der Fliege  $\vec{r}$  aus (4.4) identifiziert. Die Vektoren sind also als Spaltenvektoren so dargestellt, dass die erste Zeile der  $x$ -Komponente des Laborsystems entspricht. Da in dem gewählten Beispiel die Geschwindigkeit der Fliege im rotierenden System identisch Null ist (siehe (4.2)) ganz gleich in welchem Koordinatensystem wir diese  $\vec{0}$  darstellen, ist also mit (4.5) die Beziehung (4.2) für das Beispiel der Fliege verifiziert.

Ganz ähnlich wollen wir die Beziehung (4.2) aber nun auch für den allgemeinen Fall beweisen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die Koordinatensysteme wie gehabt zum Zeitpunkt  $t = 0$  identisch sind und das rotierende System mit einer Geschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse rotiert. Eine beliebige Bewegung eines Massenpunktes werde im rotierenden Koordinatensystem durch den Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix},$$

beschrieben. Daraus ergibt sich eine Geschwindigkeit im rotierenden System

$$\left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{RK}} = \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \\ \dot{c}(t) \end{pmatrix},$$

wobei der Punkt in  $\dot{a}(t)$  wie üblich die Ableitung der Funktion  $a$  nach der Zeit bezeichnet. Diesen Vektor können wir natürlich auch in der Basis des Laborsystems beschreiben durch Anwenden der Transformation  $R^z(-\varphi)$ :

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{RK}} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \\ \dot{c}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{a} \cos \varphi - \dot{b} \sin \varphi \\ \dot{a} \sin \varphi + \dot{b} \cos \varphi \\ \dot{c} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Andererseits betrachten wir den Ortsvektor aus (4.2) und transformieren ihn ins Laborsystem

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) - b \sin(\omega t) \\ a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) \\ c \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Wenn wir diesen Ortsvektor im Laborsystem nach der Zeit ableiten, so müssen wir sowohl die Zeitabhängigkeit berücksichtigen, die in den Koordinaten  $a$ ,  $b$  und  $c$  steckt als auch die explizit sichtbare Abhängigkeit vom Typ  $\omega t$ . Durch Anwenden der Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{Lab}} &= \begin{pmatrix} \dot{a} \cos(\omega t) - \dot{b} \sin(\omega t) - a\omega \sin(\omega t) - b\omega \cos(\omega t) \\ \dot{a} \sin(\omega t) + \dot{b} \cos(\omega t) + \omega a \cos(\omega t) - \omega b \sin(\omega t) \\ \dot{c} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{a} \cos(\omega t) - \dot{b} \sin(\omega t) \\ \dot{a} \sin(\omega t) + \dot{b} \cos(\omega t) \\ \dot{c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\omega \sin(\omega t) - b\omega \cos(\omega t) \\ \omega a \cos(\omega t) - \omega b \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{RK}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) - b \sin(\omega t) \\ a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) \\ c \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}_{\text{RK}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Natürlich können wir diesen Beweis nicht nur für die Zeitableitung eines Ortsvektors  $\vec{r}$  benutzen. Er gilt genau so für jede andere Vektorfunktion, wie z.B. die Geschwindigkeit,

Beschleunigung oder auch Kraft. Es gilt also allgemein für jede beliebige zeitabhängige Vektorfunktion  $\vec{f}$

$$\left\{ \frac{d\vec{f}}{dt} \right\}_{\text{Lab}} = \left\{ \frac{d\vec{f}}{dt} \right\}_{\text{RK}} + \vec{\omega} \times \vec{f}.$$

Häufig schreibt man diese Beziehung auch einfach als eine **Operatorrelation**

$$\left\{ \frac{d}{dt} \right\}_{\text{Lab}} = \left\{ \frac{d}{dt} \right\}_{\text{RK}} + \vec{\omega} \times$$

die auf einen Vektor von Funktionen angewendet werden kann.

### 4.3 Bewegungsgleichungen im rotierenden Koordinatensystem

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen gelten in einem Inertialsystem. Wenn nun auf einen Körper keine Kraft wirkt, so ruht er (d.h. sein Ortsvektor  $\vec{r}$  ist konstant) oder er bewegt sich auf einer geraden Linie. Nehmen wir einmal an, dass der Körper in dem Inertialsystem ruht, also z.B. die Koordinaten  $x = a, y = z = 0$  besitzt. Wenn wir nun ein Koordinatensystem  $K'$  betrachten, das den gleichen Koordinatenursprung besitzt, aber mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse rotiert, so ist die Bahnkurve des Körpers in diesem rotierenden Koordinatensystem gegeben durch

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= R_z(\varphi = \omega t)\vec{r} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ -a \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Für einen Beobachter in diesem rotierenden Koordinatensystem bewegt sich der Körper also auf einer Kreisbahn in der  $xy$ -Ebene mit dem Radius  $a$ . Wenn dieser Beobachter in dem rotierenden Koordinatensystem davon ausgeht, dass sein Koordinatensystem ein Inertialsystem ist, so kommt er zu dem Schluss, dass auf diesen Körper eine Kraft wirkt, denn er bewegt sich ja nicht auf einer geradlinigen Bahn. Diese scheinbare Kraft ist aber lediglich die Konsequenz der Rotation des Koordinatensystems und heisst deshalb **Scheinkraft**.

In diesem Abschnitt wollen wir die Scheinkräfte untersuchen, die wir z.B. auf unserer Erde deshalb registrieren, weil sich die Erde täglich einmal um ihre Achse dreht. Dabei wollen wir nicht berücksichtigen, dass sie sich ausserdem natürlich auch noch einmal im Jahr um die Sonne bewegt, die Sonne sich relativ zur Milchstraße bewegt usw.

Wir unterscheiden dazu drei verschiedene Koordinatensysteme (siehe auch Abb. 4.3):

1. **Laborsystem:** Ein nichtrotierendes Koordinatensystem mit dem Ursprung im Zentrum der Erde. Die  $z$ -Achse zeigt in Richtung des Nordpols ist also parallel zur Drehachse. Die  $x$ -Achse zeigt z.B. stets zur Sonne. Wir betrachten dieses Koordinatensystem als Inertialsystem, vernachlässigen also wie bereits diskutiert die Bewegung der Erde um die Sonne etc. Dieses System nennen wir im folgenden Laborsystem.
2. **Mitrotierendes System K1:** Dieses Koordinatensystem hat ebenfalls seinen Koordinatenursprung im Zentrum der Erde und die  $z$ -Achse in Richtung des Nordpols orientiert. Im Gegensatz zum Laborsystem rotiert es aber mit der Erde. Seine  $x$ -Achse weist also fest auf einen Punkt der Erdoberfläche, am Äquator also z.B. die Stadt Recife am Amazonas.
3. **Mitrotierendes System K2:** Auch dieses System ist fest mit der Erde verbunden. Es hat aber seinen Koordinatenursprung hier im Hörsaal in Tübingen.

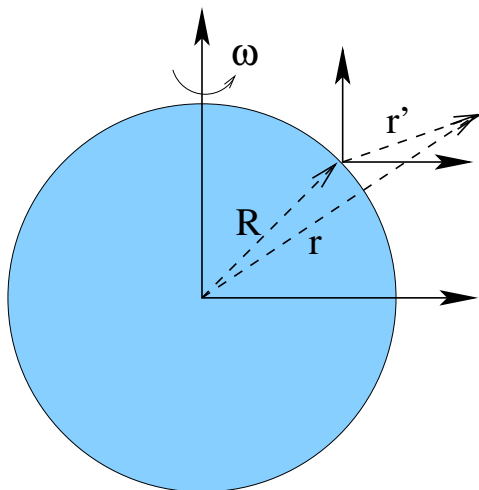


Abbildung 4.3: Koordinatensysteme auf der rotierenden Erde (siehe Diskussion im Text)

Bezeichnen  $\vec{R}$  ( $\vec{r}$ ) die Ortsvektoren des Koordinatenursprungs von K2 (eines Massenpunktes) aus der Sicht von K1 und  $\vec{r}'$  den Ortsvektor des Massenpunktes aus der Sicht von K2, so gilt

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

wobei  $\vec{R}$  ein konstanter Vektor ist. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist in allen drei Koordinatensystemen ein konstanter Vektor parallel zur  $z$ -Achse mit dem Betrag

$$\omega = \frac{2\pi}{24\text{ h}} = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

Wir betrachten zunächst einmal die Geschwindigkeiten eines Massenpunktes aus der Sicht des Laborsystems, beziehungsweise des Koordinatensystems K1: Nach den Regeln zu Zeitableitungen in rotierenden Systemen gilt:

$$\vec{v}_{\text{Lab}} = \left\{ \frac{d\vec{r}'}{dt} \right\}_{\text{Lab}} = \left\{ \frac{d\vec{r}'}{dt} \right\}_{\text{K1}} + \vec{\omega} \times \vec{r}'.$$

Analog gilt für die Beschleunigung aus der Sicht des Laborsystems

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\text{Lab}} &= \left\{ \frac{d\vec{v}_{\text{Lab}}}{dt} \right\}_{\text{Lab}} \\ &= \left\{ \frac{d\vec{v}_{\text{Lab}}}{dt} \right\}_{\text{K1}} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{Lab}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Setzt man in diese Gleichung  $\vec{v}_{\text{Lab}}$  aus (4.3) ein, so ergibt sich, wobei nun alle Ableitungen nach der Zeit im Koordinatensystem K1 vorzunehmen sind:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\text{Lab}} &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right] + \vec{\omega} \times \left[ \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right] \\ &= \vec{a}_{\text{K1}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit der Masse  $m$  des beschriebenen Körpers und ersetzen

$$m\vec{a}_{\text{Lab}} = \vec{F}$$

durch die real existierende Kraft  $\vec{F}$ , die im Inertialsystem beobachtet wird und stellen (4.11) um, so ergibt sich

$$m\vec{a}_{\text{K1}} = \vec{F} - \underbrace{m\vec{\omega} \times \vec{r}}_{(a)} - \underbrace{2m\omega \times \vec{v}}_{(b)} - \underbrace{m\omega \times (\omega \times \vec{r})}_{(c)} .$$

Das Produkt Masse  $m$  mal in K1 beobachtete Beschleunigung, also die Kraft, die ein Beobachter in K1 aus der Bewegung des Teilchens extrahieren würde, enthält neben der real existierenden Kraft  $\vec{F}$  noch 3 Scheinkräfte, die wir im folgenden diskutieren wollen:

- (a): **Lineare Beschleunigungskraft** (Term (a) in (4.3)): Die Winkelgeschwindigkeit mit der die Erde um ihre Achse rotiert ist praktisch konstant, also  $\dot{\omega} = 0$ . Dieser Beitrag ist also vernachlässigbar.
- (b): **Corioliskraft** (Term (b) in (4.3)): Diese Kraft wird immer dann beobachtet, wenn sich das Teilchen bewegt ( $\vec{v} \neq 0$ ) und die Geschwindigkeit eine Komponente hat, die senkrecht zur Rotationsachse der Erde steht. Für die Berechnung der Corioliskraft ist es irrelevant, ob wir die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bezogen auf das Koordinatensystem K1 angeben, oder bezogen auf K2. Da die Ortsvektoren in diesen beiden rotierenden Koordinatensystemen sich nach (4.3) nur um einen konstanten Vektor  $\vec{R}$  unterscheiden, ist die Geschwindigkeit in K1 und K2 identisch.
- (c): **Zentrifugalkraft** (Term (c) in (4.3)) Wegen der Eigenschaften des Vektorproduktes steht die Zentrifugalkraft senkrecht zu  $\vec{\omega}$  und senkrecht zu dem Flächenvektor der aus  $\vec{\omega}$  und  $\vec{r}$  aufgespannten Fläche. Diese Scheinkraft zeigt für einen Punkt auf der Erdoberfläche senkrecht zur  $z$ -Achse nach aussen. Sie ist maximal für einen Punkt auf dem Äquator, da hier  $\vec{r}$  und  $\vec{\omega}$  einen rechten Winkel bilden:

$$\left| \vec{F}_{(c)} \right| = m\omega^2 r .$$

Setzt man den Betrag für  $\omega$  aus (4.3) und für  $r$  den Radius der Erde ein, so ergibt sich ein Zentrifugalbeschleunigung von etwa  $0.032 \text{ m s}^{-2}$ . Dies entspricht einer Reduktion der Erdanziehung um 0.3 Prozent.





## 4.4 Versuche zu Scheinkräften

Im diesem Abschnitt stellen wir einige Experimente vor, die die verschiedenen Scheinkräfte im rotierenden Bezugssystemen vorstellen. Am Schluss des Abschnitts werden wir kurz auf die Scheinkräfte eingehen, die entstehen, wenn ein Bezugssystem gegen das andere linear beschleunigt wird.

### 4.4.1 Scheinkräfte im rotierenden Bezugssystem

Im Theorieteil hatten Sie die allgemeine Formel:

$$\vec{F}_{RK} = m\vec{a}_{RK} = \vec{F} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{RK} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{RK} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{RK}) \quad (4.12)$$

kennengelernt. Hierbei bezeichnet der Index *RK* Größen in dem mit der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  rotierenden Koordinatensystem (Kräfte, Beschleunigungen und Geschwindigkeiten). Die Größen ohne Index beziehen sich auf das ruhende Koordinatensystem.

Der erste Term  $\vec{F}_W = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$  auf der zweiten Seite von 4.12 tritt bei **nicht-konstanter Winkelgeschwindigkeit** auf. Der zweite Term ist die **”Corioliskraft”**  $\vec{F}_C = 2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ , der dritte die **”Zentrifugalkraft”**  $\vec{F}_Z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ .

Entsprechend erhalten wir Coriolis- und Zentrifugalbeschleunigung via  $\vec{a}_C = \vec{F}_C/m = -2\vec{\omega} \times \vec{v}_{RK}$  und  $\vec{a}_Z = \vec{F}_Z/m = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ .

Wir besprechen nun diese Kräfte für spezielle Geometrien. Zunächst betrachten wir Experimente, in denen vor allem die

#### Zentrifugalkraft

wesentlich ist. Hierzu betrachten wir rotierende Systeme, in denen die interessierenden Körper in Ruhe sind. Die Corioliskraft verschwindet dann.

Wenn wir ein Experiment aus dem ruhenden Zustand heraus ”anfahen” lassen, wird zunächst der Term  $\vec{F}_W = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$  eine Rolle spielen. Er verschwindet aber, sobald die endgültige Winkelgeschwindigkeit erreicht ist.

- (a) Wir beobachten einen **rotierenden Balken**, auf dem eine Masse  $m$  radial reibungsfrei gleiten kann und gegen eine Feder drückt (Abb. 4.4).

Beim ”Anfahren” des Experiments wirkt zunächst die Kraft  $\vec{F}_W$ . Unser Balken rotiert gegen den Uhrzeigersinn. Die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  zeigt in Richtung  $+z$  aus der Papierebene heraus. Die Kraft  $\vec{F}_W$  ist dann senkrecht zu  $\vec{\omega}$  gerichtet und ”drückt” die Masse  $m$  in der Stellung der Abb. 4.4 nach links (Der Vektor  $\vec{r}$  zeigt in der Abb. von Drehzentrum nach unten). Dies ist ein sinnvolles Ergebnis; auf Grund seiner Trägheit versucht die Masse  $m$ , in Ruhe zu bleiben; würde sie nicht durch den Balken ”mitgezogen”, würde sich  $m$  relativ zum unteren Balkenende nach links entfernen.

Betrachten wir den weiteren Vorgang zunächst vom ruhenden System (Hörsaal) aus. Während des Anlaufens der Anordnung wird die Masse  $m$  etwas zunächst nach außen

laufen und gegen die Feder schwingen. Nach einiger Zeit kommt  $m$  aber in Ruhe. Die Masse  $m$  erfährt dann ständig eine nach außen gerichtete Radialbeschleunigung  $a_r = -\omega^2 r$ , die von der Feder kompensiert wird. Die Feder "misst" die Zentripetalkraft  $m\omega^2 r$ .

Im bewegten Bezugssystem ist die Masse  $m$  nach einiger Zeit in Ruhe. Die Feder misst dennoch die Kraft  $m\omega^2 r$ , die der Beobachter im bewegten System als die radial nach außen gerichtete Zentrifugalkraft  $\vec{F}_Z = m\omega^2 r \cdot e_r$  interpretiert.

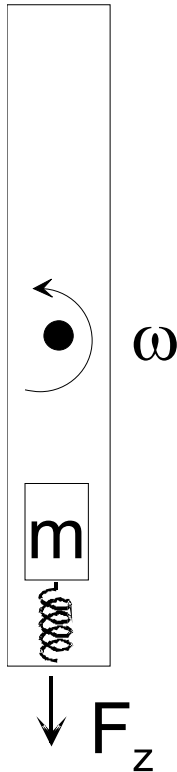


Abbildung 4.4: Mit Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega} = \omega \cdot e_z$  rotierender Balken. Auf dem Balken kann eine Masse  $m$  radial gleiten und gegen eine Feder drücken.

- (b) Wichtig ist die **Zentrifugalkraft** bei Zentrifugen (oder auch Kettenkarussellen), deren Prinzip wir als nächstes erklären wollen. Der prinzipielle Aufbau ist in Abb. 4.5 gezeigt.

Betrachten wir die Zentrifuge im ruhenden Koordinatensystem, so wirkt auf diese die Schwerkraft  $-mg$  in  $-z$ -Richtung. Das Reagenzglas erfährt eine Beschleunigung  $\omega^2 \rho$  in radialer Richtung. Die Gesamtkraft auf die Zentrifuge ist:

$$\vec{F}_{ges} = \begin{pmatrix} f_\varphi \\ F_\rho \\ F_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m\omega^2 \rho \\ -mg \end{pmatrix} = |F_{ges}| \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

mit  $F_{ges} = m\sqrt{g^2 + (\omega^2 \rho)^2}$ .

Wir erhalten:  $\sin \alpha = \frac{\omega^2 \rho}{\sqrt{g^2 + (\omega^2 \rho)^2}}$  bzw.  $\tan \alpha = \frac{\omega^2 \rho}{g}$ .

Mit  $\rho = \rho_0 + l \cdot \sin \alpha$  ( $l$ : Länge der Aufhängung zwischen der Drehachse und dem Schwerpunkt des Reagenzglases;  $\rho_0$ : Abstand der Drehachse zur Aufhängung)

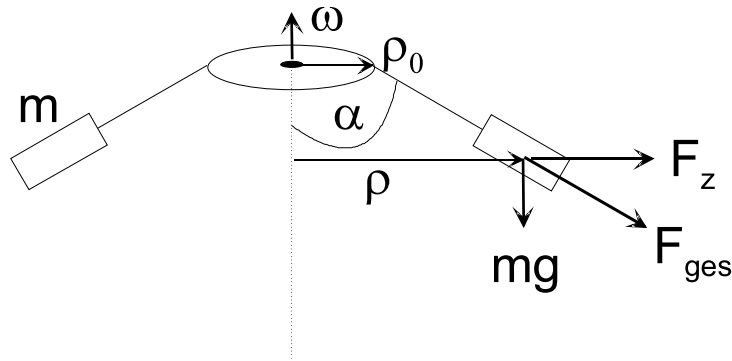


Abbildung 4.5: Prinzip der Zentrifuge oder des Kettenkarussells

können wir weiter schreiben:

$$\tan \alpha = \frac{\omega^2}{g} \cdot (\rho_0 + l \cdot \sin \alpha) = \frac{\omega^2 l}{g} \left( \frac{\rho_0}{l} + \sin \alpha \right). \quad (4.14)$$

Für kleine Drehgeschwindigkeiten ist die rechte Seite dieser transzendenten Gleichung 4.14 klein und damit auch  $\tan \alpha$ . Wir nähern:  $\tan \alpha \approx \alpha$  und  $\sin \alpha \approx \alpha$ . Damit erhalten wir:  $\alpha \approx \frac{\omega^2 \rho_0 / g}{1 - \omega^2 l / g}$ . Für  $\omega \rightarrow 0$  geht  $\alpha$  gegen null.

Umgekehrt geht für  $\omega \rightarrow \infty$  die rechte Seite von Gleichung 4.14 gegen unendlich. Der Winkel  $\alpha$  geht dann gegen  $90^\circ$ .

Im Spezialfall  $\rho_0 = 0$  reduziert sich Gleichung 4.14 zu:  $\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}$ . Diese Gleichung hat erst eine Lösung  $\alpha > 0$  für  $\omega^2 l \geq g$ . Für hohe Drehgeschwindigkeiten geht  $\alpha$  auch hier gegen  $90^\circ$ .

Auf ein Teilchen (Masse  $m_1$ ) im Reagenzglas wirkt die Beschleunigung  $\frac{F_{ges}}{m}$  in Richtung des Reagenzglasbodens. Auf das Teilchen wirkt also die Kraft  $\vec{F}_{ges} \cdot \frac{m_1}{m}$ . Schwimmt das Teilchen in einer leichteren Flüssigkeit, so wird es unter dem Einfluss dieser Kraft deutlich schneller auf den Boden sinken als auf Grund der Gewichtskraft  $m_1 g$  allein. Hierin liegt der Vorteil und die Anwendung von Zentrifugen, die bei hohen Drehgeschwindigkeiten sehr effektiv Stofftrennungen durchführen können.

- (c) Als nächstes betrachten wir ein mit **Wasser gefülltes zylindrisches Gefäß, das um seine Längsachse rotiert.**

Nach einer gewissen Anlaufphase wird das Wasser mit der Winkelgeschwindigkeit des Gefäßes rotieren. Die Wasseroberfläche ist dann gekrümmt wie in der Abb. 4.6 dargestellt.

Wir interessieren uns nun für die Form der Wasseroberfläche.

Unter dem Einfluss der Zentrifugalkraft werden sich die Wassermoleküle so lange verschieben, bis die Gesamtkraft  $\vec{F}_{ges}$  senkrecht auf der Wasseroberfläche steht. Dies ist in Abb. 4.6 angedeutet. Es sei  $\alpha$  der Winkel zwischen der Gewichtskraft  $mg$  und  $F_{ges}$ . Es gilt dann:  $\tan \alpha = \frac{\omega^2 \rho}{g}$ . Nun zeichnen wir für diesen Wert von  $\rho$  die Tangente an die Wasseroberfläche. Sie schneidet die  $\rho$ -Achse ebenfalls unter dem Winkel  $\alpha$ . Aus der Steigung dieser Tangente erhalten wir:  $\tan \alpha = \frac{dz}{d\rho}$  und damit:  $\frac{dz}{d\rho} = \frac{\omega^2 \rho}{g}$ .

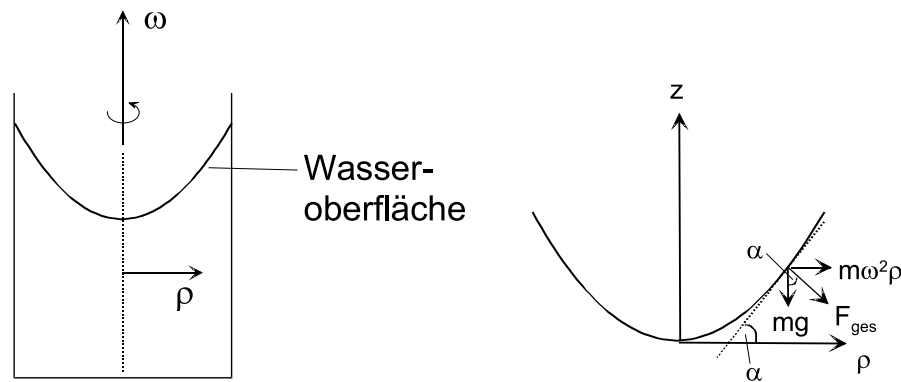


Abbildung 4.6: Mit Wasser gefülltes zylindrisches Gefäß, das um seine Längsachse rotiert. Links: schematische Darstellung; rechts: Kräftegleichgewicht an einem Punkt der Wasseroberfläche.

Diese Gleichung können wir integrieren und erhalten:  $z(\rho) = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} \rho^2$ .

Die Wasseroberfläche ist also proportional zu  $\rho^2$  gekrümmt. Man bezeichnet dies auch als **”Rotationsparaboloid”**.

- (d) Abplattung der Erde Auf eine rotierende Kugel wirken (von einem Beobachter auf der Kugel aus gesehen) Zentrifugalkräfte wie in Abb. 4.7 dargestellt.

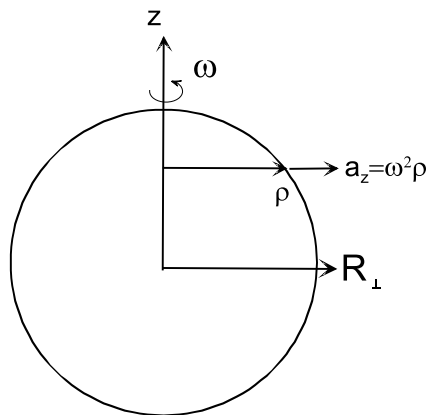


Abbildung 4.7: Mit Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$  rotierende Kugel (Radius  $R$ ). Auf einen Punkt mit Abstand  $\rho$  von der Drehachse wirkt die Zentrifugalbeschleunigung  $\vec{a}_z = \omega^2 \rho \cdot \vec{e}_r$ , die zur Abplattung der Kugel führen können.

Wenn sich die Kugel verformen kann, wird diese abgeplattet werden (d. h. in eine elliptische Form übergehen). Der Radius (die kleine Halbachse) in Richtung der Drehachse (d. h. in Richtung der Pole) betrage  $R_{\parallel}$ , der Radius in Richtung des Äquators sei  $R_{\perp}$ . Im Fall der Erde ist  $\frac{R_{\perp} - R_{\parallel}}{R_{\parallel}} \approx \frac{1}{300}$ , d. h.  $R_{\perp} - R_{\parallel} \approx 21$  km. Als Konsequenz der Erdrotation und der Abplattung ist die Schwerebeschleunigung am Äquator geringer als die am Pol.

Man misst:  $g_{Aeq} = 9.78$  m/s<sup>2</sup>,  $g_{Pol} = 9.83$  m/s<sup>2</sup>, also einen Unterschied von ca. 0.5%.

Am Äquator selbst wirkt zum einen die Zentrifugalkraft ”nach oben” und vermindert  $g$  um den Betrag  $\omega^2 R_{\perp} = (2\pi/T)^2 \cdot R_{\perp}$ . Für  $T = 24$  h ergibt dies einen Beitrag von

etwa  $g_{Pol}/300$ . Die restliche Differenz von etwa 0.2% wird durch die etwas geringere Gravitationskraft am Äquator verursacht.

### Coriolis- und Zentrifugalkräfte

Wir diskutieren nun Anordnungen, bei denen sich ein Körper im rotierenden System bewegt. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  sei konstant. Wir haben dann eine von null verschiedene Corioliskraft, die wir neben der Zentrifugalkraft berücksichtigen müssen.

- (a) Im ersten Experiment setzen wir einen im Laborsystem **ruhenden Stift auf eine rotierende Scheibe** auf. Die Scheibe rotiere gegen den Uhrzeigersinn um die  $z$ -Achse. Der Abstand des Stifts von der Drehachse sei  $R$ . Der Stift "schreibt" dann natürlich einen Kreis mit Radius  $R$  um die Drehachse. Aus Übungsgründen wollen wir dies nochmals an Hand der Rotationsmatrix verifizieren. Der Vektor  $\vec{r}_{RK} =$

$$\begin{pmatrix} x_{RK} \\ y_{RK} \\ z_{RK} \end{pmatrix}$$

ist für unsere Geometrie mit der Rotationsmatrix  $R^z(\varphi = \omega t)$  mit dem Vektor  $\vec{r} =$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{RK} \\ y_{RK} \\ z_{RK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Ausgeschrieben bedeutet dies:

$$x_{RK} = x \cdot \cos \omega t + y \cdot \sin \omega t \quad (4.16)$$

$$y_{RK} = -x \cdot \sin \omega t + y \cdot \cos \omega t \quad (4.17)$$

$$z_{RK} = z \quad (4.18)$$

Der Stift ruhe bei  $x = -R$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

Dies ergibt:

$x_{RK} = -R \cdot \cos \omega t$ ,  $y_{RK} = -R \cdot \sin \omega t$  und  $z_{RK} = 0$ , was genau einer "rechtsdrehenden" Kreisbahn für den Beobachter im rotierenden System entspricht. Die Winkelgeschwindigkeit des Stifts ist dabei  $\vec{\omega} = -\omega \vec{e}_z$ .

Der Stift erfährt offensichtlich für den Beobachter auf der Scheibe eine Beschleunigung  $\vec{a}_{RK} = \omega^2 R \vec{e}_\rho$ . Diese muss durch eine Zentripetalbeschleunigung der Form  $\vec{a}_{ZP} = -\omega^2 R \vec{e}_\rho$  kompensiert worden sein, da der Stift auf seiner Bahn bleibt.

Diese Zentripetalbeschleunigung muss sich nun aus der Summe von Zentrifugal- und Coriolisbeschleunigung ergeben:

Im rotierenden System erfährt der Stift auf seiner Kreisbahn die radial nach außen gerichtete Zentrifugalbeschleunigung  $\vec{a}_z = \omega^2 \cdot R(t) \cdot \vec{e}_r$ . Die Corioliskraft ist gemäß der allgemeinen Formel 4.12  $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{RK}$ , die Coriolisbeschleunigung gleich

$\vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v}_{RK}$ . Der Stift rotiert für den Beobachter auf der Scheibe im Uhrzeigersinn auf einer Kreisbahn mit Radius  $R$ . Seine Relativgeschwindigkeit bzgl. der Scheibe hat den Betrag  $v_{RK} = \omega R$  und ist in azimuthaler Richtung im Uhrzeigersinn gerichtet. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  zeigt in Richtung  $+z$ , so dass die Coriolisbeschleunigung  $\vec{a}_c = -2\omega^2 \cdot R(t) \cdot \vec{e}_r$  beträgt, d. h. radial zur Drehachse hin zeigt. Die Summe aus Zentrifugal- und Coriolisbeschleunigung ergibt

$$\vec{a}_c + \vec{a}_z = [-2\omega^2 \cdot R(t) + \omega^2 \cdot R(t)] \cdot \vec{e}_r = -\omega^2 \cdot R(t) \cdot \vec{e}_r, \quad (4.19)$$

also genau die Zentripetalkraft, die nötig ist, um den Stift auf seiner Bahn zu halten.

- (b) Wir **bewegen** nun den **Stift mit konstanter Geschwindigkeit**  $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$  wie in Abb. 4.8 gezeichnet.

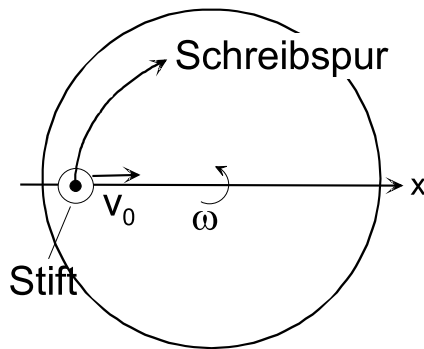


Abbildung 4.8: Ein Stift bewegt sich mit Geschwindigkeit  $v_0$  über eine rotierende Scheibe.

Anwendung der Rotationsmatrix ergibt zunächst mit  $x(t) = -R + v_0 t$ ,  $y(t) = z(t) = 0$ :

$$x_{RK}(t) = (-R + v_0 t) \cdot \cos(\omega t), \quad y_{RK}(t) = -(-R + v_0 t) \cdot \sin(\omega t). \quad (4.20)$$

Wir wollen die Bewegung des Stiftes nun aus der Sicht des rotierenden Beobachters beschreiben. Zunächst zerlegen wir die Geschwindigkeit des Stiftes in einen Anteil  $\vec{v}_{\parallel}$  parallel zu  $\vec{r}_{RK}$  und einen Anteil  $\vec{v}_{\perp}$  senkrecht zu  $\vec{r}_{RK}$ . Damit haben wir für die Coriolisbeschleunigung:

$$\vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v} = -2\vec{\omega} \times (\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) = \vec{a}_{c1} + \vec{a}_{c2} \quad (4.21)$$

Bei **langsamer Bewegung des Stifts** ist  $\vec{v} \approx \vec{v}_{\perp}$  und der Term  $\vec{a}_{c2}$  klein. Der erste Term liefert wie im Beispiel 1  $\vec{a}_{c1} = -2\omega^2 \cdot r(t) \cdot \vec{e}_r$ . Die Zentrifugalbeschleunigung beträgt  $\vec{a}_z = \omega^2 \cdot r(t) \cdot \vec{e}_r$ , die Summe aus beiden Termen ist  $\omega^2 \cdot r(t) \cdot \vec{e}_r$ . Solange sich der Stift auf das Drehzentrum zubewegt, nimmt  $r(t)$  und damit die Zentrifugalkraft linear mit der Zeit ab. Der Stift beschreibt eine auf das Drehzentrum zugerichtete Spirale, deren Endpunkt (d. h. die Position des Stiftes) sich im Uhrzeigersinn bewegt. Nach passieren des Drehzentrum nimmt die Zentrifugalkraft mit der Zeit zu; der Stift schreibt eine nach außen gerichtete Spirale, deren Endpunkt sich gegen den Uhrzeigersinn bewegt. Die mittels der Rotationsmatrix berechnete Bahnkurve ist in den Abb. 4.9 und 4.10 illustriert.

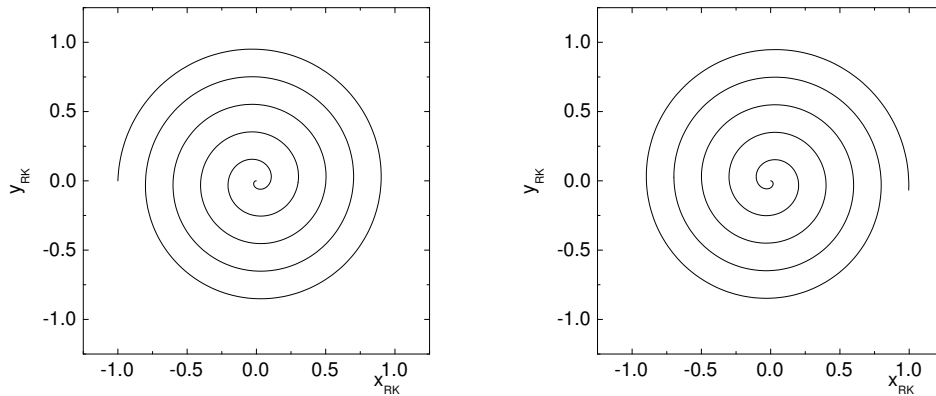


Abbildung 4.9: *Schreibspur für den sich langsam bewegenden Stift. links: Stift bewegt sich zum Drehzentrum; rechts: Stift bewegt sich vom Drehzentrum. Verwendete Funktion: links:  $x_{RK}(t) = (-1 + 0.1t) \cdot \cos(\pi t)$ ,  $y_{RK}(t) = -(-1 + 0.1t) \cdot \sin(\pi t)$ ; rechts:  $x_{RK}(t) = (0.1t) \cdot \cos(\pi t)$ ,  $y_{RK}(t) = -(-0.1t) \cdot \sin(\pi t)$ ;  $t$  von 0 bis 10*

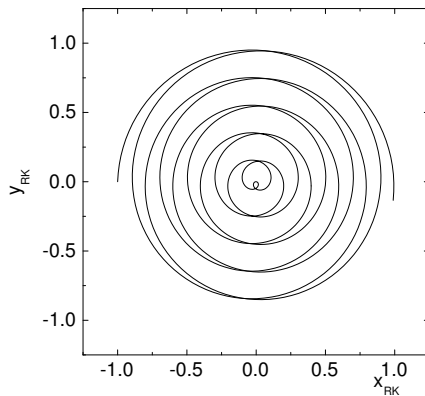


Abbildung 4.10: *Gesamte Bahnkurve des Stifts beim Überqueren der rotierenden Scheibe. Verwendete Funktion:  $x_{RK}(t) = (-1 + 0.2t) \cdot \cos(2\pi t)$ ,  $y_{RK}(t) = -(-1 + 0.2t) \cdot \sin(2\pi t)$ ;  $t$  von 0 bis 10*

- (c) Was passiert nun, wenn sich der **Stift sehr schnell bewegt**?

Natürlich können wir weiterhin die Beziehung

$$x_{RK}(t) = (-R + v_0 t) \cdot \cos(\omega t), \quad y_{RK}(t) = -(-R + v_0 t) \cdot \sin(\omega t). \quad (4.22)$$

verwenden und die Bahnkurve auftragen.

Gehen wir aber einen Schritt zurück und betrachten die Kräfte im rotierenden System etwas genauer.

Die dominante Kraft auf den Stift ist jetzt die Komponente  $m\vec{a}_{c2}$ . Die  $x_{RK}$ -Komponente der Geschwindigkeit des Stifts beim Start bei  $x = x_{RK} = -R$  ist nahezu  $v_{x,RK} = v_0$  und parallel zur Bahn des Stifts gerichtet. Die Coriolisbeschleunigung ist dann in -y-Richtung gerichtet und hat den Betrag  $2\omega v_0$ . Die Bahnkurve ist ungefähr eine Wurfparabel mit der Startgeschwindigkeit<sup>1</sup>  $v_0\vec{e}_x$ ; der Stift wird

<sup>1</sup>Wir könnten hier noch die kleine Komponente  $\omega R$  in +y-Richtung hinzunehmen.

dabei in Richtung  $-y$  abgelenkt, siehe Abb. 4.11 (links). Wäre der Stift dagegen von links nach rechts gewandert, wäre er in Richtung  $+y$  abgelenkt worden, siehe Abb. 4.11 (rechts).

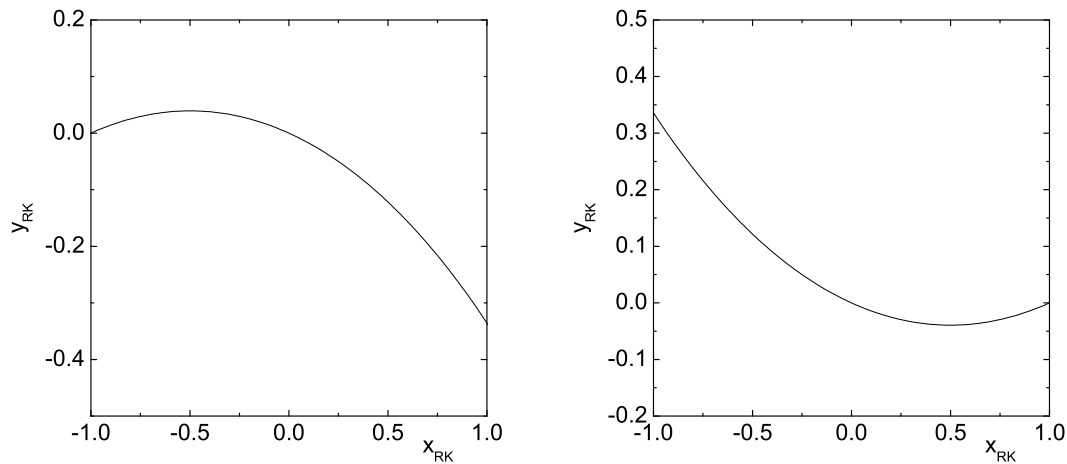


Abbildung 4.11: Bahnkurve eines mit im ruhenden System mit hoher Geschwindigkeit  $v_o \vec{e}_x$  über den Drehteller bewegten Stiftes; (links): Bewegung von links nach rechts; (rechts): Bewegung von rechts nach links. Verwendete Funktionen: (links):  $x_{RK}(t) = (-1 + 5t) \cdot \cos(0.2\pi t)$ ,  $y_{RK}(t) = -(-1 + 5t) \cdot \sin(0.2\pi t)$ ; (rechts):  $x_{RK}(t) = (1 - 5t) \cdot \cos(0.2\pi t)$ ,  $y_{RK}(t) = -(1 - 5t) \cdot \sin(0.2\pi t)$ ;  $t$  von 0 bis 2

- (d) Was passiert, wenn ein Gegenstand von der Oberfläche einer rotierenden Scheibe losgelöst wird (s. Abb. 4.12(links))?

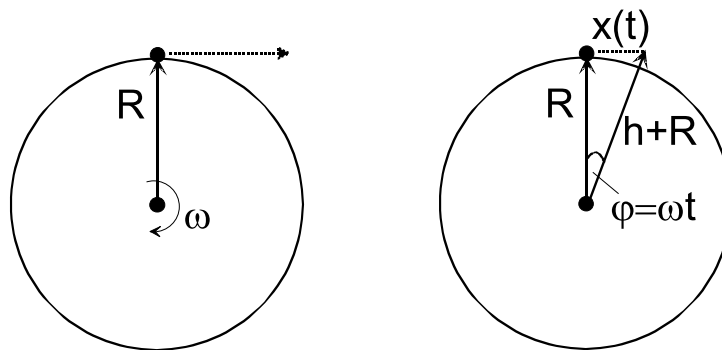


Abbildung 4.12: Ein Körper (schwarzer Punkt) wird von einer mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotierenden Scheibe (Radius  $R$ ) losgelassen; (links) Schemazeichnung; (rechts) Zusammenhang zwischen der Höhe  $h$  des Körpers über der Scheibe und seinem Abstand  $x(t)$  vom "Startpunkt".

Von der Warte eines Beobachters im rotierenden System hatte zunächst eine Zentripetalkraft  $\vec{F}_{ZP} = -m\omega^2 R \cdot \vec{e}_r$  den Gegenstand (Masse  $m$ ) am Rand der Scheibe (Radius  $R$ ) festgehalten, um die Zentrifugalkraft  $\vec{F}_z = +m\omega^2 R \cdot \vec{e}_r$  zu kompensieren. Man hatte:  $0 = \vec{a}_{RK} = \vec{F}_{ZP} + \vec{F}_z$ . Wird der Gegenstand losgelassen, ist  $\vec{F}_{ZP} = 0$  und



wir erhalten<sup>2</sup>:  $\vec{a}_{RK} = \vec{F}_z$ . In den ersten Momenten ist diese Kraft ungefähr konstant und der Gegenstand wird sich gemäß:

$$h(t) \approx \frac{1}{2}\omega^2 R \cdot t^2 \quad (4.23)$$

in radialer Richtung um einen Abstand  $h$  vom Radius der Scheibe entfernen.

Wie sehen nun diese ersten Momente von der Warte des nicht-rotierenden Beobachters aus?

Vor dem Loslassen wirkte auf die Masse die radiale Beschleunigung  $-m\omega^2 R \cdot \vec{e}_r$ , die wiederum von einer Zentripetalkraft  $m\omega^2 R \cdot \vec{e}_r$  kompensiert wurde. Im Moment des "Loslassens" sei die Masse in +y-Richtung orientiert. Ihre "Anfangsgeschwindigkeit" ist  $\vec{v}_0 = \omega R \cdot \vec{e}_x$ . Nach dem Loslassen entfernt sich die Masse mit dieser Anfangsgeschwindigkeit kräftefrei<sup>3</sup> von der Scheibe, d. h. wir haben:  $x(t) = v(t) \cdot t$ .

Nun sollte aber die Messgröße  $h(t)$  für beide Beobachter die selbe sein. Dies trifft tatsächlich zu, wie wir Abb. 4.12 (rechts) entnehmen können: Wenn sich die Masse um die Strecke  $x(t)$  entfernt hat, ist der Startpunkt  $(x, y) = (0, R)$  ebenfalls ein Stück weiterrotiert. Es gilt:  $(h + R) \cdot \cos \varphi = R$ , was für kleine Winkel mit  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$  ergibt:

$$h + R - \frac{h\varphi^2}{2} - \frac{R\varphi^2}{2} = R. \quad (4.24)$$

Wir interessieren uns nur für die ersten Momente der Bewegung, so dass sowohl  $h$  als auch  $\varphi$  klein sind. Wir können damit den Term  $\frac{h\varphi^2}{2}$  gegenüber den anderen Termen vernachlässigen und erhalten:  $h = \frac{R\varphi^2}{2}$ .

Nun ist  $\varphi(t) = \omega t$  und damit  $h(t) \approx \frac{1}{2}\omega^2 R t^2$ , was sich mit dem Ergebnis des rotierenden Beobachters deckt.

Der weitere Verlauf der Bewegung des Massenpunkts ist für den ruhenden Beobachter eine Wurfparabel; für den rotierenden Beobachter krümmt sich die Bahn des Teilchens zunächst durch den Einfluss der Corioliskraft "nach links" weg und beschreibt schließlich eine gegen den Uhrzeigersinn verlaufende Spirale. Wir können dies mittels der allgemeinen Koordinatentransformation schreiben als:

$$x_{RK} = (\omega R t) \cdot \cos(\omega t) + (R - g t^2 / 2) \cdot \sin(-\omega t) \quad (4.25)$$

$$y_{RK} = -(\omega R t) \cdot \sin(-\omega t) + (R - g t^2 / 2) \cdot \cos \omega t. \quad (4.26)$$

Hierbei haben wir berücksichtigt, dass sich im hier dargestellten Beispiel Fall die Scheibe im Uhrzeigersinn dreht (deshalb der Vorzeichenwechsel der sin-Funktionen). Wir haben ausserdem  $x(t) = v_0 t = \omega R t$ ,  $y(t) = R - g t^2 / 2$  benutzt. Eine entsprechend dieser Transformation berechnete Bahnkurve zeigt Abb. 4.13.

---

<sup>2</sup>Sobald sich der Körper bewegt, wirkt zusätzlich die Corioliskraft. Sie war null, solange der Gegenstand im rotierenden System ruhte; nach dem "Loslassen" wird die Corioliskraft von null auf einen endlichen Wert anwachsen. Solange wir nur die ersten Momente der Bewegung der Masse verfolgen, können wir  $F_c$  aber vernachlässigen.

<sup>3</sup>Wir unterschlagen hier den Einfluss der Schwerkraft; Beziehen wir diese mit ein, beschreibt die losgelassene Masse eine Wurfparabel.

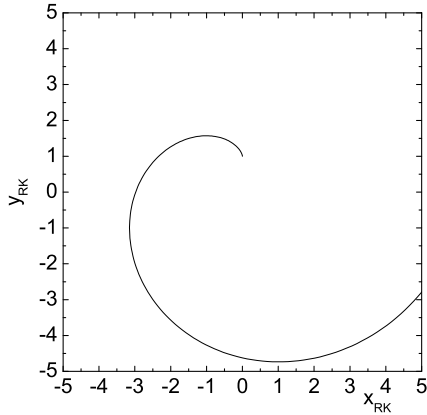


Abbildung 4.13: Bahnkurve eines von einer mit der Kreisfrequenz  $\omega$  rotierenden Scheibe wegfliegenden Gegenstands. Startgeschwindigkeit  $\omega R$ . Verwendete Funktionen:  $x_{RK} = (\pi t) \cdot \cos(\pi t) - (R - 0.2t^2) \cdot \sin(\pi t)$ ;  $y_{RK} = (\pi t) \cdot \sin(\pi t) + (1 - 0.2t^2) \cdot \cos \pi t$ .

- (e) Wir lassen nun ein **Pendel über** einer sich mit Frequenz  $\omega$  **gegen den Uhrzeigersinn drehenden Scheibe** schwingen. Im ruhenden System sei die Bahnkurve  $x(t) = x_0 \cos \omega t$ ,  $y = z = 0$ . Im sich drehenden System beschreibt das Pendel eine Rosettenbahn ("Hypozykloide"), wie in Abb. 4.14 dargestellt.

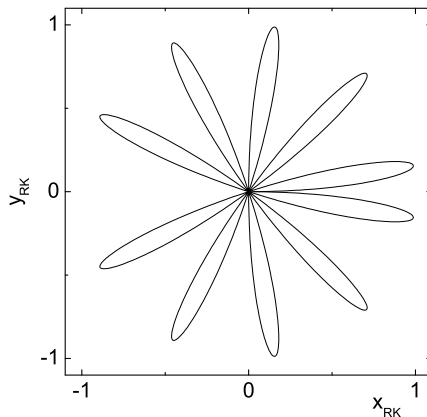


Abbildung 4.14: Rosettenbahn eines im Ruhesystem mit  $x(t) = x_0 \cos \omega t$  schwingenden Pendels, das seine Bahn auf eine mit  $\omega$  gegen den Uhrzeigersinn drehende Scheibe schreibt. Verwendete Funktionen:  $x_{RK} = (\sin \pi t) \cdot \cos(0.1\pi t)$ ;  $y_{RK} = -(\sin \pi t) \cdot \sin(0.1\pi t)$ ;  $t$  von 0 bis 10.

Ist die Frequenz des Pendels sehr hoch gegen die Drehfrequenz der Scheibe, so können wir sagen, die Ebene, in der das Pendel schwingt, dreht sich allmählich. Die Drehrichtung der Schwingungsebene ist der Drehrichtung der Scheibe entgegengesetzt. Im rotierenden System entsteht der Effekt durch die Corioliskraft. Wie im Fall 3 ist die Geschwindigkeit des Pendels relativ zur Scheibe nahezu parallel zu  $\vec{r}_{RK}$ . Damit haben wir für die Coriolisbeschleunigung:

$$\vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v} = -2\vec{\omega} \times (\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) \approx -2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\parallel} \quad (4.27)$$

Die Indizes  $\parallel$  und  $\perp$  beziehen sich auf den Anteil der Relativgeschwindigkeit parallel und senkrecht zur Bahnkurve.

- (f) Das Foucault'sche Pendel

Der Effekt der Drehung der Schwingungsebene eines Pendels im rotierenden System wurde von Foucault 1851 benutzt, um die **Drehung der Erde** nachzuweisen. Foucault führte das Experiment in Paris durch.

Um das Prinzip nochmals genauer zu sehen, nehmen wir zunächst an, das Experiment werde am **Nordpol** durchgeführt. Dies entspricht genau der Situation des in 5 beschriebenen Drehtellers. Die Erde dreht sich für einen am Nordpol stehenden Beobachter **gegen den Uhrzeigersinn**, die Schwingungsebene des Pendels - die für den ruhenden Beobachter konstant bleibt - dreht sich im Uhrzeigersinn. In **24 Stunden** beträgt die Drehung **360°**. Wird das Experiment am **Südpol** durchgeführt, so dreht sich die Schwingungsebene im Uhrzeigersinn. Auch hier beträgt die Drehung **360° in 24 Stunden**. Der Grund für diese Umkehr der Drehrichtung liegt daran, dass der Südpol-Experimentator und dessen Koordinatensystem bzgl. seinem Kollegen am Nordpol auf dem Kopf steht. Für ihn dreht sich die Erde rechts herum.

An einem beliebigen Ort auf der Erde müssen wir das Kreuzprodukt in der Coriolisbeschleunigung  $\vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v}$  etwas genauer betrachten. Rein formal erhalten wir eine Beschleunigung  $a_c = |2\omega \cdot v \cdot \sin \varphi| \approx |2\omega \cdot v_{\parallel} \cdot \sin \varphi|$ , wobei  $\varphi$  der Winkel zwischen  $\vec{\omega}$  und  $\vec{v}$  ist. Im Fall des Foucault-Pendels ist  $\varphi$  gerade der Breitengrad des Orts, in dem das Experiment durchgeführt wird. Wir können dies an Hand der Abb. 4.15 veranschaulichen. Wir betrachten das Pendel an einem Ort der geographischen Breite  $\varphi$ . Um die Situation auf die am Nord- bzw. am Südpol zurückzuführen, müssen wir die Drehachse  $\vec{\omega}_E$  der Erde auf die z-Achse des Pendels projizieren. Diese Achse ist um  $\varphi$  gegen  $\vec{\omega}$  geneigt, die Projektion ist  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_E \cdot \sin \varphi$ . Man beachte, dass am Äquator  $\sin \varphi = 0$  ist und dort keine Drehung der Pendelebene auftritt.

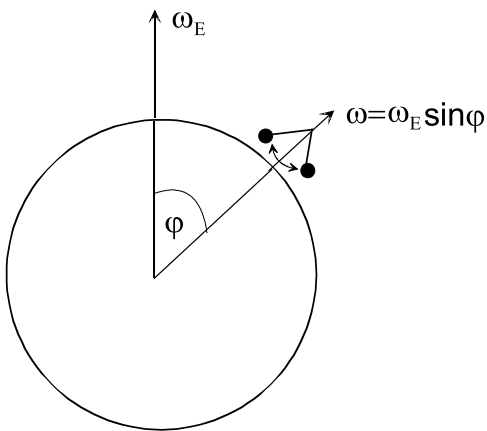


Abbildung 4.15: *Foucault-Pendel an einem Ort des Breitengrads  $\varphi$ .*

In **Tübingen** ist  $\varphi = 48.5^\circ$  nördlicher Breite. Wir erhalten  $\omega = \omega_E \cdot \sin \varphi = 360^\circ / (32h)$ . Die Pendelachse dreht sich **in 32 Stunden um 360°**, was  $11.25^\circ / \text{Std.}$  entspricht. Die Drehrichtung ist wie am Pol gegen den Uhrzeigersinn. Diese Drehung können wir an einem im Hörsaal schwingenden Foucault-Pendel beobachten. Das Pendel schwingt dabei in einem Glasgefäß (Aquarium), um nicht durch Luftzug gestört zu werden. Hier sei noch kurz angemerkt, dass im allgemeinen auch auf die Aufhängung des Pendels Scheinkräfte wirken, die sich dem Pendel mitteilen; auf die Diskussion dieser Effekte wird hier aber verzichtet.

## (g) Corioliskraft und Wetter

Man hat bislang eventuell den Eindruck bekommen können, dass Scheinkräfte im rotierenden Bezugssystem Erde eher gering sind und sich nur in subtilen Effekten wie der Drehung von Schwingungsebenen von Foucault-Pendeln äußern. Tatsächlich sind typische Coriolisbeschleunigungen sehr klein. Betrachten wir den Betrag von  $a_c = | -2\vec{\omega} \times \vec{v}_{RK} |$ . Wenn wir  $\vec{v}_{RK} \perp \vec{\omega}$  annehmen, erhalten wir  $a_c = 2\omega v = 2\frac{2\pi}{T}v$ . Setzen wir hier  $T = 24$  h ein, so erhalten wir  $a_c \approx 1.5 \cdot 10^{-4} v/(ls)$ , was selbst für  $v = 300$  m/s, also einem Wert in der Nähe der Schallgeschwindigkeit, nur etwa  $a_c \approx 0.044$  m/s<sup>2</sup> liefert, also etwa 0.5% von  $g$ . Allerdings wirkt die Corioliskraft im allgemeinen in eine andere Richtung als  $g$ ; damit sind grundsätzlich neue Effekte zu erwarten, auch wenn  $a_c$  klein ist. Speziell ist die Corioliskraft für die Dynamik unserer Erdatmosphäre -das Wetter - extrem wichtig. Betrachten wir hierzu zunächst die Wetterkarte der Abb. 4.16. Hier ist ein über Europa liegendes Hochdruck- und Tiefdruckgebiet gezeichnet. Man erkennt Wolkenbänder, die sich gegen den Uhrzeigersinn in das Tiefdruckgebiet spiralisieren.

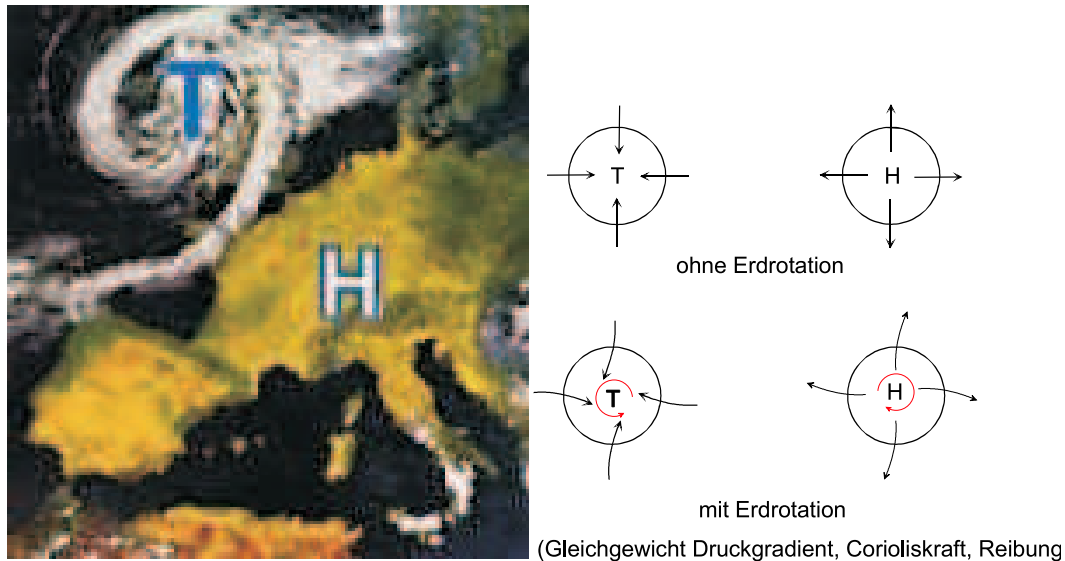


Abbildung 4.16: links: Hoch- und Tiefdruckgebiet über Europa; rechts: Luftbewegung in der Nähe von Hoch und Tief.

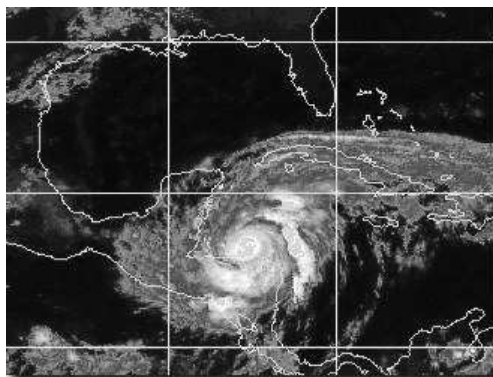
Bewegungen der Atmosphäre entstehen zunächst dadurch, dass am Äquator die Erde wesentlich stärker erwärmt wird als an den Polen. Am Äquator steigt warme Luft auf und sinkt an den Polen wieder ab. Würde die Erde nicht rotieren, so würde daraus ein stabiles Konvektionssystem entstehen, bei dem Luftmassen vom Äquator zu den Polen und zurück transportiert würden. Im Fall des in Abb. 4.16 über Europa liegenden Hochs und Tiefs würde Luft in radialer Richtung aus dem Hochdruckgebiet heraus- bzw. in radialer Richtung in das Tiefdruckgebiet hineinströmen<sup>4</sup>. Die treibende Kraft ist hierbei der Gradient des Luftdrucks. Nun müssen wir die Corioliskraft berücksichtigen. Sie führt auf der Nordhalbkugel dazu, dass wie in Abb. 4.16 angedeutet die in das Tief hineinströmenden Luftmassen nach rechts

<sup>4</sup>Hoch und Tief hätten sich in dieser Form ohne Erdrotation allerdings erst gar nicht gebildet.

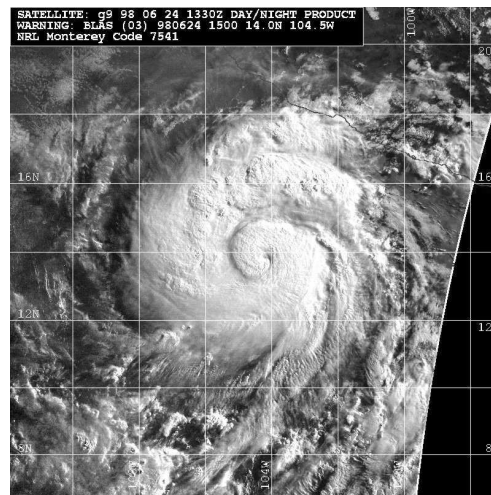
abgelenkt werden, so dass sich insgesamt ein gegen den Uhrzeigersinn drehender Wirbel ausbildet. Analog rotieren die aus dem Hoch ausströmenden Luftmassen im Uhrzeigersinn.

Man beachte wiederum, dass die Drehrichtungen auf der Südhalbkugel gerade umgekehrt sind. Hier drehen Tiefdruckgebiete im Uhrzeigersinn, Hochdruckgebiete entgegen dem Uhrzeigersinn.

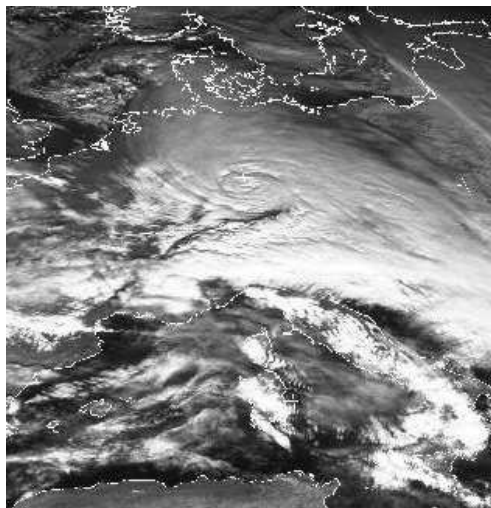
Dieser Effekt wird in den Abb. 4.17 und 4.18 veranschaulicht. Abb. 4.17 zeigt Wirbelstürme und Hurricanes auf der Nordhalbkugel, Abb. 4.18 die entsprechenden Wirbel auf der Südhalbkugel. Spätestens hier sollte klar sein, dass die Corioliskraft einen sehr großen Einfluss haben kann.



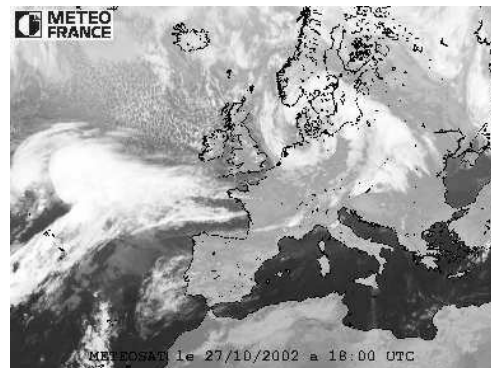
“Mitch”, Mittelamerika 11/1998



“Blas”, Mexico



“Lothar”, Europa, 26.12.1999

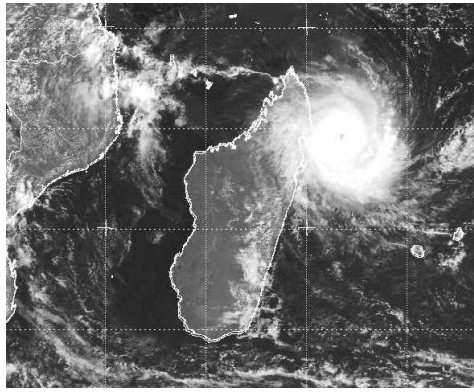


“Jeanette”, Europa, 27.10.2002

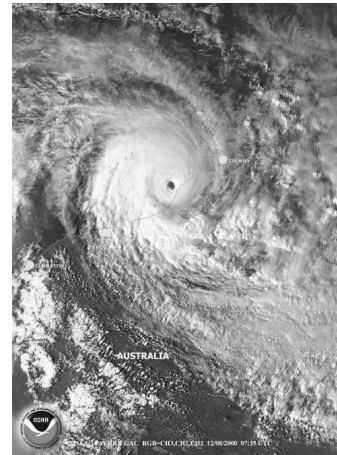
Abbildung 4.17: *Wirbelstürme und Hurricanes auf der Nordhalbkugel. Quellen: "Mitch": [rhein-zeitung.de/on/98/10/28/topnews/mitch.html](http://rhein-zeitung.de/on/98/10/28/topnews/mitch.html), andere: <http://www-imk.physik.uni-karlsruhe.de/~muehr/Sat/satsp.htm>*

#### 4.4.2 Scheinkräfte im linear beschleunigten Bezugssystem

Zum Abschluss dieses Kapitels möchten wir noch kurz darauf hinweisen, dass nicht nur in rotierenden Systemen Scheinkräfte auftreten. Ein einfaches Beispiel für ein weiteres

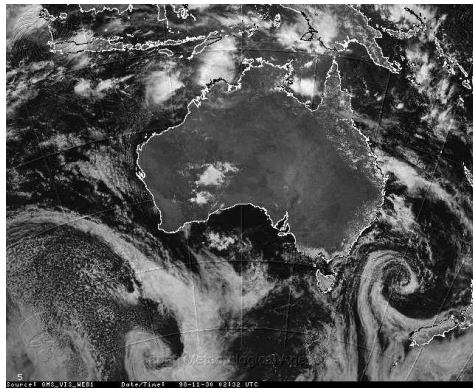


"Hudah", Madagaskar, 2. 4. 2000



"Sam", Australien, 8.12. 2000

"Nicole", 3. 11. 1998, Australien/Neuseeland



"Dani", Südpazifik, 16. 1. 1999

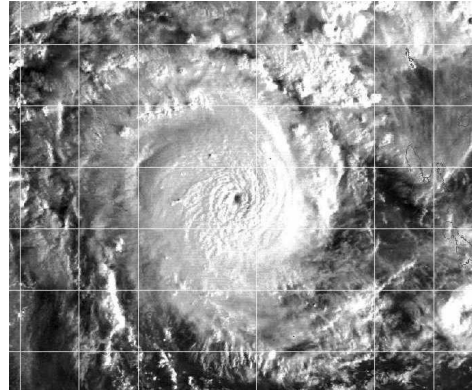


Abbildung 4.18: Wirbelstürme und Hurricanes auf der Südhalbkugel. Quelle: <http://www-imbk.physik.uni-karlsruhe.de/~muehr/Sat/satsp.htm>

System ist ein in eine feste Richtung beschleunigendes Objekt (z. B. Auto, Rakete, Aufzug, ...).

Im Fall des beschleunigenden Aufzugs wirkt auf jedes Objekt im Aufzug, sowie auf den Aufzug selbst, die Erdbeschleunigung  $-g\vec{e}_z$ . Der Aufzug werde mit der Beschleunigung  $a$  nach oben beschleunigt. Auf eine Masse  $m$  im Aufzug wirkt dann die Kraft  $m(-a-g)\cdot\vec{e}_z$  nach unten. Zur Erdbeschleunigung  $g$  wird also die Scheinkraft  $a$  addiert. Hierbei müssen  $a$  und  $g$  nicht notwendig entgegengesetzt gerichtet sein. Im Spezialfall des freien Falls ist  $|a| = g$  und in Richtung  $-z$  gerichtet. Die Gesamtkraft auf die Masse  $m$  im Aufzug ist null.

Es sei schließlich angemerkt, dass für einen Beobachter im konstant beschleunigten Aufzug Erdbeschleunigung und Scheinkraft völlig äquivalent sind. Dies ist einer der Ansatzpunkte, mit der Einstein seine Allgemeine Relativitätstheorie aufgebaut hat.

# Kapitel 5

## Starre Körper

### 5.1 Definition und Freiheitsgrade

Bisher haben wir uns darauf beschränkt, die Teilchen eines Systems als Punktteilchen zu beschreiben. Um die Bewegung dieser Teilchen zu beschreiben, reichte es aus, den Ortsvektor dieser Teilchen als Funktion der Zeit anzugeben. Für jedes dieser Punktteilchen haben wir also 3 Koordinaten beziehungsweise 3 Freiheitsgrade.

Wir wollen nun berücksichtigen, dass die uns umgebenden Teilchen keine Punktteilchen sind, sondern eine Ausdehnung und charakteristische Form besitzen. Wenn man nun jemandem die genaue Lage eines solchen ausgedehnten Körpers, z.B. eines irregulär geformten Steines, eindeutig beschreiben will, so kann ich diesem Kollegen zunächst einmal die Position angeben, etwa dadurch, dass ich den Ortsvektor des Schwerpunktes bestimme. Ausserdem sollte ich dem Kollegen aber auch noch darüber etwas sagen, in welcher Lage sich dieser Stein an seiner Position befindet. Die Frage ist wie viele Angaben (Koordinaten) sind erforderlich, um diese Lage eindeutig zu definieren?

Wir könnten sehr naiv an dieses Problem herangehen und uns überlegen, dass der Stein aus  $N$  Atomen besteht. Wir werden also eine genaue Information über die Lage des Steines vermitteln, wenn wir dem Kollegen alle  $3N$  Koordinaten der Atome mitteilen. Ganz abgesehen davon, dass dies wegen der großen Zahl  $N$  der Atome praktisch unmöglich ist, enthielten diese  $3N$  Koordinaten aber offensichtlich auch sehr viel redundante Information. Die Atome des Steines sind ja untereinander fest verbunden. Wir wissen, dass die Abstände von jeweils 2 Atomen  $i$  und  $j$

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = C_{ij}$$

unverändert bleiben, jedenfalls solange wir den Stein nicht zertrümmern. Wir sprechen allgemein von einem **Starren Körper**, wenn wir ein System aus  $N$  Massenpunkten vorliegen haben, für deren Abstände zueinander eine Bedingung vom Typ (5.1) gilt.

Man könnte also nun annehmen, dass die  $3N$  Koordinaten oder Freiheitsgrade eines solchen starren Körpers durch die  $N(N-1)/2$  Zwangsbedingungen so eingeschränkt sind, dass man insgesamt

$$f = 3N - \frac{N(N-1)}{2}$$

Freiheitsgrade hätte. Aber auch diese Abschätzung kann nicht stimmen. Sie würde ja für  $N = 7$  den Wert Null liefern und für  $N$  größer als 7 sogar einen negativen Wert.

Wir wollen uns deshalb dieser Frage nach der Zahl der Freiheitsgrade eines starren Körpers dadurch annähern, dass wir die verschiedenen Teilchenzahlen  $N$  einzeln betrachten:

- N=1:** Besteht der starre Körper aus nur einem Atom, so ist die Zahl der Freiheitsgrade natürlich gleich  $f=3$ , was auch der Formel (5.1) entspricht.
- N=2:** Ein starrer Körper aus 2 Atomen ist eindeutig dadurch gekennzeichnet, dass man zunächst einmal die Koordinaten des ersten Teilchens angibt. Wegen der Zwangsbedingung (5.1) kann sich das zweite Atom nur auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius  $c_{12}$  und dem ersten Atom im Zentrum aufhalten. Diese Position ist also durch zwei Winkel (Kugelkoordinaten) festgelegt. Insgesamt hat das System  $f = 3 + 2 = 5$  Freiheitsgrade, was auch durch (5.1) gegeben ist.
- N=3:** Die Positionen der Atome 1 und 2 mit dem Abstand  $C_{12}$  seien festgelegt. Das dritte Atom mit dem geforderten Abstand  $C_{13}$  vom Atom 1 muss sich dann auf der Oberfläche einer Kugel mit Zentrum beim Atom 1 und dem Radius  $C_{13}$  befinden (siehe Abb. 5.1). Gleichzeitig aber auch auf der Oberfläche der Kugel mit dem Zentrum im Atom 2 und dem Radius  $C_{23}$ . In der Abb. 5.1 sind diese Kugeln als Kreise dargestellt mit zwei Schnittpunkten, die als mögliche Position des 3. Atoms gekennzeichnet sind. Im drei-dimensionalen Raum liegen diese Schnittpunkte der Kugeln auf einem Kreis um die Verbindungslinie zwischen Atom 1 und 2. Für die Position des 3. Atoms ergibt sich also unter den Bedingungen des starren Körpers genau ein weiterer Freiheitsgrad, etwa eine Winkelkoordinate für den Kreisbogen. Auch in diesem Fall stimmt die Zahl der Freiheitsgrade ( $f = 6$ ) mit der Abschätzung (5.1) überein.
- N=4:** Für die Position des 4. Atoms sind 3 Zwangsbedingungen zu erfüllen. Wenn diese Bedingungen überhaupt erfüllbar sind, gibt es dafür im allgemeinen genau 2 Lösungen. Für das 4. Atom ergibt sich also kein weiterer kontinuierlicher Freiheitsgrad und es bleibt bei  $f = 6$  auch für den Fall  $N = 3$ , was ja auch mit (5.1) übereinstimmt.
- N=5 und mehr:** Für das 5. Atom (und das gleiche gilt für jedes weitere Atom), ist die Position bereits durch die Angabe des Abstandes zu den Atomen 1, 2 und 3 festgelegt. Die Angabe der Abstände zu den weiteren Atomen ist also redundant. Die Zwangsbedingungen sind nicht unabhängig voneinander. Deshalb stagniert auch die Zahl der Freiheitsgrade bei  $f = 6$  für einen starren Körper mit  $N = 3$  bis hinauf zu einer beliebig großen Anzahl von Atomen  $N$ .

Um die Lage eines starren Körpers mit  $N = 3$  oder mehr Atomen eindeutig anzugeben, reicht also die Angabe von 6 Koordinaten. Mit 3 Koordinaten können wir die Position eines Referenzpunktes des starren Körpers angeben. Dies kann z.B. der Schwerpunkt des starren Körpers oder aber auch ein anderer Punkt sein. Durch diese 3 Koordinaten ist sozusagen der Aufenthaltsort des Körpers definiert. Wir haben dann noch genau 3 Koordinaten zur Verfügung um die Orientierung des Körpers im Raum zu beschreiben. Dazu kann man z.B. den Referenzpunkt des Körpers (also etwa der Schwerpunkt) als Koordinatenursprung für zwei Koordinatensysteme ansehen. Das eine Koordinatensystem



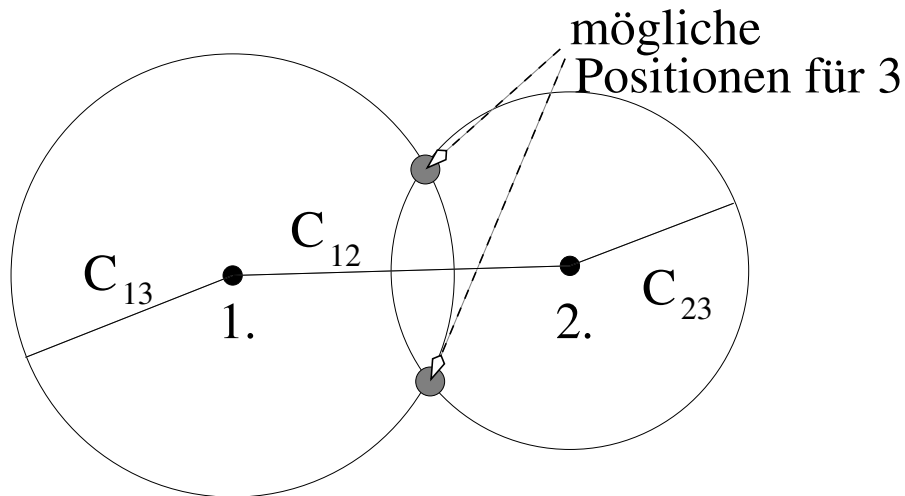


Abbildung 5.1: *Position eines dritten Atoms im starren Körper (siehe Diskussion im Text)*

hat seine Achsen fest im Raum verankert. Das zweite Koordinatensystem mit dem gleichen Koordinatenursprung orientiert seine Achsen aber auf Punkte des starren Körpers. Wir sprechen von einem **körperfesten Koordinatensystem**, das sich mit dem Körper bewegt und rotiert. Die Orientierung des Körpers kann nun durch die 3 Eulerwinkel definiert werden, die erforderlich sind, das raumfeste Koordinatensystem in das körperfeste Koordinatensystem zu drehen.

Natürlich gibt es auch alternative Möglichkeiten für die Wahl der Koordinaten, die die Orientierung des Körpers fest legen. Als ein weiteres Beispiel sei genannt, dass wir die Position von zwei weiteren Referenzpunkten des starren Körpers angeben. Wegen der festen Abstände dieser weiteren Referenzpunkte zum ersten und untereinander, reichen auch hier 3 weitere Koordinaten.

## 5.2 Drehimpuls, Drehmoment und Trägheitstensor

Wie wir im vorhergehenden Abschnitt gesehen haben, besitzt ein starrer Körper 3 Freiheitsgrade zur Beschreibung seiner Position und 3 Freiheitsgrade zur Beschreibung seiner Orientierung. Da wir die Kinematik der Ortsänderung von Teilchen, die **Translationsbewegungen** bereits am Beispiel der Punktteilchen diskutiert haben, wollen wir uns jetzt zunächst auf die Beschreibung von Bewegungen beschränken, bei denen ein Punkt des starren Körpers ruht. Dies sei gleichzeitig der Koordinatenursprung unseres Koordinatensystems. Wenn der Körper sich um eine Drehachse dreht, die durch diesen Referenzpunkt geht, dreht, so spricht man von einer Rotation des Körpers. Mit diesem Körper wird aber natürlich auch ein körperfestes Koordinatensystem gedreht relativ zu dem ruhenden Laborsystem (Beide Systeme haben einen gemeinsamen Koordinatenursprung, eben den ruhenden Referenzpunkt).

Wenn wir die Geschwindigkeit der einzelnen Atome  $\alpha$  im Laborsystem berechnen wollen, so können wir die allgemeine Beziehung zwischen Geschwindigkeiten in Inertialsystemen und rotierenden Systemen benutzen

$$\vec{v}_\alpha = \left( \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \right)_{\text{Lab}} = \underbrace{\left( \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \right)_{\text{RK}}}_{=0} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha.$$

Dabei bezeichnet  $\vec{\omega}$  die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Körpers beziehungsweise des mitrotierenden körperfesten Koordinatensystems. Wegen der Zwangsbedingungen des starren Körpers bewegen sich die Atome nicht relativ zueinander. Deshalb ist natürlich auch die Geschwindigkeit jedes Atoms im mitrotierenden Koordinatensystem identisch Null. Damit erhalten wir also z.B. für den Drehimpuls des Atoms  $\alpha$  mit der Masse  $m_\alpha$  bezogen auf den Koordinatenursprung

$$\begin{aligned} \vec{l}_\alpha &= m_\alpha (\vec{r}_\alpha \times \vec{v}_\alpha) \\ &= m_\alpha \{ \vec{r}_\alpha \times \{ \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha \} \} \\ &= m_\alpha \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Im Folgenden soll der Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}$  des starren Körpers betrachtet werden, das ist die Summe der Drehimpulse seiner atomaren Bestandteile:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_\alpha \vec{l}_\alpha \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_y z_\alpha - \omega_z y_\alpha \\ \omega_z x_\alpha - \omega_x z_\alpha \\ \omega_x y_\alpha - \omega_y x_\alpha \end{pmatrix} \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \begin{pmatrix} y_\alpha(\omega_x y_\alpha - \omega_y x_\alpha) - z_\alpha(\omega_z z_\alpha - \omega_x z_\alpha) \\ z_\alpha(\omega_y z_\alpha - \omega_z y_\alpha) - x_\alpha(\omega_x y_\alpha - \omega_y x_\alpha) \\ x_\alpha(\omega_z x_\alpha - \omega_x z_\alpha) - y_\alpha(\omega_y z_\alpha - \omega_z y_\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \begin{pmatrix} y_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -x_\alpha y_\alpha & -x_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha y_\alpha & x_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -y_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha z_\alpha & -y_\alpha z_\alpha & x_\alpha^2 + y_\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}$  kann also berechnet werden als Produkt des Vektors der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  mit einer Matrix  $I$ , die wir als **Trägheitstensor** bezeichnen.

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

Die Matrix des Trägheitstensors ist dabei definiert durch

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \begin{pmatrix} y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2 & -x_{\alpha}y_{\alpha} & -x_{\alpha}z_{\alpha} \\ -x_{\alpha}y_{\alpha} & x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2 & -y_{\alpha}z_{\alpha} \\ -x_{\alpha}z_{\alpha} & -y_{\alpha}z_{\alpha} & x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die Matrixelemente des Trägheitstensors sind identisch, wenn der Zeilen- und Spaltenindex vertauscht sind

$$I_{ij} = I_{ji},$$

man nennt deshalb den Trägheitstensor einen **symmetrischen** Tensor oder Matrix.

Der Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  in (5.2) kann man ganz analog zur Beziehung zwischen Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und Impuls  $\vec{p}$  eines Teilchens sehen:  $\vec{p} = M\vec{v}$ . Der Trägheitstensor  $I$  ist dabei wie die Masse  $M$  ein Charakteristikum des bewegten Körpers. Es gibt jedoch wichtige Unterschiede: Die Masse  $M$  ist eine Zahl, eine skalare Größe. Deshalb sind die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und der Impuls  $\vec{p}$  auch zueinander parallel. Da  $I$  aber eine Matrix ist, gilt dies im Allgemeinen nicht für Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit. Sei  $\vec{\omega}$  z.B. die Geschwindigkeit einer Drehung um die  $z$ -Achse, so berechnet sich der Drehimpuls nach (5.2)

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{31}\omega \\ I_{32}\omega \\ I_{33}\omega \end{pmatrix},$$

ist also ein Vektor, der nur im Fall  $I_{31} = I_{32} = 0$  parallel zu  $\vec{\omega}$  ist.

### 5.2.1 Hauptträgheitsachsen und Momente

Der Trägheitstensor ist also eine Größe, die genau so wie die Masse eines Teilchens charakteristisch für einen starren Körper ist. Allerdings ist die Masse eines Teilchens unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, in dem ich die Bewegung des Teilchens beschreibe. Der Trägheitstensor hängt aber von der Wahl des Koordinatensystems ab. Die detaillierte Form der Matrix  $I$  hängt sowohl von der Wahl des Koordinatenursprungs als auch von der Orientierung der kartesischen Koordinatenachsen ab, wie man aus der Darstellung in (5.3) direkt entnehmen kann. Dies ist nicht sehr verwunderlich, da ja auch der Drehimpuls von der Wahl des Koordinatenursprungs als Referenzpunkt abhängt. Darüber hinaus ist natürlich auch die Angabe einer Komponente des Drehimpulses, also z.B. die  $x$ -Komponente  $L_x$  von der Orientierung des Koordinatensystems abhängig.

In diesem Teilabschnitt wollen wir den Referenzpunkt zur Berechnung des Trägheitstensors konstant halten. Wir stellen uns nun die Frage: Können wir die Matrix  $I$ , die den

Trägheitstensor beschreibt, durch eine geschickte Wahl der Orientierung des Koordinatensystems, auf eine möglichst einfache Gestalt bringen.

Dazu überlegen wir uns in einem ersten Schritt, wie sich die Matrix  $I$  ändert, wenn wir das Koordinatensystem drehen. Ausgangspunkt dieser Überlegung ist die Beziehung (5.2) zwischen Drehimpuls  $\vec{L}$ , Trägheitstensor  $I$  und Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ . Diese Beziehung soll natürlich in jedem Koordinatensystem gelten, ganz egal wie wir das System der kartesischen Achsen drehen. Wir haben im Abschnitt 4.1 gelernt, wie sich die Darstellung eines Vektors, z.B. des Drehimpulsvektors, ändert, wenn wir das Koordinatensystem drehen:

$$\vec{L}' = R\vec{L}.$$

Dabei bezeichnet  $\vec{L}'$  den Spaltenvektor, durch den der Drehimpuls im gedrehten System dargestellt ist und  $R$  ist die Transformationsmatrix für die durchgeführte Rotation des Koordinatensystems mit der Eigenschaft (siehe (4.1))

$$R^{-1} = R^t.$$

Wenden wir diese Eigenschaften auf (5.2) an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{L}' &= RI\vec{\omega} \\ &= RI\underbrace{R^{-1}R}_{=1}\vec{\omega} \\ &= RIR^{-1}R\vec{\omega} \\ &= I'\vec{\omega}'. \end{aligned}$$

In dieser letzten Zeile bezeichnet  $\vec{\omega}' = R\vec{\omega}$  die Darstellung des Vektors der Winkelgeschwindigkeit und

$$I' = RIR^{-1},$$

konsequenterweise die Darstellung des Trägheitstensors im gedrehten Koordinatensystem. Während sich also die Komponenten eines Vektors bei einer Drehung oder orthogonalen Transformation des Koordinatensystems ändern nach

$$L'_i = \sum_j R_{ij}L_j,$$

transformiert sich eine Größe wie der Trägheitstensor unter der gleichen Transformation wie

$$\begin{aligned} I'_{ij} &= \sum_{kl} R_{ik}I_{kl}R_{lj}^{-1} \\ &= \sum_{kl} R_{ik}R_{jl}I_{kl}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile haben wir ausgenutzt, dass  $R^{-1} = R^t$ . Allgemein bezeichnet man eine Größe  $T$  mit  $3^n$  Elementen, die durch  $n$  Indizes  $i_1 = 1, 2, 3$  (bzw.  $i_1 = x, y, z$ ) bis  $i_n = 1, 2, 3$  charakterisiert wird als einen Tensor der Stufe  $n$  genau dann, wenn bei einer orthogonalen Transformation, also z.B. einer Drehung des Koordinatensystems gilt, dass sich die Elemente dieses Tensors im transformierten System berechnen genäß

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sum_{j_1 \dots j_n} R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \dots R_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n}.$$

Mit dieser Nomenklatur ist also ein Vektor ein Tensor erster Stufe und der Trägheitstensor ein Beispiel für einen Tensor zweiter Stufe. Eine Zahl, die sich bei der Drehung eines Koordinatensystems nicht ändert, wie z.B. die Masse eines Teilchens, bezeichnet man als einen Tensor nullter Stufe oder einen Skalar.

Nachdem wir wissen, wie sich ein Trägheitstensor in einem gedrehten Koordinatensystem berechnet, wollen wir einen starren Körper betrachten, der eine Symmetrieachse besitzt. Dabei versteht man unter einer Symmetrieachse die folgende Eigenschaft des Körpers:

Wir drehen einen Körper um eine Achse mit einem Winkel  $\phi = 2\pi/n$ . Kann man den Körper und seine Orientierung nach dieser Drehung nicht unterscheiden von der Ausgangslage vor der Drehung, so bezeichnet man die Achse um die gedreht wurde, als  **$n$ -zählige Symmetrieachse**.

Dreht man z.B. eine Würfel um eine Achse, die durch den Mittelpunkt einer Seite und dem Zentrum des Würfels geht, um den Winkel von 90 Grad, also  $2\pi/4$ , so ändert sich seine Erscheinung nicht. Diese Drehachse ist also eine 4-zählige Symmetrieachse.

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir einen Zylinder mit der  $z$ -Achse der Zylinderkoordinaten als Drehachse. In diesem Fall bleibt der Körper bei einer Drehung mit beliebigem Winkel unverändert: Man spricht daher von einer unendlich zähligen Symmetrieachse.

Wir betrachten jetzt einen Körper mit einem körperfesten Koordinatensystem in der Gestalt, dass die  $z$ -Achse eine  $n$ -zählige Symmetrieachse ist mit  $n = 2$  oder auch höher. Bei einer Drehung des Koordinatensystems um diese  $z$ -Achse mit einem Winkel  $\alpha$  ergibt sich also der Trägheitstensor im gedrehten System  $I'$  nach (5.4) mit

$$R^z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Siehe (4.1)). Damit berechnen sich die Elemente des Tensors im gedrehten Koordinatensystem wie z.B.

$$\begin{aligned} I'_{13} &= I_{13} \cos \alpha + I_{23} \sin \alpha = I_{13} \\ I'_{23} &= I_{13} \sin \alpha + I_{23} \cos \alpha = I_{23}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dabei gilt die letzte Gleichung in jeder Zeile, wenn  $\alpha = 2\pi/n$  ist, da ja dann der Körper nach entsprechender Drehung des Koordinatensystems die gleiche Darstellung und damit auch den gleichen Trägheitstensor besitzt, wie vor der Drehung. Die Gleichungen in (5.5) können für einen beliebigen Winkel  $\alpha \neq 0$  aber nur erfüllt werden, wenn

$$I_{13} = I_{31} = 0 \quad \text{und} \quad I_{23} = I_{32} = 0.$$

In diesem Fall gilt also für eine Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  parallel zur  $z$ -Achse

$$\vec{L} = I_{33}\vec{\omega} \quad \text{für} \quad \vec{\omega} = \omega \hat{e}_z.$$

Der Vektor des Drehimpulses zeigt also in Richtung der Winkelgeschwindigkeit. Man bezeichnet diese  $z$ -Achse als Hauptträgheitsachse und  $I_{33}$  als Hauptträgheitsmoment. Wir haben an diesem Beispiel gezeigt, dass Symmetrieachsen eines Körpers Hauptträgheitsachsen sind.

Man kann nun allgemein zeigen, dass man auch für Körper, die keine Symmetrieachsen besitzen, immer eine Drehung des Koordinatensystems finden kann, so dass

$$I' = R I R^t = \begin{pmatrix} I'_{11} & 0 & \\ 0 & I'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{33} \end{pmatrix}.$$

Die Elemente  $I'_{11}$ ,  $I'_{22}$  und  $I'_{33}$  sind die Hauptträgheitsmomente und die zugehörigen Achsen des gedrehten Koordinatensystems sind die Hauptträgheitsachsen. Mathematisch bezeichnet man die Hauptträgheitsmomente als Eigenwerte des Trägheitstensors  $I$ . Die Hauptträgheitsachsen sind die Eigenvektoren. Wir suchen ja die Vektoren  $\hat{e}_i$  für die mit dem Eigenwert  $\lambda_i$  gilt

$$I \hat{e}_i = \lambda_i \hat{e}_i,$$

beziehungsweise

$$(I - \lambda_i \mathbb{1}) \hat{e}_i = \vec{0}.$$

Dabei steht  $\mathbb{1}$  für die  $3 \times 3$  Einheitsmatrix. Damit diese Gleichung eine nicht triviale Lösung hat, darf die Matrix  $I - \lambda_i \mathbb{1}$  nicht invertierbar sein. (Wäre diese Matrix invertierbar, so könnten wir Gl.(5.2.1) von links mit der inversen Matrix multiplizieren und erhielten als Ergebnis  $\hat{e}_i = \vec{0}$  also nur die triviale Lösung.) Diese Forderung wird erfüllt, wenn die Determinante von  $I - \lambda_i \mathbb{1} = 0$  ist. Die Eigenwerte  $\lambda_i$  ergeben sich also als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(I - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} I_{11} - \lambda & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - \lambda & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - \lambda \end{pmatrix}.$$

## 5.2.2 Drehmomente

Warum ist der Drehimpuls eines starren Körpers für uns interessant? Wir sehen uns dazu an, unter welchen Bedingungen sich der Drehimpuls als Funktion der Zeit ändert und betrachten (im Laborsystem)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_{\alpha} \frac{d\vec{l}_{\alpha}}{dt} \\ &= \sum_{\alpha} \frac{d}{dt} (\vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}) \\ &= \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{v}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha})}_{=0} + \sum_{\alpha} \left( \vec{r}_{\alpha} \times \frac{d}{dt} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \right) \\ &= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Beim Übergang zur letzten Zeile haben wir die Newtonsche Bewegungsgleichung ausgenutzt. Das Vektorprodukt aus dem Ortsvektor und der Kraft  $\vec{F}_{\alpha}$  summiert über alle Teilchen bezeichnet man als **Drehmoment**

$$\vec{D} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}.$$

Mit (5.6) haben wir also gezeigt, dass die Änderung des Drehimpulses mit der Zeit durch das Drehmoment  $\vec{D}$  gegeben ist

$$\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Die Kraft, die auf ein Teilchen  $\alpha$  wirkt,  $\vec{F}_\alpha$  besteht aus dem Anteil durch externe Ursachen  $\vec{F}_\alpha^{ext}$  und den internen Kräften,

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{ext} + \sum_{\beta} \vec{F}_{\alpha\beta}$$

die die atomaren Bestandteile des Körpers aufeinander ausüben. Diese internen Kräfte, die also z.B. das Teilchen  $\beta$  auf das Teilchen  $\alpha$  ausübt wirken im Normalfall in Richtung der Verbindungslinie zwischen den Atomen

$$\vec{F}_{\alpha\beta} = f(\alpha\beta) (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta).$$

Ist diese Bedingung (5.2.2) erfüllt, so tragen die internen Kräfte nicht zum Drehmoment bei. Zum Beweis dieser Behauptung berechnen wir

$$\begin{aligned} \vec{D}^{int} &= \sum_{\alpha\beta} \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} (\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\beta\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} (\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} - \vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \times (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) f(\alpha\beta) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Bei dem Übergang zur dritten Zeile haben wir das Newtonsche Axiom “Actio = Reactio” ( $\vec{F}_{\beta\alpha} = -\vec{F}_{\alpha\beta}$ ) angewandt und beim Übergang zur vierten Zeile die Voraussetzung (5.2.2) eingesetzt, womit die Behauptung bewiesen wurde, dass in diesem Fall Drehmomente nur durch externe Kräfte generiert werden. Wir haben also die atomaren Kräfte zwischen den Elementen des starren Körpers nicht zu berücksichtigen.

### 5.2.3 Trägheitsmomente

Wenn wir im folgenden die Drehung des starren Körpers auf eine feste Drehachse reduzieren, also z.B. die  $z$ -Achse, dann ist für die Winkelgeschwindigkeit, den Drehimpuls und das Drehmoment auch nur die jeweilige  $z$ -Komponente von Interesse. Aus (5.2) sehen wir, dass in diesem Fall auch nur die Komponente

$$I_{33} = \hat{e}_z(I\hat{e}_z)$$

von Interesse ist. Allgemein definieren wir das **Trägheitsmoment** eines starren Körpers um die Drehachse  $\hat{e}_\omega$ , das ist der Einheitsvektor der in Richtung der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  zeigt, durch

$$I_\omega = \hat{e}_\omega(I\hat{e}_\omega).$$

Im Fall  $\hat{e}_\omega = \hat{e}_z$  erhalten wir

$$I_\omega = I_{33} = \sum_{\alpha} m_{\alpha}(x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2),$$

wie man aus (5.3) ablesen kann. Jede Masse  $m_{\alpha}$  wird also gewichtet mit dem Abstand von der Drehachse,  $\Delta_{\alpha}$ , zum Quadrat. Für eine beliebige Drehachse  $\hat{e}_\omega$  ergibt sich also entsprechend

$$I_\omega = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \Delta_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha}^2 - (\vec{r}_{\alpha} \hat{e}_\omega)^2).$$

Es sollen nun für einige Beispiele die Trägheitsmomente ausgerechnet werden. Als erstes Beispiel betrachten wir 4 Massenpunkte der Masse  $m$ , die auf den Eckpunkten eines Quadrates der Kantenlänge  $a$  angeordnet sind, wie es in Abb. 5.2 dargestellt ist. Die Drehachse befinde sich in der Mitte des Quadrates (siehe Teilbild a der Abb. 5.2) und die Richtung der Winkelgeschwindigkeit sei senkrecht zur Ebene, in der die Massenpunkte angeordnet sind. Damit ist der Abstand eines jeden dieser Massenpunkte  $\Delta_{\alpha}$  von der Drehachse gleich  $a/\sqrt{2}$  und es ergibt sich insgesamt ein Trägheitsmoment

$$I_\omega = 4m\Delta_{\alpha}^2 = 2ma^2.$$

Als zweites Beispiel betrachten wir die gleiche Anordnung der Massenpunkte, nun aber mit einer Drehachse, die durch einen der Eckpunkte geht (die Winkelgeschwindigkeit steht wieder senkrecht zur Ebene der Massenpunkte, siehe Teilbild b der Abb. 5.2). Der Massenpunkt, der auf der Drehachse liegt liefert in diesem Fall keinen Beitrag zum Trägheitsmoment, da ja der Abstand zur Drehachse,  $\Delta_{\alpha}$ , identisch Null ist. Zwei der Massenpunkte haben den Abstand  $\Delta_{\alpha} = a$  und einer den Abstand  $\sqrt{2}a$ . Insgesamt ergibt sich also für das Trägheitsmoment in diesem Beispiel der Wert

$$I_\omega = 2ma^2 + m(\sqrt{2}a)^2 = 4ma^2.$$

Wir sehen also, dass der gleiche starre Körper unterschiedliche Werte für das Trägheitsmoment liefert wenn die Drehachse nur verschoben wird.

Der Zusammenhang zwischen den Trägheitsmomenten eines starren Körpers bei zueinander verschobenen Drehachsen wird durch den **Satz von Steiner** beschrieben. Danach gilt:

- Das Trägheitsmoment eines starren Körpers um eine Drehachse  $\hat{e}_\omega$ ,  $I_\omega$  ist gleich der Summe des Trägheitsmomentes  $I_\omega^{SP}$  des Körpers um die Drehachse, die parallel zu  $\hat{e}_\omega$  durch den Massenschwerpunkt des Körpers verläuft plus der Masse  $M$  des Körpers multipliziert mit dem Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse  $b$  zum Quadrat (siehe auch Abb. 5.3):

$$I_\omega = I_\omega^{SP} + Mb^2$$

Als Beispiel für die Anwendung dieses Satzes können wir die 4 Massenpunkte der Abb. 5.2 heranziehen. Das Beispiel a) liefert gerade  $I_\omega^{SP}$  (siehe (5.2.3)), da ja in diesem Fall die Drehachse durch den Schwerpunkt verläuft. Der Abstand des Schwerpunktes von der



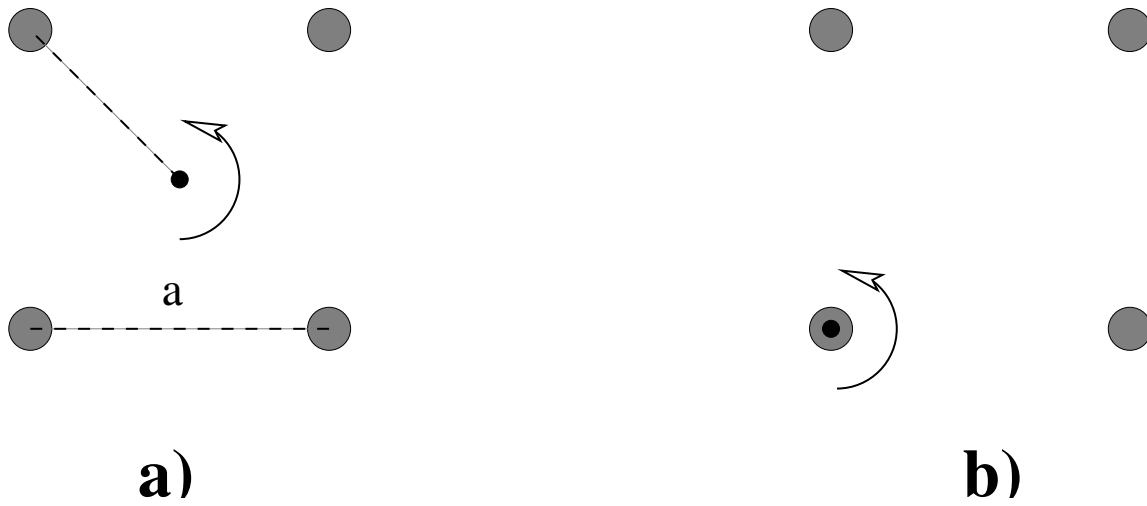


Abbildung 5.2: Beispiele zur Berechnung von Trägheitsmomenten (siehe Diskussion im Text)

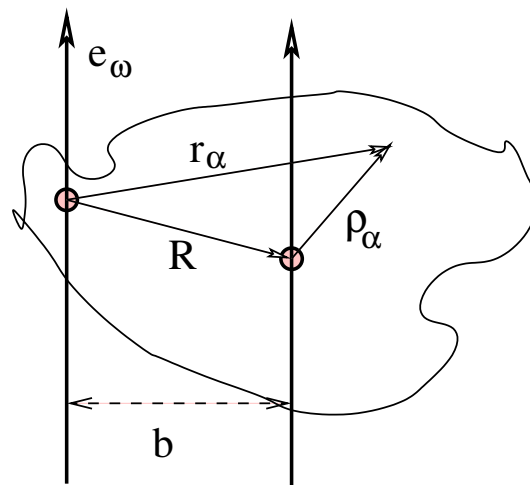


Abbildung 5.3: Illustration des Satzes von Steiner (siehe Diskussion im Text)

Drehachse des Beispiels b der Abb. 5.2 entspricht  $a/\sqrt{2}$ . Damit liefert der Satz von Steiner für die Anordnung im Teilbild b:

$$I_\omega = 2ma^2 + 4m \left( \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 = 4ma^2,$$

was ja auch mit der Rechnung aus (5.2.3) übereinstimmt.

Zum Beweis des Steinerschen Satzes betrachten wir den Ortsvektor eines Massenpunktes  $\alpha$  des starren Körpers einerseits in einem Koordinatensystem, dessen Ursprung auf der Drehachse  $\hat{e}_\omega$  liegt (und bezeichnen diesen mit  $\vec{r}_\alpha$ , andererseits im Schwerpunktsystem, also dem Koordinatensystem mit Ursprung im Schwerpunkt mit dem Ortsvektor  $\vec{R}$ . Bezeichnen wir die Koordinate des Massenpunktes  $\alpha$  im Schwerpunkt mit  $\vec{\rho}_\alpha$ , so gilt (siehe auch Abb. 5.3):

$$\vec{r}_\alpha = \vec{R} + \vec{\rho}_\alpha$$

Damit können wir das Trägheitsmoment um die Drehachse  $\hat{e}_\omega$  nach (5.2.3) ausrechnen

$$\begin{aligned} I_\omega &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha}^2 - (\vec{r}_{\alpha} \hat{e}_{\omega})^2) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ (\vec{R} + \vec{\rho}_{\alpha})^2 - ((\vec{R} + \vec{\rho}_{\alpha}) \hat{e}_{\omega})^2 \right] \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ R^2 + 2\vec{R}\vec{\rho}_{\alpha} + \rho_{\alpha}^2 - (\vec{R}\hat{e}_{\omega})^2 - 2(\vec{R}\hat{e}_{\omega})(\vec{\rho}_{\alpha}\hat{e}_{\omega}) - (\vec{\rho}_{\alpha}\hat{e}_{\omega})^2 \right] \\ &= M\vec{R}^2 + 0 + \sum_{\alpha} m_{\alpha}\rho_{\alpha}^2 - M(\vec{R}\hat{e}_{\omega})^2 - 0 - \sum_{\alpha} m_{\alpha}(\vec{\rho}_{\alpha}\hat{e}_{\omega})^2 \\ &= I_{\omega}^{SP} + Mb^2. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Beim Übergang von der dritten zur vierten Zeile haben wir ausgenutzt, dass

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha}\vec{\rho}_{\alpha} = 0,$$

da die linke Seite dieser Gleichung gerade die Gesamtmasse multipliziert mit dem Vektor des Schwerpunktes ergibt und zwar in dem Koordinatensystem der  $\vec{\rho}_{\alpha}$ , in dem dieser Schwerpunkt gerade im Koordinatenursprung liegt. Mit (5.8) ist also der Beweis des Satzes von Steiner erbracht.

Als spezielle Anwendungen berechnen wir nun noch das Trägheitsmoment eines Zylinders der Höhe  $c$  und mit Radius  $R$ , der eine homogene Massendichte  $\rho_0$  aufweist. In diesem Fall geht natürlich die Summe über die Massenpunkte in das entsprechende Volumenintegral über. Ist die Drehachse identisch mit der zentralen Längsachse des Zylinders, der  $z$ -Achse des zugehörigen Zylinderkoordinatensystems, so berechnet sich das Trägheitsmoment zu:

$$I_z = \int_0^c dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho_0 r^2 r dr.$$

Dabei besteht der Integrand (neben den Anteilen  $r dr d\varphi dz$  die das Volumenelement in Zylinderkoordinaten darstellen) aus der Massendichte  $\rho_0$  und dem Abstand der Massenelemente von der Drehachse zum Quadrat,  $r^2$ . Dieses Integral liefert

$$I_z = c 2\pi \rho_0 \frac{R^4}{4} = \rho_0 \underbrace{\pi c R^2}_{=\text{Volumen}} \frac{R^2}{2} = M \frac{R^2}{2},$$

also das Trägheitsmoment das vorliegt, wenn die gesamte Masse  $M$  des Zylinders den Abstand  $R/\sqrt{2}$  von der Drehachse hätte.

Bei einem Hohlzylinder mit den gleichen geometrischen Abmessungen und der gleichen Masse  $M$ , hat die gesamte Masse den Abstand  $R$  von der Drehachse (wenn dies ebenfalls die zentrale  $z$ -Achse ist). Dies ergibt also ein Trägheitsmoment für den Hohlzylinder von

$$I_z = M R^2 .$$



## 5.3 Drehimpuls und Drehmoment im Experiment

Wir besprechen nun einige Experimente zum Thema Drehimpuls und Drehmoment. Wir betrachten ein System von  $N$  Massenpunkten, die miteinander verbunden sind.

Die Ausgangsgleichung ist:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{D} \quad (5.9)$$

Hierbei ist  $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$  der Drehimpuls des Systems; die Summe läuft über alle Massenpunkte. Die Größe  $\vec{D} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$  ist das gesamte Drehmoment, das auf das System wirkt. Hier sind die Kräfte  $\vec{F}_i$  die auf die Massenpunkte wirkenden *äußeren* Kräfte. Wie im Theorieteil gezeigt wurde, verschwinden die Beiträge durch die inneren Kräfte  $\vec{F}_{ik}$ , solange diese Kräfte parallel zur Verbindungslinie zwischen den Massenpunkten  $i$  und  $k$  wirken. Weiter ist zu beachten, dass  $\vec{L}$  und  $\vec{D}$  von der Wahl des Ursprung des Koordinatensystems abhängen; im allgemeinen werden wir den Ursprung auf die Achse legen, um die sich das betrachtete System dreht.

### 5.3.1 Drehimpulserhaltung

Für  $\vec{D} = 0$  ist  $\vec{L} = \text{const.}$ , der Drehimpuls des Systems bleibt erhalten.

Wir können die **Drehimpulserhaltung** sehr schön dadurch demonstrieren, dass wir auf einer um die  $z$ -Achse drehbaren Scheibe ("Drehschemel") ein Rad in Rotation versetzen bzw. dieses Rad in verschiedene Richtungen drehen (Abb. 5.4).

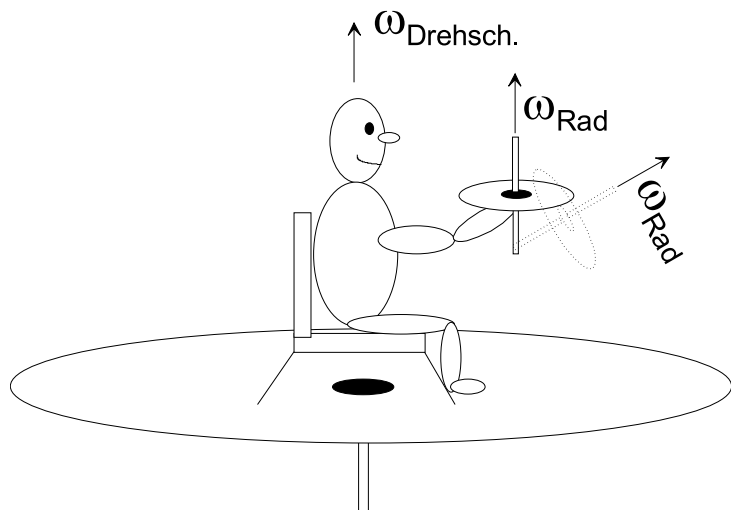
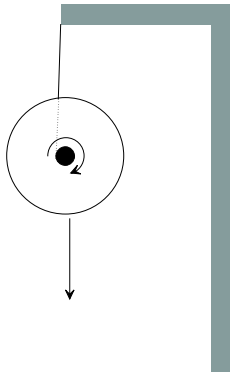


Abbildung 5.4: Rotierendes Rad auf dem Drehschemel.

War der Drehschemel anfangs in Ruhe und starten wir das Rad so, dass die Drehachse in  $z$ -Richtung zeigt, mit  $\vec{L}_{\text{rad}} = L_{\text{rad}} \vec{e}_z$ , dann rotiert der Drehschemel selbst in Gegenrichtung, so dass die Summe  $\vec{L}_{\text{schemel}} + \vec{L}_{\text{rad}}$  erhalten bleibt (d. h. 0 ergibt). Drehen wir das Rad um  $180^\circ$ , so dass  $\vec{L}_{\text{rad}} = -L_{\text{rad}} \vec{e}_z$  gilt, so dreht sich auch der Drehschemel gerade in die Gegenrichtung. Die Drehung des Rades erfordert einigen Kraftaufwand, da sich dabei  $\vec{L}_{\text{rad}}$  zeitlich ändert, was ein endliches Drehmoment auf das Rad erfordert. Dieses Drehmoment

Abbildung 5.5: *Maxwell-Rad* ("JoJo").

wird von der Lagerung des Drehschemels aufgenommen. Steht  $\vec{L}_{rad}$  in (x,y)-Richtung, so ist auch der Drehschemel in Ruhe, da  $\vec{L}_{rad}$  keine Komponente in z-Richtung mehr hat.

Wenn wir das Rad außerhalb des Drehschemels in Rotation versetzen und dann auf den anfänglich ruhenden Drehschemel bringen, so bleibt dieser in Ruhe, solange wir die Achse des Rads nicht ändern. Jede Änderung der Rotationsachse führt jetzt aber zu einer Rotation des Drehschemels, wobei gilt:  $\vec{L}_{rad} + \vec{L}_{schemel} = \vec{L}_{rad,0}$ . Hierbei ist  $\vec{L}_{rad,0}$  der anfängliche Drehimpuls des Rades.

Eine weitere Demonstration von  $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$  ist ein in z-Richtung abrollendes **Maxwell-Rad** ("JoJo") (s. Abb. 5.5). Auf dessen Drehachse ist ein Faden aufgewickelt, dessen freies Ende an einem Stativ befestigt ist. Das Rad ist zunächst in einer Höhe  $h$  in Ruhe. Auf das Rad wirkt ein Drehmoment  $\vec{D}$ , das das Rad nach unten abrollen lässt; hierbei wächst gemäß  $\dot{\vec{L}} = \vec{D}$  der Drehimpuls des Rades. Ist der Faden des Rades am unteren Umkehrpunkt vollständig abgewickelt, ist  $\vec{L}$  maximal und  $\vec{D} = 0$ . Jetzt muss sich das Rad aber weiterdrehen, so dass das Rad wieder nach oben ((in Richtung +z) läuft. Hierbei nimmt  $\vec{L}$  wieder ab. Ohne Reibung würde das Maxwell-Rad wiederum die Höhe  $h$  erreichen (hier ist  $\vec{L} = 0$ ) und dann wieder nach unten abrollen.

### 5.3.2 Hebelgesetze und Gleichgewicht

Als nächstes betrachten wir **statische** Anordnungen, auf die Drehmomente  $\vec{D}$  wirken. Wir diskutieren zunächst den "**einarmigen Hebel**" der Abb. 5.6. In der Position (a) ist der Betrag des Drehmoment auf den Verankerungspunkt in der Wand gleich  $m \cdot g \cdot l$ . Das Drehmoment zeigt aus der Zeichenebene heraus. Analog ist der Betrag des Drehmoments in der Position (b) gleich  $m \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi$ ; speziell in der Position (c) verschwindet  $\vec{D}$ . Wenn der Hebel um den Verankerungspunkt in der Wand drehbar ist, so wird er schnell in die Position (c) übergehen und dort zur Ruhe kommen.

Wir betrachten jetzt den zweiarmigen Hebel der Abb. 5.7.

Der Hebel sei drehbar gelagert. Auf den Hebel wirken die beiden Drehmomente

$$\vec{D}_1 = -m_1 g \vec{l}_1 \times \vec{e}_z = -m_1 g l_1 \sin \varphi_1 \vec{e}_y \quad (5.10)$$

und

$$\vec{D}_2 = -m_2 g \vec{l}_2 \times \vec{e}_z = -m_2 g l_2 \sin \varphi_2 \vec{e}_y. \quad (5.11)$$

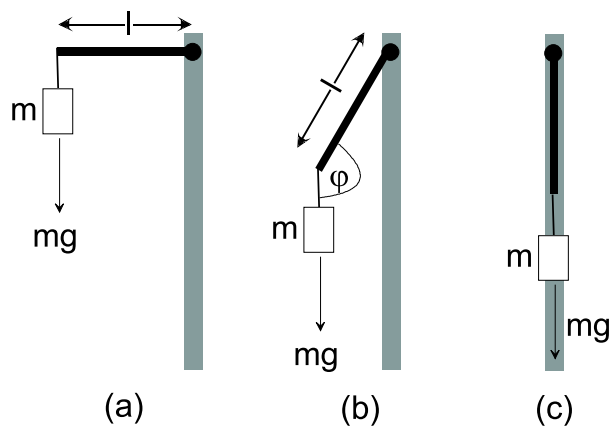


Abbildung 5.6: Einarmiger Hebel.

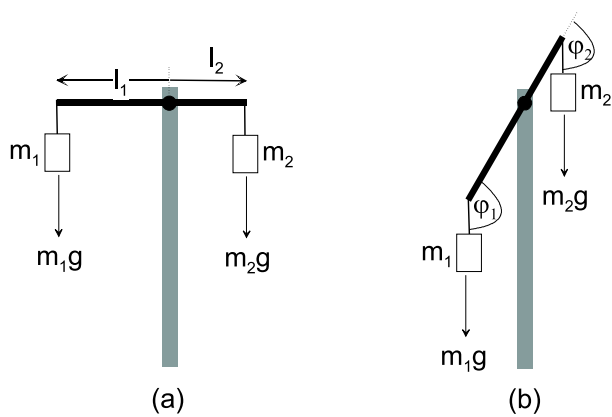


Abbildung 5.7: Zweiarmiger Hebel.

Das Gesamtdrehmoment verschwindet für

$$-m_1gl_1 \sin \varphi_1 = -m_2gl_2 \sin \varphi_2, \quad (5.12)$$

d. h. für

$$-m_1l_1 \sin \varphi_1 = -m_2l_2 \sin \varphi_2, \quad (5.13)$$

was sich mit

$$\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 \quad \text{zu} \quad m_1l_1 = m_2l_2 \quad (5.14)$$

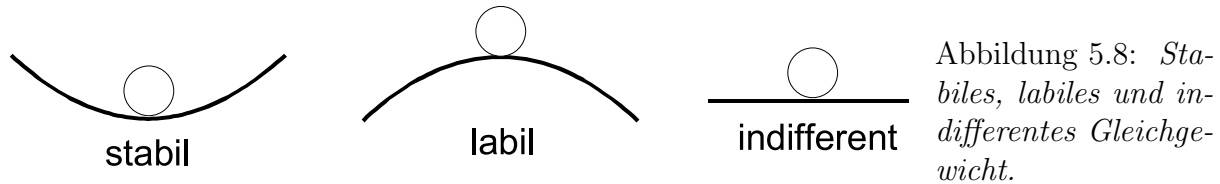
reduziert. Dies ist die **”Hebelbedingung”**.

Für  $m_1l_1 = m_2l_2$  verschwindet das Gesamtdrehmoment auf den Hebel. Unterschlagen wir für den Moment, dass wie in Abb. 5.7 gezeichnet die Massen  $m_1$  und  $m_2$  unterhalb der Drehachse liegen, so ist die Hebelbedingung für alle Winkel  $\varphi_1$  erfüllt. Zum anderen ist dann der Hebel genau im Schwerpunkt gelagert<sup>1</sup>.

Wenn - bei obiger Näherung - die Hebelbedingung für einen kontinuierlichen Satz von Winkeln  $\varphi_1$  erfüllt werden kann, so liegt ein **”indifferentes Gleichgewicht”** vor.

<sup>1</sup>Wenn wir berücksichtigen, dass sich die Massen  $m_1$  und  $m_2$  unterhalb des Hebelarms befinden, dann finden wir, dass im Gleichgewicht der Schwerpunkt genau unterhalb der Drehachse liegt. Wir werden darauf etwas später eingehen.

Allgemein sprechen wir von einem **”stabilen Gleichgewicht”**, wenn ein Körper nach Auslenkung aus der Ruhelage wieder in diese zurückkehrt. Beim **”labilen Gleichgewicht”** entfernt sich der Körper nach der Auslenkung immer weiter vom Gleichgewichtswert, während beim **”indifferenten Gleichgewicht”** die verschobene Position ebenfalls stabil ist. Das Prinzip ist in Abb. 5.8 nochmals erläutert. Hier befindet sich eine Kugel in einem Tal, auf einem Berg bzw. in einer Ebene.



Kehren wir wieder zu Hebeln und Drehmomenten zurück und betrachten die Anordnung der Abb. 5.9.

In der Konfiguration der Abb. 5.9(b) gelte  $m_1 l_1 = 2m_2 l_2$ . Hängen wir jetzt eine der beiden Massen  $m_2$  an den unteren rechten Hebelarm (Länge:  $l_3$ ) wie in Abb. 5.9(a), so haben wir als Hebelbedingung:  $m_1 l_1 = m_2 l_2 + m_2 l_3 \cos \alpha$  (man beachte, dass  $\alpha = 90^\circ - \varphi_3$  ist, wobei  $\varphi_3$  wie in Abb. 5.7 der Winkel zwischen dem Hebelarm und der z-Achse ist). Nun ist  $l_3 \cos \alpha = l_2$ , so dass beide Konfigurationen im Gleichgewicht sind.

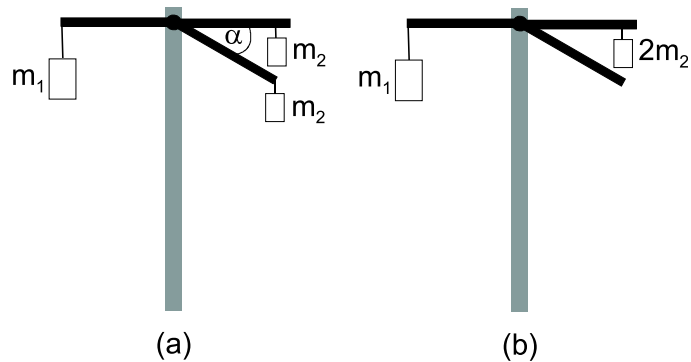


Abbildung 5.9: Dreiarmer Hebel.

Man beachte außerdem, dass bei der Anordnung (a) der Schwerpunkt deutlich unterhalb der Drehachse liegt, wobei sein z-Abstand von der Drehachse  $l_3 \sin \alpha / (m_1 + 2m_2)$  beträgt<sup>2</sup>. Stellen wir jetzt die Anordnung (a) analog zur Abb. 5.7(b) schräg, so stellen wir fest, dass die Anordnung wiederum in die Gleichgewichtspostion  $\varphi_1 = 90^\circ$  zurückkehrt. Der Grund hierfür ist leicht zu verstehen: Der Schwerpunkt liegt für  $\varphi_1 \neq 90^\circ$  nicht mehr unterhalb der Drehachse. Jetzt führen die Kräfte, die an den drei Massen angreifen, zu einem Drehmoment auf den Schwerpunkt, die diesen wieder zur Drehachse hin bewegen. Das gleiche gilt auch, wenn man die Länge aller Hebelarme  $l_1$ ,  $l_2$  und  $l_3$  (bzw. die Produkte  $m_i l_i$ ) ändert. Die Anordnung ist im **stabilen Gleichgewicht**, sobald sich der **Schwerpunkt unterhalb der Drehachse** befindet.

Wenn sich umgekehrt der **Schwerpunkt oberhalb des Aufhängepunktes** befindet, ist die Anordnung im **labilen Gleichgewicht**. Jede Störung führt zu einem Anwachsen des Drehmoments, die Anordnung kippt, sofern die Form des Körpers dies zulässt. Wir demonstrieren den Effekt am **”schiefen Haus”**, das in Abb. 5.10 skizziert ist.

Das stabile Gleichgewicht verlangt, dass der Schwerpunkt einer frei drehbaren Anordnung von Massenpunkten unterhalb der Drehachse liegt. Dies erlaubt, den **Schwerpunkt** auch von kompliziert geformten starren Körpern zu **bestimmen**: Wir hängen den Körper an einem beliebigen Punkt auf, der nicht der Schwerpunkt sein soll. Der Körper wird sich

<sup>2</sup>Die x-Koordinate des Schwerpunkts ist  $-l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 \cos \alpha m_3 = -l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_2 m_2 = 0$  (Hebelbedingung).



dann so ausrichten, dass der Schwerpunkt unterhalb des Aufhängepunkts liegt. Wiederholen wir dies für drei nicht in einer Ebene liegende Aufhängepunkte und "zeichnen" jeweils eine Gerade in z-Richtung durch den Aufhängepunkt, so ist der Schwerpunkt gerade der Kreuzungspunkt der drei Geraden.

Was passiert nun der **Körper genau im Schwerpunkt gelagert** wird?

Ganz allgemein gilt:

$$\vec{D} = \sum_i \vec{D}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \quad (5.15)$$

Wir setzen für  $\vec{F}_i$  explizit die Schwerkraft  $\vec{F}_i = -m_i g \vec{e}_z$  ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= -g \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{e}_z \\ &= -g \sum_i \{m_i y \vec{e}_x - m_i x \vec{e}_y\} \\ &= -gM \sum_i \{R_y \vec{e}_x - R_x \vec{e}_y\} \end{aligned} \quad (5.16)$$

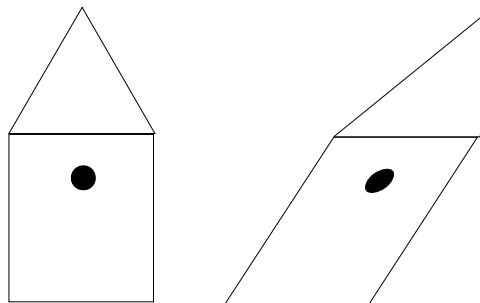


Abbildung 5.10: "Schiefes Haus". Der Schwerpunkt ist durch einen Kreis markiert. Die linke Anordnung ist stabil. Das Haus kippt, sobald der Schwerpunkt außerhalb des rechten unteren Hausecks (=Drehachse) liegt (rechte Anordnung).

Hierbei sind  $R_x$  und  $R_y$  die x- bzw. y-Koordinate des Schwerpunktsvektors und  $M$  die Gesamtmasse. Nun hatten wir aber den Körper im Schwerpunkt gelagert, d. h. es ist  $R_x = R_y = 0$  und damit ist auch  $\vec{D} = 0$ . Bei Lagerung im Schwerpunkt wirken keine Drehmomente auf den Körper, er ist im indifferenten Gleichgewicht<sup>3</sup>.

Wir nutzen nun die Hebelgesetze, um das **Prinzip der Balkenwaage** zu beschreiben. Diese Waage ist in Abb. 5.11 skizziert. Anstelle der Massen  $m_1$  und  $m_2$  des zweiarmigen Hebels aus Abb. 5.7 haben wir jetzt Waagschalen gleicher Masse  $m$  angebracht. Auf der linken Schale liege die Masse  $\Delta m$ . Die beiden Hebelarme zu den Schalen seien gleich lang (Länge  $l$ ). Wir haben zusätzlich einen Zeiger der Länge  $l_z$ . Er habe die Masse  $m_z$ .

Auf die Drehachse wirken also drei Drehmomente.

$$\vec{D}_1 = -(m + \Delta m) \cdot gl \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_y \quad (5.17)$$

$$\vec{D}_2 = m \cdot gl \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_y \quad (5.18)$$

$$\vec{D}_3 = m_z \cdot gl_z \cdot \sin \alpha \cdot \vec{e}_y. \quad (5.19)$$

Das Gesamtdrehmoment verschwindet für:

$$(m + \Delta m) \cdot gl \cdot \sin \varphi - m \cdot gl \cdot \sin \varphi - m_z \cdot gl_z \cdot \sin \alpha = 0. \quad (5.20)$$

Nun ist  $\alpha + \varphi = 90^\circ$  und wir erhalten:

$$\Delta m \cdot l \cdot \cos \alpha = m_z l_z \sin \alpha \quad \text{oder} \quad \tan \alpha = \frac{\Delta m \cdot l}{m_z l_z} \quad (5.21)$$

<sup>3</sup>Dies gilt, solange wir den Körper um die Aufhängung kippen. Bezüglich einer Verschiebung der Aufhängung aus dem Schwerpunkt ist die Lagerung im allgemeinen labil.

Für kleine Winkel ist  $\tan \alpha \approx \alpha$  und wir erhalten:

$$\frac{\alpha}{\Delta m} = \frac{1}{m_z l_z}. \quad (5.22)$$

Diese Größe bezeichnet man auch als die **Empfindlichkeit** der Waage (Ausschlag pro Gewicht  $\Delta m$ ). Sie kann offensichtlich z. B. durch Verkürzung der Zeigerlänge  $l_z$  bequem gesteuert werden.

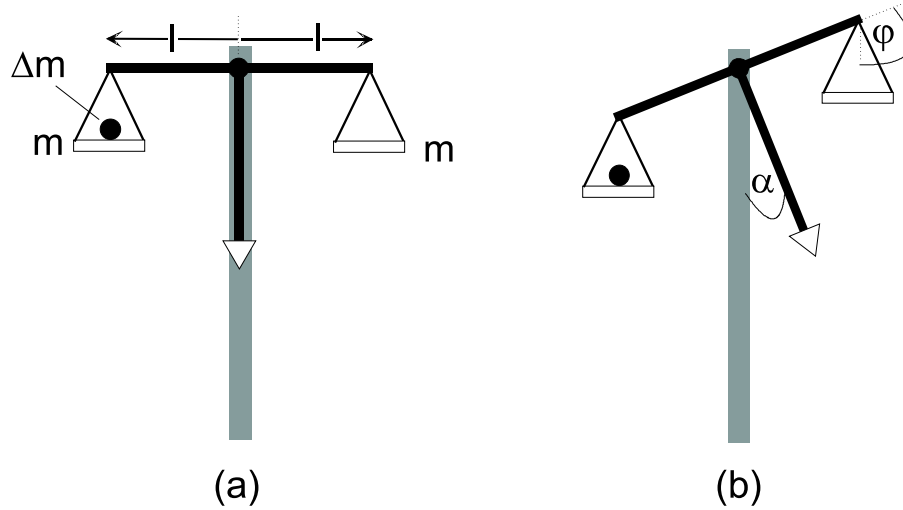


Abbildung 5.11: *Prinzip der Balkenwaage*

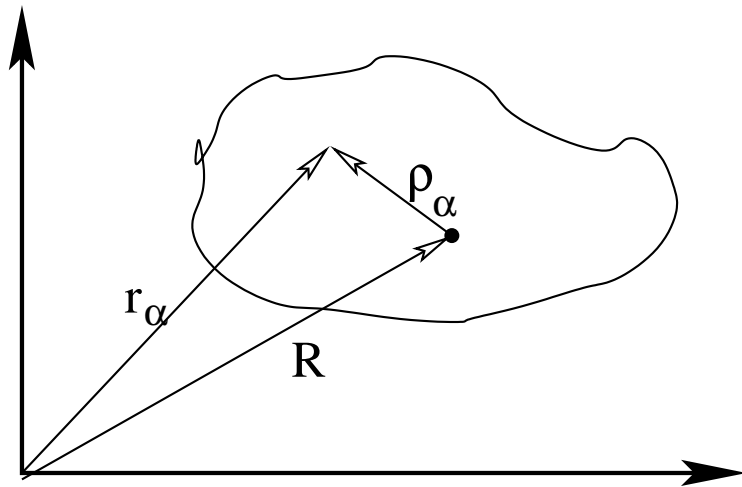


Abbildung 5.12: Koordinaten zur Berechnung der kinetischen Energie (siehe Diskussion im Text)

## 5.4 Kinetische Energie eines Starren Körpers

In diesem Abschnitt diskutieren wir, wie sich die Kinetische Energie eines Starren Körpers berechnet. Dazu gehen wir wieder davon aus, dass wir den Starren Körper wieder in Massenpunkte mit Massen  $m_\alpha$  zerlegen können und der Aufenthaltsort dieser Massenpunkte bezüglich eines Laborsystems durch Vektoren  $\vec{r}_\alpha$  gegeben ist (siehe Abb. 5.12). Wir nehmen ausserdem einen festen Punkt des starren Körpers heraus, der auf der Achse der augenblicklichen Drehbewegung liegt und gleichzeitig Koordinatenursprung eines körperfesten Koordinatensystems sein soll. Für den Ortsvektor eines Massenpunktes gilt dann

$$\vec{r}_\alpha = \vec{R} + \vec{\rho}_\alpha.$$

Dabei ist  $\vec{R}$  der Vektor für den Referenzpunkt im starren Körper und  $\vec{\rho}_\alpha$  der Ortsvektor des Massenpunktes im körperfesten Koordinatensystem. Zur Berechnung der kinetischen Energie benötigen wir die Geschwindigkeit der Massenpunkte im Laborsystem

$$\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \left( \frac{d\vec{\rho}_\alpha}{dt} \right)_{\text{Lab}}.$$

In einem nächsten Schritt wird nun ausgenutzt, dass

$$\left( \frac{d\vec{\rho}_\alpha}{dt} \right)_{\text{Lab}} = \underbrace{\left( \frac{d\vec{\rho}_\alpha}{dt} \right)_{\text{RK}}}_{=0} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_\alpha$$

Dabei ist  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit mit der sich der Körper um die aktuelle Drehachse dreht und die Geschwindigkeit der Massenpunkte im Referenzsystem des starren Körpers ist natürlich identisch Null. Damit ergibt sich für die Geschwindigkeit

$$\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_\alpha.$$

Die kinetische Energie des gesamten starren Körpers berechnet sich damit zu

$$\begin{aligned}
 T_{\text{Kin}} &= \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} \left( \frac{d\vec{r}_{\alpha}}{dt} \right)^2 \\
 &= \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} \left( \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{\alpha} \right)^2 \\
 &= \frac{M}{2} \left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right)^2 + \frac{d\vec{R}}{dt} \left( \vec{\omega} \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{\rho}_{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{\alpha})^2. \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

Diese kinetische Energie setzt sich also aus 3 Summanden bzw. Komponenten zusammen:

**1. Translation** Der erste Term in (5.23) entspricht der kinetischen Energie der Gesamtmasse des Starren Körpers,  $M$  vereint zu einer Punktmasse am Ort des Referenzpunktes, charakterisiert durch den Ortsvektor  $\vec{R}$ . Man bezeichnet diesen Beitrag als die kinetische Energie der Translationsbewegung.

**2. Rotation** Für die Diskussion des dritten Terms in (5.23) betrachten wir den Betrag des Vektors  $|\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{\alpha}|$ . Der Betrag dieses Vektors entspricht dem Abstand des Massenpunktes  $\alpha$  von der Drehachse multipliziert mit dem Betrag der Winkelgeschwindigkeit. Setzt man dieses Ergebnis in den dritten Term von (5.23) ein und beachtet die Definition des Trägheitsmomentes für eine Drehung um die Drehachse  $I_{\omega}$ , so ergibt dieser dritte Term:

$$\frac{1}{2} I_{\omega} \omega^2$$

Wir bezeichnen diesen Beitrag als kinetische Energie der Rotationsbewegung

**3. Mischterm** Neben diesen beiden Termen tritt im allgemeinen Fall noch der Mischterm, der zweite Term in (5.23) auf. Dieser Mischterm verschwindet natürlich, wenn der Referenzpunkt ruht

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = 0,$$

also eine reine Rotation um die Drehachse stattfindet ohne jede Translation. Der Mischterm verschwindet aber auch, wenn der Schwerpunkt des starren Körpers auf der Drehachse liegt. In diesem Fall definieren wir den Schwerpunkt als den Koordinatenursprung des körperfesten Koordinatensystems und es gilt daher, dass

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{\rho}_{\alpha} = 0.$$

Als Beispiel wollen wir nun die Bewegung eines Zylinders betrachten, der, wie in Abb. 5.13 eine schiefe Ebene herunterrollt. Am Anfang befindet er sich in Ruhe auf der Höhe  $h$  und besitzt also die potenzielle Energie  $Mgh$  wobei  $M$  die Masse des Zylinders und  $g$  die Beschleunigung durch die Erdanziehung darstellt. Am Fußpunkt der schiefen Ebene ist diese potenzielle Energie vollständig in kinetische Energie umgesetzt. Da die Rollbewegung um die Drehachse erfolgt, die (bei homogener Dichte des Zylinders) durch den Schwerpunkt des Zylinders verläuft, entfällt der oben diskutierte Mischterm der Bewegung und die

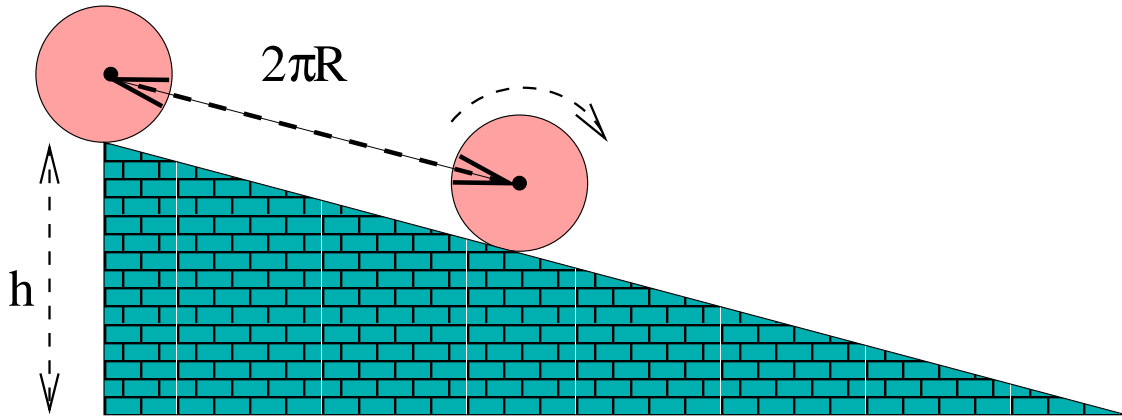


Abbildung 5.13: Rollbewegung eines Zylinders auf einer schiefen Ebene (siehe Diskussion im Text)

kinetische Energie setzt sich nur aus der Energie der Translation und der der Rotation zusammen:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2.$$

Dabei bezeichnet  $v$  die Geschwindigkeit der Translationsbewegung. Zwischen dieser Geschwindigkeit der Translationsbewegung und der Drehgeschwindigkeit  $\omega$  gibt es nun noch eine Verbindung, die Zwangsbedingung für die Rollbewegung. In der Zeit  $T$ , in der sich der Zylinder einmal um die eigene Achse dreht, rotiert er um den Winkel  $2\pi$ . Gleichzeitig legt er den Weg  $2\pi R$  zurück, wobei  $R$  der Radius des Zylinders ist. Es gilt also

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{und} \quad v = \frac{2\pi R}{T}.$$

Hieraus können wir herleiten

$$\omega = \frac{v}{R},$$

was, eingesetzt in (5.4) liefert

$$Mgh = \frac{1}{2} \left( M + \frac{I_z}{R^2} \right) v^2.$$

Nachdem der Körper die Höhe  $h$  abgerollt ist, erhalten wir für seine Geschwindigkeit:

$$v_{\text{end}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I/(MR^2)}} \quad (5.24)$$

Nun gilt für einen Vollzylinder:  $I = MR^2/2$  und für einen Hohlzylinder  $I = MR^2$ .

Wir erhalten für diese beiden Körper:

$$v_{\text{end}} = \sqrt{\frac{2gh}{1.5}} \quad (\text{Vollzylinder}) \quad (5.25) \quad v_{\text{end}} = \sqrt{\frac{2gh}{2}} \quad (\text{Hohlzylinder}) \quad (5.26)$$

was einen Faktor  $\sqrt{1.5} \approx 1.225$  bzw.  $\sqrt{2} \approx 1.41$  geringer ist als die Endgeschwindigkeit eines nichtrotierenden Körpers.

In unserem Versuch ist  $h = 21$  cm, was für einen **nichtrotierenden Körper** zu  $v_{end} \approx 2.03$  m/s führt, für den **Vollzylinder** zu 1.66 m/s und für den **Hohlzylinder** zu 1.43 m/s.

Man beachte ferner, dass in die obigen Beziehungen weder der Radius noch die Masse des Zylinders einging, sondern nur sein "innerer" Aufbau (d. h. hohl oder voll).

Grundsätzlich kann man nun aus dem Abrollverhalten eines Körpers mit unbekanntem inneren Aufbau sein Trägheitsmoment bestimmen und daraus gerade auf seinen inneren Aufbau Rückschlüsse ziehen.

Wir hatten dies an zwei verschlossenen Zylindern gleicher Masse und gleicher äußerer Form demonstriert. Der langsamere der beiden Zylinder war ein Hohlzylinder, bei dem schnelleren war der größte Teil seiner Masse in der Nähe der Drehachse konzentriert, so dass er nahezu die Endgeschwindigkeit eines nichtrotierenden Körpers erreicht.

Wir hatten noch zwei weitere Zylinder mit abrollen lassen, die eine sehr seltsame Bewegungsform zeigten: Ein Zylinder hatte eine "**Unwucht**", so dass dessen Schwerpunkt nicht auf der Drehachse lag. Er bewegt sich extrem unregelmäßig die schiefe Ebene herab. Im zweiten Zylinder war entlang der Rotationsachse ein Gummiband gespannt, an dem eine Masse  $m$  angehängt war. Wenn der Zylinder bei entspanntem Gummiband anrollt, verdrillt sich das Band und erzeugt ein Drehmoment auf die Masse. Diese bleibt zunächst in Ruhe, bis ein kritisches Drehmoment erreicht ist und rollt dann im Innern des Zylinders ab. Als Konsequenz beginnt die Dose, zurückzurollen (s. Abb. 5.14)

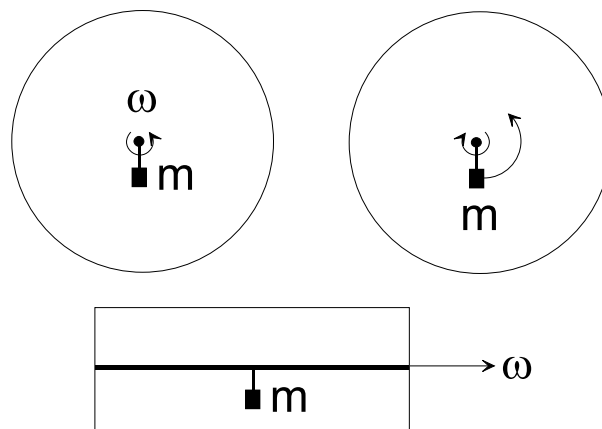


Abbildung 5.14: "Rückrollender Zylinder" mit eingebautem Gummiband. Unten: Seitenansicht. Oben links: nur die Dose rollt und spannt das Gummiband. Oben Rechts: Masse rotiert und Dose rollt zurück.

Eine weitere "Spielerei", die wir kurz angesprochen haben, ist das "Wackelholz" (Abb. 5.15). Es sieht äußerlich sehr symmetrisch aus, hat aber in seinem Inneren eine Unwucht, die durch die beiden Kreise (zusätzliche Massen) in Abb. 5.15 angedeutet sind. Bringt man das Holz entlang seiner Längsachse zum Schaukeln, dann kippt das Holz in der Nähe seiner Umkehrpunkte in Richtung der zusätzlichen Masse. Als Konsequenz rotiert das Holz im Uhrzeigersinn. Dreht man das Holz im Uhrzeigersinn, so bleibt diese Drehung stabil. Bei

Drehung gegen den Uhrzeigersinn führen immer vorhandene leichte Schaukelbewegungen zur Abbremsung der Drehung und schließlich zur Umkehr des Drehsinns.

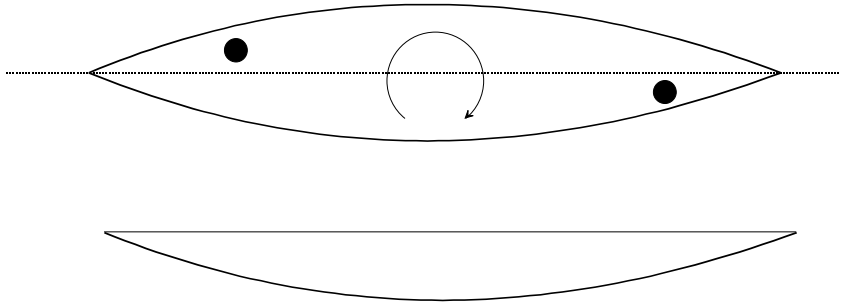


Abbildung 5.15: "Wackelholz". Oben: Blick von oben; unten: Seitenansicht





## 5.5 Rotationen um freie Achsen; Kreisel

Wir betrachten jetzt frei rotierende Körper.

Das erste Objekt ist ein Quader. Seine Hauptträgheitsachsen verlaufen wie in Abb. 5.16 angezeichnet. Die Hauptträgheitsmomente seien  $I_1 < I_2 < I_3$ . Wirft man den Quader, so stellt sich heraus, dass er beim Wurf um die Achsen 1 und 3 stabil rotiert, dagegen nicht um die Achse 2 (s. Abb 5.17).

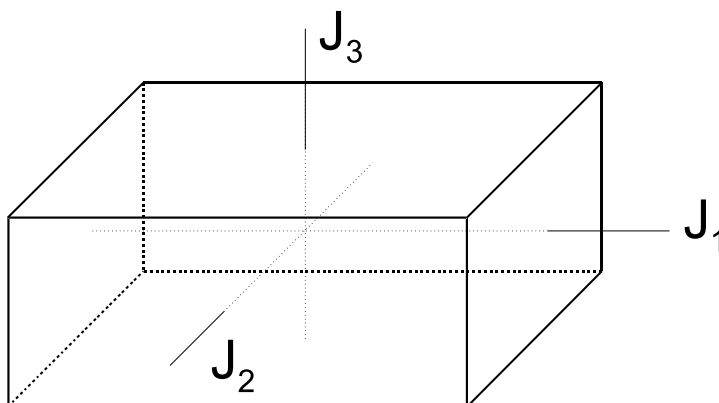


Abbildung 5.16: Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente eines Quaders

Ganz allgemein lässt sich zeigen (ohne Beweis), dass für  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$  **freie Rotationen um die Hauptträgheitsachsen mit dem größten oder dem kleinsten Trägheitsmoment stabil** sind, Rotationen **um das mittlere Hauptträgheitsmoment dagegen labil**.

Sind bei einem rotationssymmetrischen Körper **zwei Hauptträgheitsmomente gleich** (z. B.  $I_2 = I_3$ ), so ist **nur die Rotation um die Symmetrieachse**, d. h. um  $I_1$  **stabil**.

Wir demonstrieren dies durch die Rotation einer Ringkette und eines Holzrings, die mittels eines rotierenden Seils angetrieben werden (vgl. "Lasso"). Sie rotieren stabil um die Symmetrieachse. Rotiert man ein (gekochtes) Ei um eine Querachse, so richtet es sich nach einiger Zeit auf und rotiert um die Längsachse.

Man kann dies auch durch ein Maxwell-"Rad" demonstrieren, dessen "Räder" zu beiden Seiten des aufgewickelten Fadens Quader sind. Sind die Quader so montiert, dass sie um  $I_2$  rotieren müssen, kann das Maxwellrad im allgemeinen nicht stabil abrollen. Dies gelingt aber doch, wenn beide Quader um  $90^\circ$  gegeneinander verdreht sind, so dass sie parallel zur Drehachse betrachtet

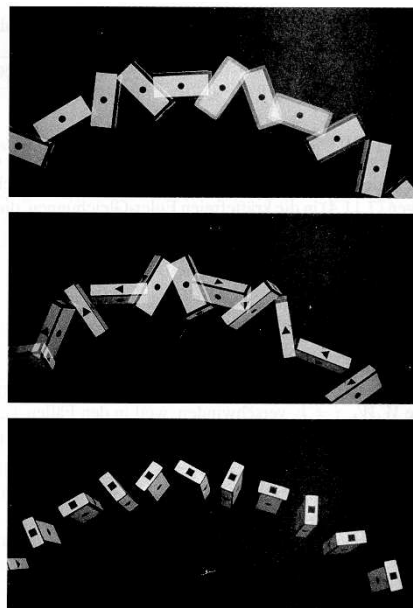


Abbildung 5.17: Wurf eines Quaders (aus: Brand-Dahmen, Mechanik, Abb. 7.9)

ein Kreuz bilden. Diese Anordnung ist symmetrisch genug, dass das Rad stabil abrollen kann.

### Kreisel

Eine besonders oft genutzte Anordnung rotationsymmetrischer drehender Körper ist der Kreisel, der um einen Auflagepunkt rotiert. Lagert man den Kreisel im Schwerpunkt, so spricht man vom ”**kräftefreien symmetrischen Kreisel**”, andernfalls vom ”**schweren Kreisel**”.

Die Symmetrieachse des Kreisels wird **Figurenachse** genannt. Wir wollen sie mit  $\vec{f}$  bezeichnen. Neben dieser Achse sind im Folgenden noch die **Rotationsachse**  $\vec{\omega}$  und die Richtung des **Drehimpulses**  $\vec{L}$  wichtig. Die drei Größen  $\vec{f}$ ,  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  können, müssen aber nicht in die gleiche Richtung zeigen.

Einen kräftefreien symmetrischer Kreisel kann man beispielsweise durch **kardanische Aufhängung** oder durch **Luftkissen-Lagerung** erhalten (Abb. 5.18).

Lässt man den kräftefreien symmetrischer Kreisel schnell rotieren, so zeigen  $\vec{f}$ ,  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  in die gleiche Richtung. Die Richtung von  $\vec{L}$  bleibt aber im Raum erhalten, da keine Drehmomente auf den Kreisel wirken, so dass auch die Figurenachse unabhängig von der Rotation des ”Außensystems” immer in die gleiche Richtung weist. Dieses Prinzip wird in Flugzeugen und Schiffen als ”**Künstlicher Horizont**” verwendet.

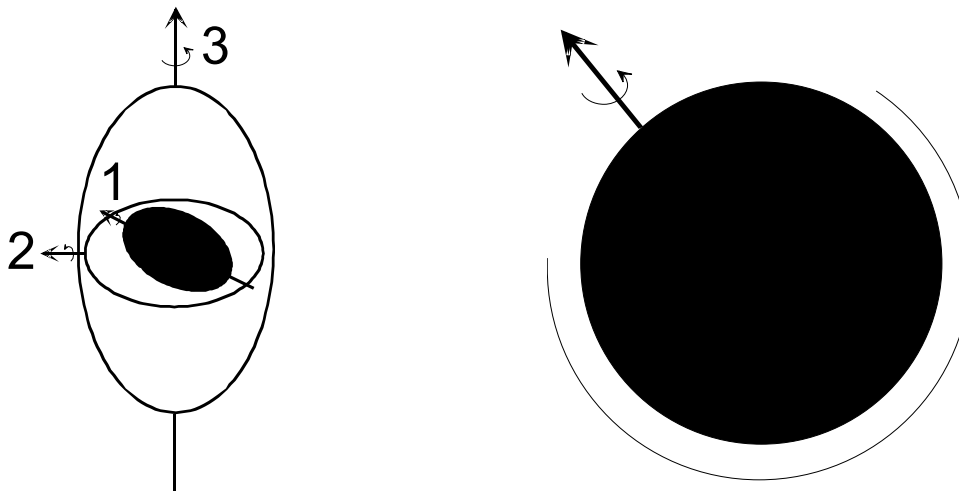


Abbildung 5.18: *Kräftefreier symmetrischer Kreisel: kardanische Aufhängung (links) und Lagerung im Luftkissen (rechts).*

Drückt man nun sanft gegen den Kreisel und bewirkt dadurch eine **langsame Änderung** der Richtung des **Drehimpulses**, so werden  $\vec{f}$  und  $\vec{\omega}$  mitgenommen, bleiben also parallel zu  $\vec{L}$ .

Schlägt man dagegen gegen den Kreisel und bewirkt so eine **schnelle Änderung** des **Drehimpulses**, so sind  $\vec{f}$ ,  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  nicht mehr parallel zueinander. Jetzt rotieren die Figurenachse und  $\vec{\omega}$  um  $\vec{L}$ . Die entsprechende Drehung heißt ”**Nutation**” oder ”reguläre Präzession” und erfolgt mit der ”**Nutationsfrequenz**”  $\vec{\omega}_N$ , deren Größe wir an Hand der Abb. 5.19 ableiten können.

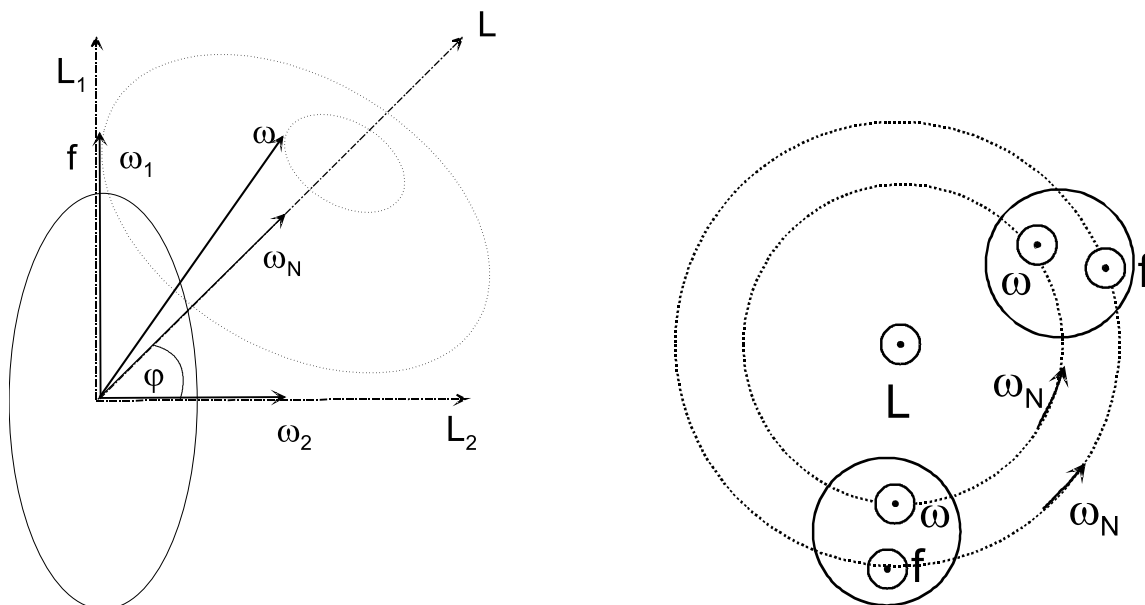


Abbildung 5.19: Nutation eines Kreisels, der sich nicht um die Figurenachse dreht.

Wir zerlegen zunächst  $\vec{\omega}$  in eine Komponente  $\vec{\omega}_1$  parallel zur Figurenachse und in eine Komponente  $\vec{\omega}_2$  senkrecht dazu,  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ . Analog können wir auch  $\vec{L}$  in Komponenten parallel und senkrecht zur Figurenachse zerlegen,  $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ . Nun gilt  $\vec{L}_1 = I_1 \vec{\omega}_1$  und  $\vec{L}_2 = I_2 \vec{\omega}_2$ . Da aber  $I_1 \neq I_2$  ist, sind nun  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  nicht mehr parallel. Auf Grund der Drehimpulserhaltung bleibt  $\vec{L}$  fest im Raum orientiert und  $\vec{\omega}$ , sowie  $\vec{f}$  drehen sich um  $\vec{L}$ . Die Nutationsfrequenz  $\vec{\omega}_N$  zeigt in Richtung von  $\vec{L}$ . Aus der Abb. 5.19 entnehmen wir:

$$\vec{\omega}_N \cos \varphi = \vec{\omega}_2 = \frac{\vec{L}_2}{I_2} = \frac{\vec{L} \cos \varphi}{I_2}. \quad (5.27)$$

Hieraus folgt:

$$\vec{\omega}_N = \frac{\vec{L}}{I_2}. \quad (5.28)$$

Man beachte, dass sich auch  $\vec{f}$  relativ zu  $\vec{\omega}$  mit der Nutationsfrequenz dreht. Dieser Effekt lässt sich dadurch demonstrieren, dass eine Scheibe mit 3 unterschiedlichen Farbsegmenten mit  $\vec{f}$  mitrotiert. Das Auge, das über volle Umdrehungen der Scheibe mittelt, erkennt jeweils die Farbe, durch die  $\vec{\omega}$  gerade zeigt.

Als nächstes wollen wir zum **kardanisch aufgehängten Kreisels** der Abb. 5.18 zurückkehren und **Drehachse 2 blockieren**. Der Kreisels kann jetzt um seine Figurenachse 1 rotieren und um die Achse 3 kippen. Rotieren wir nun die Aufhängung des Kreisels um eine Drehachse  $\vec{\omega}_D$ , die parallel zur Achse 3 sein soll, so wirkt auf den Kreisels ein Drehmoment parallel zu  $\vec{\omega}_D$  das via  $\dot{\vec{L}} = \vec{D}$  eine Änderung von  $\vec{L}$  in Richtung  $\vec{\omega}_D$  bewirkt. Da  $\vec{\omega}_D$  wesentlich geringer ist als die Drehung  $\vec{\omega}$  des Kreisels um seine Figurenachse, bleiben  $\vec{f}$ ,  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  dabei parallel. Die Figurenachse des Kreisels und dessen Winkelgeschwindigkeit zeigen nach einiger Zeit parallel zu  $\vec{\omega}_D$ .

Wir können uns die Drehung des Kreisels auch dadurch veranschaulichen, dass wir uns in ein Bezugssystem begeben, das mit  $\vec{\omega}_D$  rotiert. Dann wirken auf den Kreisel Corioliskräfte, die diesen zu  $\vec{\omega}_D$  hin kippen, siehe Abb. 5.20.

Auf diesem Effekt basiert der **Kreiselkompass**. Er stellt sich parallel zur Drehrichtung der Erde ein, zeigt also (bei geeigneter Markierung) nach "Norden".

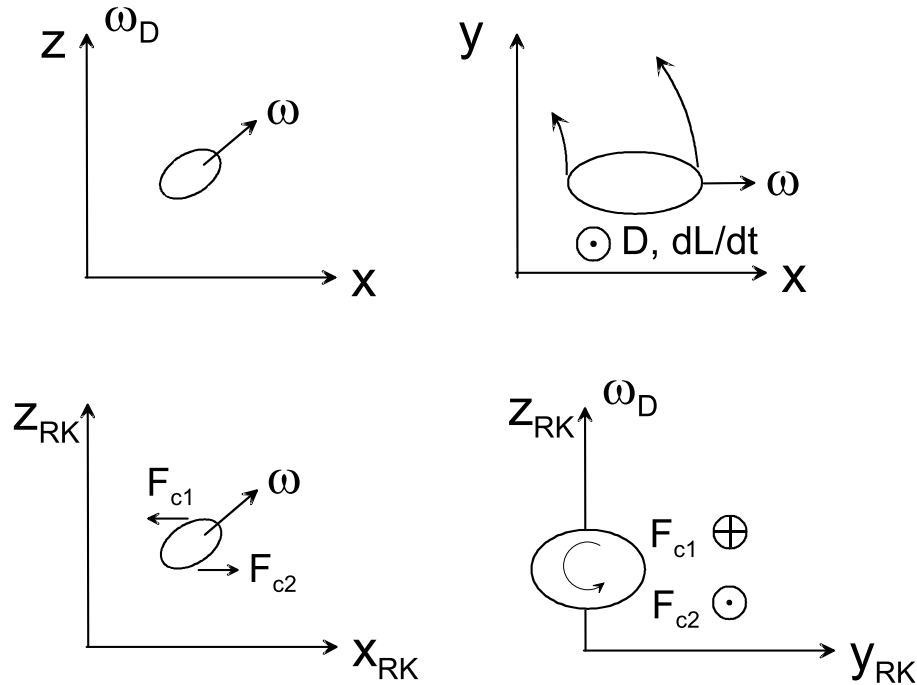


Abbildung 5.20: Kardanisich aufgehängter Kreisel mit blockierter Drehachse 2. Wird der Kreisel mit  $\vec{\omega}_D$  rotiert, so stellt sich  $\vec{\omega}$  parallel zu  $\vec{\omega}_D$ . Die beiden oberen Bilder sind im ruhenden Koordinatensystem, die beiden unteren im mit  $\vec{\omega}_D$  mitrotierenden System.  $F_{c1}$  und  $F_{c2}$  seien die zu Drehachse  $z_{RK}$  hin- bzw. wegzeigenden Anteile der Corioliskraft.

Was passiert, wenn der **Kreisel außerhalb des Schwerpunkts gelagert** ist, so dass die Schwerkraft ein Drehmoment auf diesen ausübt ("schwerer Kreisel", Abb. 5.21)? Es zeigt sich, dass der Kreisel keinesfalls umfällt, sondern  $\vec{f}$ ,  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$ , die parallel zueinander bleiben, senkrecht ausweichen. Der Kreisel rotiert um die  $z$ -Achse ("**Präzession**").

Es gilt hierbei:

$$\vec{\dot{L}} = \vec{D} = -mg(\vec{R} \times \vec{e}_z). \quad (5.29)$$

$\vec{R}$  ist der Ortsvektor vom Auflagepunkt des Kreisels zum Schwerpunkt,  $m$  sei die Masse des Kreisels. Nun ist  $\vec{L}$  (bei einer Links-Drehung des Kreisels) parallel zu  $\vec{R}$ . Damit ist  $\vec{\dot{L}}$  senkrecht zu  $\vec{L}$  und zur

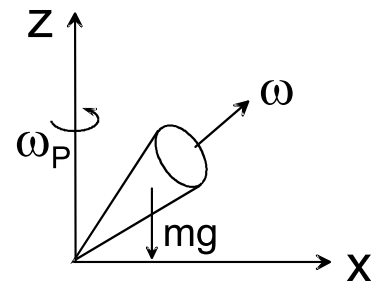


Abbildung 5.21: Präzedierender schwerer Kreisel

z-Richtung. Wir schreiben  $\vec{R}$  als  $\vec{R} = \frac{\vec{L}}{L} \cdot R$  und erhalten:

$$\dot{\vec{L}} = -\frac{mgR}{L}(\vec{L} \times \vec{e}_z) = \frac{mgR}{L} \begin{pmatrix} -L_y \\ L_x \\ 0 \end{pmatrix} = \omega_P \cdot \begin{pmatrix} -L_y \\ L_x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Diese Differentialgleichung wird beispielsweise gelöst<sup>4</sup> von  $L_x = L \cos \omega_p t$ ,  $L_y = L \sin \omega_p t$ , mit der Präzessionsfrequenz  $\omega_p = \frac{mgR}{L}$ , die interessanterweise unabhängig ist vom Winkel  $\varphi$  zwischen  $\vec{\omega}$  und der z-Achse (Etwas allgemeiner können wir auch  $D = mgR \sin \varphi$  rücksubstituieren und erhalten  $\omega_p = \frac{D}{L \sin \varphi}$ , was auch für andere Drehmomente anwendbar ist; falls  $D$  nicht proportional zu  $\sin \varphi$  ist, hängt die Präzessionsfrequenz auch von  $\varphi$  ab).

Diese paradoxe senkrecht-Ausweichen des Kreisels - man kann einen schnell drehenden Kreisel mit seiner Spitze sogar so in eine Seilschlinge legen, dass seine Figurenachse parallel zum Erdboden rotiert - lässt sich wiederum gut in einem Bezugssystem veranschaulichen, das mit  $\omega_p$  mitrotiert. Dann versuchen wiederum Corioliskräfte, den Kreisel zu kippen. Im Gegensatz zum Kreiselkompass, der im Schwerpunkt gelagert war, wirkt aber diesmal das durch die Schwerkraft verursachte Drehmoment dieser Kippung entgegen, so dass der Kreisel nicht um- bzw. herunterfällt.

Überlagert man weiterhin Nutations- und Präzessionsbewegungen, so spricht man von **”Nickschwingungen”** oder einer **”pseudoregulären Präzession”**.

Auch die Drehachse der **Erde**, die um  $66.5^\circ$  gegen die Bahnebene der Planeten und des Mondes geneigt ist, führt eine **Präzessionsbewegung** aus. Durch die Abplattung der Erde üben Sonne und Mond ein Drehmoment auf den **”Äquatorwulst”** aus. Die Drehachse der Erde weicht entsprechend aus und präzediert mit einer Periode von 25850 Jahren (**”Platonisches Jahr”**). Diese Präzessionsbewegung wurde bereits in der Antike durch Hipparch entdeckt. Auch die anderen Planeten tragen zu einer Präzession der Erdachse bei, mit entsprechend längeren Präzessionsperioden.

Es sei weiter angemerkt, dass die Präzession auch im atomaren Bereich eine große Rolle spielt. So haben beispielsweise Elektronen einen Eigendrehimpuls (Spin), der im äußeren Magnetfeld um die Richtung des angelegten Feldes präzediert. Hierbei ist das Drehmoment auf das Elektron proportional zum angelegten Feld Magnetfeld (**”Larmor-Präzession”** mit der **”Larmor-Frequenz”**, die proportional zum Feld ist).

Zum Abschluss betrachten wir noch einige spezielle Kreisel:

- der **”Stehaufkreisel”** wird angedreht wie in Abb. 5.22(a) dargestellt. Nach kurzer Zeit richtet sich der Kreisel auf und rotiert wie in Abb. 5.22(a). Dabei wandert offensichtlich der Schwerpunkt des Kreisels nach oben, d. h. der Kreisel gewinnt potentielle Energie. Als Konsequenz muss  $\omega$  und  $L$  abnehmen. Dass gerade die Anordnung (b) der stabile Zustand ist, lässt sich nur schwer anschaulich erklären.
- Das **”Levitron”** ist ein ferromagnetischer Kreisel, dessen **”Nordpol”** über dem **”Nordpol”** eines Permanentmagneten kreist. Diese Anordnung ist statisch labil; einer der Magneten würde sofort umklappen, so dass sich Nord- und Südpol gegenüberstehen. Die Kreiselsbewegung stabilisiert aber in gewissen Grenzen die Anordnung. Durch die Abstoßung der beiden Magneten schwebt der Kreisel.

<sup>4</sup>Wir können aus  $L_x$  und  $L_y$  auch zu einem komplexen Vektor  $l = L_x + iL_y$  zusammensetzen, der sich dann gemäß  $l(t) = l \cdot \exp(i\omega_p t)$  zeitlich entwickelt.

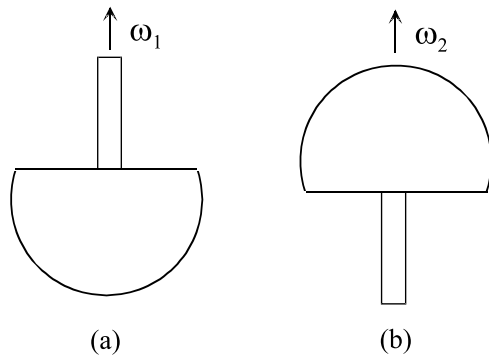


Abbildung 5.22: *Stehaufkreisel. (a): Anfangsposition, die auch ohne Drehung des Kreisels stabil ist. (b) stabile Position bei schneller Drehung des Kreisels.*

- Eine auch statisch stabile Anordnung lässt sich durch einen **Supraleiter** erreichen, der auf den Permanentmagneten gebracht wird. Im Supraleiter fließen sehr große Ringströme, die unabhängig von der Orientierung des Supraleiters so gerichtet sind, dass das von ihnen erzeugte Magnetfeld dem Feld des Permanentmagneten entgegen wirkt und dieses aus dem Supraleiter verdrängt. Diese Ströme realisieren letztlich die Kreiselbewegung, die den Supraleiter schweben lässt.

# Kapitel 6

## Thermodynamik und Wärmelehre

### 6.1 Definition und Freiheitsgrade

Im letzten Kapitel haben wir die Bewegung eines Starren Körpers betrachtet. Ein solcher starrer Körper bestand im Allgemeinen aus sehr vielen atomaren Teilchen. Durch die Zwangsbedingungen, dass der Abstand von jeweils zwei dieser Massenpunkte fest gegeben war, reduzierte sich jedoch die Zahl der Freiheitsgrade auf 6: 3 für den Ort und 3 für die Orientierung des Körpers.

In diesem Abschnitt wollen wir ein Vielteilchensystem betrachten, bei dem die Atome (Moleküle oder auch andere kleine Bestandteile) des Systems sich vollkommen unabhängig voneinander bewegen. Wir bezeichnen ein solches System als ein **Ideales Gas** und definieren dies durch:

*Ein Ideales Gas ist ein System aus  $N$  atomaren Teilchen, die elastisch aneinander stoßen und so miteinander Energie austauschen können. Darüber hinaus sollen sie aber keine Kräfte aufeinander ausüben.*

Das Problem besteht also nun darin, dass wir für eine große Anzahl von Teilchen, wenn wir also z.B. die Atome in einem Kubikzentimeter Luft betrachten, es praktisch unmöglich ist die Orte und Geschwindigkeiten so vieler Teilchen (von der Größenordnung der Loschmidt Zahl  $N \approx 6 \cdot 10^{23}$ ) zu registrieren, geschweige denn als Funktion der Zeit zu verfolgen. Wir müssen also nach anderen charakteristischen Kennzeichen oder Koordinaten für ein Ideales Gas suchen.

Dabei hilft uns, dass, wie wir im weiteren Verlauf dieses Abschnittes noch sehen werden, gerade für eine große Teilchenzahl  $N$  statistische Aussagen über Mittelwerte für die Observablen der einzelnen Atome sehr zuverlässige Ergebnisse liefern.

Als ein Beispiel für solch statistische Aussagen zur Frage wo sich ein Atom aufhält betrachten wir ein Volumen  $V$ , dass in zwei gleich große Teilvolumina  $V_1$  und  $V_2$  aufgeteilt sein soll. Die Beobachtungsgröße (Observable) ist die Teilchenzahldichte

$$\rho = \frac{N}{V}.$$

Nehmen wir nun mal an, dass  $N = 2$  Atome auf das Volumen verteilt werden sollen. Die Dichte ist dann

$$\rho = \frac{2}{V} = \frac{1}{V_1} = \frac{1}{V_2}.$$

Bei einer Verteilung der 2 Atome auf das Volumen  $V$  beziehungsweise die beiden Teilvolumina gibt es 4 Möglichkeiten

- 1) : 1 in  $V_1$ , 2 in  $V_1$
- 2) : 1 in  $V_1$ , 2 in  $V_2$
- 3) : 1 in  $V_2$ , 2 in  $V_1$
- 4) : 1 in  $V_2$ , 2 in  $V_2$

Von diesen 4 Möglichkeiten sind 2, nämlich Fall 2) und Fall 3), von der Art, dass beide Teilvolumina die gleiche mittlere Dichte aufweisen. Bei den beiden anderen Möglichkeiten haben wir aber Abweichungen von der mittleren Dichte und zwar Abweichungen von der Größe 100 Prozent des Mittelwertes. Wenn nun die Verteilung zufällig erfolgt, so sind alle 4 Realisierungsmöglichkeiten gleich wahrscheinlich. Wir beobachten also für den Fall  $N = 2$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 Prozent, dass die Abweichung der einzelnen Dichten vom statistischen Mittelwert 100 Prozent beträgt.

Wir wollen nun an diesem Beispiel zeigen dass der statistische Fehler bei einer solchen zufälligen Verteilung mit zunehmender Teilchenzahl geringer wird. Dazu betrachten wir den etwas allgemeineren Fall, dass das Volumen  $V$  in zwei Teilvolumina aufgeteilt ist von der Größe

$$V_1 = pV \quad \text{und} \quad V_2 = qV \quad \text{mit} \quad p + q = 1.$$

Bei einer zufälligen Aufteilung der Atome auf die Teilvolumina beträgt also die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom in  $V_1$  landet  $p$ , und die dass es in  $V_2$  landet  $q$ . Wie es sich für Wahrscheinlichkeiten gehört sind  $p$  und  $q$  positive Zahlen und kleiner gleich Eins.

Als nächstes beweisen wir nun den Satz über die **Binomialverteilung**:

*In einem bestimmten System sei die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen in einem Zustand zu finden gegeben durch  $p$  ( $p \leq 1$ ) und damit die Wahrscheinlichkeit diese Teilchen nicht in diesem Zustand zu finden durch  $q = 1 - p$ . In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit genau  $n$  Teilchen aus einer Gesamtzahl von  $N$  Teilchen in diesem Zustand zu finden gegeben durch die Binomialverteilung:*

$$P(n) = \frac{N!}{n! (N - n)!} p^n q^{N-n}$$

Zum Beweis dieses Satzes stellen wir uns vor, dass alle  $N$  Teilchen durchnummeriert sind. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Teilchen 1 bis  $n$  in dem bewussten Zustand sind, gegeben durch  $p^n$ . Die Wahrscheinlichkeit ausserdem die Teilchen  $n + 1$  bis  $N$  nicht in diesem Zustand zu finden ist gegeben durch das Produkt  $p^n q^{N-n}$ . Nun soll natürlich die Wahrscheinlichkeit  $P(n)$  von (6.1) nicht nur den Fall erfassen, dass gerade die bestimmten Teilchen 1 bis  $n$  in dem Zustand sind. Vielmehr müssen alle Fälle berücksichtigt werden, bei denen eine beliebige Gruppe von  $n$  aus  $N$  Teilchen gerade diese Bedingung erfüllt. Damit ist  $P(n)$  gegeben also durch das Produkt von  $p^n q^{N-n}$  mal die Zahl der Möglichkeiten  $n$



Teilchen aus  $N$  herauszugreifen. Wenn wir also nun noch beweisen, dass diese Zahl gegeben ist durch den Binomialkoeffizienten

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

so ist die Behauptung (6.1) bewiesen.

Den letzteren Teilbeweis führen wir nun durch vollständige Induktion über  $N$ . Die Behauptung läßt sich leicht überprüfen für den Induktionsanfang „ $N=1$ “: In diesem Fall brauchen wir nur die Fälle  $n=0$  und  $n=1$  zu betrachten. Im Fall  $(N=1, n=0)$  gibt es natürlich nur eine Möglichkeit  $n=0$  Teilchen aus  $N=1$  herauszugreifen und auch der Binomialkoeffizient (6.1) ergibt die Zahl 1 (Beachte:  $0! = 1$ ). Die gleiche Übereinstimmung erzielt man auch für den Fall  $(N=1, n=1)$ . Für den Induktionsschluss  $((N-1) \rightarrow N)$  unterscheiden wir die möglichen Arten  $n$  aus  $N$  auszuwählen danach ob das Teilchen  $N$  in dem fraglichen Zustand ist oder nicht. Im ersten Fall (Teilchen  $N$  ist in dem Zustand) haben wir also  $(n-1)$  aus  $(N-1)$  Teilchen in den Zustand gebracht im zweiten Fall (Teilchen  $N$  ist nicht in dem Zustand)  $n$  aus  $(N-1)$ . Da aber für  $N-1$  Teilchen nach Induktionsvoraussetzung die Behauptung gilt, ist die Gesamtzahl der Möglichkeiten gegeben durch

$$\begin{aligned} \binom{N-1}{n-1} + \binom{N-1}{n} &= \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-1-(n-1))!} + (N-1)!n!(N-1-n)! \\ &= \frac{(N-1)!n + (N-1)!(N-n)}{n!(N-1-n+1)!} \\ &= \binom{N}{n} \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis für die Binomialverteilung (6.1) erbracht.

Als Test können wir nun auch sofort überprüfen, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(n)$  richtig normiert ist. Summieren wir nämlich die  $P(n)$  über alle möglichen  $n$ , so muss insgesamt die Wahrscheinlichkeit 1 herauskommen, denn die Summe der Wahrscheinlichkeiten für all möglichen Realisierungen muss 1 sein, da wir ja das System immer in einem seiner möglichen Zustände vorfinden werden. Nun gilt aber auch

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N P(n) &= \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \\ &= (p+q)^N = (p+1-p)^N = 1 \end{aligned}$$

Das heisst die Verteilung  $P(n)$  ist richtig normiert.

Mit Hilfe der Binomialverteilung können wir nun die Wahrscheinlichkeiten angeben, mit der wir bei unserem Beispiel der Verteilung von  $N$  Atomen auf die Teilvolumina  $n_1$  Teilchen im Teilvolumen  $V_1$  finden. Diese Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind in Abbildung 6.1 für  $p=q=1/2$  angegeben für  $N=4, 10$  und  $40$ .

Man sieht an dieser Figur, dass  $P(n)$  mit wachsendem  $N$  ein immer ausgeprägteres Maximum bei  $\bar{n}_1 = N/2$  zeigt. Aus der Binomialformel (6.1) wird aber nun auch klar, woher dieses Maximum kommt. Der Faktor  $p^n q^{N-n}$  ist für  $p=q=1/2$  unabhängig von  $n$ . Das

Gauss-Verteilung und Binomial-Verteilung

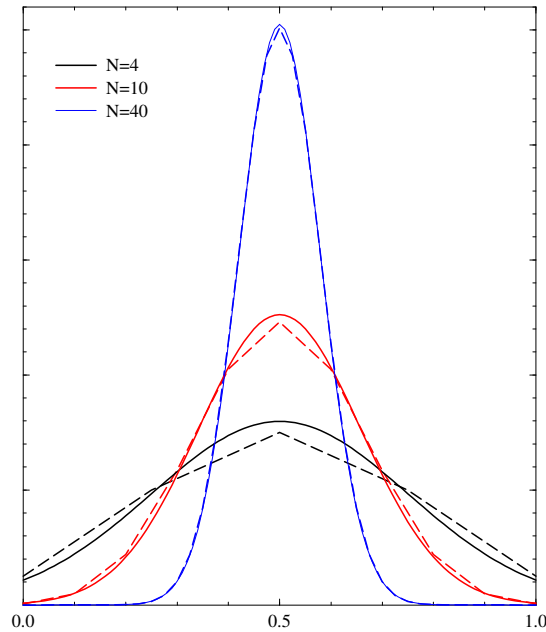


Abbildung 6.1: Die Binomialverteilung (6.1) für  $N = 4, 10$  und  $40$  ist aufgetragen als Funktion von  $n/N$  für den Fall  $p = q = 1/2$ . Diese Ergebnisse der Binomialverteilungen (Gestrichelte Linien) werden verglichen mit den entsprechenden Gauß-Verteilungen (durchgezogene Linien). Um einen direkten Vergleich zu ermöglichen, sind die Binomialverteilungen jeweils mit einem Faktor  $N$  versehen.

Maximum wird also durch den Binomialkoeffizienten bewirkt, d.h. dadurch, dass es eben sehr viel mehr Möglichkeiten gibt die Teilchen gleichmäßig zu verteilen als etwa die nur eine Möglichkeit alle Teilchen in das Teilvolumen  $V_1$  unterzubringen.

Um nun etwas genauer zu verstehen warum das Maximum der Wahrscheinlichkeitsverteilung mit zunehmendem  $N$  immer ausgeprägter wird, beweisen wir noch den Satz über die **Normal-** oder auch **Gauß-Verteilung**:

Für große Teilchenzahlen  $N$  geht die Binomialverteilung

$$P(n) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi pqN}} e^{-\frac{(n-n_0)^2}{2pqN}}$$

über, die an der Stelle  $n_0 = pN$  den Maximalwert annimmt.

Zum Beweis dieser Gauß-Verteilung führen wir zunächst einmal die Variable

$$x = \frac{n}{N} \quad , \quad x_0 = \frac{n_0}{N}$$

ein und betrachten eine Funktion  $w(x)$ , die an den diskreten Werten für  $x$ , die in (6.1) definiert sind, mit  $P(n)$  identisch ist und für Werte von  $x$  dazwischen kontinuierlich fortgesetzt ist. Für diese Funktion  $w(x)$  betrachten wir die Taylor - Entwicklung von  $\ln w(x)$

um die Stelle des Maximums  $x_0$

$$\ln w(x) = \ln w(x_0) + B_1(x - x_0) + \frac{1}{2}B_2(x - x_0)^2 + \dots$$

mit

$$B_k = \frac{d^k \ln w}{dx^k}(x_0)$$

An den durch (6.1) definierten Werten von  $x$  gilt:

$$\ln w(x) = \ln N! - \ln n! - \ln(N - n)! + n \ln p + (N - n) \ln q$$

Benutzt man nun die Näherung

$$\begin{aligned} \frac{d \ln n!}{dn} &\approx \frac{\ln n! - \ln(n-1)!}{n - (n-1)} \\ &= \ln \frac{n!}{(n-1)!} = \ln n \end{aligned}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d \ln w(n(x))}{dx} &= \frac{d \ln w}{dn} \frac{dn}{dx} \\ &= (-\ln n + \ln(N - n) + \ln p - \ln q) N \end{aligned} \quad (6.1)$$

Damit berechnet sich der Koeffizient  $B_1$  gemäß der Definition (6.1) zu

$$B_1 = N \ln \frac{(N - n_0)p}{n_0q} = N \ln \frac{N(1-p)p}{Npq} = 0$$

wobei berücksichtigt wurde, daß  $n_0 = Np$  und  $(1-p) = q$ . Diese Gleichung bestätigt also, daß die Funktion  $w(x)$  und damit auch  $\ln w(x)$  ein Extremum an der Stelle  $x = x_0$  besitzt. Die zweite Ableitung von  $\ln w(x)$  nach  $x$  ergibt sich durch die erneute Ableitung von (6.1) zu

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \ln w}{dx^2} &= N^2 \frac{d}{dn} (-\ln n + \ln(N - n) + \ln p - \ln q) \\ &= N^2 \left( -\frac{1}{n} - \frac{1}{(N - n)} \right) \end{aligned}$$

so, daß

$$B_2 = -\frac{N^2}{Np} - \frac{N^2}{N(1-p)} = -\frac{N}{pq}$$

Dies bestätigt, dass die Funktion  $\ln w(x)$  an der Stelle  $x_0$  ein Maximum hat und erlaubt uns durch Einsetzen von  $B_1$  aus (6.1) und  $B_2$  aus (6.1) in (6.1)  $\ln w$  anzunähern durch

$$\ln w(x) \approx \ln w(x_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{-N}{pq} \right) (x - x_0)^2$$

Damit gilt also

$$w(x) = w_0 e^{-\frac{N(x-x_0)^2}{2pq}} = w_0 e^{-\frac{(n-n_0)^2}{2pqN}}$$

Den Wert für  $w_0$  gewinnen wir nun aus der Normierungsbedingung für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $w(x)$ , nämlich

$$\begin{aligned} 1 &= w_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2pqN}} d\eta \\ &= w_0 \sqrt{2\pi pqN} \end{aligned}$$

Löst man diese Gleichung nach  $w_0$  auf, setzt das Ergebnis in (6.1) ein, so erhält man die Gauß-Verteilung in (6.1).

Die Approximation der Binomialverteilung durch die Gauß-Verteilung von (6.1) sollte für große Werte von  $N$  gut funktionieren. Denn der Abbruch der Taylorentwicklung (6.1) ist nur für kleine Werte  $x - x_0$  gerechtfertigt. Für große  $N$  benötigen wir aber die Verteilung nur bei kleinen Werten von  $x - x_0$ , da bei großen Abweichungen  $x - x_0$  die Verteilung auf Null absinkt. In Figur 6.1 vergleichen wir die Binomialverteilungen (gestrichelte Linien) für  $N = 4, 10$  und  $40$  mit den entsprechenden Gauß-Verteilungen (durchgezogene). Dabei stellt man fest, daß die Näherung aber bereits recht brauchbare Ergebnisse für  $N = 4$  beziehungsweise  $N = 10$  liefert und für  $N = 40$  der Unterschied nicht mehr darstellbar ist.

Die Breite der Gauß-Verteilung, das heißt der Wert für  $(x - x_0)$  bei dem die Wahrscheinlichkeit auf den Wert  $w_0/e$  abgefallen ist, ist gegeben durch

$$(x - x_0)^2 = \frac{2pq}{N} \quad \text{also} \quad (x - x_0) = \sqrt{\frac{2pq}{N}}.$$

Damit fällt also die relative Breite mit zunehmendem  $N$  ab. Genau genommen ist dieser Abfall proportional  $1/\sqrt{N}$ . Dies erklärt noch einmal, dass die Maxima der betrachteten Gauß-Verteilungen mit zunehmender Teilchenzahl immer ausgeprägter werden und somit die Vorhersagen für solche statistischen Beobachtungsgrößen, wie wir sie hier diskutiert haben, mit wachsendem  $N$  immer präziser werden. Dies gilt für Teilchenzahlen aber auch für andere Beobachtungsgrößen, wie z.B. die mittlere Energie eines makroskopischen Systems, die sich bei bekannter Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(i)$  für die verschiedenen Zustände  $i$  aus den Energien  $\epsilon_i$  dieser Zustände ausrechnen lässt zu

$$\bar{\epsilon} = \sum_i \epsilon_i P(i)$$

Wir wollen nun die Situation betrachten, dass die  $N$  Atome eines Idealen Gases sich zum Beginn unseres Gedankenexperimentes alle im Teilvolumen  $V_1$  aufhalten, das durch einen Schieber vom Teilvolumen  $V_2$  getrennt sein soll. Zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_0$  soll nun dieser Schieber geöffnet werden, so dass sich alle Teilchen auf die beiden Volumina verteilen können (siehe Abb. 6.2).

Nach einer gewissen Zeit werden sich die Atome gleichmässig auf die beiden Teilvolumina verteilen. Das bedeutet, dass wir mit großer Wahrscheinlichkeit eine Verteilung der Atome auf die beiden Volumina erhalten, bei der der Anteil der Atome in  $V_1$  sehr nahe an dem statistischen Anteil  $n_1 = pN$  ist. Dies gilt insbesondere, wenn die Gesamtzahl der Atome  $N$  sehr groß ist. Wir sagen, das System befindet sich im **Statistischen Gleichgewicht**. Man bezeichnet diese Situation auch häufig als **Thermisches Gleichgewicht**.

Wir wollen dieses Gedankenexperiment heranziehen um einige allgemeine Eigenschaften des Statistischen Gleichgewichtes zu erläutern:

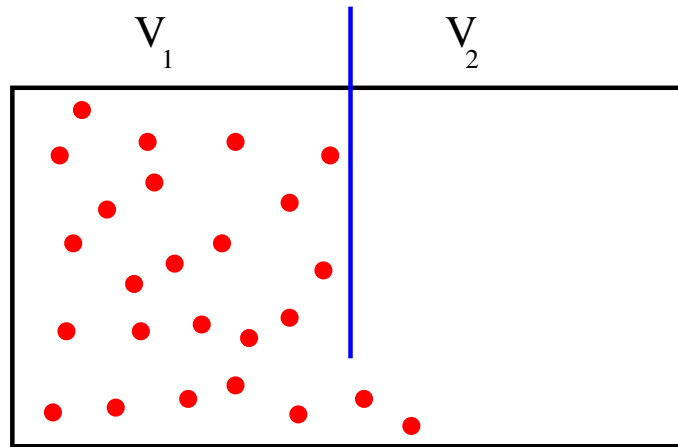


Abbildung 6.2: Ein System bestehend aus  $N$  Teilchen in einem Volumen  $V$ . Durch einen beweglichen Schieber kann das Volumen in zwei Teile  $V_1$  und  $V_2$  unterteilt werden. Zur Zeit  $t = 0$  befinden sich alle Teilchen im Teilvolumen  $V_1$ .

- In unserem Beispiel aus Abb. 6.2 benötigten die Atome eine gewisse Zeit, bis sie sich gleichmäßig auf die beiden Volumina verteilen. Entsprechendes gilt auch für andere Systeme: In der Regel dauert es eine gewisse Zeit bis sich das Statistische Gleichgewicht einstellt.
- Der Einstellen des Thermischen Gleichgewichtes ist ein irreversibler Vorgang: Für eine große Anzahl von Atomen ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Ausgangssituation (im Beispiel der Abb. 6.2: alle Teilchen im linken Teilvolumen) wieder erreicht wird so gering, dass dieser praktisch (während der Lebensdauer unseres Universums) nicht passieren wird. Man muss von außen in das System eingreifen um den Anfangszustand wieder herzustellen (in dem man etwa unter Aufwendung von Energie alle Atome zurückschiebt).
- Beim Einstellen des Statistischen Gleichgewichtes wird eine Verteilung realisiert für die die Anzahl der Realisierungsmöglichkeiten (also im Beispiel die Zahl der Möglichkeiten die Atome auf die beiden Volumina zu verteilen) größer ist als im Ausgangszustand (bei dem es ja nur die eine Möglichkeit gibt: alle Teilchen in einem Volumen). Beim Übergang zum Statistischen Gleichgewicht wächst also die Unordnung. Man kann auch sagen, dass wir weniger Information haben: Wir wissen nicht, welcher der möglichen Realisierungen umgesetzt wird. Wir werden später diese Unordnung bzw. die Unkenntnis mit dem Begriff **Entropie** verknüpfen.
- Das Einstellen des Statistischen Gleichgewichtes ist ein Kennzeichen für die Zeitentwicklung. Auf der mikroskopischen Ebene gilt die Zeitumkehrsymmetrie: wenn wir einen Film über den Stoß zweier Atome sehen würden können wir nicht sagen, ob dieser Film richtig abgespielt wird oder im Rücklauf. Bei der Einstellung des Gleichgewichtes (wie im Beispiel der Abb. 6.2) wissen wir aber sehr wohl ob ein Film von diesem Vorgang in der richtigen Zeitfolge abgespielt wird.

## 6.2 Temperatur und Boltzmann Verteilung

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass eine statistische Verteilung von Atomen eines idealen Gases in einem Volumen  $V$  dazu führen wird, dass sich die Teilchen gleichmäßig in dem Volumen verteilen und die Dichte konstant wird. Zur Charakterisierung des Zustandes von Teilchen oder Massenpunkten reicht es jedoch nicht den Ort dieses Teilchens zu kennen. Wir müssen auch seine Geschwindigkeit wissen, um die Position im Phasenraum festzulegen, was ja eine eindeutige Vorhersage der Bewegung dieses Teilchens in einem Kraftfeld erlaubt. Deshalb steht in diesem Abschnitt die Frage nach der statistischen Verteilung der Geschwindigkeiten der Atome eines Idealen Gases im Zentrum des Interesses.

Natürlich könnte man meinen, dass die Geschwindigkeiten genau so gleichmäßig verteilt sind wie die Verteilung der Aufenthaltsorte. Dabei würden wir aber ignorieren, dass mit der Geschwindigkeit  $v$  eines Teilchens auch eine Energie verknüpft ist: die kinetische Energie

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2.$$

Könnten also die Geschwindigkeiten statistisch beliebig verteilte Werte annehmen, so gälte das auch für die zugehörigen kinetischen Energien. Dies würde aber zu Konflikten mit der Energieerhaltung bzw. der Bergrenztheit der zur Verfügung stehenden Energie geraten.

Wir wollen deshalb eine Wahrscheinlichkeit definieren, dass wir ein Atom unseres Idealen Gases mit einer Geschwindigkeit aus dem Intervall  $[v, v + dv]$  vorfinden

$$w(v) = f(v) dv.$$

Bei dieser Darstellung wurde berücksichtigt, dass natürlich diese Wahrscheinlichkeit  $w(v)$  proportional zur Länge des Intervalls  $dv$  sein wird. Die physikalisch interessante Größe ist die in dieser Gleichung definierte Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(v)$ . Eine solche Wahrscheinlichkeitsdichte muss so normiert sein, dass die Summe über alle Wahrscheinlichkeiten gerade den Wert 1 ergibt

$$\sum_i f(v_i)\Delta v = 1.$$

Dabei haben wir angenommen, dass wir eine abzählbare Menge von Geschwindigkeitsintervallen bei den Geschwindigkeiten  $v_i$  haben, die alle die Intervalllänge  $\Delta v$  besitzen. Im Grenzfall, dass diese Intervalllänge infinitesimal klein wird ( $\Delta v \rightarrow dv$ ) geht diese Summe über in ein Integral und wir normieren

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv = 1.$$

Nach der Definition eines idealen Gases führen die Atome dieses Gases elastische Stöße aus etwa in der Form

$$v_1 + v_2 \rightarrow v'_1 + v'_2,$$

was bedeuten soll, dass zwei Atome mit den Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  so aneinander stoßen, dass sie anschliessend die Geschwindigkeiten  $v'_1$  und  $v'_2$  haben. Bei einem solchen Stoß sollte natürlich die Energie erhalten bleiben, es muss also gelten

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2,$$

wobei sich die Energie  $\varepsilon_1$  auf das Atom mit der Geschwindigkeit  $v_1$  bezieht und für die anderen Energien entsprechendes gilt. Die Zahl der Stöße vom Typ (6.2) ist proportional zur Zahl der Atompaaire, die die Geschwindigkeiten  $v_1$  beziehungsweise  $v_2$  besitzen, also proportional zum Produkt der Wahrscheinlichkeitsdichten  $f(v_1)$  und  $f(v_2)$ . Wenn das System im thermischen Gleichgewicht ist muss es genau so viele Stöße vom Typ (6.2) wie solche in umgekehrter Richtung

$$v'_1 + v'_2 \rightarrow v_1 + v_2$$

geben. Damit das der Fall ist muss also gelten

$$f(v_1)f(v_2) = f(v'_1)f(v'_2).$$

Da die Wahrscheinlichkeitsdichte offensichtlich mit der Energie der Teilchen verknüpft ist, können wir auch schreiben, dass gilt

$$f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2) = f(\varepsilon'_1)f(\varepsilon'_2).$$

Diese Bedingung wird für allgemeine Prozesse, bei denen die Energieerhaltung (6.2) gewährleistet ist gerade erfüllt durch die Verteilung

$$f(\varepsilon) = f_0 e^{-\beta\varepsilon}.$$

Damit gilt nämlich

$$f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2) = f_0 e^{-\beta\varepsilon_1} f_0 e^{-\beta\varepsilon_2} = f_0^2 e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} = f(\varepsilon'_1)f(\varepsilon'_2)$$

Dabei können wir annehmen, dass  $\beta$  eine positive Zahl ist. Natürlich ist aus mathematischer Sicht auch die Funktion in (6.2) mit negativem Wert von  $\beta$  eine Lösung. In diesem Fall würde aber die Wahrscheinlichkeitsdichte für hohe Energien divergieren. Dies scheint nicht sehr vernünftig, da das ja bedeutet, dass die Zahl der Atome exponentiell mit ihrer Energie anwächst. Darüber hinaus würde ein solches Verhalten aber auch die Normierung entsprechend (6.2) unmöglich machen. Mit

$$f(v) = f_0 e^{-\beta\frac{m}{2}v^2},$$

ist also die Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt. Wir müssen aber noch die Parameter  $f_0$  und  $\beta$  in dieser Verteilung bestimmen, beziehungsweise verstehen. Die Konstante  $f_0$  wird durch die Normierungsbedingung (6.2) festgelegt. Dazu berechnen wir

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_0 e^{-\beta\frac{m}{2}v^2} dv = f_0 \sqrt{\frac{2\pi}{\beta m}},$$

was bedeutet, dass

$$f_0 = \sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}}$$

und

$$f(v) = \sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}} e^{-\beta\frac{m}{2}v^2}.$$

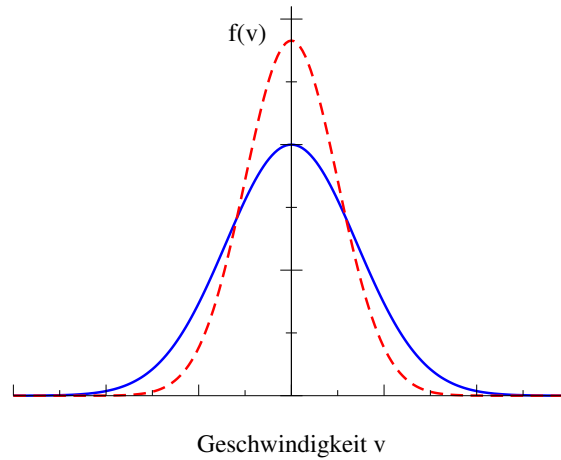


Abbildung 6.3: Verteilungsdichte für Geschwindigkeiten bei zwei verschiedenen Temperaturen, beziehungsweise Faktoren  $\beta$  in (6.2).

Es verbleibt also noch die Bestimmung des Parameters  $\beta$  in dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dazu betrachten wir den statistischen Mittelwert für die kinetische Energie

$$\bar{\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} v^2 f(v) dv.$$

Dieser Mittelwert berechnet sich dadurch, dass man alle möglichen Geschwindigkeiten betrachtet, dafür jeweils die kinetische Energie berechnet, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(v)$  ein Atom dieser Geschwindigkeit vorzufinden und dann dieses Produkt über alle Geschwindigkeiten integriert.

Setzt man also in diese Gleichung (6.2) die Wahrscheinlichkeitsdichte aus (6.2) ein, so ergibt sich

$$\bar{\varepsilon} = f_0 \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} dv = \frac{1}{2\beta}.$$

Anders ausgedrückt der Parameter  $1/\beta$  entspricht der doppelten mittleren Energie  $\bar{\varepsilon}$  der statistischen Bewegung. Diese mittlere kinetische Energie wird durch einen Parameter, die Temperatur  $T$  charakterisiert. Temperaturen werden allerdings im Allgemeinen in anderen Einheiten (Grad Celsius oder Kelvin) angegeben als die Energie (in Joule). Wir benötigen daher noch einen Umrechnungsfaktor zwischen diesen verschiedenen Skalen und definieren

$$k_B T = \frac{1}{\beta} = 2\bar{\varepsilon}.$$

Der Umrechnungsfaktor  $k_B$ , die sogenannte **Boltzmann Konstante** dient zur Umrechnung von Temperaturskalen in Energieskalen und hat den Wert

$$k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Joule}}{\text{Kelvin}}.$$

Er erlaubt also die Umrechnung einer Temperatur, die in Kelvin gemessen wird (Definition siehe unten), in eine Energie, gemessen in Joule. Erhöht sich die Temperatur um ein Kelvin, das entspricht einem Grad Celsius, so erhöht sich nach (6.2) die mittlere kinetische



Energie der Teilchen um 2 mal  $1.381 \cdot 10^{-23}$  Joule. Dies ist eine Aussage über die mittlere kinetische Energie, insgesamt liegt jedoch eine Energieverteilung oder Geschwindigkeitsverteilung (6.2) vor, die wir nun umschreiben können in

$$f(v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}.$$

Beispiele für eine solche Geschwindigkeitsverteilung sind in Abb. 6.3 für zwei unterschiedliche Temperaturen dargestellt. Die rote, gestrichelte Kurve bezieht sich auf eine Temperatur, die halb so groß ist wie die der anderen Kurve.

Wir haben hier die Temperatur eingeführt als ein charakteristisches Maß für die mittlere kinetische Energie der zufälligen (stochastischen) ungeordneten Molekülbewegung. Es gibt insbesondere auch den Grenzfall der Temperatur  $T = 0$ , bei dem diese kinetische Energie vollständig eingefroren ist. Dieser Zustand des Systems entspricht dem absoluten Nullpunkt der Temperatur und definiert den Nullpunkt der Kelvin Skala der Temperatur. Diese Temperatur von 0 Kelvin entspricht  $-273,2$  Grad Celsius. Selbstverständlich gibt es auf dieser Kelvinskala keine negativen Temperaturen genau so wie es keine negativen kinetischen Energien gibt.

Die Diskussion haben wir bisher auf die Bewegung von Atomen in einer Raumrichtung angewandt. Betrachten wir nun ein System von Atomen, die sich in 3 Raumrichtungen bewegen können, so ist die Wahrscheinlichkeit ein Atom mit den Geschwindigkeitskoordinaten  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v_z$  zu finden gegeben durch das Produkt von 3 Wahrscheinlichkeiten in einer Raumrichtung, also gemäß (6.2) durch

$$\begin{aligned} w(\vec{v}) &= f_1(v_x)f_1(v_y)f_1(v_z) dv_x dv_y dv_z \\ &= f_3(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z, \end{aligned} \quad (6.2)$$

wobei sich die Wahrscheinlichkeitsdichten  $f_1$  auf den bisher diskutierten eindimensionalen Fall beziehen, während die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Fall der Bewegung in 3 Dimensionen gegeben ist durch

$$f_3(\vec{v}) = f_1(v_x)f_1(v_y)f_1(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2k_B T}}.$$

Die mittlere kinetische Energie eines Atoms für diese Bewegung in 3 Dimensionen ist dann auch gegeben durch

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} k_B T.$$

Allgemein können wir dann die mittlere Energie eines idealen Gases aus  $N$  Atomen oder Molekülen mit Bewegungsenergien in  $\tilde{f}$  Freiheitsgraden bestimmen zu

$$E = \frac{\tilde{f}}{2} N k_B T.$$

Führen wir also einem solchen System eine bestimmte Energiemenge  $\Delta Q$  zu in Form von Wärmeenergie, d.h. in der Form, dass Energie der ungeordneten stochastischen Bewegung erhöht wird, so ist das mit einer Temperaturerhöhung  $\Delta T$  verknüpft in der Form

$$\Delta Q = \frac{\tilde{f}}{2} N k_B \Delta T.$$

Dieses Ergebnis können wir nun experimentell überprüfen und definieren dazu die **Wärmekapazität des Systems**

$$C = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{dQ}{dT}.$$

In einfachen Worten ausgedrückt misst man die Wärmekapazität eines Systems dadurch, dass man die Wärmemenge  $\Delta Q$  bestimmt, die man benötigt, um die Temperatur um  $\Delta T$  gleich 1 Kelvin oder um 1 Grad Celsius zu erhöhen. Sie wird angegeben in Einheiten Joule/Kelvin. Nach den oben angestellten Überlegungen (6.2) sollte die Wärmekapazität gegeben sein durch

$$C = \frac{\tilde{f}}{2} N k_B.$$

Dies kann man relativ einfach überprüfen, beziehungsweise durch die experimentellen Daten bestimmen, wie viele Freiheitsgrade  $\tilde{f}$  für die einzelnen Atome oder Moleküle vorliegen. Handelt es sich nämlich um ein Gas von Atomen, bei denen die einzelnen Atome wirklich als Punktteilchen anzusehen sind, dann sollte  $\tilde{f}$  gleich 3 also der Zahl der Translationsfreiheitsgrade sein. Kann man andererseits die Moleküle eines Gases als einen kleinen starren Körper ansehen, so sollten neben den 3 Freiheitsgraden der Translation für jedes Molekül auch noch 3 Freiheitsgrade der Rotation möglich sein.  $\tilde{f}$  wäre also in diesem Fall 6.

Für den Vergleich der Theorie in (6.2) mit dem Experiment muss aber noch die Zahl der Atome  $N$  des Systems bestimmt werden. Dies ist natürlich nicht so einfach. Man definiert deshalb zunächst einmal für jedes Material die **spezifische Wärmekapazität**  $c$ , das ist die Wärmekapazität pro Kilogramm des Materials

$$c = \frac{C}{\text{Masse } M \text{ in kg}} \quad \text{in Einheiten Joule/(Kelvin * kg)}.$$

Diese Größe ist experimentell sehr einfach zu bestimmen, sagt aber für den Vergleich mit der Theorie in (6.2) nicht sehr viel aus, da ja z.B. in einem Kilogramm Blei sehr viel weniger Atome sind als in einem Kilogramm Wasserstoff. Ein Atomkern des Bleis (genauer des Isotops  $^{208}\text{Pb}$ ) besteht aus 208 Nukleonen und ist damit etwa 208 mal so schwer wie der Atomkern eines Wasserstoffatoms, das ja nur ein Proton enthält. Deshalb definiert man die **molare Wärmekapazität** als die Wärmekapazität eines Mols.

$$C = \frac{C}{\text{Anzahl der Mole}} \quad \text{in Einheiten Joule/(Kelvin * Mol)}.$$

Ein Mol ist dabei die Menge des Materials, das gerade  $n$  Gramm wiegt, wobei  $n$  das Atomgewicht bezogen auf Wasserstoff ist, also praktisch die Zahl der Nukleonen im entsprechenden Atomkern. Genauer genommen ist dieses Atomgewicht  $n$  natürlich ein Mittelwert, der berücksichtigt, dass die meisten Elemente in verschiedenen Isotopen vorliegen, und ausserdem die Masseneffekte durch die Bindungsenergie. Es ist also 2 Gramm Wasserstoff ein Mol des Molekülgases  $H_2$ , bei dem jedes Molekül ja aus 2 H Atomen besteht. Andererseits liegt z.B. das Edelgas Argon als atomares Gas vor mit einem Atomgewicht von etwa 40; damit ist also 1 Mol Argon gerade durch 40 Gramm realisiert.

Die Zahl der Atome oder Moleküle in einem Mol ist also identisch für alle Materialien. Diese Zahl, die sogenannte **Loschmidt Zahl** oder **Avogadro Konstante** ist gegeben

durch das Verhältnis

$$\begin{aligned} N_A &= \frac{1}{\text{Masse des H in Gramm}} \\ &= \frac{1}{1.67 \cdot 10^{-24}} = 6 \cdot 10^{23}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Damit sollte also nach (6.2) für die molare Wärme gelten

$$C = \frac{\tilde{f}}{2} N_A k_B = \frac{\tilde{f}}{2} 8.3 \left[ \frac{J}{\text{mol K}} \right].$$



## 6.3 Thermische Bewegung, Temperatur und Wärme

Im Theorieteil haben Sie die ersten Begriffe der statistischen Mechanik wie Boltzmann-Verteilung, Temperatur oder Wärme kennengelernt. Wir wollen nun einige experimentelle Aspekte ansprechen.

### 6.3.1 Anmerkungen zur Geschwindigkeitsverteilung von Gasmolekülen

Zunächst betrachten wir ein **mechanisches Modell** zur Bewegung von Gasmolekülen. Hierbei sind in einen rüttelnden Kasten kleine Kugeln eingebracht. Die Kugeln bewegen sich in zufälliger Weise im Kasten hin- und her, wobei klar zu erkennen ist, dass sie sehr unterschiedliche Geschwindigkeiten haben. Die Kugeln ändern ihre Richtung und ihre Geschwindigkeit nach jedem Stoß mit entweder der Wand oder mit anderen Kugeln.

Legen wir zusätzlich größere und schwerere Partikel (Klötzchen) in den Kasten, so werden diese von den "Molekülen" bzw. der Wand angestoßen und bewegen sich ihrerseits nach kurzer Zeit im Kasten umher. Die (mittlere) Geschwindigkeit ist aber erkennbar langsamer als die der kleinen Kugeln. Dies soll auch so sein, da ja die Kugeln wie die Klötzchen die gleiche "**Temperatur**" und damit **mittlere kinetische Energie** haben sollten:

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}m \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = 3 \cdot \frac{1}{2}k_B T \quad (6.4)$$

Hierbei ist  $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}$  J/K die **Boltzmann-Konstante**. Jede Geschwindigkeitskomponente  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  trägt  $k_B T/2$  zur mittleren kinetischen Energie bei, so dass man insgesamt  $m \langle v^2 \rangle / 2 = 3k_B T/2$  erhält.

Man nennt  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$  auch die **mittlere thermische Geschwindigkeit**  $v_{th}$ :

$$v_{th} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}. \quad (6.5)$$

Die Masse der Klötzchen ist deutlich größer als die der Kugeln und damit ist ihre mittlere "thermische" Geschwindigkeit deutlich kleiner (Die "Temperatur" des rüttelnden Kasten ist natürlich keineswegs gleich der Zimmertemperatur).

Wir wollen nun mittels Gleichung 6.4 berechnen, wie groß  $v_{th}$  für reale Moleküle ist. Wir schreiben die Masse eines beliebigen Moleküls zunächst als  $\mu m_H$ , wobei  $m_H = 1.67 \cdot 10^{-27}$  kg die Masse eines Wasserstoffatoms ist. Luft besteht zu ca. 20% aus  $O_2$  und zu 80% aus  $N_2$ . Der mittlere Wert für  $\mu$  ist für Luft daher  $\mu \approx 29$  [=  $(0.8 \cdot 14 + 0.2 \cdot 16) \cdot 2$ ]. Man erhält dann für eine Temperatur von 20°C (=293 K) einen Wert  $v_{th} \approx 500$  m/s, was ungefähr das Doppelte der Schallgeschwindigkeit ist.

Für  $T = 3000$  °C ergibt sich für Luft  $v_{th} \approx 1600$  m/s. Analog ergeben sich für Wasserstoffmoleküle Werte von 1900 m/s bei 20 °C und von 6000 m/s bei 3000 °C. Wir haben die Werte für eine Temperatur von 3000 °C deshalb angegeben, weil sie nicht unwesentlich für die **Raketenphysik** sind. Die Endgeschwindigkeit, die eine Rakete erreichen kann, war ja proportional zur Geschwindigkeit des ausgestoßenen Gases, und diese ist letztlich

durch die Geschwindigkeit der Moleküle in der Brennkammer limitiert (vgl Gleichung (3.27). Man benötigt als ein möglichst **leichtes Gas**, das **bei möglichst hohen Temperaturen** verbrennt. Deswegen wird die Haupttrakete des "Space shuttle" mit **Knallgas** ( $O_2 + 2H_2$ ) betrieben.

Kehren wir zurück zum Schüttelapparat. Hier wurden die Klötzchen durch die kleinen Kugeln in eine Zitterbewegung versetzt. Einen ganz analogen Effekt beobachtete 1828 der Botaniker Robert Brown, als er Pollen einer Pflanzenart unter dem Mikroskop untersuchte. Er fand, dass die Pollen eine ständige Zitterbewegung durchführten. Heute wissen wir, dass diese Bewegung dadurch verursacht wird, dass die Pollen ständig durch die Moleküle der Luft angestoßen werden ("**Brown'sche Molekularbewegung**"). Man kann den Effekt z. B. dadurch vorführen, dass man eine Emulsion sehr kleiner Partikel (1-2  $\mu\text{m}$  Durchmesser), oder auch einen Tropfen homogenisierter Milch, unter dem Mikroskop betrachtet. Wenn wir annehmen, das Teilchen habe eine Masse von  $10^{-11}$  kg, so erreicht diese immerhin eine mittlere thermische Geschwindigkeit um 30  $\mu\text{m/s}$ , was sich unter dem Mikroskop gut beobachten lässt.

Es sei ferner angemerkt, dass die Brown'sche Molekularbewegung das Auflösungsvermögen eines Messinstruments begrenzen kann. Beispielsweise haben wir beim Cavendish-Experiment die Drehung der Massen durch einen Laserstrahl abgebildet, der an einem am Faden angebrachten Spiegel abgelenkt wurde. Auf Grund der Brown'schen Bewegung zittert der Spiegel leicht, was die Auflösung begrenzt. In unserem Experiment war der Effekt zwar gegenüber allen anderen Fehlerquellen völlig vernachlässigbar; er ist aber wesentlich bei vielen hochauflösenden Geräten. Auch bei elektronischen Geräten gibt es einen ähnlichen Effekt. Dort bewegen sich die Elektronen statistisch hin und her. Das daraus resultierende "Rauschen" einer Größe wie der elektrischen Spannung heisst "**Nyquist-Rauschen**" oder "**weißes Rauschen**".

### 6.3.2 Messung von Temperaturen; Temperaturskalen

Um Temperaturen zu messen, benützt man im allgemeinen indirekte Verfahren, wobei zumindest im Prinzip jeder Effekt verwendet werden kann, der in eindeutiger Weise von der Temperatur abhängt. Nur in wenigen Fällen (z. B. manchmal in der Astrophysik) wird direkt die Geschwindigkeitsverteilung von Molekülen und daraus die Temperatur bestimmt.

Bevor wir einige real verwendete Thermometer vorstellen, wollen wir aber zunächst einige in der Praxis verwendete **Temperaturskalen** vorstellen.

Bereits mehrfach verwendet haben wir die Celsius-Skala und die Kelvin-Skala. Zur Festlegung einer Temperaturskala werden zunächst **zwei reproduzierbare Fixpunkte** benötigt.

Bei der **Celsius-Skala**, die von dem schwedischen Astronomen und Physiker Anders Celsius 1742 eingeführt wurde, ist der Nullpunkt durch bei einem Druck von  $p = 1$  bar gefrierendes Wasser festgelegt. Der Wert von 100 °C ist durch bei  $p = 1$  bar siedendes Wasser festgelegt.

Bei der **Kelvin-Skala** (dies ist die **SI-Einheit**) ist, wie im Theorieteil erläutert wurde, der Nullpunkt durch das Verschwinden der mittleren thermischen Energie der Gasmoleküle

gegeben. Dieser Nullpunkt ist nicht vollständig erreichbar oder gar unterschreitbar. Man kann sich ihm aber sehr weit annähern. Die Unterteilung der Kelvin-Skala ist die gleiche wie bei der Celsius-Skala, d. h. eine Temperaturdifferenz von 1 K ist identisch mit der Temperaturdifferenz von 1 °C. In Einheiten der Celsius-Skala liegt  $T = 0$  K bei  $T = -273$  °C. Die Kelvin-Skala wurde von Lord Kelvin (ehem. William Thomson) 1848 eingeführt.

Bei der vor allem in den USA wird noch immer die **Fahrenheit-Skala** benutzt. (durch D. G. Fahrenheit, seit 1714). Ihr Nullpunkt ist durch die Temperatur einer Eis-Wasser-Salmiak-Mischung bestimmt und liegt bei  $-17.78$  °C. Die Temperatur des menschlichen Blutes (definiert als  $37.7$ °C) wurde als  $100$  °F festgelegt. Die Umrechnung von Celsius nach Fahrenheit ist:

$$x \text{ °F} = \frac{5}{9} \cdot (x - 32) \text{ °C}. \quad (6.6)$$

Die **Réaumur-Skala** (R. A. Réaumur, seit 1730) - sie wird heute praktisch nicht mehr verwendet - legt bei 1 bar gefrierendes Wasser als  $0$  °R und bei 1 bar siedendes Wasser als  $80$  °R fest. Damit gilt die Umrechnung:

$$x \text{ °R} = \frac{5}{4} \cdot x \text{ °C}. \quad (6.7)$$

Für **reale Thermometer** werden wesentlich mehr als zwei Fixpunkte zur **Eichung** benötigt, da im allgemeinen die zur Temperaturmessung herangezogene Größe nicht oder zumindest nicht völlig linear mit der Temperatur zusammenhängt.

Man verwendet als Fixpunkte beispielsweise die Siede- oder Schmelzpunkte unterschiedlicher Materialien bei einem genau spezifizierten Druck. Beispiele sind in Tab. 6.1 angegeben.

Art der Phasenumwandlung ( $p = 1.013$ bar)	Material	T[°C]
Siedepunkt	He	-268.94
Siedepunkt	H <sub>2</sub>	-252.78
Siedepunkt	N <sub>2</sub>	196.20
Siedepunkt	O <sub>2</sub>	-182.97
Siedepunkt	CO <sub>2</sub>	-78.52
Schmelzpunkt	Hg	-38.87
Schmelzpunkt	Ag	960.50
Schmelzpunkt	Au	1063
Schmelzpunkt	Pt	1773
Schmelzpunkt	W	$3380 \pm 20$

Tabelle 6.1: *Schmelzpunkte und Siedepunkte einiger Materialien bei einem Druck von 1.013 bar. Diese Werte werden als Fixpunkte zur Eichung von Thermometern herangezogen.*

Insbesondere die Siedepunkte der obigen Materialien sind z. T. stark druckabhängig. Die Eichung des Thermometers setzt also eine genaue Kenntnis des Drucks voraus<sup>1</sup>. Eleganter,

<sup>1</sup>Umgekehrt kann bei geeichtem Thermometer die Bestimmung des Siedepunkts zur Druckmessung dienen.

allerdings technisch oft schwerer zu realisieren, sind ”**Tripelpunkte**”, bei denen die drei Phasen fest-flüssig-gasförmig miteinander koexistieren. Hier sind Druck und Temperatur eindeutig. Für Wasser liegt der Tripelpunkt bei  $p = 6.1$  mbar,  $T = 0.0075$  °C. Für  $\text{CO}_2$  liegt er bei  $p = 5.1$  bar,  $T = -56$  °C.

### Beispiele für Thermometer

Wie bereits erwähnt, kann im Prinzip jede physikalische Größe  $X$  zur Temperaturmessung ausgenutzt werden, die eindeutig mit der Temperatur verknüpft ist. In der Praxis wird man für einen gegebenen Temperaturbereich, in dem man messen will, ein möglichst einfaches bzw. einfach zu handhabendes Thermometer heranziehen. Ein Beispiel für die Temperaturmessung im Bereich der Raumtemperatur sind Flüssigkeitsthermometer. Ihr Gültigkeitsbereich ist offensichtlich auf die Temperaturen beschränkt, bei denen der verwendete Stoff (z. B. Alkohol) auch tatsächlich flüssig ist. In ähnlicher Form existiert auch für jedes andere Thermometer nur ein endliches Temperaturintervall, in dem dieses funktioniert.

Es ist ebenfalls hilfreich, wenn der Zusammenhang zwischen der verwendeten Messgröße und der Temperatur möglichst linear ist. Dies ist zwar keine notwendige Voraussetzung, erleichtert aber das Ablesen bzw. die Eichung des Thermometers.

Der erste Thermometertyp, den wir besprechen wollen, basiert auf der **thermischen Ausdehnung** von Gasen, Flüssigkeiten oder Festkörpern.

Betrachten wir hierzu zunächst einen **Stab**, der bei der Temperatur  $T_0$  die Länge  $l_0$  hat. Wenn sich die Temperatur um  $\Delta T$  auf den Wert  $T = T_0 + \Delta T$  ändert, dann ändert sich die Länge des Stabes um eine Länge  $\Delta l \approx \left. \frac{dl(T)}{dT} \right|_{T_0} \cdot \Delta T$ . Es gilt also für nicht allzu große Änderungen  $\Delta T$ :

$$l_T = l_0(1 + \alpha \Delta T). \quad (6.8)$$

Hierbei ist  $\alpha = \left. \frac{dl(T)}{dT} \right|_{T_0}$  der ”**lineare thermische Ausdehnungskoeffizient**”. Im allgemeinen ist  $\alpha$  selbst eine Funktion der Temperatur. Anstelle der linearen Ausdehnung eines Stabes können wir ebenfalls die **Volumenausdehnung** eines Stoffes betrachten. Nehmen wir hierzu bei der Temperatur  $T_0$  einen Würfel der Kantenlänge  $l_0$  (Volumen:  $V_0$ ). Bei der Temperatur  $T = T_0 + \Delta T$  gilt dann:

$$V_T = l_T^3 = l_0^3 \cdot (1 + \alpha \Delta T)^3 \approx l_0^3 \cdot (1 + 3\alpha \Delta T) = V_0(1 + \gamma \Delta T). \quad (6.9)$$

Hierbei haben wir angenommen, dass die Längenänderung  $\Delta l$  wesentlich kleiner ist als  $l_0$ . Wir haben ebenfalls den ”**Volumen-Ausdehnungskoeffizienten**”  $\gamma = 3\alpha$  eingeführt.

In Tab. 6.2 sind Zahlenwerte für  $\alpha$  für einige Festkörper aufgeführt. Die genauen Zahlen gelten in der Nähe der Zimmertemperatur. Typischerweise erhält man aber Werte von einigen  $10^{-6}$  pro °C. Ein 1 m langer Stab ändert sich für  $\Delta T = 100$  °C also um 0.1 - 1 mm.

Diese Änderung scheint auf den ersten Blick zu klein zu sein, um ihn zur Thermometrie zu nutzen. Der Trick besteht darin, zwei unterschiedliche Materialien (i. allg. zwei Metalle) miteinander zu verbinden wie in Abb. 6.4 dargestellt (”**Bimetallstreifen**”). Bei einer Temperaturänderung  $\Delta T$  dehnt sich das Metall 1 um  $\Delta l_1 = \alpha_1 \Delta T$ , das Metall 2 um  $\Delta l_2 = \alpha_2 \Delta T$  aus. Waren die Streifen bei der Temperatur  $T_0$  gleich lang, so unterscheidet



sich ihre Länge bei der Temperatur  $T = T_0 + \Delta T$  um  $\Delta l_1 - \Delta l_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \Delta T$ . Der Streifen muss sich biegen. Er beschreibt dann annähernd einen Kreisbogen mit Öffnungswinkel  $\varphi$ .

Es sei  $l_{T,1}$  bzw.  $l_{T,2}$  die Länge der beiden Metalle, wenn sie nicht miteinander verbunden wären. Da die beiden Metalle an der Kontaktfläche gleich lang sein müssen, wird Metall 1 zur Kontaktfläche hin gegenüber  $l_{T,1}$  gedehnt, Metall 2 gegenüber  $l_{T,2}$  gestaucht. In der Mitte der beiden Streifen betragen die Längen  $l_{T,1}$  bzw.  $l_{T,2}$  ("neutrale Fasern").

Der Abstand vom Kreismittelpunkt zur neutralen Faser des Metalls 1 sei  $r$ , der Abstand zur neutralen Faser des Metalls 2 sei  $r + d$ . Es gilt dann:

$$l_{T,1} = r\varphi \quad \text{und} \quad l_{T,2} = (r + d)\varphi \quad (6.10)$$

Die Differenz ergibt:

$$l_{T,2} - l_{T,1} = (\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T = d\varphi \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T}{d} \quad (6.11)$$

Wenn die beiden Metalle dünn sind, d. h.  $d$  sehr klein ist, ist diese Biegung ist groß genug, um leicht nachgewiesen werden zu können.

Material	$\alpha$ [ $10^{-6}/^\circ\text{C}$ ]
Quarzglas	8.0
Jenaer Glas	0.5
Kupfer	16.7
Aluminium	23.8
Eisen	12.0

Tabelle 6.2: *Linearer thermischer Ausdehnungskoeffizient für einige Festkörper*

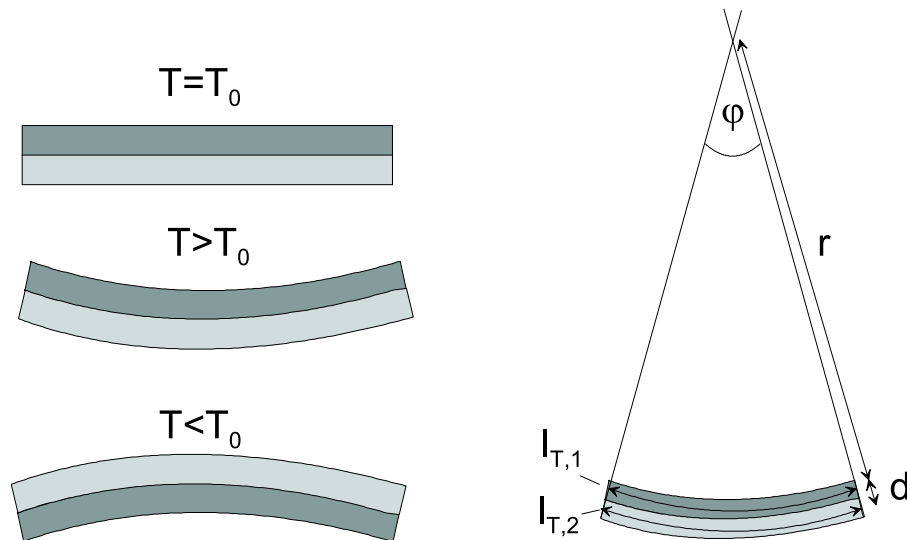


Abbildung 6.4: *Bimetallstreifen*

Zur thermischen Ausdehnung von Festkörpern ist noch anzumerken, dass sie grundsätzlich dadurch zustande kommt, dass die regelmäßig angeordneten Gitterbausteine mit einer mit zunehmender Temperatur wachsenden Amplitude um ihre Ruhelage herumschwingen. Man muss hier allerdings die *Anharmonizität* dieser Schwingung berücksichtigen. Ein harmonischer Oszillator würde unabhängig von seiner Auslenkung immer um die gleiche

Ruhelage herum schwingen. Die schwingenden Atome des Kristallgitters wären dann im Mittel immer gleich weit voneinander entfernt. Im realen Festkörper nimmt die abstoßende Kraft zwischen zwei Atomen aber überproportional zu, wenn diese sich gegenüber ihrer Ruhelage aufeinander zu bewegen. Die anziehende Kraft nimmt überproportional ab, wenn sich die Atome voneinander wegbewegen. Als Resultat bleiben die Atome etwas länger bei großen Abständen als bei kleinen. Der zeitliche Mittelwert des Abstands (die Ruhelage) vergrößert sich mit wachsender Schwingungsamplitude, und der Festkörper dehnt sich aus.

Wir können dies gut in einem Energiediagramm darstellen, das die potentielle Energie eines Atoms gegenüber einem zweiten darstellt. Der Nullpunkt des Koordinatensystems sei bei Atom 1. Würde die Kraft zwischen beiden Atomen dem Hooke'schen Gesetz folgen, wäre die potentielle Energie die einer Feder,  $U = \frac{1}{2}C(x - x_0)^2$ . Atom 2 würde harmonisch um die Ruhelage  $x_0$  schwingen (Abb. 6.5(a)). Die reale potentielle Energie ist in Abb. 6.5(b) aufgetragen. Sie durchläuft bei  $x_0$  ein Minimum und wächst für kleine Abstände sehr stark an. Für Abstände wesentlich größer als  $x_0$  geht  $U$  gegen null. Entwickelt man  $U(x)$  um  $x_0$ , so erhält man

$$U(x) = U(x_0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3U}{dx^3} \right|_{x_0} (x - x_0)^3 + \dots \quad (6.12)$$

Der lineare Koeffizient  $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_0}$  verschwindet bei  $x_0$ , wie aus Abb. 6.5(b) ersichtlich. Der quadratische Term liefert gerade das Hooke'sche Gesetz. Entscheidend ist der kubische Term. Er ist das erste Glied der Taylorreihe, das zur thermischen Ausdehnung führt.

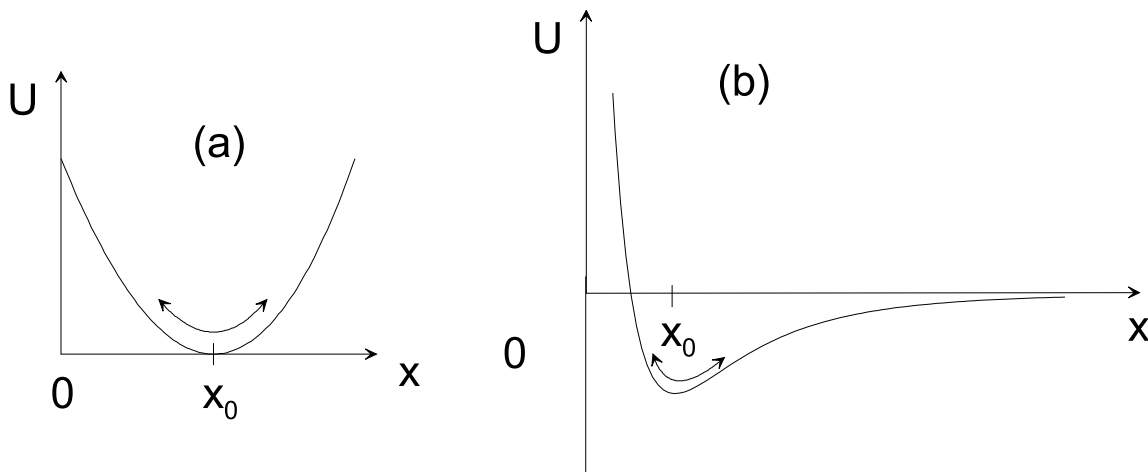


Abbildung 6.5: Zur thermischen Ausdehnung von Festkörpern: Potentielle Energie eines Atoms 2 beim Abstand  $x$  gegenüber einem Atom 1 im Ursprung. (a) Harmonische Näherung, (b) realistische Darstellung.

Gehen wir nun zur thermischen Ausdehnung von Flüssigkeiten und Gasen über. In Tab. 6.3 sind Zahlenwerte für den Volumen-Ausdehnungskoeffizienten  $\gamma$  für einige Flüssigkeiten angegeben, in Tab. 6.4 die Volumen-Ausdehnungskoeffizienten einiger Gase.

Es fällt im Vergleich zu Tab. 6.2 auf, dass die Ausdehnungskoeffizienten der Flüssigkeiten um ca. eine Größenordnung höher sind als die der Festkörper. Bei Gasen sind die entsprechenden Werte zum einen nochmals um eine Größenordnung höher, zum anderen für

Material	$\gamma$ [ $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ]
Quecksilber	181
Benzol	1060
Wasser	230

Tabelle 6.3: *Volumen-Ausdehnungskoeffizient  $\gamma$  für einige Flüssigkeiten ( $T=20-25^{\circ}\text{C}$ )*

Gas	$\gamma$ [ $1/^{\circ}\text{C}$ ]
Luft	0.0033675
H <sub>2</sub>	0.003662
He	0.00366
Ar	0.003676
CO <sub>2</sub>	0.003726

Tabelle 6.4: *Volumen-Ausdehnungskoeffizient  $\gamma$  für einige Gase ( $T = 0^{\circ}\text{C}$ )*

alle Gase nahezu identisch. Sie werden in Kürze die Eigenschaften des "idealen Gases" kennenlernen, in dem die Gasmoleküle als punktförmige Teilchen angesehen werden, die lediglich über elastische Stöße miteinander wechselwirken.

Für dieses ideale Gas ergibt sich bei festem Druck für die Volumenausdehnung:

$$V = V_0 \cdot \left( 1 + \frac{T[^{\circ}\text{C}]}{273.2} \right). \quad (6.13)$$

Man hat also, bezogen auf  $T_0 = 0^{\circ}\text{C}$  ein Volumenausdehnungskoeffizient  $\gamma = 1/273.2^{\circ}\text{C}^{-1} = 0.00366^{\circ}\text{C}^{-1}$ . Insbesondere He und H<sub>2</sub> kommen diesem Wert sehr nahe.

In gebräuchlichen **Flüssigkeitsthermometern** werden oft Quecksilber oder Weingeist (90°Alkohol) verwendet. Diese Materialien bleiben über einen relativ großen Temperaturbereich flüssig. So beträgt der Gefrierpunkt von Quecksilber (bei 1.013 bar)  $-38.87^{\circ}\text{C}$ , der Siedepunkt liegt bei  $356.7^{\circ}\text{C}$ . Weingeist erstarrt bei  $-117^{\circ}\text{C}$  und siedet bei  $78.17^{\circ}\text{C}$ . Besonders erwähnenswert ist hier das Fieberthermometer. Es repräsentiert den Typ eines "**Maximumthermometers**", bei dem bei steigender Temperatur die Flüssigkeit aus dem Vorratsvolumen herausgedrückt wird, bei fallender Temperatur aber nicht zurückläuft. Dieses Zurücklaufen verhindert eine Engstelle in der Glaskapillare kurz nach dem Vorratsvolumen.

Über erheblich größere Temperaturbereiche sind **Gasthermometer** einsetzbar. Insbesondere Helium kann im Prinzip bis herab zum Siedepunkt von 4.2 K (bei 1 bar) eingesetzt werden. Zu hohen Temperaturen hin wird das Gasthermometer spätestens durch die Ionisation der Gasatome begrenzt. Die kinetische Energie der Gasmoleküle wird dann so groß, dass diese bei Stößen ionisieren. Man hat dann kein Gas aus elektrisch neutralen Atomen mehr vorliegen. Dieser Effekt wird oberhalb einiger  $1000^{\circ}\text{C}$  relevant (Bereits vorher dürfte allerdings die Gefäßwand schmelzen!).

Weitere im Laborbetrieb relevante Thermometer sind Thermolemente, Pyrometer oder Rauschthermometer.

Das **Thermoelement** nützt aus, dass die Dichte frei beweglicher Elektronen in unterschiedlichen Metallen unterschiedlich ist. Bringt man zwei unterschiedliche Metalle in Kontakt, treten Elektronen aus dem Metall mit der höheren Konzentration in das andere Metall über, was zu einer Aufladung bzw. einer elektrischen Spannung ("Thermospannung") führt (Abb. 6.6(a)).

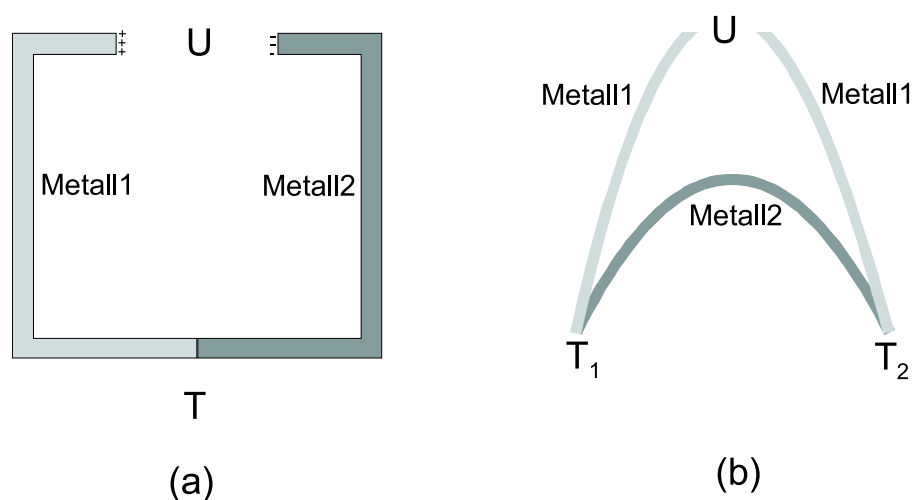


Abbildung 6.6: *Thermospannung und Thermoelement. Zwei Metalle mit unterschiedlichen Elektronenkonzentrationen befinden sich im elektrischen Kontakt. Es treten dann Elektronen von Metall 1 in Metall 2 über, Metall 1 ist dann positiv, Metall 2 negativ aufgeladen. In Anordnung (a) wird eine Spannung gemessen, die Abhängig von der Temperatur  $T$  der Kontaktstelle ist. In (b) sind beide Metalle 1 positiv geladen. Eine Spannungsdifferenz  $U$  tritt erst auf, wenn sich  $T_1$  und  $T_2$  unterscheiden, d. h. wenn die Aufladung der beiden Metalle unterschiedlich ist.*

Der Effekt ist temperaturabhängig. Typischerweise hat man Spannungsänderungen im Bereich von einigen bis einigen  $100 \mu\text{V}/\text{K}$ . Beim eigentlichen Thermoelement verwendet man die Anordnung der Abb. 6.6(b). Hier ist Metall 2 an beiden Enden mit zwei Drähten aus Metall 1 kontaktiert. Für  $T_1 = T_2$  sind die beiden Metalle 1 gleich stark aufgeladen, die Spannung  $U$  ist 0. Eine Spannung wird erst für  $T_1 \neq T_2$  gemessen. Dann ist  $U$  proportional zur Differenz  $(T_2 - T_1)$ . Bei der Messung von  $T_2$  bringt man die Kontaktstelle 1 auf eine bekannte Temperatur (z. B. Eintauchen in Eiswasser,  $T_1 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ) und kann dann die Temperatur  $T_2$  ermitteln.

Bezieht man die Thermospannung auf ein Referenzelement (i. allg. Pb), so kann man allen Metallen eine "Thermokraft" zuordnen (die Thermospannung bei Kontakt mit Pb). Beispielsweise hat dann Kupfer bei  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  eine Thermokraft von  $+2.8 \mu\text{V}/\text{K}$ , Nickel  $-19 \mu\text{V}/\text{K}$ . Bei einem Kontakt zwischen Cu und Ni misst man die Differenz dieser Thermokräfte,  $+2.8 \mu\text{V}/\text{K} - (-19 \mu\text{V}/\text{K}) = 21.8 \mu\text{V}/\text{K}$ .

Beim **Pyrometer** wird die "Farbe", genauer: das Spektrum der abgestrahlten elektromagnetischen Wellen) glühender Körper genutzt. Diese Wärmestrahlung hängt nur von der Temperatur aber nicht von der Art des Körpers (Material, Form etc.) ab. Üblicherweise betrachtet man den Körper, dessen Temperatur bestimmt werden soll, vor einem glühen-

den Hintergrund bekannter Temperatur. Sobald der Probekörper "verschwindet", hat der die gleiche Temperatur wie der Hintergrund.

Beim **Rauschthermometer** schließlich wird das Nyquist-Rauschen der Elektronen in Metallen beobachtet, das wir schon bei der Brown'schen Bewegung kurz angesprochen haben. Durch das Nyquist-Rauschen fluktuiert die über einem Draht abgegriffene elektrische Spannung  $U$ . Die Rauschleistung ( $\propto U^2$ ) ist dabei proportional zur absoluten Temperatur (Kelvin Skala). Rauschthermometer kommen damit der kinetischen Definition der absoluten Temperatur sehr nahe.

### 6.3.3 Physikalische Vorgänge bei verschiedenen Temperaturen; Heiz- und Kühlverfahren

In Abb. 6.7 ist eine Auswahl von Phänomenen zusammengestellt, die bei verschiedenen Temperaturen beobachtet werden. Die logarithmische Temperaturskala reicht von  $10^{-8}$  K bis  $10^8$  K. Tatsächlich ist der in der Physik untersuchte Temperaturbereich noch größer.

Eckpunkte, die wir eingetragen haben, sind die Temperatur der Sonnenoberfläche, die bei ca.  $6000^\circ\text{C}$  liegt, die Temperatur im Sonneninneren von ca.  $10^8$  K, sowie die "kosmische Hintergrundstrahlung" bei  $2.735$  K. Diese elektromagnetische Strahlung, die aus allen Richtungen auf die Erde trifft, stellt gewissermaßen das "Nachglühen" des Urknalls dar. Diese  $2.735$  K sind letztlich die Temperatur des Universums. In irdischen Labors kann man allerdings wesentlich tiefere Temperaturen bis herab zu wenigen nK realisieren.

Der Bereich des organischen Lebens umfasst auf der aufgetragenen Skala nur einen sehr kleinen Bereich. Phasenübergänge fest-flüssig-gasförmig nehmen bereits einen breiteren Bereich zwischen  $10^4$  K und einigen K ein. Bei höheren Temperaturen beobachtet man zunächst den Auf- und Abbau der Atomhülle. Die energiereichsten Moleküle im Gas sind dann schnell genug, um sich gegenseitig zu ionisieren. Ist das Gas größtenteils ionisiert, spricht man von Plasmen. Bei noch höheren Temperaturen führen Stöße zwischen Atomen zum Auf- und Abbau der Kerne. Typische Energien, die man für die Fusion zweier Kerne benötigt, liegen im Bereich einiger MeV, was Temperaturen von einigen  $10^{10}$  K entspricht<sup>2</sup>. Man beachte, dass dieser Wert deutlich über der Temperatur des Sonneninneren liegt, wo ja Fusionsprozesse die Energie der Sonne liefern. Hier sind es nur die besonders schnellen Ionen aus der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung, die fusionieren können.

In den Temperaturbereich einige  $100^\circ\text{C}$  bis herab zu einigen mK fallen viele Problemstellungen der Festkörperphysik. Hier stehen Kräfte zwischen den Leitungselektronen im Vordergrund. Ordnungsphänomene, die hier auftreten, sind beispielsweise die Supraleitung oder die magnetische Ordnung der Elektronen (Ferromagnetismus, Antiferromagnetismus,...). Zu noch tieferen Temperaturen hin beobachtet man beispielsweise Ordnungsphänomene zwischen den Atomkernen in einem Festkörper oder, bei Temperaturen unterhalb von  $1\ \mu\text{K}$  die "Bose-Einstein-Kondensation" von Gasen. Diese Kondensation wurde von Bose und Einstein Anfang des 20. Jh. vorhergesagt, konnte aber erst in den 1990er Jahren experimentell realisiert werden. Die Gasatome kondensieren hierbei in einen sehr eigenartigen Zustand, in dem sich alle Gasatome identisch verhalten. Das Phänomen hat Ähnlichkeiten mit dem Licht eines Lasers (Photonen im gleichen Zustand)

---

<sup>2</sup> $(1\text{MeV})/k_B \approx 1.16 \cdot 10^{10}$  K

## Physik bei verschiedenen Teperaturen

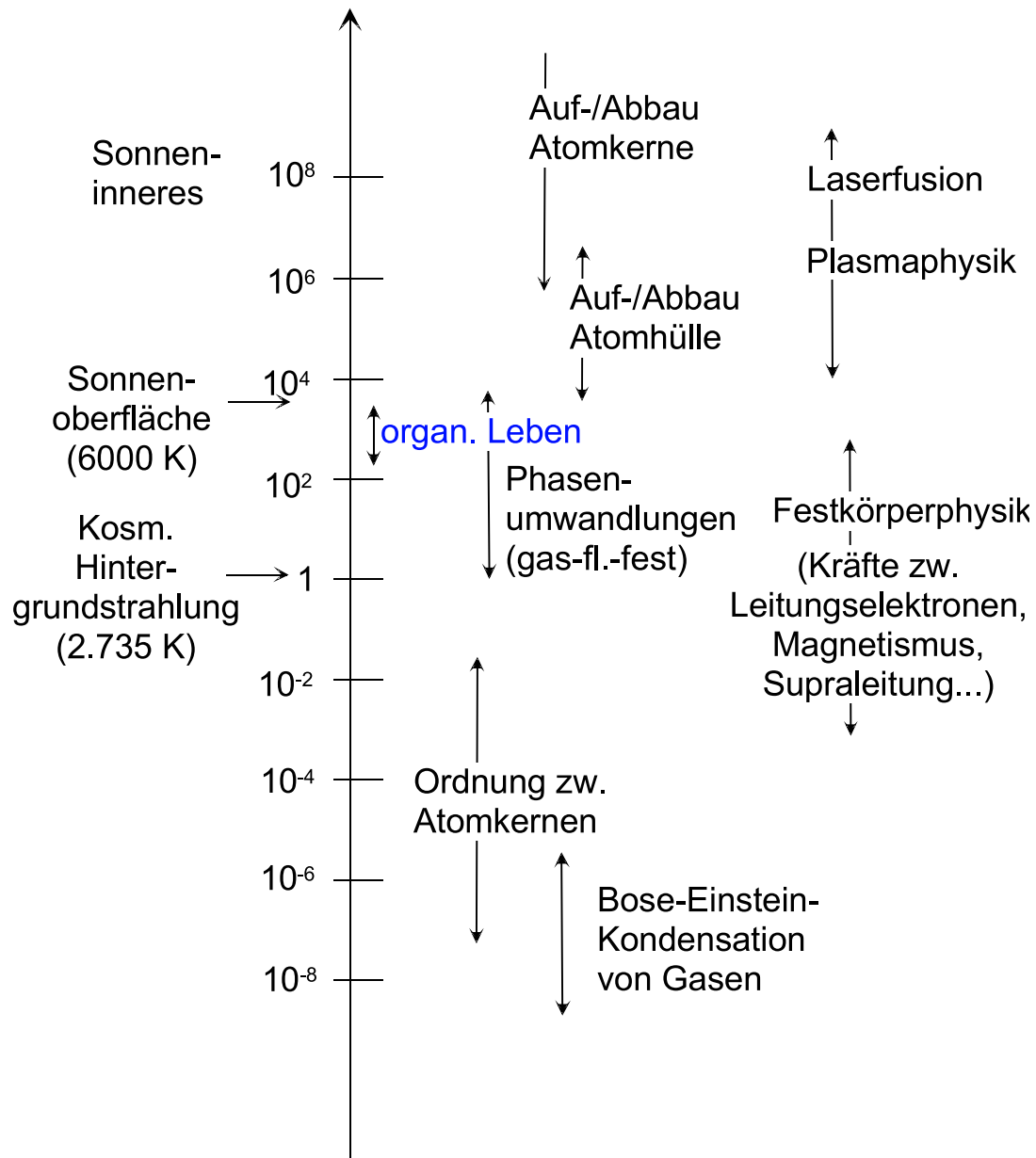


Abbildung 6.7: Physik bei verschiedenen Temperaturen.

oder dem Stromfluss im Supraleiter (Paare von Elektronen im gleichen Zustand). Viele dieser Phänomene werden Sie im Verlauf des Studiums noch detailliert kennenlernen.

In Abb. 6.8 sind schließlich einige **Methoden** zusammengestellt, wie besonders **hohe** oder auch **tiefe Temperaturen** im Labor realisiert werden können.

Sehr hohe Temperaturen im Bereich  $10^8$  K und darüber werden beispielsweise bei Stoßprozessen etwa zwischen Schwerionen erreicht (vorausgesetzt, es stellt sich ein thermodynamisches Gleichgewicht ein, bevor die Streuprodukte auseinanderfliegen!). In der Fusionsforschung erreicht man die notwendigen hohen Temperaturen entweder dadurch, dass man sehr intensive Laserstrahlen auf eine Probe fokussiert, die dann implodiert, oder dadurch, dass man Plasmen durch sehr große elektrische Ströme aufheizt.

Im Bereich tiefer Temperaturen können bis herab zu etwa 20 K zyklische Kältemaschinen verwendet werden (Details: 6.8). Mit speziellen mehrstufigen Kryokühlern erreicht man Temperaturen um 1 K.

Ein sehr häufig angewandtes Kühlverfahren ist die **Kühlung durch siedende Gase**<sup>3</sup> (Wie man Gase verflüssigt, beschreiben wir in 6.11 ). Bis 77 K verwendet man flüssigen Stickstoff, bis 4.2 K (bei  $p = 1$  bar) flüssiges  $^4\text{He}$ . Erniedrigt man den Druck über der siedenden Flüssigkeit (abpumpen), so sinkt der Siedepunkt der Flüssigkeit weiter ab. Man kann mit  $^4\text{He}$  ca. 1.3 K erreichen, mit dem Isotop  $^3\text{He}$ , das nicht frei in der Natur vorkommt, sondern an Reaktoren hergestellt werden muss, ca. 0.2 K. Bis ca. 10 mK verwendet man  $^3\text{He}/^4\text{He}$  Mischungskryostaten, in denen aus einer  $^3\text{He}/^4\text{He}$   $^3\text{He}$  "verdampft" wird.

Festkörper lassen sich durch die "**adiabatische Entmagnetisierung**" weiter abkühlen (vgl. 6.11). Hierbei legt man an paramagnetische Materialien zunächst ein hohes Magnetfeld an. Die magnetischen Momente, der Elektronen, die proportional zu deren Eigen Drehimpuls (=Spin) sind, werden dann parallel zum Feld geordnet). Man hält in dieser Phase die Temperatur der Probe durch Ankoppelung an ein Wärmebad konstant. Das Feld wird dann wieder erniedrigt, wobei die Probe vom Wärmebad abgekoppelt ist. Bei der Felderniedrigung werden die Elektronenspins wieder ungeordnet. Dieser Prozess kühlt das Kristallgitter ab. Die erreichbaren Endtemperaturen betragen ca. 30 mK.

Die adiabatische Entmagnetisierung von Elektronen wird meist benutzt, um eine zweite Kühlstufe vorzukühlen, in der dann bei einem ähnlichen Prozess die magnetischen Momente der Atomkerne erst bei konstanter Temperatur magnetisiert und dann nach Abkoppelung vom Wärmebad entmagnetisiert werden. Man erreicht ca. 1  $\mu\text{K}$ .

Um Ensembles sehr weniger (einige  $10^3$  bis  $10^6$ ) Atome zu kühlen, verwendet man die "**Laserkühlung**". Hier werden in allen drei Raumrichtungen je zwei Laserstrahlen gegeneinandergerichtet. Deren Wellenlänge ist so eingerichtet, dass Atome, die sich etwas zu schnell bewegen, dieses Licht absorbieren können, langsame dagegen nicht. Durch die Absorption eines Photons erhält das Atom einen Rückstoß und hat nach der Absorption eine geringere kinetische Energie. Mit dem Verfahren lassen sich ca. 30 mK erreichen. Um die kalten Atome weiterzukühlen, werden sie in einer "magnetischen Falle" gefangen. Aus dieser Falle können aber die schnellsten Atome entweichen ("verdampfen"), so

---

<sup>3</sup>Man taucht die Probe in die Flüssigkeit, lässt die Probe von abdampfendem  $\text{N}_2$ -Gas umströmen oder kühlt ein Zwischenelement, das thermisch an die Probe angekoppelt ist.

## Erzeugung hoher/tiefer Temperaturen

sehr hohe T:	Schwerionenreaktionen, Stöße, Implosionen, Stromheizung in Plasmen (.....)
tiefe T:	> 20 K zyklische Kältemaschinen (Kühlschrank, Wärmepumpe, Kryokühler)
	> 0.2 K Kühlung durch siedende Gase
	> 77 K: N <sub>2</sub> (p=1 bar)
	> 4.2 K: <sup>4</sup> He (p=1 bar)
	> 1.3 K: fl. <sup>4</sup> He abpumpen
	> 0.3 K: fl. <sup>3</sup> He abpumpen
	> 10 mK <sup>3</sup> He/ <sup>4</sup> He-Entmischungskryostaten ("Verdampfen" von <sup>3</sup> He aus <sup>4</sup> He)
	> 10 mK "adiabatische Entmagnetisierung" von Elektronenspins
	> 1 µK "adiabatische Entmagnetisierung" von Kernspins
	> 30 mK Laserkühlung von Atomen
	> 1 nK "Verdampfung" aus magnetischen Fallen

Abbildung 6.8: Kühlverfahren



dass die mittlere Energie des Ensembles und damit die weiter absinkt. Diese **Verdampfungskühlung**, das die Kühlung weniger Atome unter 1 nK erlaubt, erlaubt die bereits erwähnte Herstellung von Bose-Einstein-Kondensaten.

### 6.3.4 Wärmekapazität und spezifische Wärme

Die Wärmekapazität  $C$  (in J/K) war definiert als  $C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$ , wobei  $\Delta Q$  die der Probe (Gas, Flüssigkeit oder Festkörper) zugeführte Wärme und  $\Delta T$  die dadurch hervorgerufene Temperaturänderung ist. Bezogen auf die Masse  $M$  der Probe ergibt sich die spezifische Wärme  $c = \frac{C}{M}$ , bezogen auf die Stoffmenge die molare Wärme,  $C_{mol} = \frac{C}{(\text{Stoffmenge})}$ , in J/(Mol·K). Bei Gasen wird weiter unterschieden, ob die Wärmekapazität bei konstantem Druck oder bei konstantem Volumen gemessen wird. Man fügt entsprechend einen Index "v" bzw "p" an. Wir werden uns hier zunächst nur mit der bei konstantem Volumen gemessenen Wärmekapazität beschäftigen. Tab. 6.5 gibt die spezifischen Wärmen und die molaren Wärmen einiger Gase für konstantes Volumen an, Tab. 6.6 die spezifischen Wärmen und molaren Wärmen einiger Festkörper.

Gas	$c_v$ [J/kgK]	$C_{v,mol}$ [J/molK]
He	3151	12.6
Ar	314	12.4
Luft	715	20.7
N <sub>2</sub>	740	20.7
H <sub>2</sub>	10078	20.2
CO <sub>2</sub>	627	25.1
N <sub>2</sub> O	660	26.5

Tabelle 6.5: *Spezifische Wärme einiger Gase (20 °C).*

Material	b [J/kgK]	$\mu$ (=m/m <sub>H</sub> )	$C_{mol}$
Li	3386	6.94	23.4
Diamant	502	12.01	15.9
Si	710	28.06	20.1
Fe	460	55.85	25.5
Pb	130	207.21	26.8

Tabelle 6.6: *Spezifische Wärme einiger Festkörper (20 °C)*

Es fällt auf, dass alle **einatomigen Gase** molare Wärmen um 12.5 J/(mol·K) haben, zweiatomige um 20.5 J/(mol·K) und dreiatomige um 26 J/(mol·K).

Betrachten wir zunächst die einatomigen Gase. Jedes Atom kann sich in (x,y,z) Richtung bewegen. Diese  $\tilde{f} = 3$  **Freiheitsgrade** tragen je  $k_B/2$  zur Wärmekapazität bei. Man erhält

$$C_{V,mol} = N_A \cdot \tilde{f} \cdot \frac{k_B}{2} = 6 \cdot 10^{23} (\text{mol})^{-1} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} = 10.4 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \quad (6.14)$$

was sehr nahe an den experimentell beobachteten Werten liegt.

Klassisch sollten auch Rotationen der Atome zur Energie des Gases und damit zur Wärmekapazität beitragen. Man hat prinzipiell 3 Freiheitsgrade der Rotation um die drei Raumachsen. Es stellt sich jedoch heraus, dass diese Freiheitsgrade thermisch nicht angeregt werden und daher keinen Beitrag liefern.

Dies ändert sich allerdings bei **zweiatomigen Gasen**. Hier tragen die 3 Freiheitsgrade der Translation je  $k_B/2$  zur Wärmekapazität bei. Stellt man sich das zweiatomige Molekül als Hantel vor, so kann diese in zwei Raumrichtungen senkrecht um ihre Symmetrieachse rotieren, sowie um ihre Symmetrieachse. Die letztgenannte Rotation kann wiederum nicht angeregt werden. Die beiden Rotationen senkrecht zur Symmetrieachse tragen wiederum je  $k_B T/2$  zur inneren Energie, bzw.  $k_B/2$  zur Wärmekapazität bei. Ein weiterer Freiheitsgrad ist die Schwingung der beiden Atome des Moleküls gegeneinander. Es stellt sich aber heraus, dass dieser Beitrag zumindest bei Zimmertemperatur vernachlässigbar klein ist<sup>4</sup>. Damit hat man  $f = 5$  und  $C_{V,mol} = 20.8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ .

Bei **dreiatomigen Gasen** ist, solange diese nicht entlang einer Linie angeordnet sind, keine Symmetrieachse mehr vorhanden. Alle 3 Rotationsfreiheitsgrade tragen je  $k_B/2$  zur spezifischen Wärme bei. Man hat außerdem 3 Schwingungsfreiheitsgrade, deren Beitrag aber wiederum bei 300 K vernachlässigbar ist. Damit ist  $f = 6$ , was  $C_{V,mol} = 25 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$  in guter Übereinstimmung mit dem Experiment ergibt.

Grundsätzlich können bei vielatomigen Systemen (mit  $N$  Atomen) bis zu 6 Freiheitsgrade pro Atom angeregt sein, die den 6 klassischen Freiheitsgraden ( $3 \times$  Translation,  $3 \times$  Rotation) des einzelnen Atoms entsprechen. Drei dieser Freiheitsgrade entsprechen der Translation des Systems als ganzem, 3 der Rotation als Ganzem. Die anderen  $3N - 6$  Freiheitsgrade treten als Schwingungen der Bausteine gegeneinander auf.

Im Fall des **H<sub>2</sub>O-Moleküls** sind in der Tat alle Freiheitsgrade angeregt, man erhält  $3 \cdot 6 = 18$  Freiheitsgrade pro Molekül und damit  $C_{V,mol} = 74.5 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ . 1 Mol Wasser wiegt  $1.8 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$ , woraus  $c \approx 4130 \text{ J}/(\text{kgK})$  folgt. Man misst für **Wasser**  $c = 4185 \text{ J}/(\text{kgK})$ , was auch als 1 cal (**1 "Kalorie"**) definiert ist.

Bei **Festkörpern** ist  $N$  von der Größenordnung  $10^{23}$ . Man kann die 6 Freiheitsgrade der Rotation bzw. Translation des gesamten Festkörpers gegen die  $10^{23}$  Schwingungsfreiheitsgrade vernachlässigen und erhält 6 Schwingungsfreiheitsgrade pro Atom. Falls diese alle angeregt sind - bei Festkörpern ist dies im Gegensatz zu den mehratomigen Gasen bei 300 K meist der Fall - erhält man  $C_{mol} \approx 24.9 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ . ("**Regel von Dulong-Petit**").

Tab. 6.6 zeigt, dass mit Ausnahme von Diamant die molaren Wärmekapazitäten aller aufgelisteten Materialien nahe an diesem Wert liegen. Abb. 6.9 zeigt für Pb, Cu und Diamant die Temperaturabhängigkeit der molaren Wärmekapazität. man erkennt, dass für Pb und Cu  $C_{mol}$  zu tiefen Temperaturen hin in einem charakteristischen Temperaturintervall stark abnimmt. Diese charakteristische Temperatur ist die "**Debye-Temperatur**", die in der Festkörperphysik eine wichtige Rolle spielt. Der starke Abfall von  $C_{mol}$  bei der Debye-Temperatur wird auch als das "Einfrieren" der Schwingungsfreiheitsgrade bezeichnet.

Auch  $C_{mol}$  von Diamant nähert sich für hohe Temperaturen dem Wert von  $24.9 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$  an. Dies passiert allerdings erst weit oberhalb der Zimmertemperatur.

<sup>4</sup>Die Energie, die mit dieser Schwingung verbunden ist, ist von der Größenordnung eV. Die thermische Energie  $k_B T$  bei 300 K ist ca. 25 meV. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Molekül mit dieser Energie schwingt, ist proportional zum Boltzmann-Faktor  $\exp(-E/k_B T) \approx \exp(-40) \approx 4 \cdot 10^{-18}$ , was vernachlässigbar wenig ist.

Wir kommen schließlich zur **Messung der Wärmekapazität**. Ein direktes und oft angewendetes Verfahren besteht darin, einer thermisch gut von der Außenwelt isolierten Probe eine definierte Wärmemenge  $\Delta Q$  zuzuführen und die Temperaturerhöhung  $\Delta T$  zu messen. Man beobachtet dann ein Anwachsen dieser Temperatur mit der Zeit, da sich das thermische Gleichgewicht erst allmählich einstellt. Nach Erreichen eines Maximalwertes - dieser wird zur Bestimmung von  $\Delta T$  verwendet - fällt die Probentemperatur langsam ab, da durch die üblicherweise nicht vollständige Abkopplung von der Außenwelt allmählich Energie an diese abgegeben wird.

Ein zweites, sehr einfaches Verfahren benutzt das **Mischungskalorimeter**. Man benutzt ein Wasserbad (Wassermasse:  $m_1$ ) bei der Temperatur  $T_1$ , in das die Probe (Temperatur  $T_2$ , Masse  $m_2$ ) eingebracht wird. Die Wärmekapazität des Gefäßes bei der Anfangstemperatur  $T_1$  sei  $C_g$ . Das Gefäß sollte gut von der Außenwelt isoliert sein, so dass Energieverluste an die Umgebung vernachlässigt werden können. Nach einiger Zeit stellt sich thermisches Gleichgewicht zwischen Probe und Bad ein, die für Gefäß, Bad und Probe gleiche Temperatur ist die Mischtemperatur  $T_m$ . Bei Vernachlässigung von Energieverlusten muss die von der Probe abgegebene Wärmemenge  $\Delta Q_2 = cm_2(T_2 - T_m)$  gleich der vom Bad aufgenommenen Wärmemenge  $\Delta Q_1 = (c_0m_1 + C_g)(T_2 - T_m)$  sein. Man erhält hieraus

$$c = \frac{c_0m_1 + C_g}{m_2} \cdot \frac{T_m - T_1}{T_2 - T_m}. \quad (6.15)$$

Wir demonstrieren dies experimentell für eine Messing-Kugel, die aus einem kochenden Wasserbad heraus in ein mit Wasser gefülltes Styroporgefäß geworfen wird. Der nach obiger Formel ermittelte Wert  $c$  liegt knapp unterhalb des Literaturwertes von ca. 370 J/(kgK) für Messing.

In einem zweiten Versuch legen wir drei gleichgroße heiße Kugeln aus Messing, Al und Pb auf eine Wachsunterlage. Die Kugel schmelzen das Wachs auf, wobei die Messingkugel am weitesten einsinkt, gefolgt von der Al-Kugel. Die Pb-Kugel sinkt nur wenig ein.

Die spezifischen Wärmen dieser Materialien sind:

Pb: 0.134 J/(kgK); Al: 0.92 J/(kgK); Messing: 0.37 J/(kgK).

Die Massen betragen:

Pb: 0.698 kg; Al: 0.183 kg; Messing: 552.5 kg.

Hieraus folgen die Wärmekapazitäten:

Pb: 93.5 J/K ; Al: 169.2 J/K; Messing: 205 J/K (Messing).

Die Kugeln sanken in der Tat umso weiter ein, je größer deren Wärmekapazität war.

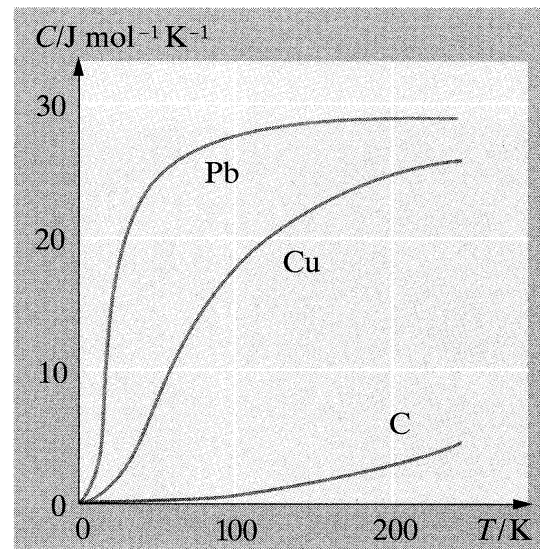


Abbildung 6.9: Temperaturabhängigkeit der molaren Wärmekapazität von Pb, Cu und Diamant (aus: Gerthsen, 2002, Abb. 5.5)

## 6.4 Ideales Gas

### 6.4.1 Zustandsgleichung des idealen Gases

Das ideale Gas hatten wir definiert als ein System von Atomen, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten in einem begrenzten Volumen  $V$  aufhalten. Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit stoßen diese Atome dabei gegen eine der begrenzenden Wandflächen und werden von dieser reflektiert. Dabei ändert sich der Impuls des Atoms: die Komponente des Impulses,  $mv$ , die senkrecht zur Wandfläche steht, ändert ihr Vorzeichen,  $mv \rightarrow -mv$ . Wegen der Erhaltung des Gesamtimpulses ist diese Impulsänderung des Atoms verknüpft mit einem Impulsübertrag auf die Wand. Summieren wir diese Impulsüberträge über einen gewissen Zeitraum  $\Delta t$ , so ergibt sich im statistischen Mittel ein gesamtter Impulsübertrag auf eine gewisse Fläche  $\Delta F$  der Wand. Dieser Impulsübertrag dividiert durch die Zeit  $\Delta t$  entspricht dann einer Kraft, die auf diese Fläche  $\Delta F$  ausgeübt wird. Diese Kraft entsteht also dadurch, dass ständig Atom des Gases auf die Wand prallen und von dieser reflektiert werden. Damit die Wand an ihrem Ort bleibt muss von aussen eine Gegenkraft auf die Wand wirken, die diese Kraft gerade ausgleicht. Wir definieren als den **Druck** des Gases gerade den Betrag dieser Kraft der Gasatome (beziehungsweise der gleichstarken kompensierenden Kraft) pro Flächeneinheit

$$\text{Druck} = \frac{\text{auf } \Delta F \text{ übertragener Impuls in } \Delta t}{\Delta F \Delta t}.$$

Zur Bestimmung des Impulsübertrages, der in  $\Delta t$  im statistischen Mittel auf  $\Delta F$  übertragen wird, bestimmen wir zunächst einmal die Anzahl der Atome mit einer Geschwindigkeit  $v$ , die in der Zeit  $\Delta t$  auf die Wand auftreffen werden. Diese Atome oder Moleküle dürfen höchstens den Abstand  $\Delta x = v\Delta t$  von der Wand haben, sonst haben sie ja keine Chance mit ihrer Geschwindigkeit  $v$  in der Zeit  $\Delta t$  die Wand zu erreichen. Insgesamt müssen sie sich also in einem Volumen  $\Delta V = v\Delta t\Delta F$  befinden. Bei der vorgegebenen Teilchendichte  $\rho$  ist die Zahl der Atome also gerade

$$\tilde{Z} = \rho v \Delta t \Delta F.$$

Von diesen  $\tilde{Z}$  Atomen wird sich aber im Mittel nur jedes sechste auf die Wand zubewegen, da ja im 3-dimensionalen Raum insgesamt 6 Bewegungsrichtungen zur Verfügung stehen. Die Zahl der Atome, die auftreffen werden ist also gleich

$$Z = \frac{1}{6} \rho v \Delta t \Delta F.$$

Jedes dieser auftreffenden Atome der Masse  $m$  überträgt dabei den Impuls  $2mv$ , womit sich nach (6.4.1) insgesamt ein Druck  $p$  ergibt der Größe

$$p = \frac{2mv \rho v \Delta F \Delta t}{6 \Delta F \Delta t} = \frac{1}{3} \rho m v^2.$$

Die Atome haben aber nicht alle die Geschwindigkeit  $v$ , es gibt ja eine Geschwindigkeitsverteilung und wir haben im vorhergehenden Abschnitt ausgerechnet, dass bei einem idealen Gas für den Mittelwert der kinetischen Energie und damit dem Mittelwert des Quadrates der Geschwindigkeit  $\bar{v}^2$  gilt

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} k_B T.$$

Im statistischen Mittel sollten wir also gerade  $v^2$  in (6.4.1) durch diesen Mittelwert ersetzen und erhalten

$$p = \frac{1}{3} \rho m \bar{v}^2 = \rho k_B T = \frac{N}{V} k_B T,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die Teilchendichte sich aus der Teilchenzahl  $N$  und dem Volumen  $V$  ergibt zu  $\rho = N/V$ . Multipliziert man diese Gleichung mit dem Volumen  $V$ , so ergibt sich die **Zustandsgleichung des Idealen Gases** in der Form

$$pV = Nk_B T.$$

Betrachtet man nun ein Gas mit  $\nu$  Molen, so ist die Zahl der Atome gerade  $N = \nu N_A$  mit  $N_A$  der Avogadro Konstanten. Damit können wir die Zustandsgleichung (6.4.1) auch umschreiben auf die Form

$$pV = \nu N_A k_B T = \nu RT,$$

wobei wir die Gaskonstante definiert haben mit

$$R = N_A k_B = 8.3 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}.$$

Die Zustandsgleichung des idealen Gases (6.4.1) definiert, bei festgehaltener Anzahl der Atome  $N$ , einen Zusammenhang zwischen der Temperatur  $T$ , dem Volumen  $V$  und dem Druck des Gases  $p$ . Wenn man nun Änderungen des Systems betrachtet, bei denen jeweils eine dieser Zustandsgrößen festgehalten wird, ergeben sich also aus (6.4.1) die folgenden Beziehungen:

- Wird die Temperatur  $T$  konstant gehalten, so spricht man von einer **isothermen Änderung** des Systems. In diesem Fall gilt das **Gesetz von Boyle und Mariotte**

$$pV = \text{konst.} \quad \text{bzw.} \quad p \sim V^{-1}.$$

- Bleibt der Druck  $p$  konstant, so nennt man diesen eine **isobare Änderung** des Systems. In diesem Fall gilt das **Gesetz von Gay und Lussac**

$$V \sim T.$$

- Im Falle, dass das Volumen konstant gehalten wird, nennt man dies eine **isochore Änderung** des Systems. Hier gilt das **Gesetz von Charles**

$$p \sim T.$$

## 6.4.2 Barometrische Höhenformel

Der Druck, den wir auf der Erdoberfläche spüren, von etwa  $p = 1$  bar, wird erzeugt durch das Gewicht Luftsäule, die auf der betrachteten Fläche  $F$  lastet. Wenn man annimmt, dass die Dichte dieser Luftsäule in allen Höhen identisch ist mit der an der Erdoberfläche, so müsste diese Luftsäule, unter der Annahme, dass bei den Bedingungen auf der Erdoberfläche 1 Liter Luft etwa 1 Gramm wiegt, eine Höhe von etwa 10 km haben. Diese Annahme ist aber natürlich falsch: diese Massendichte von 1 Gramm pro Liter erreicht die Luft bei

dem Druck von etwa 1 bar, den wir etwa auf Meereshöhe vorfinden. In großer Höhe, also z.B. auf hohen Bergen ist die Höhe der Luftsäule niedriger, dementsprechend auch der Druck, der dadurch entsteht, und entsprechend dem Gesetz von Boyle und Mariotte (6.4.1) das Volumen für eine vorgegebene Anzahl von Atomen größer. Dies bedeutet aber dass die Teilchendichte  $\rho$  und damit auch die Massendichte  $\tilde{\rho}$  entsprechend kleiner sind. Wir können also einen bestimmten Wert für die Massendichte  $\tilde{\rho}$  nur in einer bestimmten Höhe annehmen.

Deshalb betrachten wir (siehe Abb. 6.10) den Druck über eine Fläche  $F$  in einer Höhe  $h + \Delta h$  und stellen fest, dass dies dem Druck  $p(h)$  in der Höhe  $h$  entspricht minus der Gewichtskraft pro Fläche, die durch die Luft in dem Volumen  $F\Delta h$  erzeugt wird (gekennzeichnetes Volumen in Abb. 6.10). Damit ergibt sich

$$\Delta p = p(h + \Delta h) - p(h) = -\frac{\tilde{\rho} F \Delta h g}{F}.$$

Dabei bezeichnet  $g$  wie üblich die Beschleunigungskonstante durch die Erdanziehung. Die Massendichte entspricht der Volumendichte  $\rho$  multipliziert mit der Masse  $m$  der einzelnen Luftmoleküle

$$\tilde{\rho} = m \frac{N}{V} = m \frac{p}{k_B T}$$

wobei wir die Zustandsgleichung des idealen Gases (6.4.1) benutzt haben. Damit kann man (6.4.2) umschreiben in

$$\Delta p = -\frac{mg}{k_B T} \Delta h p.$$

Dividiert man diese Gleichung durch  $\Delta h$  und vollzieht den Grenzübergang  $\Delta h \rightarrow 0$ , so ergibt sich daraus die Differenzialgleichung

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{mg}{k_B T} p,$$

zur Bestimmung der unbekanntenen Funktion Druck als Funktion der Höhe,  $p(h)$ . Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass die Funktion

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}},$$

die Lösung der Differenzialgleichung (6.4.2) ist. Dabei entspricht die Konstante  $p_0$  dem Druck bei der Höhe  $h = 0$ . Diesen Ausdruck (6.4.2) bezeichnet man als **barometrische Höhenformel**. Sie gilt natürlich nur, wenn die Annahme, dass die Temperatur  $T$  konstant, also unabhängig von der Höhe  $h$  ist.

Mit der Beziehung

$$\rho = \frac{N}{V} = \frac{p}{k_B T},$$

kann man die barometrische Höhenformel natürlich auch umschreiben in einen Ausdruck, der die Dichte als Funktion der Höhe angibt:

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}}.$$

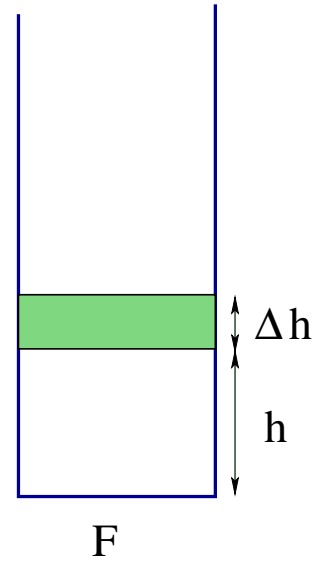


Abbildung 6.10:

## 6.5 Gasgesetze, Druck und Vakuum

### 6.5.1 Gasgesetze und Gasthermometer

Im Rahmen der kinetischen Gastheorie ergab sich der Druck als Kraft/Wandfläche = (Impulsübertrag an die Wand)/(Wandfläche·Zeit).

Die **SI-Einheit des Drucks** ist  $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa}$  (**Pascal**).

Daneben sind allerdings eine Vielzahl von Einheiten gebräuchlich, z. B.:

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ at} = 1 \text{ kp/cm}^2 = 0.981 \text{ bar (} \text{''Atmosphäre''});$$

$$1 \text{ Torr} = 133 \text{ Pa} = 1.3 \text{ mbar}$$

1 Torr ist der Druck, den eine Hg-Säule von  $h=1 \text{ mm}$  Höhe auf eine Oberfläche erzeugt:  $p = m \cdot g / (\text{Fläche}) = r \cdot g \cdot h = 13.546 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx 133 \text{ Pa}$ .

Druck von 1 m Wassersäule = 0.098 bar.

PSI = "pounds per square inch" (gebräuchlich in USA)

u. v. a.

Für ein **ideales Gas** gilt:  $p \cdot V = N \cdot k_B \cdot T = \nu \cdot N_A \cdot k_B \cdot T = \nu \cdot R \cdot T$  mit der Gaskonstanten  $R = 8.31 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$ .

Hält man die Temperatur konstant, so ergibt sich hieraus  $p \propto \frac{1}{V}$ . Dies ist das **Gesetz von Boyle-Mariotte**. Wir demonstrieren dies dadurch, dass wir auf ein Gasvolumen den Druck von 5 m Wassersäule ( $\approx 0.5 \text{ bar}$ ) ausüben (Hochziehen eines Wassereimers, der durch einen Schlauch mit dem Gasvolumen verbunden ist). Der Gesamtdruck auf das Gasvolumen steigt von 1 bar auf 1.5 bar. Das Gasvolumen verringert sich auf  $\frac{2}{3}$  des Ausgangswerts.

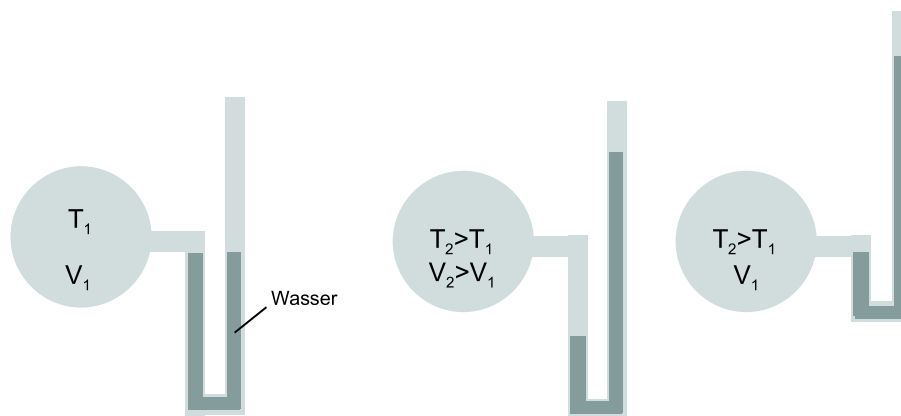


Abbildung 6.11: Messung der Gay-Lussac'schen Beziehung.

Ändert man die Temperatur eines Gases bei konstantem Volumen, ergibt sich das **Gesetz von Gay-Lussac**<sup>5</sup>:  $p \propto T$ . Wir demonstrieren dies mit der in Abb. 6.11 gezeigten Anordnung. An eine mit Luft gefüllte Glaskugel ist ein Schlauch angebracht, der z. T. mit Wasser gefüllt ist. Für  $T = T_1$  seien die beiden Schenkel der Wassersäule gleich hoch.

<sup>5</sup>Die Abhängigkeit  $V \propto T$  für  $p = \text{const.}$ , die wir hier nicht näher untersuchen, wird auch das **Gesetz von Charles** genannt.

Erwärmt man die Glaskugel im Wasserbad, so dehnt sich das Gas aus und drückt das Wasser im linken Schenkel herunter. Dies wird durch Anheben des Wasserschlauchs ausgeglichen, bis sich das anfängliche Gasvolumen wieder eingestellt hat. Zwischen beiden Oberflächen der Wassersäule ist eine Höhendifferenz  $h$ , entsprechend der Druckzunahme im Gas. Für eine Temperaturänderung von  $20\text{ °C}$  auf  $40\text{ °C}$  ( $293\text{ K}$  auf  $313\text{ K}$ ) ergibt sich:  $T_1/T_2 = 1.068$ . Wir erwarten nach Gay-Lussac eine Druckerhöhung von  $1\text{ bar}$  auf  $1.068\text{ bar}$ , was  $68\text{ cm}$  Wassersäule entspricht (in etwa dieser Wert wird auch gemessen).

Auf diese Weise funktioniert im Prinzip auch das Gasthermometer, wobei i. allg. an Stelle von Wasser Quecksilber verwendet wird, das über ein U-Rohr ein Gasvolumen abschließt. Das Anfangsvolumen wird durch einen zweiten Schlauch wiederhergestellt, der mit dem U-Rohr verbunden ist (Abb. 6.12).

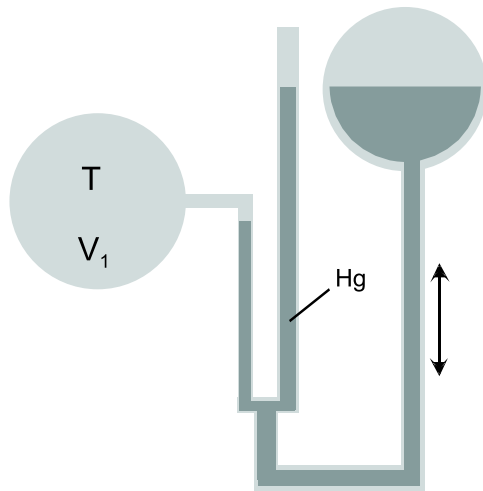


Abbildung 6.12: Gasthermometer.

### 6.5.2 Vakuum

Im folgenden wollen wir uns mit für die Physik interessanten Druckbereichen beschäftigen. Wir beginnen mit dem "Vakuum" und besprechen im Anschluss kurz einige Phänomene, die bei sehr hohen Drücken auftreten.

Historisch wurde das **Vakuum** bzw. die enorme Kraft, die die Atmosphäre auf eine evakuierte Kugel ausübt, 1654 von Otto von Guericke (Jurist, Bürgermeister von Magdeburg) auf dem Regensburger Reichstag demonstriert ("Magdeburger Halbkugeln", Abb. 6.13). Er evakuierte zwei zusammengepresste Halbkugeln (Durchmesser:  $33.5\text{ cm}$ ) und benötigte Pferdegespanne, um die evakuierten Halbkugeln zu trennen. Bei der Demonstration im Hörsaal hängen wir zwei  $25\text{ kg}$ -Gewichte an die Halbkugeln (Durchmesser:  $75\text{ cm}$ ). Bei einem Innendruck von  $0.68\text{ bar}$  werden die Halbkugeln getrennt.

In einem zweiten Versuch evakuieren wir einen Glaskolben und messen dabei sein Gewicht. Wir finden, dass **1 l Luft bei  $20\text{ °C}$  und  $p = 1\text{ bar}$  ca.  $1.2\text{ g}$  wiegt** (ca.  $10^{-3}$  des Gewichts von Wasser). Mit  $\mu = 29$  für Luft entspricht dies  $2.4 \cdot 10^{22}$  "Luftmolekülen".  $N_A = 6 \cdot 10^{23}$  Moleküle ( $1\text{ mol}$ ) nehmen entsprechend ein Volumen von  $25\text{ Litern}$  ein. (Für  **$p = 1\text{ bar}$ ,  $T = 273\text{ K}$**  ergibt sich der Wert von  **$22.4\text{ l/mol}$** ).





Abbildung 6.13: *Magdeburger Halbkugeln (Original)*. Quelle: <http://www.deutsches-museum.de/ausstell/dauer/physik/physik1.htm>

Bezeichnung	Druck [mbar]
Großvakuum	1000-1
Feinvakuum (Vorvakuum)	$1-10^{-3}$
Hochvakuum (HV)	$10^{-3} - 10^{-7}$
Ultrahochvakuum (UHV)	$< 10^{-7}$ (bis ca. $10^{-11}$ )

Tabelle 6.7: *Bezeichnungen unterschiedlicher Vakua.*

Man unterscheidet heute je nach Druckbereich unterschiedliche Vakua, die in Tab. 6.7 aufgelistet sind.

Bei Drücken unterhalb des Feinvakuums sinkt die mittlere freie Weglänge  $l$ , die die Gasmoleküle zwischen zwei Stößen zurücklegen können, auf Werte über 10 cm ( $H_2$  bei  $10^{-4}$  mbar: ca. 3 m). Hierbei ist  $l$  umgekehrt proportional zum Druck.

In Vakuumkammern, wie sie etwa zum Aufdampfen dünner Filme<sup>6</sup> auf ein Substrat verwendet werden, stoßen dann die Moleküle praktisch nur noch mit den Wänden. Insbesondere bewegen sich abdampfende Moleküle geradlinig zum Substrat, wo sie den Dünnschicht bilden. In Aufdampfanlagen will man aber in der Regel noch erheblich bessere Drücke im UHV-Bereich, um Verunreinigungen der aufwachsenden Filme durch die Restgase zu vermeiden. Drücke im HV - Bereich sind ebenfalls nötig, um etwa in magnetischen Fallen einzelne Atome zu isolieren, oder um in der Fernrohröhre einen Elektronenstrahl auf einen Leuchtschirm zu lenken. Auch bei Thermoskannen oder Kryostaten ist ein Innenbehälter

<sup>6</sup>Dünnschichten oder auch vielfach geschichtete unterschiedliche Materialien (Multilagenn) sind sehr wichtig in der modernen Forschung und Technik. Mikroelektronische Bauelemente aller Art werden in Dünnschichttechnik hergestellt.

durch Vakuum von einem Außenbehälter getrennt. Damit wird der Wärmetransport<sup>7</sup> zwischen den beiden Behältern stark vermindert.

### 6.5.3 Vakuumpumpen

Zur Erzeugung der verschiedenen Druckbereiche werden unterschiedliche Typen von Vakuumpumpen eingesetzt.

Im Bereich des **Vor- und Feinvakuums** verwendet man rotierende **Verdrängerpumpen** (z. B. **”Drehschieberpumpen”** oder **”Wälzkolbenpumpen”** (= **”Rootspumpen”**)), die in Abb. 6.14 dargestellt sind.

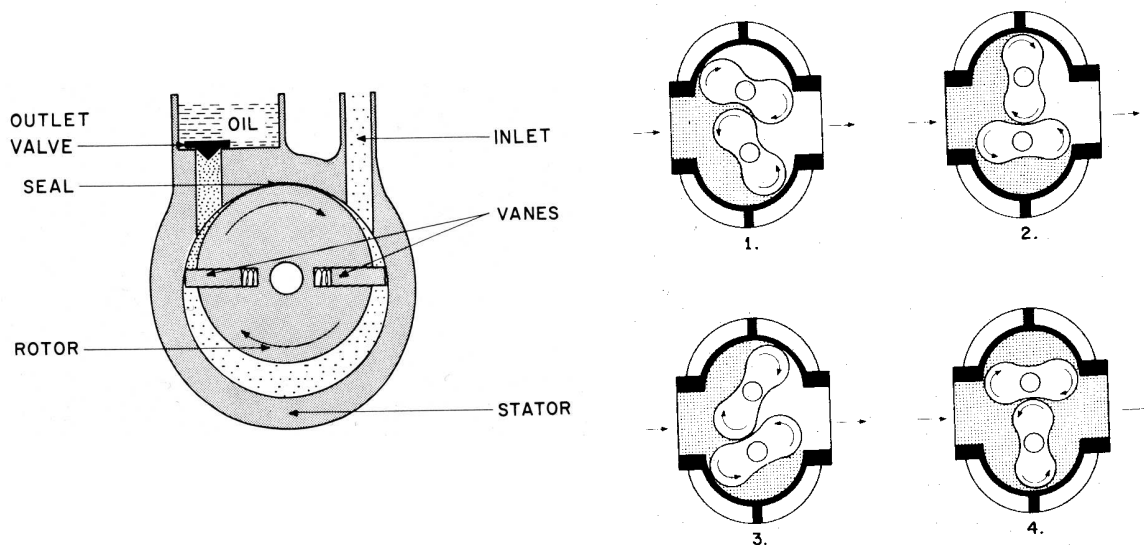


Abbildung 6.14: Drehschieberpumpe (links) und Wälzkolbenpumpe (rechts). Arbeitsbereich: Grob- und Vorvakuum. Aus: Maissel & Clang, Handbook of thin film technology

Drücke im **HV-** und **UHV-**Bereich können durch die Kombination **kinetischer und gasbindender Pumpen** erreicht werden. Sie benötigen bereits Drücke im Feinvakuumbereich, um Arbeiten zu können. Kinetische Pumpen sind beispielsweise die Diffusionspumpe, die Turbomolekularpumpe oder die Ionen-Getterpumpe. Bei der **Turbomolekularpumpe** (Abb. 6.15) dreht sich ein ventilatorartiger Rotor mit hoher Drehzahl und stößt Gasmoleküle, deren freie Weglänge bereits sehr groß gegen die Pumpendimensionen ist, in Förderrichtung. Bei den **Diffusionspumpen** (Abb. 6.16) wird zunächst ein hochvakuumgeeignetes Treibmittel (spezielle Öle) erhitzt und durch den Vakuumbereich geströmt. Das kondensierende Öl reißt dabei die Moleküle im Restgas mit sich. Bei **Ionen-Getterpumpen** (Abb. 6.17) werden die Luftmoleküle erst ionisiert und dann mittels angelegter Spannungen **”abgesaugt”**.

**Gasbindende Pumpen (Kühlfallen, Sorptionspumpen)** schließlich nutzen aus, dass Moleküle bevorzugt an kalten Oberflächen adsorbieren (ähnlich der Kondensation von

<sup>7</sup>Wärme wird ebenfalls ganz erheblich durch Wärmestrahlung transportiert. Dieser Mechanismus des Wärmetransport kann durch Verspiegeln der Behälter oder durch Anbringen metallischer Blenden stark verringert werden.

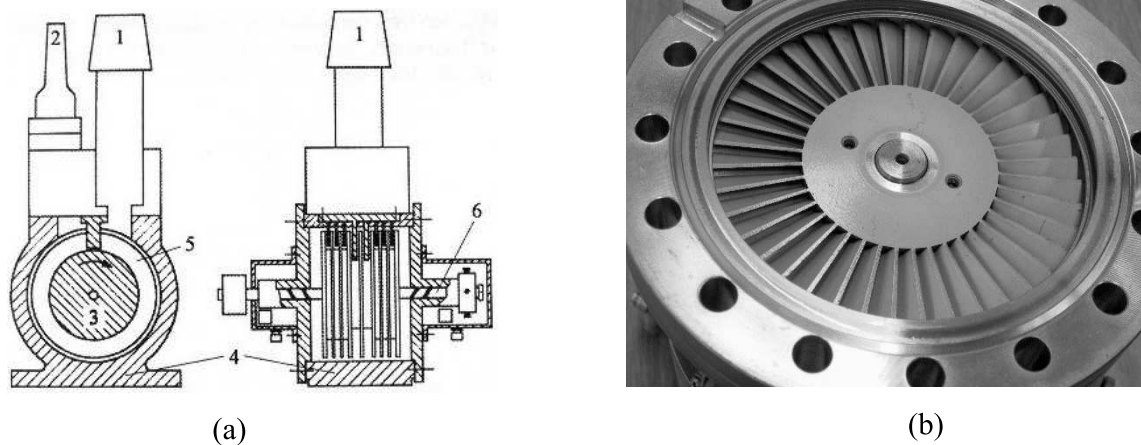


Abbildung 6.15: Links: Molekularpumpe nach Gaede (1: Ansaugstutzen, 2: Vorvakuumstutzen, 3: Rotor, 4: Gehäuse mit Statorstutzen, 5: Trennwand zwischen links- und rechtsseitigem Strömungsweg, 6: Antriebswelle). Rechts: Turbomolekularpumpe (hier: Pfeiffer TPU 170). Arbeitsbereich: HV, UHV Quelle: [http://www.pe.tu-clausthal.de/agbalck/vorlesung/server/mess2001/ms-vor05/imh\\_3543.htm](http://www.pe.tu-clausthal.de/agbalck/vorlesung/server/mess2001/ms-vor05/imh_3543.htm)

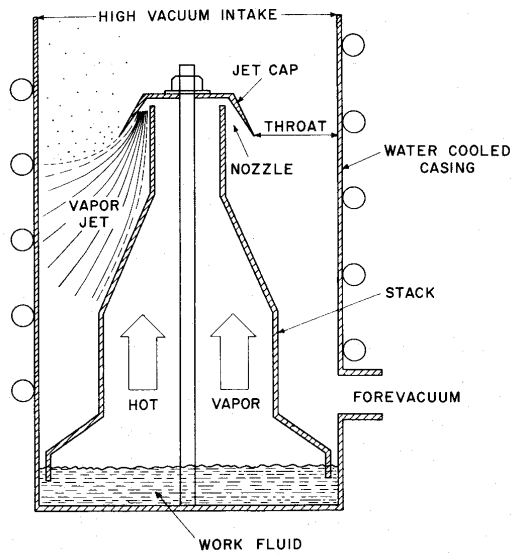


Fig. 6 Basic elements of a diffusion pump.

Abbildung 6.16: Diffusionspumpe. Arbeitsbereich: HV. Aus: Maissel&Clang, Handbook of thin film technology

Wasserdampf an einer kalten Fensterscheibe). Diese Pumpen behalten das Restgas im System. Sie müssen daher von Zeit zu Zeit ausgeheizt werden.

Ein gasbindender Pumpeffekt tritt auch "von selbst" in Kryostaten auf. Man hat dort beispielsweise einen inneren Behälter, der auf Temperaturen des flüssigen Heliums gekühlt wird. Um diesen Behälter ist oft ein zweiter Behälter angebracht, der durch flüssigen Stickstoff gekühlt wird. Der Raum zwischen den beiden Behältern ist evakuiert und enthält z. T. Luft oder  $N_2$  als Restgas. Sobald die Temperatur der Innenwandung unter die Siedetemperatur von  $N_2$  gefallen ist, kondensiert dieses an der Wand aus (Restliche He-Atome im evakuierten Bereich kondensieren dagegen nicht; man muss daher selbst kleine Lecks zum He-Behälter nach Möglichkeit vermeiden).

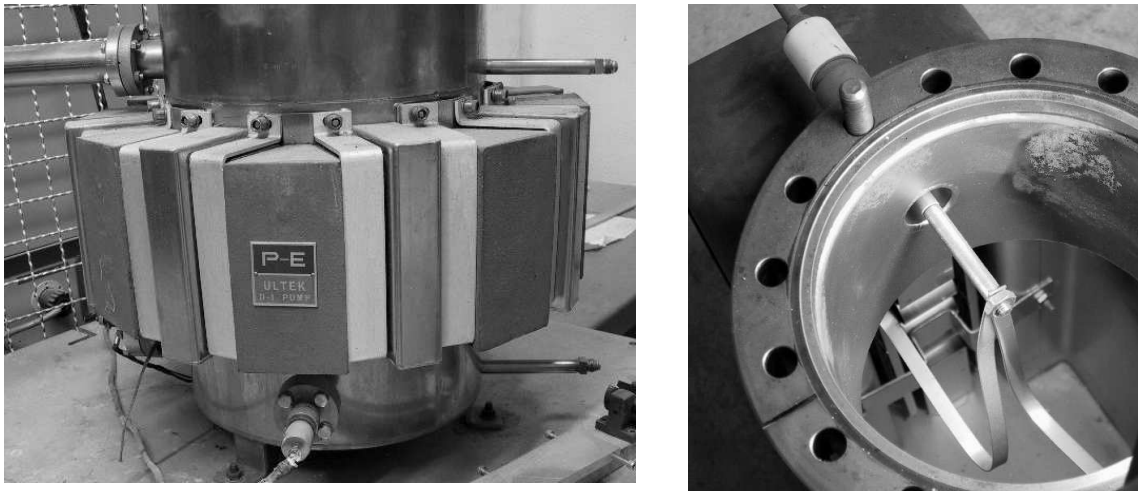


Abbildung 6.17: Ionen-Getterpumpe (HV-Bereich) Quelle: [http://www.pe.tu-claus-thal.de/agbalck/vorlesung/server/mess2001/ms-vor05/imh\\_3543.htm](http://www.pe.tu-claus-thal.de/agbalck/vorlesung/server/mess2001/ms-vor05/imh_3543.htm)

Es sei hier außerdem angemerkt, dass das maximal erreichbare Endvakuum durch die Balance (Saugvermögen der Pumpe)  $\leftrightarrow$  (durch Lecks einströmendes Gas) gegeben ist. Bei sinkendem Druck sinkt auch das Saugvermögen der Pumpe, so dass der Enddruck einen gewissen Endwert nicht unterschreiten kann. Auch von den Oberflächen der Vakuorkammern dampfen dort adsorbierte Restgase ab. Bei "groben" Verschmutzungen (Feuchtigkeit, Fingerabdrücke) können kaum Enddrücke unter  $10^{-3}$  mbar erreicht werden. Im Bereich des UHV ist selbst bei sehr sauberen Oberflächen das Ausgasen der Oberflächen sehr problematisch.

#### 6.5.4 Druckmessung

Zur Druckmessung werden eine Reihe von Methoden herangezogen, die z. T. direkter Art und z. T. indirekter Art sind.

Das **Quecksilberbarometer** (Abb. 6.18) realisiert die Definition des Torr. Der Aufbau ist ganz ähnlich wie die Anordnung der Abb. 6.11. Die Höhe  $h$  gibt ist proportional zum Überdruck in dem Gefäß, also proportional zu  $p_2 - p_1$ . Man kann den rechten Schenkel des U-Rohrs auch bei  $p_2 \approx 0$  geschlossen halten (**Quecksilbermanometer**). Die Höhe  $h$  ist dann direkt proportional zu  $p_1$ . Um den geschlossenen rechten Schenkel zu evakuieren, füllt man ihn vollständig mit Hg und dreht dann die Anordnung um. Das Quecksilber sinkt dann ab und hinterlässt einen evakuierten Bereich ("Toricelli-Vakuum"), in dem sich lediglich Quecksilberdämpfe befinden.

Beim **Aneroidbarometer** wird eine evakuierte, wellige Dose durch den Außendruck deformiert und diese Deformation auf die Druckanzeige weitergegeben (Abb. 6.19). Beim Röhrenbarometer (Abb. 6.20) sorgt die Differenz zwischen den verschiedenen großen Innen- und Außenflächen des Rohres zu einer mechanischen Verformung.

Beim **Pirani-Vakuum-Meter** dient die **Wärmeleitfähigkeit** von Gasen zur Druckmessung bei geringen Drücken. Hier wird ein elektrischer Widerstand oder ein Thermoelement

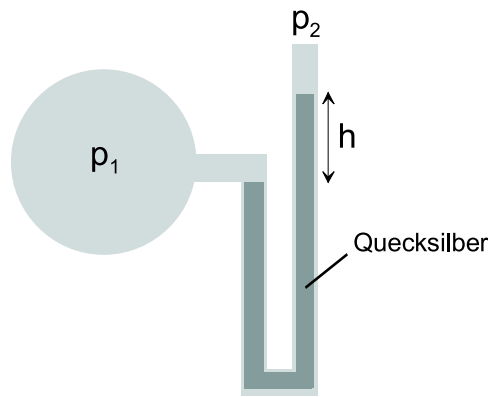


Abbildung 6.18: *Prinzip des Quecksilberthermometers*

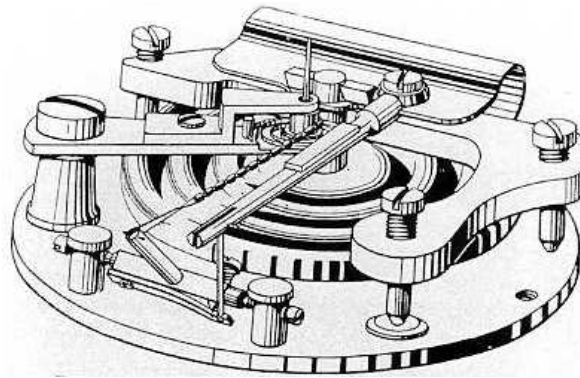


Abbildung 6.19: *Aneroidbarometer ("Vidiedose") nach Lucien Vidie (1805-1866). Quelle: <http://www.freunde-alter-wetterinstrumente.de/12barges.htm>*

durch das Gas gekühlt. Sinkt der Gasdruck, heizt sich der Sensor auf. Aus dessen Temperaturänderung lässt sich dann der Druck bestimmen. Bei der **Penning-Röhre** und bei **Ionisationsröhren** wird das zunächst elektrisch neutrale Gas durch Stöße mit Elektronen z. T. ionisiert und dann die elektrische **Leitfähigkeit** der Ionen gemessen. Aus dieser Leitfähigkeit wird der Druck des Gases bestimmt.

Einen interessanten Effekt beobachtet man bei den **Lichtmühlen** (sie werden allerdings nicht mehr zur Druckmessung eingesetzt). Die Lichtmühlen bestehen aus frei rotierbaren Schaufelrädern, die eine reflektierende und eine absorbierende Seite haben. Bei Gasdrücken zwischen ca.  $10^{-2}$  und  $10^{-7}$  mbar rotieren die Lichtmühlen, sobald sie von einer Lichtquelle angestrahlt werden. Dabei erfolgt die Rotation in Richtung der reflektierenden Flächen. Dieser **Radiometereffekt** kommt dadurch zustande, dass das einfallende Licht die absorbierenden Flächen stärker erwärmt als die reflektierenden. Moleküle, die auf die absorbierenden Flächen treffen, werden im Mittel mit etwas höherer kinetischer Energie zurückgestreut als Moleküle, die auf die spiegelnden Flächen auftreffen. Die resultierende Kraft und damit auch die Rotationsgeschwindigkeit ist proportional zur Fläche der Schaufelräder, dem Druck in der Vakuumkammer und der Temperaturdifferenz zwischen der reflektierenden und der absorbierenden Fläche. Damit sich das Rad drehen kann, muss

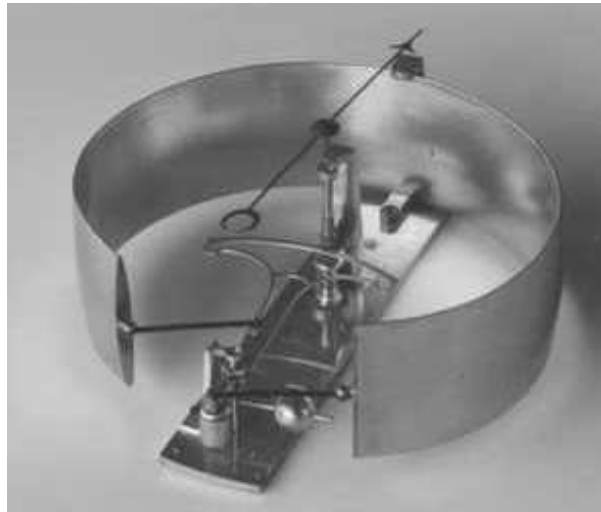


Abbildung 6.20: *Röhrenbarometer* Quelle: <http://www.freunde-alter-wetterinstrumente.de/12barges.htm>

die mittleren freien Weglänge der Gasmoleküle größer werden als der Abstand zwischen den Schaufelrädern, was typisch bei Drücken unter  $10^{-2}$  mbar der Fall ist. Bei sehr niedrigen Drücken sind stoßen dagegen zu wenig Moleküle gegen die Räder, um sie gegen die Reibungskräfte anzutreiben.

## 6.6 Physik bei sehr hohen Drücken

Bisher hatten wir uns im wesentlichen mit Drücken zwischen 1 bar und  $10^{-10}$  bar auseinandergesetzt. Umgekehrt treten bei sehr hohen Drücken sehr häufig interessante Hochdruckphasen auf. So bildet sich beispielsweise Diamant erst oberhalb von ca. 10 kbar. Solche Drücke kann man relativ leicht mit großen Druckstempeln erzeugen. Derzeit sind Maximaldrücke über 3 Mbar erreichbar, die man mit speziellen Diamantdruckzellen erreicht. Abb. 6.21 zeigt eine solche Zelle. Derart hohe Drücke - sie entsprechen z. B. dem Druck bei einem Meteoriteneinschlag - kann man nur noch mit speziell geschliffenen Diamanten erzeugen, da sich jedes andere Material bereit lange vorher verformen würde. Einer der Gründe, warum sich Physiker für so hohe Drücke interessieren, ist die Suche nach metallischem Wasserstoff. Wasserstoff ist als einziges Element der ersten Gruppe des Periodensystems unter Normalbedingungen kein Metall. Unter Druck bilden die  $H_2$ -Moleküle eine isolierende Kristallstruktur mit sehr komplexem Aufbau. Könnte man separate H-Atome zu einem Kristall zusammenfügen, so hätte dieser zahlreiche interessante Eigenschaften, auf die wir hier nicht im Detail eingehen können. Es sei aber angemerkt, dass die theoretischen Vorhersagen, bei welchem Druck ein solcher Kristall entstehen würde, mit den experimentellen Möglichkeiten "mitwachsen" und immer etwas höher als der jeweilige experimentelle Stand der Technik waren.

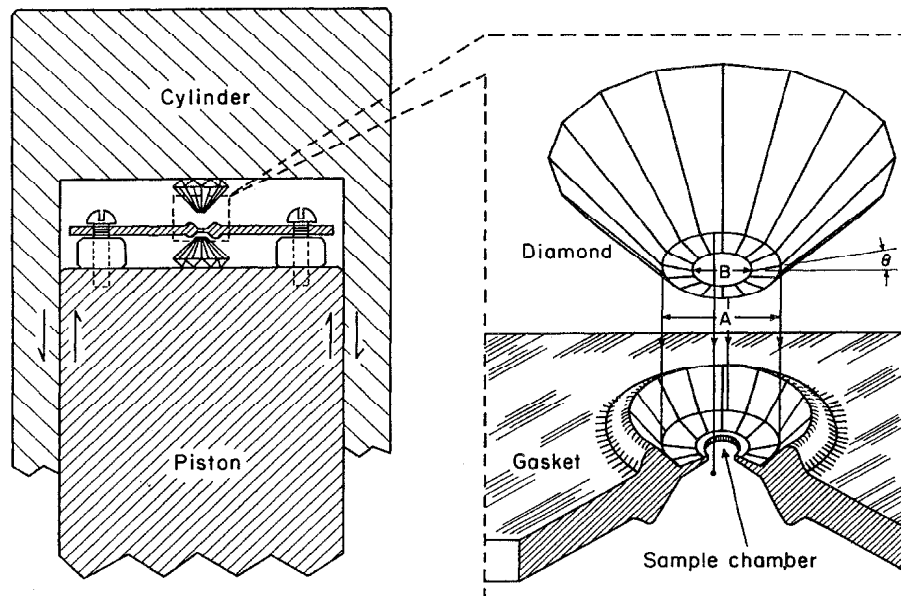


Abbildung 6.21: Aufbau einer Diamantdruckzelle (aus Mao and Hemley, *Review of Modern Physics* 66, 671 (1994))

Man hat allerdings metallischen Wasserstoff bereits in Form einer metallischen Flüssigkeiten bei Drücken oberhalb 1.4 Mbar bei Temperaturen von 2200 K bis 4400 K gesehen [Physics Today, Mai 1996, S. 17]. Bei solchen Experimente werden bis über 7 km/s schnelle Projektile auf eine Probe geschossen und dadurch die hohen Drücke erzeugt. Flüssiger metallischer Wasserstoff liegt im Inneren von Gasriesen wie Saturn und Jupiter vor.

Im Sonnensystem und im Universum treten noch wesentlich extremere Druckskaalen auf. So herrscht im Sonneninneren ein Druck von ca.  $10^{11}$  bar. In Neutronensterne herrschen

Drücke um  $10^{30}$  bar. Hier sind die Elektronen in die Atomkerne "gedrückt" worden, so dass man einen wenige km großen Stern mit der Materiedichte des Atomkerns vorliegen hat. Dies mag als extremes Beispiel einer Phasenumwandlung dienen.

Wir haben damit an einigen Beispielen gesehen, dass in verschiedenen Temperatur- und Druckbereichen sehr unterschiedliche physikalische Phänomene beobachtet werden können. Einige davon werden Sie im Verlauf Ihres Studiums noch detailliert kennenlernen.

### 6.6.1 Zur barometrischen Höhenformel:

Im Theorieteil haben Sie gesehen, dass der Atmosphärendruck exponentiell mit steigender Höhe abnimmt:  $p(h) = p_0 \cdot \exp(-h/h_0)$ . Hierbei können wir  $h_0$  als  $p_0/(r_0 \cdot g)$  schreiben, wobei  $p_0$  bzw.  $r_0$  Druck und Gasdichte in der Höhe  $h = 0$  bedeuten. Setzen wir  $p_0 = 105 \text{ Pa}$  und  $r_0 = 1.2 \text{ g/l} = 1.2 \text{ kg/m}^3$ , so erhalten wir mit  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $h_0 \approx 8500 \text{ m}$ . Die relative Druckdifferenz im Hörsaal zwischen dem Erdboden und  $h = 5 \text{ m}$  Höhe beträgt dann  $\Delta p/p = -h/h_0 = 5/8500 \approx 6 \cdot 10^{-4}$  (Diese Beziehung lässt sich leicht durch Ableitung der barometrischen Höhenformel nach  $h$  erhalten). Dies entspricht 6 mm Wassersäule, was wir im Hörsaal dadurch demonstrieren, dass wir einen offenen Behälter in 5 m Höhe ziehen, dort den Behälter schließen und am Hörsaalboden die Druckdifferenz messen.

### 6.6.2 Energieerhaltung

Die Energie eines idealen Gases ist mit der Temperatur in eindeutiger Weise verknüpft durch die Beziehung

$$E = \frac{\tilde{f}}{2} N k_B T,$$

wobei  $N$  die Zahl der Atome (bzw. Moleküle) und  $\tilde{f}$  die Zahl der Freiheitsgrade für die einzelnen Atome definiert. Wir nehmen weiter an, dass das Gas unter einem bestimmten Druck  $p$  steht. Dies ist in Abb. 6.22 dadurch dargestellt, dass auf dem Gasvolumen ein Gewicht  $m$  angebracht ist, das auf die Fläche  $F$  einen Druck

$$p = \frac{mg}{F},$$

erzeugt. Wir können uns vorstellen, dass diesem Gas nun weitere Energie zugeführt wird, etwa dadurch dass versucht wird das Gas durch "Aufheizen" weiter zu erwärmen. Diese Energiezufuhr in der Form von Wärmeenergie  $\Delta Q$  wird zu einer Erhöhung der Temperatur des Gases führen und damit auch wegen (6.6.2) zu einer Erhöhung der inneren Energie des Gases  $E$ . Durch diese Temperaturerhöhung wird bei dem konstant gehaltenen Druck wegen der Zustandsgleichung des Idealen Gases, bzw. des Gesetzes von Gay und Lussac, auch das Volumen vergrößert. Dies bedeutet aber, dass das Gewicht  $m$  in Abb. 6.22 ein Stück  $\Delta h$  angehoben wird. Ein Teil der zugeführten Wärme  $\Delta Q$  kann also bei diesem Aufbau nicht zur Erhöhung der inneren Energie des Gases genutzt werden sondern muss in Form von mechanischer Arbeit  $\Delta A$  an das Gewicht, das für die Aufrechterhaltung des Druckes sorgt, "weitergereicht" werden. Es gilt also

$$\Delta Q = \Delta E + \Delta A,$$



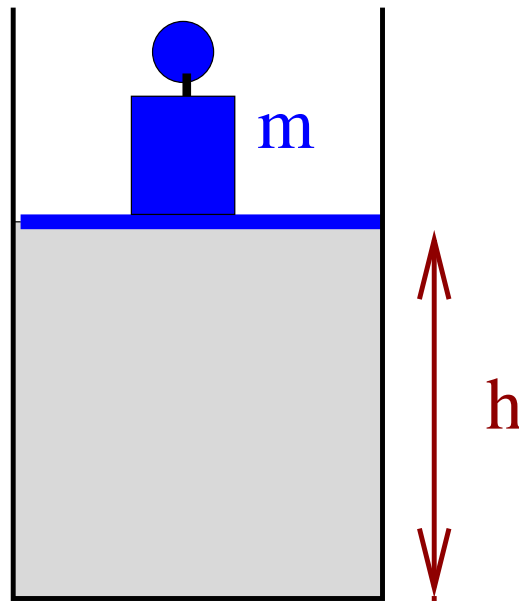


Abbildung 6.22: Ein ideales Gas bei konstantem Druck

wobei die Energie, die an das Gewicht abgegeben wird bezeichnet wird durch

$$\Delta A = mg\Delta h = \frac{mgF\Delta h}{F} = p\Delta V,$$

mit der Volumenänderung  $\Delta V$  des Gases bei dieser Energiezufuhr. Bezeichnen wir die Änderung der Energie des Gases durch mechanische Arbeit mit  $\Delta W = -\Delta A$ , so nimmt also die Bilanz der inneren Energie des Gases die folgende Gestalt an

$$\begin{aligned}\Delta E &= \Delta Q + \Delta W \\ &= \Delta Q - p\Delta V.\end{aligned}\tag{6.16}$$

In dieser Summe spiegelt sich das Gesetz von der Erhaltung der Energie: Dem Gas kann Energie in Form von Wärme  $\Delta Q$  oder mechanischer Arbeit  $\Delta W = -p\Delta V$  zugeführt (bzw. abgeführt) werden. Wäre das Gas also thermisch isoliert ( $\Delta Q = 0$ ), so könnte dem Gas durch eine Verringerung des Volumens,  $\Delta V < 0$ , innere Energie zugeführt werden, was sich ja in einer Erhöhung der Temperatur (siehe (6.6.2)) niederschlägt. Für infinitesimale Änderungen wird dieses Gesetz der Energieerhaltung geschrieben

$$\begin{aligned}dE &= \delta Q + \delta W \\ &= \delta Q - p dV.\end{aligned}\tag{6.17}$$

Diese Darstellung der Energieerhaltung, die wir in der ersten Zeile allgemein formuliert haben und in der zweiten Zeile in der speziellen Form für ein Ideales Gas, bezeichnet man als den **1. Hauptsatz der Thermodynamik**. Dabei wird ganz bewusst unterschieden zwischen differenziellen Formen, wie  $dE$  und  $dV$ , die sich auf Änderungen von Zustandsgrößen beziehen und infinitesimal kleinen Größen wie  $\delta Q$  und  $\delta W$ , die infinitesimal kleinen Änderungen von Größen bezeichnen, die für einen bestimmten Prozess definiert sind. Während man definieren kann was der Energieinhalt eines Systems ist oder

wie groß sein Volumen ist, deshalb Zustandsgröße, kann man dem System nicht ansehen, ob diese Energie in Form von Wärme oder mechanischer Arbeit zugeführt wurde. Diese Unterscheidung kann man nur für einen bestimmten Prozess machen, die Frage Wärmezufuhr oder Zufuhr von Energie in Form von mechanischer Arbeit hängt vom Weg ab, auf dem diese Energiezufuhr erfolgt.

Wir wollen im folgenden solche verschiedenen Prozesse oder Wege diskutieren.

- Als erstes betrachten wir die Energiezufuhr bei **isochoren Prozessen**, also solchen bei denen  $V$  konstant bleibt und damit  $dV = 0$  ist. Daraus ergibt sich

$$dW = -p dV = 0$$

und

$$dE = \delta Q = \frac{\tilde{f}}{2} N k_B dT,$$

woraus wir wieder ablesen können, das die Wärmekapazität bei konstantem Volumen durch

$$C_V = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{\tilde{f}}{2} N k_B,$$

gegeben ist.

- Als nächstes betrachten wir Prozesse, bei denen der Druck konstant gehalten wird, also **isobare Prozesse**. Nach dem ersten Hauptsatz (6.17) ergibt sich für die auf das Gas übertragene Wärme:

$$\delta Q = dE + p dV = C_V dT + p dV.$$

Da der Druck konstant bleiben soll können wir diese Beziehung für infinitesimale Änderung auch direkt umschreiben auf größere Änderungen der Temperatur und des Volumens

$$\Delta Q = C_V \Delta T + p \Delta V.$$

Dabei soll  $\Delta V = V_2 - V_1$  die Änderung des Volumens vom Startwert  $V_1$  zum Endwert  $V_2$  bezeichnen und  $\Delta T = T_2 - T_1$  die entsprechende Änderung der Temperatur. Sowohl für den Anfangs- als auch den Endzustand gilt die Zustandsgleichung des Idealen Gases

$$p V_i = N k_B T_i \quad \text{für } i = 1 \text{ und } 2,$$

und somit

$$p \Delta V = N k_B \Delta T.$$

Setzt man diese Beziehung in (6.6.2) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta Q &= C_V \Delta T + N k_B \Delta T \\ &= N k_B \left( \frac{\tilde{f}}{2} + 1 \right) \Delta T = C_P \Delta T. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Daraus ergibt sich also eine Wärmekapazität des Idealen Gases für Prozesse, bei denen der Druck konstant gehalten wird von:

$$C_P = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = C_V + N k_B = N k_B \left( \frac{\tilde{f}}{2} + 1 \right).$$

Ausserdem sei angemerkt, das natürlich im Fall eines solchen isobaren Prozesses, die auf das Gas übertragene mechanische Arbeit gegeben ist durch

$$\Delta W = -p \Delta V = -N k_B \Delta T.$$

- Wir wenden uns nun den **isothermen Prozessen** zu, also solchen bei denen die Temperatur konstant bleibt. Wegen der konstanten Temperatur ändert sich bei einem solchen isothermen Prozess die innere Energie des Gases nicht. Es gilt also

$$dE = 0 = \delta Q - p dV.$$

Die auf das Gas übertragene mechanische Arbeit ist also bis auf das Vorzeichen identisch mit der übertragenen Wärme und berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \Delta W = -\Delta Q &= - \int_{V_1}^{V_2} p dV \\ &= -N k_B T \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV \\ &= -N k_B T (\ln V_2 - \ln V_1) \\ &= -N k_B T \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right). \end{aligned} \quad (6.19)$$

(Bei dem Übergang zu zweiten Zeile wurde der Druck  $p$  entsprechend der Zustandsgleichung des Idealen Gases ersetzt.) Wird das Volumen also vergrößert, so ist  $V_2 > V_1$  und der Logarithmus des Quotienten aus diesen Volumina positiv, die am Gas geleistete Arbeit also negativ. Da die Temperatur konstant bleibt, muss das Gas also Wärme aufnehmen ( $\Delta Q > 0$ ).

- Schliesslich betrachten wir noch **adiabatische Prozesse**. Das sind Prozesse, bei denen sich Temperatur, Druck und Volumen des Gase ändern können. Diese Änderung soll aber so ablaufen, dass keine Wärmeenergie mit der Umgebung ausgetauscht werden kann. Dies gilt zum Beispiel für Prozesse, die so schnell ablaufen, dass kein Wärmeaustausch mit der Umgebung möglich ist. Es gilt also

$$\Delta W = \Delta E = C_V \Delta T.$$

In der differentiellen Darstellung ist ein adiabatischer Prozess auch charakterisiert durch

$$dE = C_V dT = -p dV.$$

Ersetzen wir in dieser Gleichung den Druck  $p$  entsprechend der Zustandsgleichung des Idealen Gases und  $C_V$  durch  $Nk_B\tilde{f}/2$  so ergibt sich

$$N \frac{\tilde{f}}{2} k_B dT = -N k_B T \frac{dV}{V}$$

beziehungsweise

$$\frac{\tilde{f}}{2} \frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V}.$$

Integriert man die beiden Seiten dieser Gleichung jeweils vom Anfangszustand zum Endzustand, so ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{f}}{2} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} &= - \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \\ \frac{\tilde{f}}{2} \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) &= \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\tilde{f}}{2}} = - \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Daraus entnehmen wir, dass

$$\frac{V_1}{V_2} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\tilde{f}}{2}} = \left( \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} \right)^{\frac{\tilde{f}}{2}},$$

(bei der Umformung der zweiten Gleichung wurde wieder die Zustandsgleichung des Idealen Gases herangezogen). Daraus ergibt sich

$$p_1 V_1^{\frac{\tilde{f}+2}{\tilde{f}}} = p_2 V_2^{\frac{\tilde{f}+2}{\tilde{f}}}.$$

Benutzt man nun, dass wegen (6.6.2)

$$\frac{\tilde{f}+2}{\tilde{f}} = \frac{C_p}{C_V} = \kappa,$$

so besagt (6.6.2), dass bei einem adiabatischen Prozess das Produkt

$$p V^\kappa = \text{konst},$$

also unverändert bleibt.

## 6.7 Die Entropie und der Zweite Hauptsatz

### 6.7.1 Definition der Entropie

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir im ersten Hauptsatz der Thermodynamik die Änderung der inneren Energie eines Systems in die Zufuhr oder auch Abfuhr von mechanischer Energie und Wärmeenergie aufgeteilt. Bei infinitesimalen Änderungen ergab sich die Änderung der Energie zu

$$dE = \delta Q + \delta W.$$

Im Fall des Idealen Gases ergab sich die Änderung der Energie in Form von mechanischer Arbeit  $\delta W$  durch eine Volumenänderung und konnte geschrieben werden in der Form

$$\delta W = -p dV$$

als ein Produkt von der Zustandsgröße Druck  $p$  und einer infinitesimalen Änderung der Zustandsgröße Volumen  $dV$ . Ganz analog soll nun die Zufuhr von Wärmeenergie ebenfalls als ein Produkt der Form

$$\delta Q = T dS$$

beschrieben werden, wobei wir neben der Zustandsgröße Temperatur  $T$  eine neue Variable  $S$  die Entropie eingeführt haben. Aus dieser Gleichung ergibt sich also die differenzielle Änderung der Entropie zu

$$dS = \frac{1}{T} \delta Q.$$

Wir können diese Gleichung als die thermodynamische Definition der **Entropie** verstehen. Bei einer isothermen Zufuhr von Wärmeenergie würde sich also die Entropie ändern um

$$\Delta S = \frac{1}{T} \Delta Q.$$

Dies bedeutet, dass eine Zufuhr von Energie in der Form, dass die Energie in der statistisch fluktuierenden Bewegungsenergie der Atome erhöht wird, das ist ja gerade die Zufuhr von Wärmeenergie, verbunden ist mit einer Erhöhung der Entropie (Beachte, dass die Temperatur auf der absoluten Skala stets positiv ist).

Neben dieser thermodynamischen Definition (6.7.1) wollen wir noch eine statistische Definition der Entropie einführen durch die Gleichung

$$S = k_B \ln \omega.$$

Dabei bezeichnet  $\omega$  die Wahrscheinlichkeit, dass das System in seinem Zustand realisiert ist. Nun stellt sich natürlich die Frage, wie diese Wahrscheinlichkeit definiert ist. Welche Alternativen muss ich berücksichtigen, so dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten den Wert eins ergibt? Dies ist die Frage nach der absoluten Definition der Entropie. Wir werden aber weiter unten sehen, dass diese Frage nach der absoluten Definition der Entropie sich nicht stellt. Was von Bedeutung ist, ist die Frage nach der Änderung der Entropie, wenn ich das System vom Zustand 1, mit der Entropie  $S_1$ , in den Zustand 2, mit der Entropie  $S_2$  bringe. In diesem Fall ergibt sich die Änderung der Entropie zu

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k_B \ln \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right).$$

Dabei bezeichnet  $\omega_i$  die Wahrscheinlichkeit, dass das System im Zustand  $i$  realisiert ist. Das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten lässt sich aber in der Regel bestimmen, ohne dass eine absolute Normierung der Wahrscheinlichkeit gegeben sein muss. Durch die thermodynamische Definition (6.7.1) wurde ja auch nur die Änderung der Entropie bestimmt. Wir werden weiter unten zeigen, dass diese so unterschiedlichen Definitionen der Entropie (6.7.1) und (6.7.1) in der Tat identisch sind. Zunächst sei aber angemerkt, dass die Einheiten, in denen die Entropie angegeben ist nach der thermodynamischen Definition (6.7.1) in Einheiten Energie durch Temperatur, also z.B. Joule durch Kelvin, anzugeben sind. Dies sind aber auch die Einheiten der Boltzmann Konstanten  $k_B$  und damit auch der Entropie gemäß der statistischen Definition (6.7.1).

Die thermodynamische Definition zeigt, dass die Entropie eine extensive Größe ist, also eine Größe, die wie die Energie, die Teilchenzahl oder das Volumen eines Systems addiert wird, wenn zwei Untersysteme zusammengefügt werden. Als Quotient einer extensiven Größe, die Wärmeenergie, und einer intensiven Größe, die Temperatur  $T$ , ist die Entropie nach der Definition (6.7.1) selbst extensiv. Das gleiche gilt auch für die statistische Definition. Bringt man nämlich zwei Teilsysteme  $a$  und  $b$  zusammen, die jeweils in einem Zustand mit der Wahrscheinlichkeit  $\omega_a$  und  $\omega_b$  realisiert sind, so ergibt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit als das Produkt

$$\omega = \omega_a \omega_b .$$

Damit ergibt sich die Entropie des zusammengeführten Systems zu

$$\begin{aligned} S &= k_B \ln \omega = k_B \ln (\omega_a \omega_b) \\ &= k_B \ln \omega_a + k_B \ln \omega_b = S_a + S_b , \end{aligned}$$

ist also auch nach der statistischen Definition (6.7.1) extensiv.

Wir wollen nun zeigen, dass die statistische Definition der Entropie (6.7.1) das gleiche Ergebnis liefert wie die thermodynamische Definition (6.7.1) und betrachten dazu ein Ideales Gas, das sich in einem Volumen  $V$  befindet und keine Energie mit der Umgebung austauschen kann. Da die Energie konstant ist, muss auch die Temperatur konstant bleiben, wir betrachten also isotherme Prozesse.

Wir stellen uns nun vor, dass das Volumen des Gases auf die Hälfte reduziert wird. Die statistische Wahrscheinlichkeit, dass sich alle  $N$  Atome in einer Hälfte des Volumens befinden beträgt gerade  $\omega = (1/2)^N$ . Damit ergibt sich also für die statistische Definition der Entropie eine Änderung der Entropie bei Halbierung des Volumens von

$$\Delta S = k_B \ln \left( \frac{1}{2} \right)^N = -k_B N \ln 2 .$$

Die Änderung der Entropie  $\Delta S$  ist negativ, d.h. die Entropie des Endzustandes ist kleiner als die des Anfangszustandes, da der Endzustand besser geordnet ist.

Um diesen Endzustand zu erreichen, müssen wir von aussen mechanische Arbeit zuführen die zu der Kompression des Volumens dient. Dies bedeutet, dass das Gas eine Zufuhr von mechanischer Energie erfährt im Umfang von (siehe Berechnung der Arbeit bei isothermen Prozessen in (6.19) im vorhergehenden Abschnitt)

$$\Delta W = - \int_V^{V/2} p dV = -N k_B T \ln \left( \frac{1}{2} \right) = N k_B T \ln 2 .$$

Ausserdem gilt aber bei isothermen Prozessen, dass

$$\Delta E = \Delta Q + \Delta W = 0$$

wodurch sich für

$$\Delta Q = -N k_B T \ln 2,$$

ergibt. Zur Berechnung der Entropieänderung  $\Delta S$  nach der thermodynamischen Definition (6.7.1) müssen wir diese Änderung der Wärme noch durch die Temperatur  $T$  dividieren und erhalten das selbe Ergebnis wie in (6.7.1).

Mit diesem Ergebnis können wir nun sehr einfach den **zweiten Hauptsatz der Thermodynamik** verstehen. Aus der Sicht der statistischen Mechanik ist es klar, dass ein System nie in einen unwahrscheinlicheren Zustand übergehen wird. Wegen der statistischen Definition der Entropie ist dies aber gleichbedeutend mit der Formulierung dieses zweiten Hauptsatzes:

**Ein abgeschlossenes System vollzieht nur solche Prozesse, bei denen die Entropie des Systems konstant bleibt oder anwächst.**

Da der wahrscheinlichere Zustand aber auch der Zustand mit der niedrigeren Ordnung ist (Verteilung der Atome auf das Gesamtvolumen bedeutet ja größere Unordnung, als die Konzentration der Atome auf einen Teilbereich), können wir diesen Satz auch so formulieren, dass die Unordnung stets anwächst.

Wir unterscheiden dabei zwischen reversiblen Prozessen mit  $\Delta S = 0$  und irreversiblen Prozessen mit  $\Delta S > 0$ .

## 6.7.2 Wärmekraftmaschinen

Dieser zweite Hauptsatz der Thermodynamik wird auch häufig übersetzt in die Möglichkeit, Wärmeenergie in mechanische Arbeit umzuwandeln. Es ist relativ einfach, mechanische Energie oder Arbeit in Wärme umzuwandeln. Eine solche Anordnung ist sehr schematisch in Abb. 6.23 dargestellt. Die mechanische Energie liegt in der Form der potentiellen Energie der Masse  $M$  in einer Höhe  $h$  vor. Im Anziehungsfeld der Erde (Erdbeschleunigung  $g$ ) haben wir also eine potentielle Energie,  $A = Mgh$ , vorliegen. Das aus der Höhe  $h$  fallende Gewicht  $M$  überträgt diese Energie auf das Schaufelrad und setzt dieses in Bewegung (Kinetische Energie). Das Rad rotiert und heizt durch die dabei entstehende Reibung das Wasser auf ( $\Delta Q > 0$ ). Dem Wasser wird also von außen mechanische Arbeit zugeführt, die dann in Wärme umgewandelt wird.

Natürlich liegt die Frage nahe, inwieweit es möglich ist, eine Maschine zu bauen, die einem Wärmereservoir innere Energie in Form von Wärme entzieht und diese in mechanische Arbeit umwandelt? Mit anderen Worten, ist eine Joule-Thomson-Maschine, so wie sie schematisch in Abb. 6.24 skizziert ist, realisierbar?

Die Antwort auf diese Frage lautet: **Es ist unmöglich eine solche Joule-Thomson Maschine zu bauen.** Die Umwandlung von Arbeit in Wärme ist ein irreversibler Prozess, weil während dieses Prozesses die Entropie anwächst. Bei dem Umkehrprozess, Umwandlung von Wärme in Arbeit würde also die Entropie kleiner, was den Prozess unmöglich macht. Bei der skizzierten Maschine gilt für die gesamte Entropie:

$$\Delta S = \Delta S_{\text{Maschine}} + \Delta S_{\text{Umgebung}} + \Delta S_{\text{W.reservoir}} \quad (6.21)$$

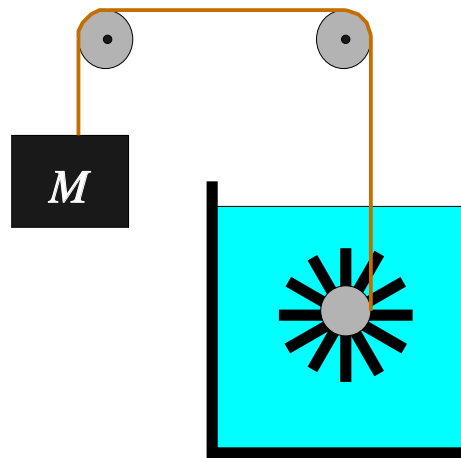


Abbildung 6.23: *Umwandlung von mechanischer Arbeit in Wärme*

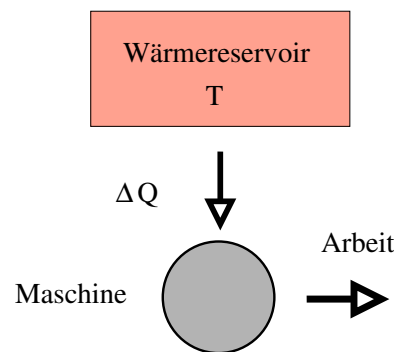


Abbildung 6.24: *Eine Joule-Thomson Maschine, die nicht realisiert werden kann*

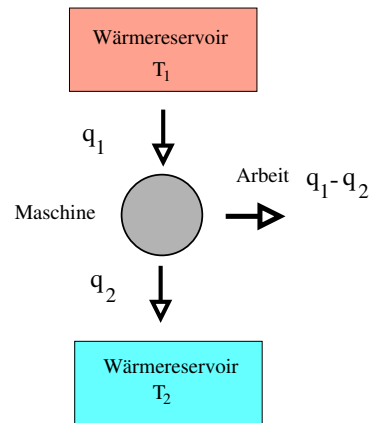
Da die Maschine mehrmals verwendbar sein soll, muss sie diesen Prozess unverändert durchlaufen, sie muss einen sogenannten **Kreisprozess** vollziehen. ( $\Delta S_{\text{Maschine}} = 0$ ) Die Umgebung soll nur Arbeit und keine Wärme aufnehmen, deshalb muss also auch  $\Delta S_{\text{Umgeb}} = 0$  sein. Das Wärmereservoir schließlich soll Wärmeenergie abgeben, sodass wir (6.21) umschreiben zu

$$\Delta S = \Delta S_{\text{W.reservoir}} = \frac{\Delta Q}{T} \quad (6.22)$$

Die Wärme wird aus dem Wärmereservoir abgezogen,  $\Delta Q < 0$ , außerdem ist natürlich  $T > 0$ . Damit würde aber (6.22) besagen, dass die gesamte Entropieänderung  $\Delta S < 0$  sein muss, was natürlich im Widerspruch zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik steht.

Dieses Ergebnis können wir uns auch mit der folgenden Überlegung zum Beispiel in der Abb. 6.23 plausibel machen: Das Wärmereservoir ist im thermischen Gleichgewicht d.h. die Energie ist statistisch über alle mikroskopische Freiheitsgrade verteilt. Prinzipiell besteht zwar eine Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Moleküle des Wassers so bewegen,



Abbildung 6.25: *Eine reale Wärmemaschine*

dass sie kollektive Arbeit am Schaufelrad leisten, dies in Bewegung setzen und damit das Gewicht  $M$  wieder hochziehen. Doch diese Wahrscheinlichkeit für den Prozess, bei dem alle Moleküle des Wassers kohärent Arbeit am Schaufelrad leisten, ist so gering, dass sie ohne weiteres vernachlässigt werden kann. Ein solcher Prozess ist ja auch noch nie beobachtet worden<sup>8</sup>.

Kehren wir zurück zur Entwicklung einer Wärmekraftmaschine. Wir haben festgestellt, dass die Entropieänderung des Gesamtsystems nicht negativ sein darf. Den zweiten Hauptsatz können wir aber “austricksen”, indem wir an die Joule-Thomson-Maschine noch ein Hilffsystem, ein zweites Wärmereservoir, anschließen. Es sollte eine tiefere Temperatur  $T_2$  haben als das erste. Die Entropie dieses zweiten Wärmereservoirs soll bei dem Prozess erhöht werden. Das bedeutet dann, dass die Entropie des einen Teilsystems (die ursprüngliche J.T.Maschine) negativ sein darf, ohne dass die Forderung  $\Delta S \geq 0$  für das Gesamtsystem gestört wäre. Eine solche Maschine ist schematisch in Abbildung 6.25 dargestellt.

Eine solche Maschine ist aber nicht ideal, weil die vom Wärmereservoir (mit  $T_1$ ) abgegebene Wärme  $q_1$  nicht vollständig in Arbeit umgewandelt werden kann ( $A < q_1$ ). Ein Teil von  $q_1$  wird nämlich vom zweiten Wärmereservoir (mit  $T_2$ ) als die von der Maschine abgegebene Wärmemenge  $q_2$  aufgenommen, damit der zweite Hauptsatz erfüllt ist, d.h. damit gilt:  $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 \geq 0$ . Wie erfüllen wir uns dann den Wunsch nach maximaler Arbeit pro eingesetzter Wärmeenergie  $q_1$ ?

**Behauptung: Ein thermisch isoliertes System, das aus 2 Wärmereservoirs ( $T_1 > T_2$ ) und einem Arbeitskörper  $M$  besteht, leistet die maximale Arbeit, wenn der Prozess quasistatisch geführt wird mit  $\Delta S = 0$ . Der Wirkungsgrad ist dann:**

$$\eta = \frac{A}{q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (6.23)$$

<sup>8</sup>Dieser Prozess, bei dem das Wasser wieder das Schaufelrad in Bewegung setzt und dieses dann die Masse  $M$  hochhebt, beobachtet man natürlich in einem Film, der rückwärts läuft. Dieses Beispiel zeigt sehr deutlich, dass das Anwachsen der Entropie in makroskopischen System direkt verknüpft ist mit der Tatsache der Unumkehrbarkeit der Zeit

Wenn diese Forderung erfüllt ist, durchläuft diese Maschine den sogenannten Carnot-schen Kreisprozess und man nennt den maximal erreichbaren Wirkungsgrad (6.23) den Wirkungsgrad einer **Carnot-Maschine**.

Zum Beweis der Behauptung stellen wir wieder die Entropiebilanz auf:

$$\begin{aligned}
 \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 + \underbrace{\Delta S_M}_{=0} + \underbrace{\Delta S_U}_{=0} \\
 &= -\frac{q_1}{T_1} + \frac{q_2}{T_2} \\
 &= -\frac{q_1}{T_1} + \frac{q_1 - A}{T_2} \geq 0 \\
 \implies \frac{A}{T_2} &\leq \frac{q_1}{T_2} - \frac{q_1}{T_1} \\
 \frac{A}{q_1} &\leq \frac{T_2}{T_2} - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}
 \end{aligned}$$

Der Wirkungsgrad ist also  $\eta = \frac{A}{q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ , wobei das Gleichheitszeichen für den Fall  $\Delta S = 0$  gilt. Aus dieser Gleichung für den Wirkungsgrad  $\eta$  ist ersichtlich, dass  $T_1$  möglichst groß gegenüber  $T_2$  sein sollte. Zum Beispiel für ein Elektrizitätswerk, das ja auch thermische Energie von der Verbrennung von Kohle, Öl oder atomaren Brennstoff in elektrische Energie und damit potentielle Arbeit umwandelt, ist die Temperatur  $T_2$  des kühleren Reservoirs durch die Umgebungstemperatur oder durch die Wassertemperatur des Flusses, der zur Kühlung herangezogen wird, vorgegeben. Man kann den Wirkungsgrad also nur dadurch verbessern, daß man das heiße Wärmereservoir auf möglichst hohe Temperatur  $T_1$  bringt.

Betrachten wir zum Schluß dieses Abschnitts noch kurz die klassische Realisierung des Carnotschen Kreisprozesses. In diesem Fall ist der Arbeitskörper durch ein ideales Gas gegeben. Die Maschine durchläuft vier Schritte, die im  $pV$ -Diagramm von Abbildung 6.26 dargestellt sind:

- $[a] \rightarrow [b]$  adiabatische Kompression: Das System ist thermisch isoliert ( $\Delta Q = 0$ ). Druck und Temperatur vergrößern sich ( $p_a < p_b$ ,  $T_a < T_b$ ). Dabei gilt  $T_2 = T_a < T_b = T_1$ . Dabei wird Arbeit  $\Delta W$  am Körper geleistet:

$$\Delta W_1 = C_V(T_a - T_b)$$

- $[b] \rightarrow [c]$  isotherme Expansion in Kontakt mit dem heißen Wärmereservoir: Der Druck verkleinert sich ( $p_b > p_c$ ) und die Temperatur bleibt konstant ( $T_b = T_c = T_1$ ) auf dem Niveau des Wärmereservoirs. Dabei leistet der Körper selbst die Arbeit:

$$-\Delta W_2 = N k_B T_b \ln \frac{V_c}{V_b}$$

- $[c] \rightarrow [d]$  adiabatische Expansion: Das System ist thermisch isoliert ( $\Delta Q = 0$ ). Druck und Temperatur verkleinern sich ( $p_c > p_d$ ,  $T_c > T_d$ ). Dabei leistet der Körper selbst die Arbeit, beziehungsweise er gibt Arbeit ab im Umfang:

$$-\Delta W_3 = C_V(T_a - T_b)$$

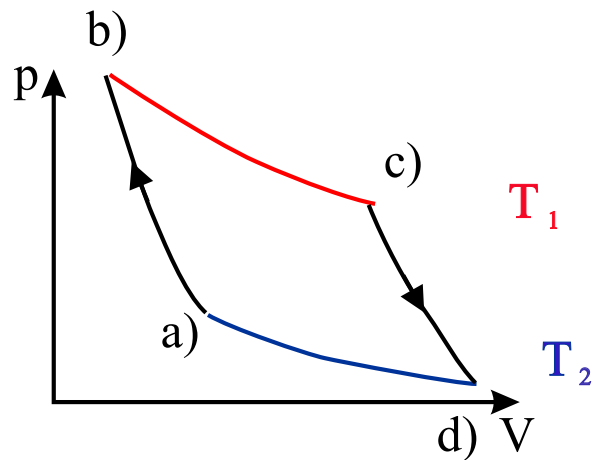


Abbildung 6.26: Der Carnot-Zyklus in einem schematischen pV Diagramm für ein ideales Gas als Arbeitsmedium

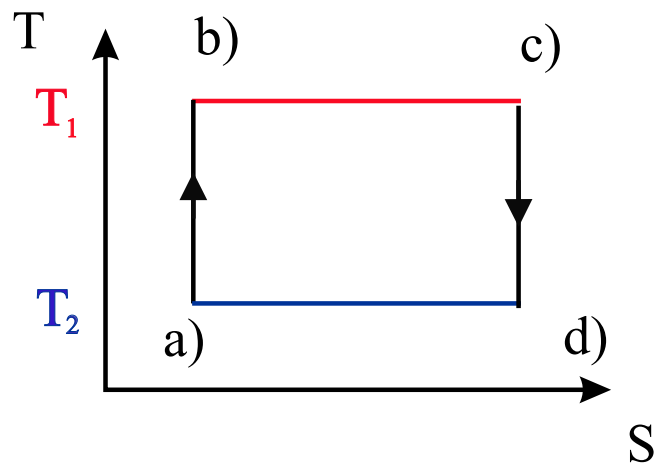


Abbildung 6.27: Der Carnot-Zyklus im TS Diagramm

- [d)  $\rightarrow$  a)] isotherme Kompression in Kontakt mit dem kalten Wärmereservoir: Druck verkleinert sich ( $p_a > p_d$ ) und die Temperatur bleibt konstant ( $T_d = T_a$ ). Dabei wird Arbeit  $\Delta W$  am Körper geleistet:

$$\Delta W_4 = N k_B T_a \ln \frac{V_a}{V_d}$$

Die adiabatischen Arbeiten  $\Delta W_1$  und  $-\Delta W_3$  kompensieren sich, so dass die gesamte Arbeit, die vom Arbeitskörper nach außen verrichtet wird:

$$\Delta A = -\Delta W = N(T_a - T_b) \ln \frac{V_b}{V_a}$$

beträgt.

Zur Berechnung des Wirkungsgrades  $\eta$  ist es einfacher, den Carnot Prozess im Temperatur - Entropie Diagramm der Abbildung 6.27 anzusehen. Nach dem ersten Hauptsatz ist die

von der Maschine verrichtete Arbeit gleich der Wärmemenge, die insgesamt während des Kreisprozesses zugeführt wurde:

$$\begin{aligned} -\Delta A &= \Delta Q_{b \rightarrow c} + (-\Delta Q_{d \rightarrow a}) & (6.24) \\ &= T_a \Delta S + T_b (-\Delta S) \\ &= (T_a - T_b) \Delta S \\ \implies \eta &= \frac{-\Delta A}{T_a \Delta S} = \frac{T_a - T_b}{T_a} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \end{aligned}$$

## 6.8 Zustandsänderungen, Kreisprozesse und Kraft-Wärme-Maschinen

Nachdem Sie im Theorieteil den Carnot'schen Kreisprozess ausführlich diskutiert haben werden wir uns im experimentellen Teil mit Realisierungen solcher Kreisprozesse beschäftigen.

In einem einführenden Experiment demonstrieren wir die **adiabatische Zustandsänderung** dadurch, dass wir das Volumen eines luftgefüllten Zylinders durch schnelles Ziehen (Drücken) eines Kolbens in etwa verdoppeln (halbieren). Man würde im Idealfall beim Verdoppeln des Volumens entsprechend<sup>9</sup>  $TV^{\kappa-1} = \text{const.}$  eine Temperaturänderung von  $20\text{ }^\circ\text{C}$  auf  $-51\text{ }^\circ\text{C}$  erhalten (d. h.  $293\text{ K} \rightarrow 222\text{ K}$ ), beim Halbieren des Volumens eine Änderung von  $20\text{ }^\circ\text{C}$  auf  $112\text{ }^\circ\text{C}$  ( $293\text{ K} \rightarrow 385\text{ K}$ )<sup>10</sup>. Für Luft ist  $\kappa = c_p/c_v = 1.4$  und damit  $T_{anf}/T_{end} = (V_{end}/V_{anf})^{0.4}$ . Unser Kolben ist keineswegs perfekt thermisch von der Außenwelt isoliert; wir erhalten bei der Expansion dennoch Endtemperaturen unter  $0\text{ }^\circ\text{C}$ , bei der Kompression über  $60\text{ }^\circ\text{C}$ .

Die Abb. 6.28 zeigt die **Wirkungsgrade** verschiedener realer Kreisprozesse im Vergleich zu Carnot'schen Wirkungsgrad. Die realen Werte liegen z. T. erheblich unter dem Idealwert.

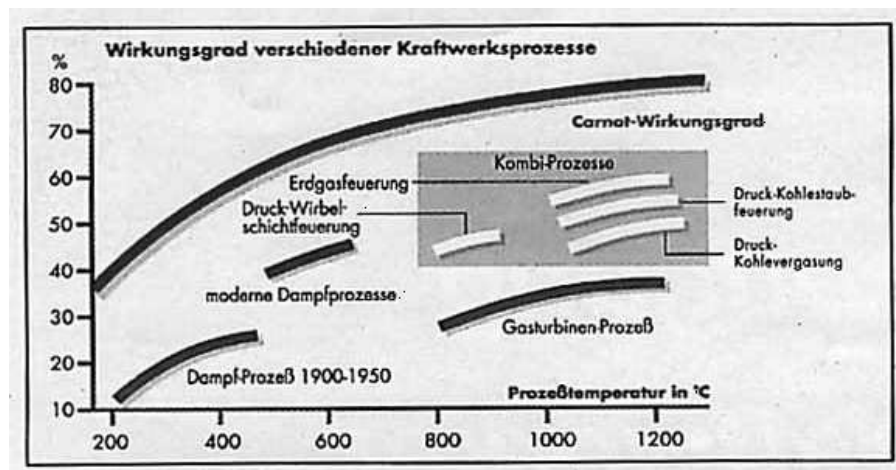


Abbildung 6.28: Wirkungsgrade verschiedener Kraftwerksprozesse.

Quelle: <http://energiewelt.bei.t-online.de/SB102/SB102-05.htm>

Carnot (Abb. 6.29 links) hatte seine Überlegungen zum Wirkungsgrad im wesentlichen auf der Basis von **Dampfmaschinen** angestellt. Die ersten Maschinen dieser Art wurden von Denis Papin und Thomas Saverin um 1700 konstruiert. Mit der Entwicklung der Dampfmaschine assoziiert man ebenfalls den Namen James Watt (Abb. 6.29 rechts). Sein wesentlicher Beitrag war die Entwicklung des Kondensors, der den Wasserdampf außerhalb des Kolbens kondensiert und dort einen starken Unterdruck erzeugt.

<sup>9</sup>Es gilt:  $pV^\kappa = \text{const} = (pV) \cdot V^{\kappa-1}$  und mit  $pV \propto T$  dann  $T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const.}$

<sup>10</sup>Für Luft ist  $\kappa = c_p/c_v = 1.4$  und damit  $T_{anf}/T_{end} = (V_{end}/V_{anf})^{0.4}$ . Für  $V_{end}/V_{anf} = 0.5$  folgt  $T_{anf}/T_{end} = 0.77$ . Für  $V_{end}/V_{anf} = 2$  folgt  $T_{anf}/T_{end} = 1.3$ .

In Deutschland wurde die erste Dampfmaschine Watt'scher Bauart Ende des 18. Jh. in Mansfeld (König-Friedrich-Schacht) errichtet. Abb. 3 zeigt deren Funktionsprinzip. Die Maschine arbeitete die Maschine mit dem geringen Dampfüberdruck von ca. 0.3-0.4 bar. Ihr Wirkungsgrad betrug 2%.

Das Funktionsprinzip von Dampflokomotiven wird sehr schön in einer Animation von K. Wetzstein gezeigt, ebenso wie Animationen von Otto- und Dieselmotoren und dem Stirling-Motor, siehe: <http://www.k-wz.de/uebersicht.html>.



Abbildung 6.29: links: Sadi Carnot (1796 - 1832); rechts: James Watt (1736-1819).

Wir wollen hier noch kurz den Dieselmotor und den Viertakt-Ottomotor ansprechen.

Beim **Dieselmotor** (R. Diesel, 1892) wird das Gas im Kolben zunächst (angenähert!) adiabatisch komprimiert. In das erhitzte Gas wird Kraftstoff eingespritzt, der sich sofort entzündet. Diese Prozess verläuft auf Grund der ablaufenden chemischen Reaktionen annähernd isobar. Im anschließenden Arbeitstakt expandiert das Gas annähernd adiabatisch und wird schließlich isochor ausgestoßen.

Beim **4-Takt Ottomotor** werden im  $pV$ -Diagramm zwei Schleifen durchlaufen, s. Abb 6.31. Zunächst wird annähernd isobar bei niedrigem Druck Gas angesaugt (unterster Teil der Kurve, von links nach rechts durchlaufend) und dann adiabatisch komprimiert (Übergang in obere Schleife, von rechts nach links). Die nach der Zündung ablaufende Verbrennung verläuft hier annähernd isochor. Im anschließenden Arbeitstakt wird das Gas adiabatisch entspannt und schließlich isobar ausgestoßen. Der Ausstoß schließt die untere Schleife. Eine weitere Animation des 4-Takt-Ottomotors inkl.  $pV$ -Diagramm findet man unter <http://techni.chemie.uni-leipzig.de/otto/>.

Der **Stirling-Motor** arbeitet mit einem geschlossenen Gaskreislauf<sup>11</sup>. In einem Zylinder bewegen sich ein Arbeitskolben und ein Verdrängerkolben mit einer Phasenverschiebung von  $90^\circ$ . In dem einen Teil des Zylinders wird das Arbeitsgas durch eine beliebige Wärmequelle erwärmt, im anderen abgekühlt. Der Verdränger verschiebt das Arbeitsgas zwischen den beiden Teilvolumina des Kolbens. Beim Durchtritt des heißen Gases durch den Verdränger gibt das Gas Wärme an diesen ab, beim Durchtritt des kalten Gases nimmt dieses Wärme vom Verdränger auf (Regeneration). Der Kreisprozess wird gut durch zwei Isothermen (Kompression bzw. Entspannen des Gases) und zwei Isochoren (Verschieben des Arbeitsgases) beschrieben.

Die oben beschriebenen Motoren sind **”Wärme-Kraft-Maschinen”**. Die aus einem Bad bei hoher Temperatur entnommene Wärme wird z. T. zur Erzeugung mechanischer Ar-

<sup>11</sup>Entsprechende Animationen finden Sie unter <http://techni.tachemie.uni-leipzig.de/stirling/> oder unter <http://www.k-wz.de/vmotor/stirling.html>.

beit genutzt. Umgekehrt wird bei "Kraft-Wärme-Maschinen" unter Aufwendung mechanischer Arbeit Wärme zwischen zwei Wärmebädern transportiert. Hier werden im  $pV$ -Diagramm Schleifen gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen. Beim Stirling-Prozess wird beispielsweise das Arbeitsgas bei hoher Temperatur isotherm komprimiert und bei niedriger Temperatur entspannt. Je nachdem, ob das sich erwärmende oder das sich abkühlende Reservoir (beim Stirling-Motor: eine der beiden Hälften des Zylinders) genutzt werden, erhält man ein Kühlaggregat oder eine Wärmepumpe. Beim **Kühlschrank** involviert der Kreisprozess einen Phasenübergang flüssig/gasförmig. Hier wird ausgenutzt, dass der Verdampfungsvorgang Energie benötigt, die dem zu kühlenden Volumen entnommen wird. Das Gas wird anschließend wiederum durch Kompression verflüssigt.

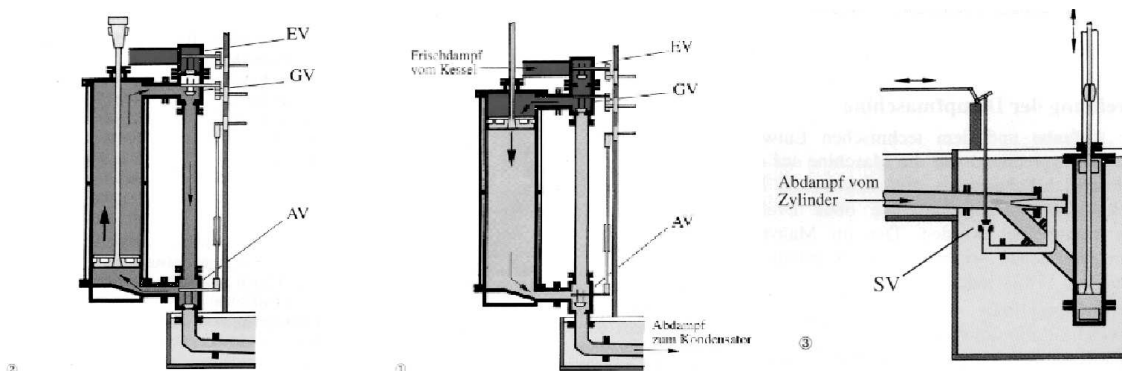
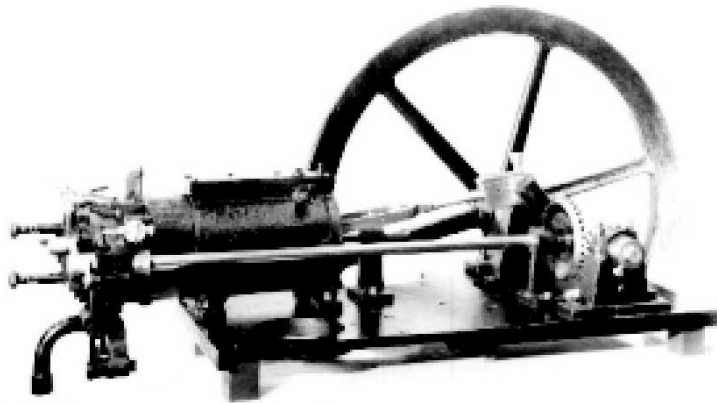


Abbildung 6.30: Funktionsprinzip der Watt'schen Dampfmaschine. Im oberen Totpunkt des Kolbens sind das Einlass- und das Auslassventil (EV bzw. AV) geöffnet, während das Ausgleichsventil (GV) geschlossen ist. Der Dampf strömt in den Zylinder und drückt den Kolben nach unten, unterstützt durch den Unterdruck unter dem Kolben (links). Bei diesem Arbeitstakt werden die Kolben der Schachtpumpen und damit das Wasser aus dem Schachtsumpf gehoben. Kurz vor dem unteren Totpunkt schließen EV und AV, GV wird geöffnet. Aufgrund des Druckausgleichs zieht das Übergewicht des Schachtgestänges den Kolben wieder hoch. Der entspannte Dampf strömt dabei durch die Ausgleichsleitung in den Zylinderraum unter dem Kolben. Zum Austarieren der Kräfte dient ein mit der Schachtstange gekoppelter Hilfsbalancier mit Gewichtskasten. Auf diese Weise wird erreicht, daß der Leertakt mit der gleichen Geschwindigkeit abläuft wie der Arbeitstakt (Mitte). Beim Erreichen des oberen Totpunktes wechselt die Ventilstellung wieder, und der nächste Arbeitstakt beginnt. Während frischer Dampf oben in den Zylinder einströmt, wird der vom vorhergehenden Takt unter dem Kolben befindliche Dampf durch die kupferne Abdampfleitung in den Kondensator ausgestoßen (links). Das Einspritzventil (SV) ist während des Arbeitstaktes geöffnet. Durch Einspritzen von kaltem Wasser kondensiert der Abdampf. Zusätzlich findet im wassergekühlten Abdampfrohr eine Oberflächenkondensation statt, so daß ein 90prozentiges Vakuum erreicht wird. Die Nassdampfmaschine entfernt das Kondensat-Luft-Gemisch aus dem Kondensator. Die über dem Kasten stehende Heisswasserpumpe hebt das Kondensat 4,5 m hoch auf eine Rinne, aus der es dem Kessel durch die Speiseleitung allein infolge der statischen Druckhöhe wieder zuläuft (rechts). Quelle (Text und Bild): <http://webserver.et.fh-merseburg.de/mansfeld/museum/maschine/funktion/funktion.htm>



Nikolaus A. Otto,  
1831 - 1891



Versuchsmotor,  
1876

pV-Diagramm,  
1876

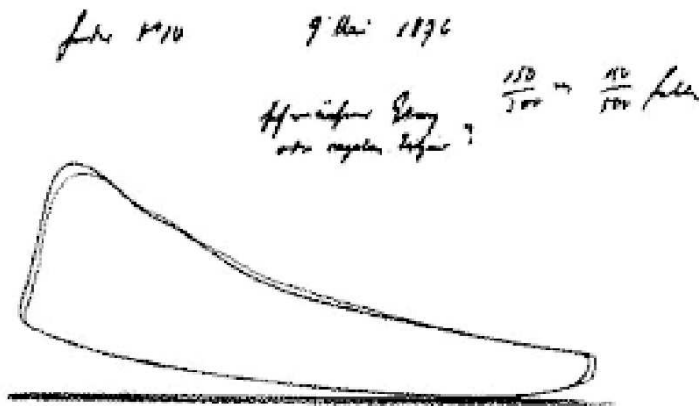


Abbildung 6.31: 4-Takt-Ottomotor. Quelle: [http://techni.tachemie.uni-leipzig.de/otto/otto\\_g0.html](http://techni.tachemie.uni-leipzig.de/otto/otto_g0.html)



## 6.9 Freie Energie und Freie Enthalpie

Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik laufen Prozesse so ab, dass die Entropie anwächst. Ein System ist also in einem stabilen Zustand, im statistischen Gleichgewicht, wenn die Entropie ein Maximum annimmt. In diesem Fall kann es ja ohne zusätzliche Einwirkungen zu keinen Änderungen kommen: Jede Änderung wäre mit einer Verringerung der Entropie verbunden und das ist ja nicht zulässig. In Formeln ausgedrückt heisst das, dass die Summe aus der Entropie des Systems plus der Entropie der Umgebung, die Einfluss auf das betrachtete System nehmen kann, maximal ist:

$$S = S_{System} + S_{Umgebung} = \text{maximal},$$

oder auch

$$dS = dS_{System} + dS_{Umgebung} = 0,$$

beziehungsweise

$$dS_{System} = -dS_{Umgebung} = -\frac{\delta Q}{T} = \frac{\delta Q}{T}. \quad (6.25)$$

Dabei bezeichnet  $\delta Q$  die Wärmemenge, die dem System zugeführt wird, sodass  $-\delta Q$  von der Umgebung aufgenommen wird,  $T$  ist die Temperatur, und wir haben einfach die thermodynamische Definition der Entropieänderung (6.7.1) benutzt.

Im folgenden wollen wir versuchen, die Entropie der Umgebung zu eliminieren und werden zur Vereinfachung auf den Index "System" bei der Entropie verzichten:  $dS_{System} \rightarrow dS$ . Damit ergibt sich unter Benutzung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik aus (6.25)

$$dS = \frac{dE - \delta W}{T},$$

oder auch

$$dE - T dS - \delta W = 0. \quad (6.26)$$

Nehmen wir nun als Beispiel wieder ein Gas, dem durch Kompression mechanische Energie zugeführt wird:  $\delta W = -p dV$ , so ergibt dies

$$dE + p dV - T dS = 0. \quad (6.27)$$

Betrachten wir nun isochore - isotherme Prozesse, also solche bei denen die Temperatur und das Volumen konstant gehalten werden, so besagt die Gl. (6.27), dass bei solchen isochoren - isothermen Prozessen der Zustand eingenommen wird, bei dem die Freie Energie, definiert durch

$$F = E - T S, \quad (6.28)$$

minimal ist. Zum Beweis dieser Folgerung erarbeiten wir uns zunächst einmal die Rechenregeln für die infinitesimale Änderung einer Größe, die sich als Produkt zweier Größen, also z.B. Temperatur  $T$  mal Entropie  $S$  berechnet. Diese berechnet sich gemäß

$$\begin{aligned} d(T S) &= (T + dT)(S + dS) - T S \\ &= T S + dT S + dS T + dS dT - T S \\ &= dT S + dS T. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass das quadratisch kleine Element,  $dS dT$ , vernachlässigt werden kann. Diese Produktregel für die Berechnung von Differenzialformen benutzen wir nun um auszurechnen

$$\begin{aligned} dF &= d(E - T S) \\ &= dE - T dS - S dT. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Bei isothermen Prozessen ( $dT = 0$ ) entfällt der letzte Term in (6.30) und bei isochoren Thermen ( $dV = 0$ ) der zweite Term in (6.27). Damit ergibt sich also aus dem Vergleich von (6.27) und (6.30), dass für isochore - isotherme Prozesse das statistische Gleichgewicht identisch ist mit der Forderung, dass  $dF = 0$ , die Freie Energie  $F$  also extremal ist. Dass es sich dabei um ein Minimum handelt wird deutlich, wenn man berücksichtigt, dass  $T$  positiv ist und damit ein Anwachsen der Freien Energie mit einer Reduktion der Entropie verknüpft ist.

Um die Bedeutung dieses Ergebnisses zu konkretisieren betrachten wir ein System aus zwei Flüssigkeiten von jeweils unterschiedlichen Atomen oder Molekülen. Die Wechselwirkung zwischen Atomen der gleichen Sorte sei attraktiv und von kurzer Reichweite. Bei niedrigen Temperaturen  $T$ , natürlich insbesondere im Grenzfall  $T = 0$  ist das Minimum der Freien Energie bestimmt durch das Minimum der Energie. Unser System wird also so realisiert werden, dass die Atome einer Sorte eng beieinander sind. Dies bedeutet, dass die Flüssigkeiten bei tiefen Temperaturen ungemischt sein werden.

Auf der anderen Seite ist aber die Entropie sehr viel höher, wenn alle Atome sich im ganzen Volumen aufhalten dürfen, die beiden Flüssigkeiten also durchmischt sind. Deshalb steht also für dieses System zu erwarten, dass bei hohen Temperaturen, wo der Entropiefaktor in der Freien Energie an Bedeutung zunimmt, das System im Zustand großer Entropie, also im gemischten Zustand realisiert wird. Bei der Übergangstemperatur  $T_0$  gilt für die Freie Energie  $F_g$ , die Energie  $E_g$  und die Entropie des gemischten Zustandes im Vergleich zu den entsprechenden Größen des ungemischten Zustandes ( $F_u, E_u, S_u$ )

$$F_g = E_g - T_0 S_g \quad = \quad F_u = E_u - T_0 S_u,$$

beziehungsweise

$$T_0 (S_g - S_u) = E_g - E_u. \quad (6.31)$$

Als anderes Beispiel betrachten wir ein System aus vielen Atomen, das als Flüssigkeit oder als Gas vorliegen kann. Die Umwandlung von einer Flüssigkeit in ein Gas erfolgt aber in der Regel nicht in einem isochoren Prozess mit fest vorgegebenem Volumen sondern in einem isobaren Prozess, bei dem der Druck konstant bleibt.

Für einen isothermen - isobaren Prozess ist aber die Forderung nach minimaler Entropie von System plus Umgebung, die zur Gl. (6.27) führte gleichbedeutend damit, dass die Freie Enthalpie

$$G = E + pV - T S = F + pV, \quad (6.32)$$

minimal ist. Zum Beweis dieser Behauptung betrachten wir die Differenzialform

$$\begin{aligned} dG &= d(E + pV - T S) \\ &= dE + V dp + p dV - T dS - S dT. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile haben wir wieder die Produktregel (6.29) für den  $TS$  Term und den  $pV$  Term angewandt. In einem isobaren Prozess ist  $V dp = 0$  und in einem isothermen Prozess gilt  $S dT = 0$ . Damit reduziert sich  $dG$  für einen isobaren - isothermen Prozess auf

$$dG = dE + p dV - T dS, \quad (6.34)$$

und die Forderung (6.27) ist identisch mit der Forderung nach einem Minimum für die Freie Enthalpie  $G$ .

Vergleichen wir nun die Eigenschaften von Atomen in einer flüssigen und in der gasförmigen Phase, so kann man feststellen, dass

- die Entropie der flüssigen Phase,  $S_f$ , niedriger ist als die der gasförmigen  $S_g$ , da die Atome in der flüssigen Phase eine gewisse Nahordnung aufweisen.
- die Energie der flüssigen Phase,  $E_f$ , niedriger ist als die der gasförmigen  $E_g$ , da die enge Nachbarschaft der Atome in der Flüssigkeit eine attraktive potenzielle Energie liefert.
- das Volumen der flüssigen Phase,  $V_f$ , kleiner ist als das Volumen der gleichen Anzahl Atome in der gasförmigen Phase.

Vergleicht man unter diesen Voraussetzungen die Freie Enthalpie  $G = E - TS + pV$  der flüssigen und der Gasphase, so wird man schliessen, dass bei niedrigen Temperaturen  $T$  der Entropieeffekt nicht so wichtig ist und so die flüssige Phase eher realisiert wird. Ausserdem wird bei einem niedrigen Druck der Term  $pV$  weniger Bedeutung haben, sodass eher die gasförmige Phase realisiert werden kann.

## 6.10 Zustandsgleichung eines realen Gases

In diesem Abschnitt soll am Beispiel der van der Waal'schen Zustandsgleichung für ein reales Gas der Phasenübergang zwischen einer Flüssigkeit und einem Gas aufgezeigt werden. Solch ein Phasenübergang findet in der Regel unter der Randbedingung statt, daß der Druck, der von außen auf der Flüssigkeit, beziehungsweise dem Gas lastet, in einem Labor eben gerade der atmosphärische Druck, konstant gehalten wird. Zur Beantwortung der Frage, ob bei vorgegebenem Druck und Temperatur, die Substanz in der flüssigen oder in der gasförmigen Phase realisiert wird, müssen wir die Freie Enthalpie  $G(T, p)$  berechnen und ermitteln für welcher der beiden Phasen die Freie Enthalpie sich im globalen Minimum befindet (siehe Diskussion im vorhergehenden Abschnitt).

Zur Beschreibung eines realen Gases müsste man die Wechselwirkung zwischen den Atomen berücksichtigen. Eine solche mikroskopische Berechnung ist aber in der Regel sehr kompliziert und wir werden erst in der Theorievorlesung zur Thermodynamik im Hauptstudium darauf zurückkommen. Hier gehen wir lieber von der Zustandsgleichung des Idealen Gases aus und modifizieren diese so, dass rein phänomenologisch die Abweichungen eines realen Gases von der idealen Gasgleichung implementiert sind. Eine solche Modifikation ergibt sich z.B. durch die Umwandlung der Zustandsgleichung des Idealen Gases in die sogenannte **van der Waalsche Zustandsgleichung** für ein reales Gas

$$\left( p + \underbrace{\frac{a}{V^2}}_{ii} \right) \left( V - \underbrace{b}_{i} \right) = Nk_B T \quad (6.35)$$

Im Vergleich zum Idealen Gas gibt es also hier zwei zusätzliche Terme, charakterisiert durch die Konstanten  $a$  und  $b$ , deren Bedeutung kurz erläutert werden soll:

- i) Ist der Parameter  $b > 0$ , so ist das praktisch gleichbedeutend damit, daß dem idealen Gas nicht mehr das gesamte Volumen  $V$  zur Verfügung steht sondern eben nur noch das Volumen  $V - b$ . Man kann  $b$  also so interpretieren, daß die Atome nicht mehr als Punktteilchen verstanden werden sondern als Teilchen, die insgesamt ein Volumen  $b$  besetzen, das natürlich der Bewegungsfreiheit der anderen Atome entzogen ist. Dieser Parameter  $b$  repräsentiert also die Tatsache, daß das Potential zwischen zwei Atomen bei sehr kurzen Relativabständen so stark repulsiv ist, dass eine gegenseitige Durchdringung unmöglich wird.
- ii) Ist die Konstante  $a > 0$ , so wirkt sich das genau so aus wie eine Vergrößerung des Druckes: die Atome werden also stärker zusammengehalten. Dies simuliert den Effekt einer attraktiven Wechselwirkung zwischen den Atomen. Da dieser Beitrag mit  $1/V^2$  skaliert, wird diese attraktive Wechselwirkung erst bei kleinen Volumina  $V$  wirksam. Dies ist aber gleichbedeutend damit, dass man durch diesen Term eine attraktive Wechselwirkung kurzer Reichweite zwischen den Atomen simuliert.

Löst man die van der Waalsche Zustandsgleichung nach dem Druck  $p$  auf

$$p = \frac{Nk_B T}{V - b} - \frac{a}{V^2} \quad (6.36)$$

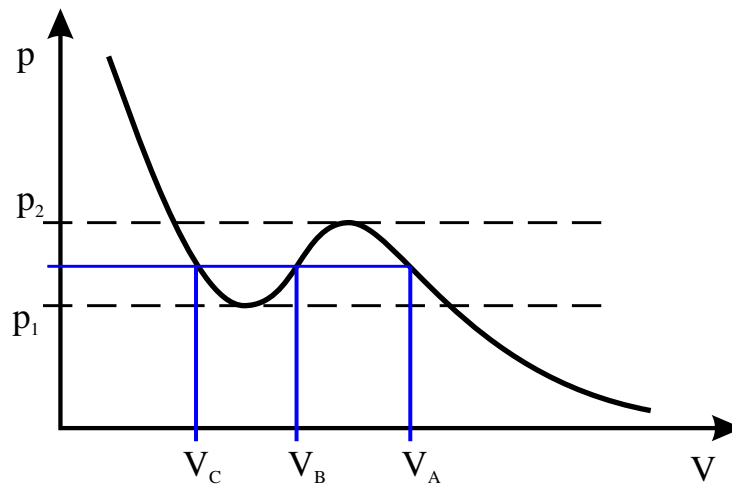


Abbildung 6.32: Lösung der van der Waalschen Zustandsgleichung für ein reales Gas bei vorgegebener Temperatur. Die resultierende Funktion (6.36) gibt an, welches Volumen sich bei vorgegebenem Druck  $p$  einstellt.

so erhält man also eine Funktion  $p(T, V)$ , die bei festgehaltener Temperatur angibt, welcher Druck bei vorgegebenem Volumen für das Gas resultiert, beziehungsweise welches Volumen sich bei vorgegebenem Druck einstellen sollte. Eine solche Funktion  $p(V)$  für eine bestimmte Temperatur  $T$  und bestimmte Werte für die Teilchenzahl  $N$  und die Parameter  $a$  und  $b$  ist in Abb. 6.32 dargestellt. Entsprechend dieser Figur können wir drei Bereiche unterscheiden:

$p < p_1$ : Die Zustandsgleichung liefert in diesem Druckbereich ein eindeutiges Ergebnis für  $V$ . Dies bedeutet, dass die Freie Enthalpie als Funktion von  $V$  nur ein Extremum aufweist. Aus dem Kurvenverlauf  $p(V)$  in Abb. 6.32 ist weiterhin klar, dass es sich bei diesem Extremum um ein Minimum handelt.

Diese Bedingung für ein Minimum in der Enthalpie ist auch anschaulich eine Bedingung für eine stabile Realisierung des Systems. Bedeutet sie doch, daß bei einer Verkleinerung des Volumens der Druck größer wird. Würde aber der Druck bei einer Verkleinerung des Volumens kleiner, so würde das zu einer Instabilität des Systems führen: Eine kleine Volumenänderung hervorgerufen durch eine externe Kraft führt ja dann zu einem reduzierten Gegendruck des Systems, was natürlich eine weitere Volumenreduktion schließlich also einen Kollaps des Systems zur Folge hätte.

In diesem Druckbereich erhalten wir eine Lösung mit einem großen Volumen. Für dieses große Volumen  $V$  kann man die Korrekturterme in der van der Waalschen Zustandsgleichung vernachlässigen

$$V \gg b \quad \text{und} \quad \frac{a}{V^2} \approx 0,$$

das System verhält sich also wie ein Gas.

$p > p_2$ : Auch in diesem Druckbereich gibt es nur eine Lösung der Zustandsgleichung: es gibt also ebenfalls nur ein Extremum für die Freie Enthalpie  $G(V)$ . Auch in diesem Fall

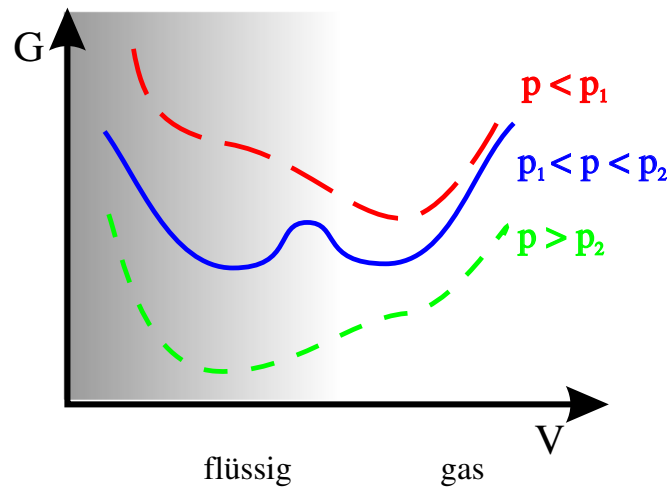


Abbildung 6.33: Schematische Darstellung der Freien Enthalpie als Funktion von  $V$  für jeweils einen Druck aus den Druckbereichen  $p < p_1$ ,  $p_1 < p < p_2$  und  $p_2 < p$  nach Abb. 6.32.

handelt es sich um ein Minimum. Das resultierende Volumen ist aber signifikant kleiner als in dem Druckbereich  $p < p_1$ . In diesem Fall sind die Korrekturterme zum Idealen Gas relevant: die Wechselwirkung zwischen den Atomen wird wichtig und wir indentifizieren diese Lösung deshalb mit der flüssigen Phase des Systems.

$p_1 < p < p_2$  In diesem Druckbereich gibt es drei Lösungen der Zustandsgleichung, die wir entsprechend der obigen Diskussion mit drei Extrema der Freien Enthalpie  $G(V)$  verbinden. Zwei dieser Extrema sind Minima, bei der dritten Lösung handelt es sich hingegen um eine Maximum.

Für jeweils einen Druck  $p$  aus den drei gerade diskutierten Druckbereiche ist in Abb. 6.33 die Funktion  $G(V)$  schematisch dargestellt. Während für  $p < p_1$  und  $p > p_2$  jeweils nur ein Minimum in  $G(V)$  auftritt, muß für den Zwischenbereich untersucht werden, welches der beiden Minima von  $G$ ,  $G(V_A)$  oder  $G(V_C)$  das absolute Minimum darstellt. Dazu berechnen wir

$$G(V_A) - G(V_C) = \int_C^A dG. \quad (6.37)$$

Zur weiteren Berechnung betrachten wir die Differenzialform für  $dG$  aus (6.33)

$$\begin{aligned} dG &= dE + V dp + p dV - T dS - S dT \\ &= T dS - p dV + V dp + p dV - T dS - S dT \\ &= V dp - S dT \\ &= V dp \end{aligned} \quad (6.38)$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile haben wir  $dE$  durch den Wärmebeitrag  $\delta Q = TdS$  und den Beitrag mechanischer Arbeit  $\delta W = -pdV$  dargestellt und beim Übergang zur letzten Zeile wurde berücksichtigt, dass die Temperatur konstant ist, also  $dT = 0$ . Damit ergibt

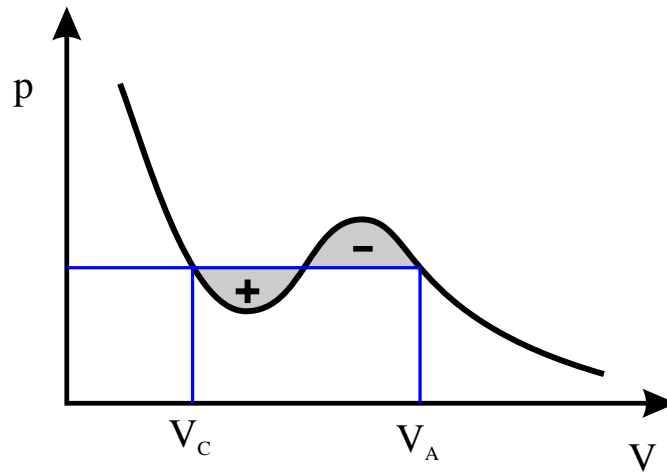


Abbildung 6.34: Grafische Darstellung der Differenz  $G(V_A) - G(V_C)$  in (6.39) durch Flächen: Maxwell Konstruktion zur Bestimmung des Druckes bei dem Phasenübergang stattfindet.

sich aus (6.37)

$$\begin{aligned}
 G(V_A) - G(V_C) &= \int_C^A V dp = \int_C^A (d(pV) - p dV) \\
 &= pV_A - pV_C - \int_C^A p(V) dV. \quad (6.39)
 \end{aligned}$$

Grafisch dargestellt entspricht der Beitrag  $p(V_A - V_C)$  in dieser Gleichung der Fläche des Rechtecks in Abb. 6.34, die oben durch die Gerade  $p = \text{const}$  abgeschlossen wird während links und rechts jeweils die Begrenzungen durch  $V = V_C$  beziehungsweise  $V = V_A$  gegeben ist. Das Integral  $\int p dV$  entspricht der Fläche unter der Kurve  $p(V)$  bei gleichen Begrenzungen an den Seiten. Das totale Ergebnis von (6.39) wird demnach durch die Differenz der beiden in Abb. 6.34 herausgehobenen Flächen dargestellt.

Wenn der Druck  $p$  gerade den Wert  $p = p_0$  annimmt, bei dem die Differenz dieser Flächen gerade identisch null ist, so haben wir den Grenzfall erreicht bei dem beide Minima in  $G(V)$  gleichen Wert haben:  $G(V_A) = G(V_C)$ . Ist der Druck kleiner als dieser Wert  $p_0$ , so ist die rechte der beiden Flächen größer, was ja nach (6.39) bedeutet, daß  $G(V_A) < G(V_C)$  ist. In diesem Fall  $p < p_0$  wird also die gasförmige Phase mit  $V = V_A$  realisiert. Ist andererseits  $p > p_0$ , so wird  $G(V_A) > G(V_C)$  sein und entsprechend die flüssige Phase auftreten. Diese gerade beschriebene Konstruktion zur Bestimmung des Druckes  $p_0(T)$ , bei dem gerade bei der vorgegebenen Temperatur  $T$  der Phasenübergang “flüssig  $\Leftrightarrow$  fest” stattfindet nennt man **Maxwell Konstruktion**.

Hält man nun für ein System aus wechselwirkenden Atomen die Temperatur konstant und setzt es unter einen kleinen äußeren Druck  $p$ , so wird es ein Gas bilden mit großem Volumen  $V$ . Wird der Druck  $p$  stetig erhöht, so wird das Volumen kontinuierlich abnehmen, das System bleibt aber im gasförmigen Zustand so lange der Druck unterhalb des Druckes  $p_0(T)$ , der durch die Maxwell Konstruktion bestimmt werden kann, liegt. Genau bei dem

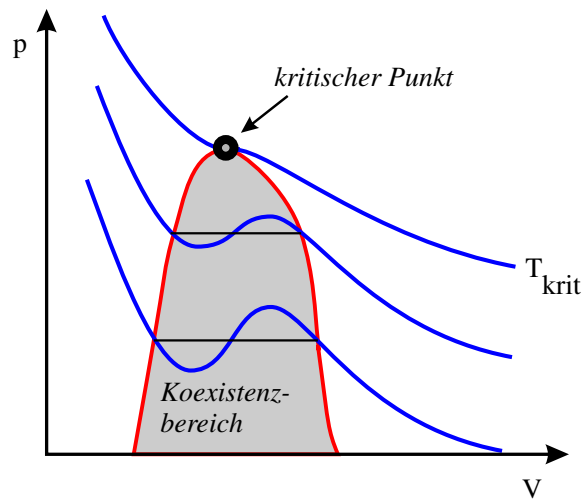


Abbildung 6.35: Lösung der van der Waalschen Zustandsgleichung bei verschiedenen Temperaturen und der kritische Punkt.

Druck  $p_0$  koexistieren beide Phasen. Wächst der Druck schließlich über  $p_0$  an, so bildet das System bei kleinem Volumen eine Flüssigkeit.

Bei dem Druck  $p_0$  sind die Freien Enthalpien für die gasförmige und die flüssige Phase identisch. Die Entropie der Flüssigkeit ist kleiner als die Energie des entsprechenden Gases, da ja in der flüssigen Phase wegen der Wechselwirkung der Atome eine Korrelation zwischen den Nachbaratomen und damit eine gewisse Nahordnung besteht, während in der Gasphase alle Atome sich unabhängig voneinander bewegen. Andererseits ist aber die Energie der Gasphase kleiner als die der flüssigen Phase. Es muß also eine Energiemenge, die sogenannte **Verdampfungsenthalpie** aufgebracht werden, um die Flüssigkeit in die Gasphase zu überführen.<sup>12</sup>

Die Lösung der van der Waalschen Zustandsgleichung  $p(V)$  nach (6.36) ändert sich mit der Temperatur  $T$  wie es in Abb. 6.35 an Beispielen dargestellt ist. Bei einer gewissen Temperatur  $T_{krit}$  verschwindet der Druckbereich, in dem 3 Lösungen für das Volumen  $V$  bei vorgegebenem  $p$  gefunden werden können. Bei dieser kritischen Temperatur und oberhalb  $T = T_{krit}$  treten keine getrennten Minima für die gasförmige und die flüssige Phase auf. Bei diesen hohen Temperaturen existiert das System nur noch in einer Phase. Den Endpunkt des Koexistenzbereiches in dem  $p(V)$  Diagramm, bezeichnet man als den kritischen Punkt (siehe auch Abb. 6.35). Beispiele für die Temperatur,  $T_{krit}$ , den Druck  $p_{krit}$  und dem Verhältnis

$$\frac{p_{krit} V_{krit}}{N k_B T_{krit}} \quad (6.40)$$

etwa für ein Mol verschiedener Substanzen sind in der Tabelle 6.8 aufgelistet. Daraus ersehen wir, daß sich z.B. für die Temperatur des kritischen Punktes  $T_{krit}$  Werte ergeben, die sich um zwei Größenordnungen unterscheiden. Ähnliches gilt auch für den Druck. Das Verhältnis aus (6.40) ist jedoch nahezu unabhängig von dem betrachteten Material, hat also eine eher globale Bedeutung.

<sup>12</sup>Im täglichen Leben ist dies z.B. die Energie, die nötig ist um eine Menge Wasser bei 100 Grad Celsius zu verkochen, also ohne Erhöhung der Temperatur von der Flüssigkeit in die Dampfphase zu überführen.



	$T_{krit}$ [K]	$p_{krit}$ [b]	$pV/Nk_B T$
Wasser	647	217.5	0.239
Sauerstoff	154	50.8	0.292
Wasserstoff	33.3	13	0.304
Helium, $^4\text{He}$	5.3	2.26	0.308

Tabelle 6.8: *Temperatur und Druck des kritischen Punktes, so wie das Verhältnis (6.40) für verschiedene Materialien.*



## 6.11 Phasen und Phasenübergänge

Im diesem Abschnitt setzen wir uns mit experimentellen Ergebnissen zum Thema Phasen und Phasenübergänge auseinander. Hierbei interessieren uns einerseits die Eigenschaften der Grenzlinien zwischen den Phasen (z. B. Grenzlinien fest-flüssig, flüssig-gasförmig, fest-gasförmig), andererseits die Art und Weise, wie verschiedene Phasen realisiert werden können (z. B. Verflüssigung von Luft).

Die Abb. 6.36 zeigt schematisch die Phasen fest, flüssig, gasförmig von  $\text{H}_2\text{O}$  und von  $\text{CO}_2$  in Abhängigkeit vom Druck und von der Temperatur. Darstellungen dieser Art nennt man Phasendiagramme.

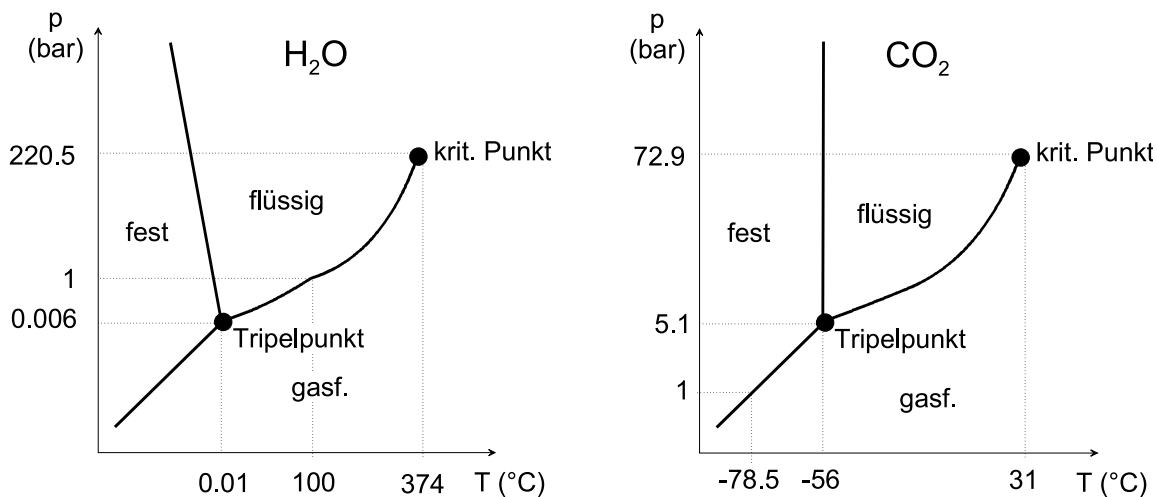


Abbildung 6.36: Schematische Phasendiagramme von  $\text{H}_2\text{O}$  und von  $\text{CO}_2$ . Die Skalen sind nicht maßstäblich.

Betrachten wir zunächst das Phasendiagramm von  $\text{H}_2\text{O}$ . Unter Umgebungsbedingungen ( $20^\circ\text{C}$ , 1 bar) ist  $\text{H}_2\text{O}$  flüssig. Bei 1 bar siedet  $\text{H}_2\text{O}$  bei  $100^\circ\text{C}$  und gefriert bei  $0^\circ\text{C}$ . Die Grenzlinie flüssig/gasförmig (Sieden  $\leftrightarrow$  Kondensation) hängt dabei stark vom Druck und von der Temperatur ab. Wesentlich schwächer ist diese Abhängigkeit für die Grenzlinie flüssig/fest (Gefrieren  $\leftrightarrow$  Schmelzen). Speziell bei  $\text{H}_2\text{O}$  ist diese Grenzlinie im  $(p, T)$ -Diagramm leicht nach links geneigt, d. h. bei steigendem Druck verschiebt sich der Phasenübergang zu niedrigeren Temperaturen. Die Grenzlinie fest/gasförmig (Sublimation  $\leftrightarrow$  Deposition) ist dagegen wiederum nach rechts geneigt. Alle drei Phasen treffen sich im Tripelpunkt, der für  $\text{H}_2\text{O}$  bei  $0.006^\circ\text{C}$  und 0.01 bar liegt. Den kritischen Punkt ( $\text{H}_2\text{O}$ :  $220.5$  bar,  $374^\circ\text{C}$ ), haben Sie bereits im Theorieteil bei der Behandlung der van der Waals - Gleichung kennengelernt. Für Drücke bzw. Temperaturen oberhalb des kritischen Punktes gibt es keinen Unterschied mehr zwischen der Gasphase und der Flüssigphase, der Phasenübergang flüssig/gasförmig existiert nicht mehr.

Im Phasendiagramm von  $\text{CO}_2$  (Abb. 6.36 rechts) treten ebenfalls die Phasen fest-flüssig-gasförmig auf. Der Tripelpunkt liegt bei  $-56^\circ\text{C}$  und 5.1 bar, der kritische Punkt bei  $31^\circ\text{C}$  und 72.9 bar. Abgesehen von den unterschiedlichen Druck- und Temperaturskalen ist das Phasendiagramm von  $\text{CO}_2$  dem von  $\text{H}_2\text{O}$  sehr ähnlich, mit der Ausnahme, dass die Grenzlinie fest/flüssig leicht nach "rechts" geneigt ist.

Es sei hier weiter angemerkt, dass die Unterscheidung fest-flüssig-gasförmig einen Stoff keineswegs vollständig charakterisiert. Speziell im festen Zustand gibt es oft eine Vielzahl weiterer Phasen, die sich z. B. in der Kristallstruktur, d. h. der Anordnung der Atome oder Moleküle im Kristall, oder auch in ihren elektronischen Eigenschaften (z. B. paramagnetisch/ferromagnetisch) unterscheiden.

Als Beispiel zeigt Abb. 6.37 einige Phasen von Eis. Die 9 gezeigten Phasen unterscheiden sich alle in ihrer Kristallstruktur.

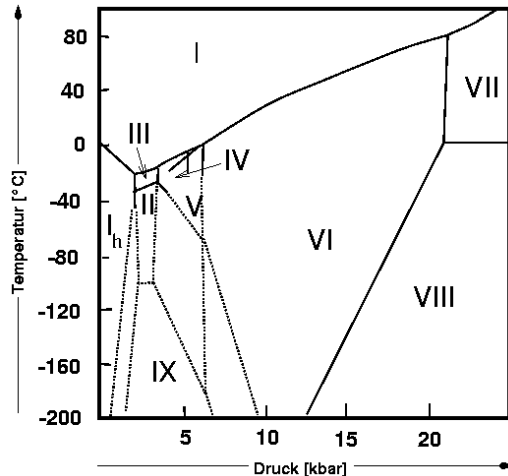


Abbildung 6.37: Phasendiagramm von Eis. Quelle: [http://ruby.chemie.uni-freiburg.de/Vorlesung/oxide\\_2.html](http://ruby.chemie.uni-freiburg.de/Vorlesung/oxide_2.html)

### 6.11.1 Phasenübergang flüssig-gasförmig: Verdunsten, Kondensation, Sieden und Dampfdruck

Wir wollen uns zunächst der Phasengrenzlinie bzw. dem Phasenübergang flüssig/fest genauer zuwenden. Ausgehend von einem Wertepaar  $(p, T)$  in der Gasphase kann man den Phasenübergang dadurch erreichen, dass man bei gegebenem Druck die Temperatur erniedrigt oder bei gegebener Temperatur den Druck erhöht.

#### Kondensation und Sieden von $\text{CO}_2$

Den letztgenannten Fall demonstrieren wir mit in einer Kapillare eingeschlossenem  $\text{CO}_2$ -Gas, das wir unter hohem Druck setzen. Bei einem Druck in der Gegend von 70 bar bildet sich in der Kapillare flüssiges  $\text{CO}_2$ , wobei die Flüssigkeitsmenge mit wachsendem Druck ansteigt. Wenn der Druck wieder verringert wird, dann siedet die Flüssigkeit (d. h. wir beobachten Blasenbildung), bis sich schließlich der Gaszustand wieder eingestellt hat.

#### Verdunsten

Um uns der Phasengrenzlinie flüssig/gasförmig anzunähern, betrachten wir zunächst einen Vorgang, den Sie aus der täglichen Erfahrung kennen. Wenn wir ein Glas Wasser in ein (trockenes) Zimmer stellen, so ist das Wasser nach einiger Zeit verdunstet. Ein Glas voll Öl oder ein mit Quecksilbergeläß würde dagegen sehr lange stehen, bis man einen

Flüssigkeitsverlust bemerkt. Spiritus oder Methylalkohol verdunsten dagegen sehr schnell (auch am Geruch merkt man hier eindeutig, dass die entsprechenden Moleküle aus der Flüssigkeit ausgetreten sind!).

Wir geben jetzt Chloräthyl auf ein mit einem Wattebausch versehenes Thermolement und lassen es dort verdunsten. Bei der Verdunstung sinkt die Temperatur bis auf ca.  $-80^{\circ}\text{C}$  ab. Bei der Verdunstung wird der Flüssigkeit also sehr viel Wärmeenergie entzogen.

In einem Punkt  $(p, T)$  des Phasendiagramms, bei dem die Flüssigkeit die energetisch günstigste Phase ist, kostet es jedes Molekül (im Mittel) eine Energie  $\varepsilon$ , um gegen die intermolekularen Bindungskräfte aus der Flüssigkeit auszutreten. Wir bezeichnen mit  $\Lambda$  die Verdampfungswärme pro Mol, mit  $\lambda$  die Verdampfungswärme pro kg. Diese Energie ist natürlich abhängig vom Material und für Pb deutlich höher als für Methylalkohol. Um überhaupt aus der Flüssigkeit austreten zu können, benötigen die Moleküle eine kinetische Energie, die mindestens gleich  $\varepsilon$  ist. Im allgemeinen werden nur die energiereichsten Moleküle (auch in der Flüssigkeit gibt es eine Geschwindigkeits- bzw. Energieverteilung) austreten können. Die Wahrscheinlichkeit, ein Molekül in der Gasphase vorzufinden, ist dabei wiederum proportional zum Boltzmann-Faktor  $\exp(-\varepsilon/k_B T)$ . Je größer  $\varepsilon$  und je geringer  $T$ , desto geringer wird die Zahl der Teilchen sein, die pro Zeiteinheit in die Gasphase gelangen.

## Dampfdruck und Sieden

In einem zweiten Gedankenversuch füllen wir ein Gefäß teilweise mit Flüssigkeit und verschließen dieses. Das Gefäß soll thermisch gut an die Umgebung angekoppelt sein, also bei konstanter Temperatur bleiben. Auch jetzt werden Moleküle aus der Flüssigkeit austreten. Sie können aber nicht entweichen, sondern füllen allmählich den freien Teil des Gefäßes. Diese Moleküle tragen zum Gesamtdruck über der Flüssigkeitsoberfläche bei (man nennt den Beitrag einer Molekülsorte zum Gesamtdruck auch **Partialdruck**, es gilt bei  $N$  Molekülsorten:  $p_{\text{ges}} = \sum_1^N p_n$ ). Speziell bezogen auf die aus der Flüssigkeit verdampfenden Moleküle sprechen wir vom **Dampfdruck**. Mit wachsendem Dampfdruck kehren aber auch mit wachsender Wahrscheinlichkeit Moleküle aus der Gasphase in die Flüssigkeit zurück. Man erreicht schließlich ein stationäres Gleichgewicht, bei dem pro Zeiteinheit genauso viele Moleküle verdampfen wie kondensieren. Hier ist der **Sättigungsdampfdruck**  $p_D$  erreicht. Auch dieser ist proportional zum Boltzmannfaktor, es gilt:

$$p_D = p_0(T) \cdot e^{\frac{-\lambda}{RT}}. \quad (6.41)$$

Bei  $20^{\circ}\text{C}$  beträgt  $p_D$  für  $\text{H}_2\text{O}$  23.3 mbar, für Hg  $1.6 \times 10^{-3}$  mbar und für Methylalkohol 125 mbar.

Abb. 6.38 zeigt den Sättigungsdampfdruck von  $\text{H}_2\text{O}$  als Funktion der Temperatur. Einige Zahlenwerte sind tabellarisch mit abgegeben.

Speziell erreicht bei einer Temperatur von  $100^{\circ}\text{C}$  der Sättigungsdampfdruck den Atmosphärendruck von 1013 mbar. Hier beginnt das Wasser zu sieden;  $\text{H}_2\text{O}$ -Moleküle entweichen nicht nur durch die Grenzfläche flüssig/gasförmig sondern bilden auch im Flüssigkeitsvolumen Gasblasen. Der Druck in den Gasblasen ist gleich dem Außendruck von 1013 mbar.

Im pT-Phasendiagramm der Abb. 6.36 ist der Gesamtdruck gegen die Temperatur aufgetragen. Die Grenzlinie flüssig/gasförmig ist dadurch bestimmt, dass der Sättigungsdampfdruck gleich dem Außendruck wird. Es gilt also:

$$p_{\text{Siede}} = p_D = p_0(T) \cdot e^{\frac{-\lambda}{RT}} \quad (6.42)$$

Pumpt man einen teilweise mit Wasser gefüllten Kolben ab, so findet man, dass das Wasser bei ca. 23 mbar zu sieden beginnt. Hier ist der Druck im Kolben gleich dem Dampfdruck bei 20°C.

T [°C]	p [mbar]	T [°C]	p [mbar]
0	6.1	100	1013
10	13.3	110	1432
20	23.3	120	1985
30	42.2	130	2700
40	73.7	150	4760
50	123	170	7919
60	199	190	12549
70	311	300	82894
80	473	350	165330
90	701		

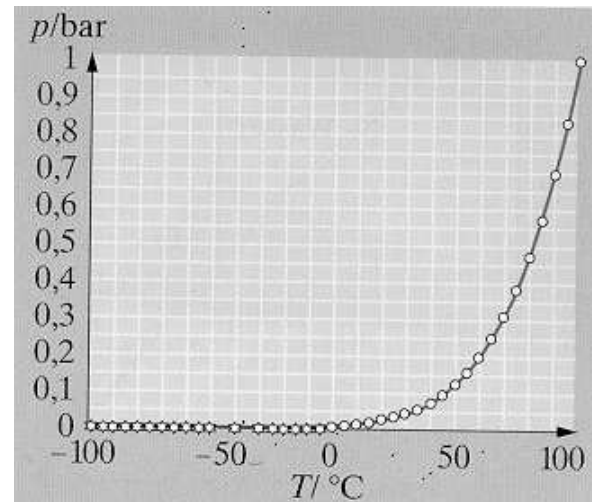


Abbildung 6.38: Dampfdruckkurve von  $\text{H}_2\text{O}$  mit einigen Zahlenwerten für  $p_D$  bei verschiedenen Temperaturen. Quelle: Gerthsen Physik, Tab. 5.12 und Abb. 5.56

Abb. 6.39 demonstriert nochmals die Abhängigkeit  $p_D \propto \exp(-\text{const}/T)$ . Die Abbildung zeigt das Phasendiagramm von  $\text{H}_2\text{O}$  in der Auftragung  $\ln(p)$  gegen  $1/T$ . Die Phasengrenzlinie flüssig/fest verläuft praktisch hier praktisch linear, was  $\ln(p_D) \propto 1/T$  entspricht.

## Luftfeuchte

Meist liegt die Konzentration des Wasserdampfs in der Atmosphäre deutlich unterhalb des Sättigungsdampfdrucks liegen. Das thermodynamische Gleichgewicht hat sich dann noch nicht eingestellt, das Wasser verdunstet. Man gibt die aktuell vorhandene Menge an Wasserdampf als Luftfeuchte an. Die **absolute Luftfeuchte** bezeichnet die Konzentration des Wasserdampfs in  $\text{g}/\text{cm}^3$ . Die **relative Luftfeuchte** ist das Verhältnis absolute Feuchte/Sättigungsfeuchte. Sie wird durch **Hygrometer** gemessen. Man nutzt dabei in der Regel indirekte Effekte wie die Elastizität von Haaren oder die beim Verdunsten erzeugte Temperaturabsenkung aus. Wenn Luft bei einer relativen Luftfeuchte  $< 100\%$  abgekühlt wird, sinkt der Dampfdruck und damit die Sättigungsfeuchte. Der Wasserdampf muss, wenn der Sättigungswert erreicht ist ("Taupunkt"), aus der Luft auskondensieren. Dies geschieht beispielsweise als Tau bzw. Nebel.

## Clausius-Clapeyron-Gleichung

Wir kehren nochmals zum Sättigungsdampfdruck und zur Phasengrenzlinie flüssig/gasförmig zurück. Man kann einen sehr wichtigen Zusammenhang finden zwischen der Ver-

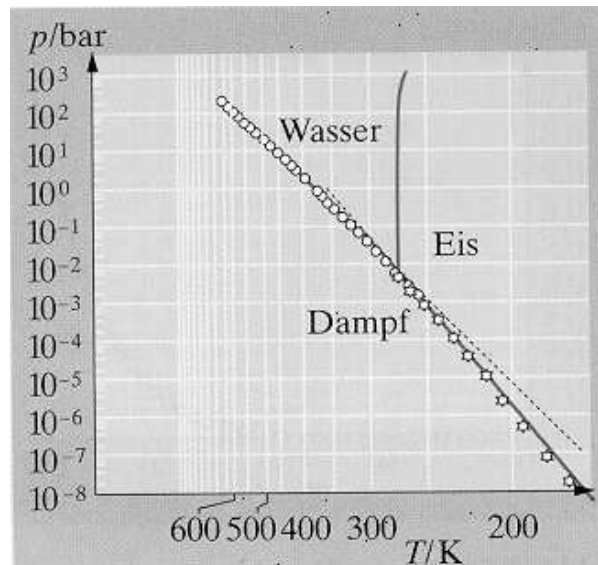


Abbildung 6.39: Phasendiagramm von  $\text{H}_2\text{O}$  in einer Auftragung  $\ln p$  gegen  $1/T$ . Quelle: Gerthsen Physik, Abb. 5.58

dampfungswärme  $\lambda$ , der Steigung der Phasengrenzlinie und den spezifischen Volumina der beiden Phasen:

$$\lambda = T \frac{dp_D}{dT} \cdot (v_D - v_{fl}) \quad (\text{"Clausius-Clapeyron-Gleichung"}) \quad (6.43)$$

Hierbei ist  $v_{fl}$  das "spezifische Volumen" der Flüssigkeit (=  $1/\text{Dichte}$ ),  $v_D$  das spezifische Volumen des Dampfes. Für 1 Mol lautet diese Gleichung:

$$\Lambda = T \frac{dp_D}{dT} \cdot (V_{\text{mol,D}} - V_{\text{mol,fl}}) \quad (6.44)$$

Es ist im allgemeinen  $V_D \gg V_{Fl}$  und damit  $\Lambda \approx T \frac{dp_D}{dT} \cdot V_{\text{mol,D}}$ .

Weiterhin ist  $V_D > 0$  und  $\Lambda > 0$ . Damit muss notwendig  $dp_D/dT > 0$  sein, also die Phasengrenzlinie im  $pT$ -Diagramm nach "rechts" geneigt sein.

Benutzen wir ferner für den Dampf das ideale Gasgesetz:  $p_D V_{\text{mol,D}} = RT$ , so erhalten wir:  $\frac{dp_D}{dT} \approx p \cdot \frac{\Lambda}{RT^2}$ . Man kann durch Differentiation sofort sehen, dass  $p_D = p_0 \cdot e^{-\Lambda/RT}$  diese Gleichung löst.

Zur **Ableitung der Clausius Clapeyron-Gleichung** betrachtet man einen Carnot-schen Kreisprozess, bei dem eine Flüssigkeit verdampft wird. Der Prozess ist in Abb. 6.40 schematisch im  $pV$ -Diagramm dargestellt.

Im Punkt "4" (Druck  $p_1$ , Temperatur  $T$ ) seien sehr knapp an der Phasengrenzlinie alle Moleküle in der Flüssigkeit (Volumen:  $V_{Fl}$ ). Man erwärmt dann die Flüssigkeit (z. B. adiabatisch) um eine Temperatur  $dT$ , d. h. bewegt sich von  $4 \rightarrow 1$ . Da es sich um eine infinitesimale Änderung handeln soll, sind die dabei auftretenden Energieänderungen sehr klein und sollen vernachlässigt werden. Vom Punkt "1" zum Punkt "2" verdampfe die ganze Flüssigkeit, wobei sowohl der Druck als auch die Temperatur konstant bleiben.

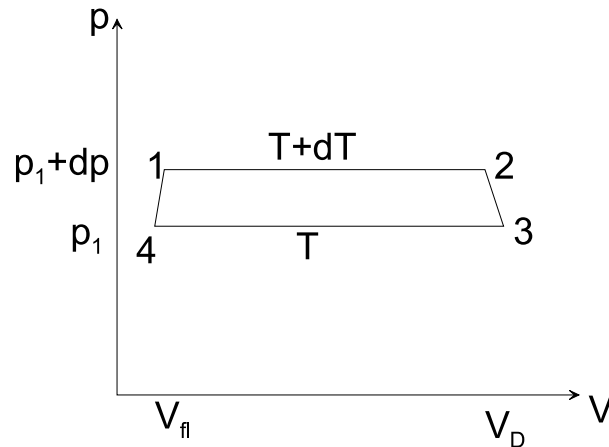


Abbildung 6.40: Kreisprozess zur Ableitung der Clausius-Clapeyron-Gleichung.

Das Volumen vergrößert sich dabei von  $V_{fl}$  auf  $V_D$ . Hierdurch kann ein Kolben die Arbeit  $\Delta W_1 = (p_1 + dp) \cdot (v_D - v_{fl})$  verrichten. Von "2" nach "3" wird das Gas (z. B. adiabatisch) von  $T + dT$  auf  $T$  abgekühlt, wobei wieder der Druck  $p_1$  erreicht wird. Wir vernachlässigen wiederum die infinitesimal kleine Änderung von  $V_D$ . Schließlich wird das Gas von "4" nach "1" kondensiert. Der Kolben leistet die Arbeit  $\Delta W_2 = -p_1 \cdot (V_D - V_{fl})$ . Die gesamte vom Kolben geleistete Arbeit ist  $\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2 = (V_D - V_{fl})dp$ . Beim Verdampfen musste außerdem die Wärme  $\Delta Q = \lambda \cdot M$  ( $M$ : Masse der Flüssigkeit) einem Wärmebad entnommen werden. Der Wirkungsgrad ist also:

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q} = \frac{(V_D - V_{fl})dp}{M\lambda} = \frac{(v_D - v_{fl})dp}{\lambda}. \quad (6.45)$$

Andererseits gilt für einen Carnot-Prozess:  $\eta = \frac{(T+dT)-T}{T+dT} = \frac{dT}{T}$ . Hierbei haben wir die kleine Größe  $dT$  im Nenner vernachlässigt.

Der Vergleich liefert:  $\frac{(v_D - v_{fl})dp}{\lambda} = \frac{dT}{T}$ , was aufgelöst nach  $\lambda$  die Clausius-Clapeyron-Gleichung ergibt.

### Phasenübergang flüssig-fest: Schmelzen und Sieden

Auch für den Phasenübergang flüssig-fest lässt sich ganz analog zum Übergang gasförmig-flüssig durch Betrachten eines infinitesimalen Carnot-Prozesses über die Phasengrenze hinweg eine Clausius-Clapeyron-Gleichung ableiten:

$$\lambda' = T \frac{dp_s}{dT} (v_{fl} - v_{fest}). \quad (6.46)$$

Hierbei ist die Schmelzwärme  $\lambda' > 0$ . Jetzt kann aber  $v_{fl}$  sowohl größer als auch kleiner als  $v_{fest}$  sein. Für die meisten Stoffe ist  $v_{fl} > v_{fest}$ . Dann ist die Schmelzkurve  $p_s(T)$  wiederum im  $pT$ -Diagramm nach rechts geneigt. Für einige Stoffe (insbesondere  $H_2O$ !) ist



aber  $v_{fest} < v_{fl}$ . Dann ist notwendig  $dp_s/dT < 0$ ; die Schmelzkurve ist nach links geneigt (vgl. Abb. 6.36).

Als Konsequenz schmilzt Eis unter Druck. Ein Schlittschuh gleitet deshalb auf einem Wasserfilm.

Weiter ist anzumerken, dass im allgemeinen die Differenz  $|v_{fest} - v_{fl}|$  wesentlich kleiner ist als die entsprechende Differenz beim Phasenübergang flüssig/gasförmig. Wenn  $\lambda$  und  $\lambda'$  von gleicher Größenordnung sind, ist deshalb  $dp_s/dT$  deutlich größer als  $dp_D/dT$ , die Schmelzkurve verläuft im  $pT$ -Diagramm sehr steil.

### Phasenübergang flüssig-gasförmig: Sublimation und Deposition

Wir demonstrieren den Prozess der Sublimation durch festes  $\text{CO}_2$  das wir dadurch herstellen, dass wir flüssiges  $\text{CO}_2$  aus einer Hochdruckflasche ( $T=20^\circ\text{C}$ ) ausströmen lassen. Hierbei wird  $\text{CO}_2$  zunächst gasförmig und kühlt beim Entspannungsvorgang bis in die feste Phase ab. Für  $p = 1$  bar hat festes  $\text{CO}_2$  eine Temperatur von  $-78.5^\circ\text{C}$  und sublimiert in die Gasphase, was experimentell gut beobachtet werden kann. Der Effekt wird häufig bei Bühnenshows eingesetzt ("Trockeneis").

### Phasengleichgewicht fest-flüssig-gasförmig; Gibbs'sche Phasenregel

Wir kommen schließlich zum Gleichgewicht fest-flüssig-gasförmig. Hier sind Temperatur und Druck für einen bestimmten Stoff eindeutig festgelegt ("Tripelpunkt").

Eine Verallgemeinerung auf ein System von  $k$  Komponenten (z. B. Lösungen unterschiedlicher Atomsorten) besagt, dass die Zahl der Freiheitsgrade (z. B. Druck, Temperatur, Mischungsverhältnis der Komponenten) gegeben ist durch:

$$f = k + 2 - \tilde{p} : \quad (6.47)$$

Hierbei ist  $\tilde{p}$  die Zahl der koexistierenden Phasen (z. B. gasförmig, flüssig, fest).

Für eine Atomsorte ist  $k = 1$ . Dies liefert für die Koexistenz gas/flüssig/fest  $\tilde{p} = 3$  und  $f = 0$ . Das System ist eindeutig festgelegt. Für Lösungen zweier Stoffe (wir besprechen einige Details im nächsten Kapitel) ist  $k = 2$ . Die Phasen gas/flüssig/fest können auf einer ganzen Linie im in einem ( $p, T$ -Konzentration)-Diagramm koexistieren.

### Verflüssigung von Stickstoff, Sauerstoff, Helium

Sauerstoff siedet bei ca. 90 K,  $\text{N}_2$  bei 77 K. Hat man bereit flüssigen Stickstoff erzeugt, so lässt sich fl.  $\text{O}_2$  dadurch herstellen, dass eine gut wärmeleitfähige Fläche (in unserem Experiment: ein mit fl.  $\text{N}_2$  gekühlter Cu-Zylinder) auf eine Temperatur unter den Siedepunkt von  $\text{O}_2$  gekühlt wird.  $\text{O}_2$  kondensiert dann aus der Luft aus.

Zur Erzeugung flüssigen Stickstoffs (oder auch flüssiger Luft) verwendet man das "Linde-Verfahren", das in Abb. 6.41 skizziert ist.

Man setzt zunächst ein Gas unter hohen Druck, wobei die dabei freiwerdende Wärme an die Umgebung abgeführt wird. Das komprimierte Gas leitet man in ein Gefäß, wo es über ein Drosselventil entspannt wird. Das Gas kühlt dabei ab (**"Joule-Thomson-Effekt"**), ist aber im ersten Zyklus noch nicht flüssig. Jetzt wird das Kaltgas zum Kompressor zurückgeleitet, wobei es das entgegenströmende noch wärmere Gas vorkühlt. Nach einigen Zyklen setzt die Verflüssigung ein.

Man kann zeigen (s. unten), dass der Prozess der Gasentspannung durch ein Drosselventil ein Gas nur dann zur Abkühlung führt, wenn die Ausgangstemperatur unterhalb der "Inversionstemperatur"  $T_i$  liegt, die das 6.75-fache der kritischen Temperatur ist. Für  $N_2$  beträgt  $T_i$  851 K, für  $H_2$  225 K, für He 35.8 K. Speziell He-Gas muss man durch andere Kühlverfahren unter 35 K kühlen, damit der Joule-Thomson-Effekt zur Abkühlung und Verflüssigung führt.

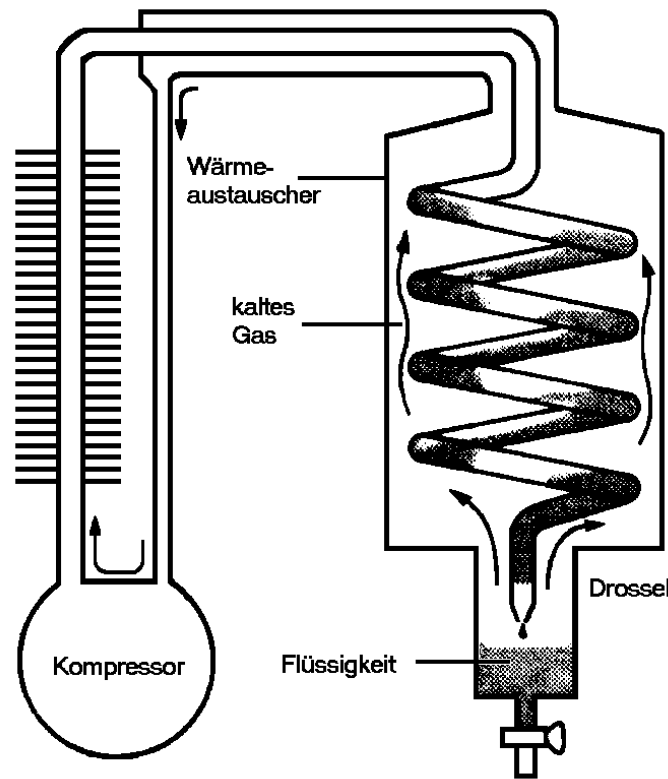


Abbildung 6.41: Gasverflüssigung nach Linde. Quelle: <http://www.tu-bs.de/institute/pci/aggericke/PC1/Kap-II/JT-Effekt.htm>

**Joule-Thomson-Effekt** Beim Joule-Thomson-Effekt stellt man sich vor, dass ein Gas durch eine Drosselstelle wie in Abb. 6.42 gezeigt durchgedrückt wird. Das Gesamtsystem sei dabei thermisch von der Umgebung isoliert.

Der linke Druckstempel verrichtet die Arbeit  $p_1 V_1$  am Gas, dieses leistet die Arbeit  $p_2 V_2$  am rechten Stempel. Die Differenz ändert die innere Energie  $E$  des Gases, d. h.  $E_2 - E_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2$ .

Die Größe  $H = E + pV$  ("Enthalpie") bleibt also während des Prozesses konstant (**"isenthalpe Zustandsänderung"**). Für vorgegebenes  $p_1, p_2, V_1$  lässt sich zusammen mit der

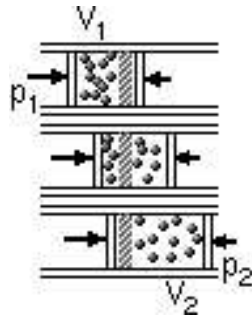


Abbildung 6.42: Joule-Thomson-Effekt: Gasentspannung durch eine Drossel. Quelle: <http://www.fs-physik.uni-bonn.de/scripts/andere/thermo/joulethomson.html>

van der Waals-Gleichung  $(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = \nu RT$  die Temperaturänderung des Gases berechnen.

Die innere Energie des realen Gases hat wie das ideale Gas zunächst (für 1 Mol, d. h.  $\nu = 1$ ) den Beitrag  $\frac{\tilde{f}}{2}RT$ . Es kommt jetzt aber noch ein weiterer Beitrag  $-a/V$  hinzu, da Arbeit gegen die Kohäsionskräfte zwischen den Molekülen geleistet wird. Der Gradient dieses Terms liefert gerade den Binnendruck  $a/V^2$ .

Es gilt also (für 1 Mol):

$$H = \frac{\tilde{f}}{2}RT - \frac{a}{V} + pV. \quad (6.48)$$

Man muss jetzt unter Benutzung der van der Waalsgleichung die Größe  $dT/dp$  bestimmen, wobei die Nebenbedingung  $H = \text{const.}$  zu erfüllen ist.

Wir wollen dies hier nicht im Detail durchführen sondern statt dessen eine vereinfachte Darstellung wählen, bei der wir annehmen, wir hätten die Volumina  $V_1$  und  $V_2$  vorgegeben. Wir berechnen dann die Größe  $dT/dV$  unter der Nebenbedingung  $H = \text{const.}$

Es gilt:  $dH = \frac{\partial H}{\partial V}|_{T=\text{const.}} \cdot dV + \frac{\partial H}{\partial T}|_{V=\text{const.}} \cdot dT$ . Hier ist  $dH$  das "totale Differential". Mit ist die partielle Ableitung nach  $x$  ( $x = T, V$ ) bezeichnet.

Hieraus folgt

$$\frac{dT}{dV} \Big| = - \frac{(\partial H / \partial V)_{T=\text{const.}}}{(\partial H / \partial T)_{V=\text{const.}}} \quad (6.49)$$

Wir lösen die van der Waals-Gleichung nach  $p$  auf und setzen in  $H$  ein:

$$H = \frac{\tilde{f}}{2}RT - \frac{a}{V} + \left( \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) \cdot V = RT \left( \frac{\tilde{f}}{2} + \frac{V}{V-b} \right) - \frac{2a}{V}. \quad (6.50)$$

Ausführen der Ableitung ergibt:

$$\frac{dT}{dV} \Big| = \frac{\frac{Tb}{(V-b)^2} - \frac{2a}{RV^2}}{\frac{\tilde{f}}{2} + \frac{V}{V-b}} \approx \frac{RTb - 2a}{\left(\frac{\tilde{f}}{2} + 1\right) RV^2} \quad (6.51)$$

Hierbei wurde im letzten Schritt  $V - b \approx V$  gesetzt.

Die Größe  $dT/dV$  wechselt offensichtlich ihr Vorzeichen bei  $T_i = 2a/Rb = 6.75T_{krit} = 6.75(8a/27Rb)$ .  $T_i$  ist die **Inversionstemperatur**, oberhalb der sich ein durch die Drossel strömendes Gas erwärmt anstatt abzukühlen. Für ein ideales Gas ist  $a = b = 0$ . Dann ist  $(dT/dV)_H = 0$ , wie es auch sein muss, da dessen innere Energie nur von der Temperatur abhängt und sich bei dem Überströmvorgang nicht ändert.

Die Abb. 6.43 zeigt in einem  $T - p$ -Diagramm das Ergebnis der vollständigen Rechnung. Unterhalb der "Inversionskurve" kühlt das Gas ab, außerhalb erwärmt es sich.

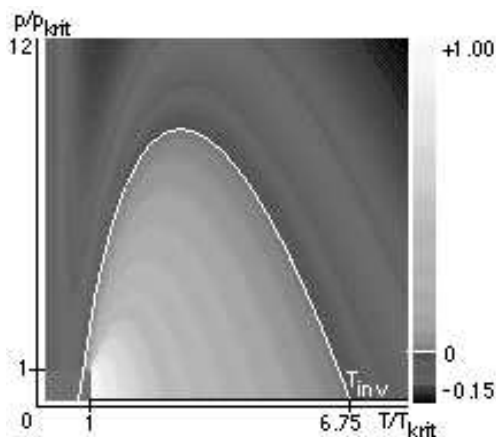


Abbildung 6.43: Inversionkurve im  $T - p$ -Diagramm. Unterhalb der parabolischen Linie kühlt sich das Gas beim Aus- bzw. Überströmen ab, oberhalb erwärmt es sich. Quelle: <http://www.fs-physik.uni-bonn.de/scripts/andere/thermo/joulethomson.html>

### Kühlung durch adiabatische Entmagnetisierung

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir nochmals auf die adiabatische Entmagnetisierung eingehen, die wie bei der Aufzählung verschiedener Kühlverfahren bereits genannt hatten. Mittlerweile ist der Begriff der Entropie eingeführt, so dass wir den Prozess genauer beschreiben können.

Elektronen wie viele Atomkerne haben einen Eigendrehimpuls (Spin), der zu einem magnetischen Moment  $\vec{\mu}$  führt. Diese Spins lassen sich durch ein äußeres Magnetfeld  $\vec{B}$  ausrichten, dabei ist die Energie durch  $E = \vec{\mu}\vec{B}$  gegeben.

Ohne äußeres Feld sind die Spins der einzelnen Elektronen bei hohen Temperaturen völlig ungeordnet, die Entropie ist hoch. Zu niedrigen Temperaturen hin richten sich die Spins immer besser aus, die Entropie sinkt und verschwindet für  $T \rightarrow 0$ . Bei endlichen Temperaturen lässt sich die Entropie auch durch Anlegen eines möglichst hohen Magnetfeldes erniedrigen (vgl. Abb. 6.44).

Man legt nun bei einer hohen Anfangstemperatur zunächst isotherm ein Magnetfeld  $B_1$  an, das viel höher ist als das Feld  $B_0$  ("1"  $\rightarrow$  "2").  $B_0$  selbst ist durch die Wechselwirkungen zwischen den Elektronen bzw. Atomkernen selbst vorgegeben und materialabhängig.

Anschließend wird die Probe thermisch von der Umgebung isoliert und das Magnetfeld langsam abgeschaltet. Bei diesem adiabatischen Prozess kühlen zunächst die Elektronen bzw. Kerne und nach einiger Zeit der gesamte Kristall ab. Die Entropie des Spinsystems

ist dabei über den Boltzmann-Faktor eine Funktion von  $\vec{\mu}\vec{B}/k_B T$ . Für den adiabatischen Abkühlvorgang "2"  $\rightarrow$  "3" ist  $S = const.$  und damit auch das Verhältnis  $B/T$ . Also ist  $T_{end}/T_{anf} = B_0/B_1$ .

Man kann mit der Entmagnetisierung von Kernspins Endtemperaturen im Bereich um  $1 \mu\text{K}$  erreichen, für Elektronen Werte um  $30 \mu\text{K}$ . Die Begrenzung kommt unter anderem dadurch zustande, dass unterhalb einer gewissen Temperatur sie Spins spontan in einen geordneten Zustand (z. B. Ferromagnetische Ordnung) übergehen und dann das Verfahren nicht mehr funktioniert.

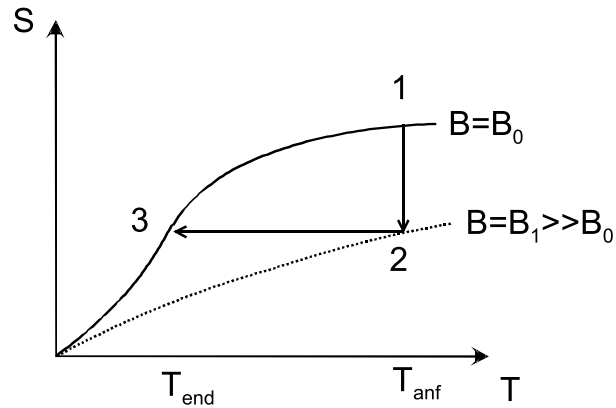


Abbildung 6.44: *Adiabatische Entmagnetisierung.*



## 6.12 Lösungen

Wir haben im letzten Abschnitt die Phasen fest/flüssig/gasförmig eines einkomponentigen Stoffes (z. B.  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CO}_2$ ) diskutiert. Jetzt gehen wir zu zweikomponentigen Systemen über, bei denen zwei unterschiedliche Substanzen gemischt sind.

Unter "Lösung" versteht man eine sehr feine (evtl. molekulare) Durchmischung zweier Substanzen. Dagegen bezeichnet ein "Gemenge" eine grobe Durchmischung.

Man charakterisiert Lösungen neben Variablen wie Druck, Temperatur, Volumen zusätzlich durch die **Konzentration**  $c$ , die beispielsweise durch die **Molarität** angegeben wird (d. h. wie viele Mol einer gelösten Substanz in 1 l Lösung sind).

### 6.12.1 Osmotischer Druck; Pfefferzelle

Eine Pfefferzelle (Abb. 6.45) ist ein Gefäß mit porösen Wänden, durch die Lösungsmittel (z. B.  $\text{H}_2\text{O}$ ) durchtreten kann. Dagegen ist diese Wand für den gelösten Stoff (z. B. Kochsalz) undurchlässig.

Würde man eine zunächst leere Pfefferzelle in ein Lösungsmittel (z. B. Wasser) stellen, so würde sie sich langsam füllen. Nach einiger Zeit wären die Flüssigkeitsspiegel innen und außen gleich hoch. Daran ändert sich auch nichts, wenn sich im Inneren der Zelle ein Gemenge befindet (z. B. eingefüllter Sand).

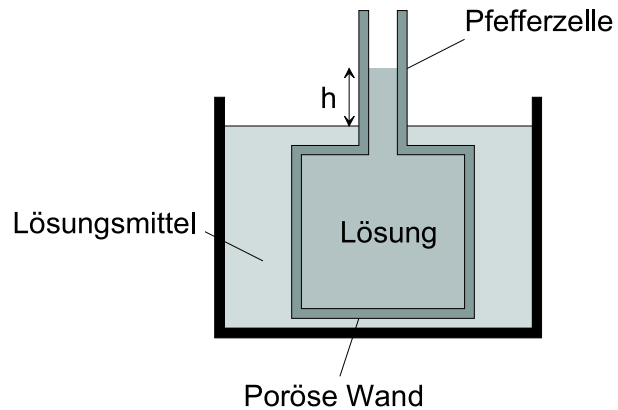


Abbildung 6.45: Schema einer Pfefferzelle

Füllt man dagegen einen löslichen Stoff (z. B. Kochsalz,  $\text{NaCl}$ ) in die Zelle, so lösen sich das Salz auf, die Moleküle (genauer:  $\text{Na}^+$  bzw.  $\text{Cl}^-$ -Ionen) bewegen sich relativ frei im Wasser und üben beispielsweise bei Stößen mit der Wand einen (Partial-)Druck auf diesen aus. Man kann die im Lösungsmittel gelösten Moleküle in guter Näherung durch eine ideale Gasgleichung beschreiben:

$$p_{\text{osm}}V = \nu RT \quad (\text{"Gesetz von van't Hoff"}) \quad (6.52)$$

Hierbei wird der durch die gelösten Moleküle ausgeübte Druck als "osmotischer Druck" bezeichnet. Er addiert zum Druck durch die Moleküle des Lösungsmittels.

Eine Konsequenz des osmotischen Drucks ist, dass die Grenzfläche gas/flüssig in der Pfefferzelle höher liegt als die des Lösungsmittels außerhalb. Die Höhendifferenz  $h$  ist gerade durch den zusätzlichen Druck in der Zelle, also den osmotischen Druck bestimmt. Es gilt:

$$\rho_{fl} \cdot g \cdot h = p_{\text{osm}}, \quad (6.53)$$

d. h. das Gewicht der Flüssigkeitssäule oberhalb der Grenzfläche des reinen Lösungsmittels kompensiert den osmotischen Druck.

Im Experiment sehen wir, dass die Pfefferzelle sich langsam mit Wasser füllt. Je mehr Salz im Wasser gelöst wird, desto höher steigt die Flüssigkeitssäule.

Der osmotische Druck ist auch dafür verantwortlich, dass Würste manchmal in kochendem Wasser platzen. Das in der Wurst vorhandene Salz durchdringt deren Haut nicht oder nur sehr langsam, während das Wasser schnell eindringen kann.

Sehr hohe Bäume benötigen den osmotischen Druck, um Wasser in die oberen Regionen zu transportieren. Eine reine Wassersäule könnte im Baum maximal 10 m hoch steigen, da dann der Druck durch die Wassersäule gleich dem Außendruck von 1 bar wird (1 m Wassersäule  $\approx 0.1$  bar). Die kalifornischen Mammutbäume schaffen es, bis zu 120 m hoch zu werden.

### 6.12.2 Dampfdrucksenkung

Eine Lösung hat einen niedrigeren Dampfdruck als das reine Lösungsmittel. Man kann sich den Effekt wiederum an Hand einer Pfefferzelle klarmachen (Abb. 6.46).

Die Pfefferzelle steht in einem abgeschlossenen Volumen. Im Gasvolumen bildet sich Wasserdampf, der nach einiger Zeit seinen Sättigungswert erreicht. Wir nehmen an, dass der gelöste Stoff einen vernachlässigbar geringen Dampfdruck hat und nicht zum Gesamtdruck über der Flüssigkeit beiträgt.

Jede der beiden Flüssigkeitsoberflächen, also sowohl die des Lösungsmittels im Außenraum als auch die der Lösung in der Pfefferzelle steht nach einiger Zeit im stationären Gleichgewicht, bei dem genauso viele Wassermoleküle die Flüssigkeit verlassen wie eintreten. Wäre das nicht der Fall, würde dies dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik widersprechen. Würden z. B. aus der Oberfläche in der Zelle mehr Wassermoleküle aus- als eintreten, so müsste aus dem Außenraum ständig Wasser in die Zelle nachströmen. Man könnte dann eine kleine Turbine in die Membran einbauen, die ständig Arbeit leistet.

Nun herrscht auf der Oberfläche außerhalb der Zelle der Druck  $p$ , auf der Oberfläche in der Höhe  $h$  aber ein geringerer Druck  $p - \Delta p$  (barometrische Höhenformel!). Die Druckdifferenz  $\Delta p$  ist gegeben durch

$$\Delta p = \rho_{\text{Dampf}} \cdot g \cdot h, \quad (6.54)$$

da in der Höhe  $h$  pro Flächeneinheit die Masse  $\rho_{\text{Dampf}} \cdot h$  weniger auf der Oberfläche lastet. Andererseits können wir  $h$  auch durch den osmotischen Druck ausdrücken:

$$\rho_{fl} \cdot g \cdot h = p_{\text{osm}} \quad \text{bzw.} \quad h = \frac{p_{\text{osm}}}{\rho_{fl} \cdot g} \quad (6.55)$$

Dies ergibt:

$$\Delta p = \frac{\rho_{\text{Dampf}}}{\rho_{fl}} \cdot p_{\text{osm}}. \quad (6.56)$$

Wir wollen jetzt noch den osmotischen Druck aus dieser Gleichung eliminieren.

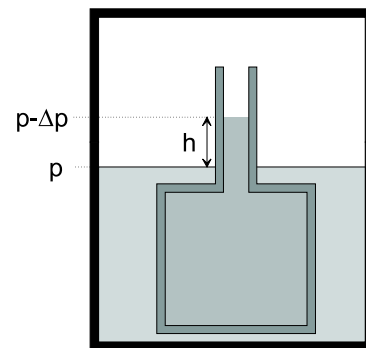


Abbildung 6.46: Zur Dampfdrucksenkung einer Lösung



Der gelöste Stoff in der Zelle wie der Dampf im Gasraum gehorchen einer idealen Gasgleichung. Die Temperatur soll in der Zelle die gleiche sein wie außerhalb. Dann gilt:

$$\frac{p_{\text{osm}}}{p_{\text{dampf}}} = \frac{\rho_{\text{gel}}}{\rho_{\text{fl}}} = \frac{\mu \cdot c}{\rho_{\text{fl}}}. \quad (6.57)$$

Hierbei haben wir mit  $\rho_{\text{gel}}$  die Dichte des gelösten Stoffes bezeichnet, mit  $\mu$  seine Masse pro Mol.

Damit erhalten wir:

$$\Delta p = p \frac{\mu}{\rho_{\text{fl}}} c \quad (\text{"Raoult'sches Gesetz"}). \quad (6.58)$$

Der Dampfdruck der Lösung erniedrigt sich also proportional zur Konzentration des gelösten Stoffes. Dies gilt, solange  $c$  nicht allzu groß wird. Andernfalls ist das Gesetz von van't Hoff nicht mehr erfüllt.

Wir demonstrieren die Dampfdrucksenkung an Hand einer Lösung von Magnesiumchlorid in Wasser. Der Aufbau ist in Abb. 6.47 gezeigt.

Zwei Glaskolben sind durch ein mit Quecksilber gefülltes U-Rohr (Hg-Barometer) miteinander verbunden. Parallel zum U-Rohr verläuft ein zweites Rohr, das durch ein Ventil verschlossen werden kann. Bei offenem Ventil ist der Druck über den beiden Kolben der gleiche, die beiden Schenkel des U-Rohrs sind gleich hoch. Schließt man das Ventil, so stellt sich auf der linken Seite des U-Rohrs der Sättigungsdampfdruck des reinen Wassers ein, auf der rechten Seite der Sättigungsdampfdruck der Lösung. Das Quecksilber steht im linken Schenkel des U-Rohrs höher als im rechten. Die Höhendifferenz der beiden Hg-Oberflächen ergibt direkt den Druckunterschied und damit die Dampfdrucksenkung  $\Delta p$  in Torr.

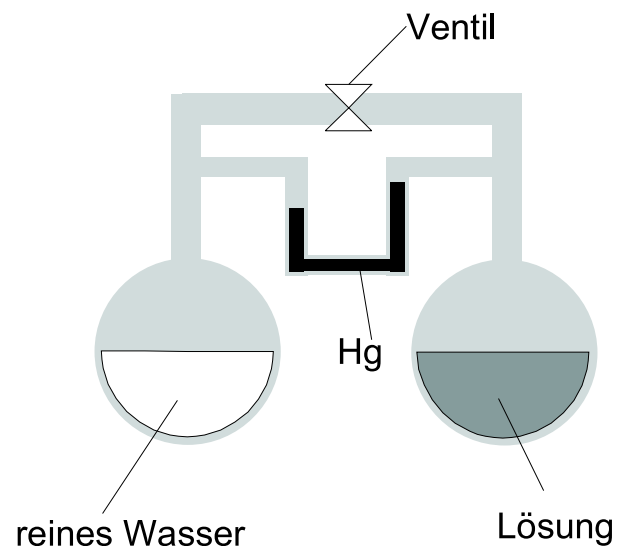


Abbildung 6.47: Messaufbau zur Demonstration der Dampfdrucksenkung in der Lösung

### 6.12.3 Gefrierpunktserniedrigung und Siedepunktserhöhung

Die Dampfdrucksenkung führt zu zwei Konsequenzen:

- Der Siedepunkt einer Lösung ist gegenüber dem Siedepunkt des reinen Lösungsmittels erhöht (**"Siedepunktserhöhung"**).
- Der Gefrierpunkt der Lösung ist gegenüber dem Gefrierpunkt der reinen Lösungsmittels erniedrigt (**"Gefrierpunktserniedrigung"**).

Die Gefrierpunktserniedrigung erlaubt, durch "Salzen" die Straßen im Winter eisfrei u halten.

### Siedepunktserhöhung

Die Abb. 6.48 zeigt qualitativ, wie die Siedepunktserhöhung zustande kommt. Die Dampfdruckerniedrigung der Lösung verlangt, dass deren Dampfdruckkurve gegenüber der Dampfdruckkurve des reinen Lösungsmittels im  $p-T$ -Diagramm bei gegebener Temperatur nach "unten" verschoben ist. Bei vorgegebenem Druck ist dann die Siedetemperatur um  $\Delta T_s$  erhöht.

Quantitativ kann dies leicht mittels des Ausdrucks  $p_D = p_0 \cdot e^{-\Lambda/RT_s}$  für den Sättigungsdampfdruck abgeleitet werden. Differenzieren nach  $T_s$  ergibt:

$$\frac{dp_D}{dT_s} = p_0 \cdot e^{-\Lambda/RT_s} \cdot \frac{\Lambda}{RT_s^2} = p_D \frac{\Lambda}{RT_s^2} \quad (6.59)$$

mit  $\frac{dp_D}{dT_s} \rightarrow \frac{\Delta p_D}{\Delta T_s}$  ergibt sich:

$$\frac{\Delta p_D}{p_D} = \frac{\Lambda}{RT_s^2} \cdot \Delta T_s = \frac{\mu_0 \lambda}{RT_s^2} \cdot T_s \quad (6.60)$$

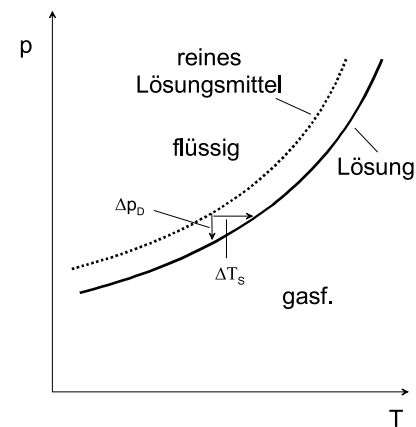


Abbildung 6.48: Siedepunktserhöhung und Dampfdruckerniedrigung

Nach dem Raoult'schen Gesetz ist:  $\Delta p_D = p_D \frac{\mu}{\rho_{fl}} c$

und damit:  $\Delta T_s = \frac{RT_s^2}{\lambda \rho_{fl}} c = \frac{\mu RT_s^2}{\Lambda \rho_{fl}} c$

Die Siedepunktserhöhung ist also proportional zu  $c$  und hängt quadratisch von  $T_s$  ab. Die Abhängigkeit von  $\mu$  erlaubt ausserdem, Molgewichte durch Messung der Siedepunktserhöhung zu bestimmen.

### Gefrierpunktserniedrigung

Man kann für die Gefrierpunktserniedrigung ganz analog zur Siedepunktserhöhung finden:

$$\Delta T_g = -\frac{RT_g^2}{\lambda' \rho_{fl}} c \quad (6.61)$$

Wir wollen diesen Ausdruck hier nicht im Detail herleiten. Qualitativ wird die Siedepunktserniedrigung aber aus Abb. 6.49 klar, die die Schmelzlinie zusammen mit der Siedelinie zeigt.

Man beachte weiter, dass von der Warte des gelösten Stoffes aus zumindest der Schmelzpunkt erhöht wurde. Der Stoff war ja in reiner Form bei Zimmertemperatur fest und wurde durch Zugabe von Wasser flüssig. Siedepunktserniedrigung und Dampfdruckerhöhung gelten also nur für nicht allzu große Konzentrationen  $c$ .

Lösungen zweier Materialien können sich bei hohen Konzentrationen sehr kompliziert verhalten. Die Abb. 6.50 zeigt einige Beispiele, bei denen die beiden Flüssigphasen z. T. gemischt und zum Teil entmischt sind. Der Bereich, in dem getrennte Phasen vorliegen, wird "Mischungslücke" genannt. Am linken bzw. rechten Rand liegen die beiden Substanzen jeweils in reiner Form vor.



Für das Zeitintervall  $\Delta t$  wählen wir die Stoßzeit  $\tau$ , über die die Teilchen im Mittel zwischen zwei Stößen frei fliegen.

In diesem Zeitintervall gelangen vor allem solche Teilchen durch die Öffnung (bei  $x = x_0$ ), die sich etwa eine Streulänge  $l$  von der Trennwand entfernt befinden. Diese Teilchen legen in der Stoßzeit  $\tau$  gerade die Strecke  $l = v_{th} \cdot t$  zurück. Hier ist  $v_{th}$  die mittlere thermische Geschwindigkeit, die gleich der Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat der Gasmoleküle definiert war. Es war:  $v_{th} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ , wobei  $m$  die Masse eines Moleküls ist. Die Streulänge  $l$  sei klein gegen alle anderen Dimensionen des Systems (Durchmesser der Öffnung, Abmessungen des Behälters). Die Bewegung der Teilchen wird dann durch Stöße untereinander dominiert. Die Teilchen **diffundieren** durch die Öffnung.

Die Teilchendichte bei  $x = x_0 - l$  sei  $n(x - l)$ . Würden alle Teilchen geradlinig auf die Öffnung zufliegen, so würden sich  $n(x - l) \cdot A \cdot v_{th} \cdot l$  Moleküle in der Zeit  $\Delta t = \tau$  durch die Öffnung bewegen. Tatsächlich bewegen sich im Mittel aber nur  $1/6$  dieser Moleküle in Richtung  $+x$ .

Für  $N_{1 \rightarrow 2}$  ergibt sich also:

$$N_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{6} A \cdot n(x_0 - l) \cdot v_{th} \cdot \Delta t. \quad (6.62a)$$

Ganz analog finden wir:

$$N_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} A \cdot n(x_0 + l) \cdot v_{th} \cdot \Delta t. \quad (6.62b)$$

Streng genommen können sich  $\tau$ ,  $v_{th}$  und  $l$  rechts und links der Öffnung unterscheiden. Wir nehmen an dieser Stelle aber an, dass diese Unterschiede gering sind, d. h. dass bereits viele Teilchen durch die Öffnung getreten sind.

Die Differenz ergibt:

$$\Delta N = N_{1 \rightarrow 2} - N_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} \cdot A [n(x_0 - l) - n(x_0 + l)] \cdot v_{th} \cdot \Delta t \quad (6.63)$$

Da wir annehmen, dass sich die Teilchendichten im Abstand  $\pm l$  von der Öffnung nicht allzusehr unterscheiden, können wir  $n(x_0 - l)$  Taylor-entwickeln:

$$n(x_0 - l) \approx n(x_0) - \frac{dn}{dx} l \quad (6.64a)$$

Analog finden wir für  $n(x_0 + l)$ :

$$n(x_0 + l) \approx n(x_0) + \frac{dn}{dx} l \quad (6.64b)$$

und damit:

$$\Delta N = N_{1 \rightarrow 2} - N_{2 \rightarrow 1} = -\frac{1}{6} \cdot A \cdot 2 \cdot \frac{dn}{dx} \cdot v_{th} \cdot \Delta t = -\frac{1}{3} A \cdot \frac{dn}{dx} \cdot v_{th} \cdot \Delta t \quad (6.65)$$

oder

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -A \cdot D \cdot \frac{dn}{dx}. \quad (6.66)$$

$D = \frac{1}{3}v_{th}l$  ist die **Diffusionskonstante**. Sie hängt über  $v_{th}$  von der Temperatur und der Teilchenmasse ab, sowie über  $l$  von der Dichte der Teilchen (je enger die Teilchen zusammen sind, desto kürzer wird die Zeit zwischen zwei Stößen).

Führt man den Teilchenstrom  $J = \frac{\Delta N}{\Delta t}$  ein (d. h. die Zahl der Teilchen, die pro Zeit durch die Öffnung "strömen"), sowie die Stromdichte  $j = J/A$ , so erhalten wir:

$$j = -D \cdot \frac{dn}{dx} \quad \mathbf{1. \text{ Fick'sches Gesetz.}} \quad (6.67)$$

Wir haben hier angenommen, dass die Gasmoleküle nur in  $x$ -Richtung diffundieren.

Bei der Diffusion in drei Dimensionen erweitert sich dies zu:  $\vec{j} = -D \cdot \text{grad}(n)$ .

Das 2. Fick'sche Gesetz beschreibt die zeitliche Änderung der Teilchenzahl in einem kleinen Teilvolumen  $\Delta V$ . Bei Bewegung allein in  $x$ -Richtung ist  $dV$  gegeben durch  $A \cdot dx$ . Der linke Rand des Volumenelements befinde sich bei  $x$ , der rechte bei  $x + dx$ . Von links strömen  $j(x)$  Teilchen pro Zeiteinheit in  $dV$  hinein, an der rechten Begrenzung  $J(x + dx)$  Teilchen wieder heraus. Die zeitliche Änderung der Teilchenzahl in  $dV$  ist also:  $\frac{dN}{dt} = J(x) - J(x + dx)$ . Wir teilen durch  $dV = A \cdot dx$  und erhalten:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{j(x) - j(x + dx)}{dx} = -\frac{dj}{dx} \quad \mathbf{2. \text{ Fick'sches Gesetz}} \quad (6.68)$$

In 3D müssen wir berücksichtigen, dass aus allen Flächen unseres (würfelförmigen) Volumenelements  $dV$  Teilchen aus- bzw. eintreten. Es gilt dann:

$$\frac{dn}{dt} = -\left(\frac{dj_x}{dx} + \frac{dj_y}{dy} + \frac{dj_z}{dz}\right) \equiv \text{div} \vec{j} \quad (6.69)$$

Mit "div" wird die "Divergenz" bezeichnet, die Sie im Sommersemester noch ausführlich benutzen werden.

Experimentell demonstrieren wir die Diffusion dadurch, dass wir Wasserstoff in ein mit Luft gefülltes Tongefäß eindiffundieren lassen. Der Druck im Gefäß wächst zunächst stark an und fällt dann wieder ab. Quantitativ könnte man diesen Prozess mit Hilfe der Fick'schen Gleichungen berechnen. Der Prozess ist aber auch qualitativ einsichtig:

Die  $\text{H}_2$ -Moleküle haben eine weit höhere thermische Geschwindigkeit und damit Diffusionskonstante als die sich im Gefäß befindende Luft. Die  $\text{H}_2$ -Moleküle diffundieren schneller ein als die Luftmoleküle entweichen können. Der Druck im Gefäß wächst an. Nach einiger Zeit stellt sich aber wiederum ein Druckausgleich ein.

## Wärmeleitung in Gasen

Ganz analog wie die Diffusion können wir die Wärmeleitung von Gasen behandeln. Hierzu nehmen wir an, ein geschlossenes langes Rohr sei mit Gas gefüllt und werde auf einer Seite auf die Temperatur  $T_1$  erhitzt. Die Temperatur der anderen Seite sei  $T_2$ . Die Gasmoleküle nahe der erhitzten Stelle haben jetzt eine höhere mittlere kinetische Energie und Temperatur als die anderen. Diese Moleküle werden sich jetzt durch den Stab bewegen und ihre kinetische Energie allmählich an die anderen Moleküle abgeben. Der Prozess und auch

der weitere Rechenweg ist völlig analog zur Diffusion. Wir fragen jetzt nach der Wärmeenergie, die die Elektronen beim Durchtritt durch eine Fläche  $A$  bei  $x = x_0$  abgeben bzw. aufnehmen.

Man findet:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{1}{6} \cdot A \cdot v_{th} \cdot 2l \cdot n(x) \cdot \frac{dE}{dx}. \quad (6.70)$$

Mit  $E = \frac{1}{2} \tilde{f} k_B T$  folgt hieraus:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{1}{6} A v_{th} 2l \cdot n(x) \frac{dU}{dx} = \frac{n}{6} A v_{th} l \cdot n(x) \tilde{f} k_B \frac{dT}{dx} = -\lambda_w A \frac{dT}{dx} \quad (6.71)$$

mit der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_w = \frac{1}{6} \tilde{f} k_B n v_{th} l$ . Führt man hier noch die Wärmekapazität pro Volumeneinheit  $C = \frac{\tilde{f}}{2} k_B n$  ein, so ergibt sich:

$$\lambda_w = \frac{1}{3} C v_{th} l \quad (6.72)$$

Mit der Definition eines Wärmestroms  $J_q = \Delta Q / \Delta t$  bzw. einer Wärmestromdichte  $j_q = J_q / A$  erhält man:

$$j_q = -\lambda_w \frac{dT}{dx} \quad (6.73)$$

bzw. in 3D:  $\vec{j}_q = -\lambda_w \text{grad} T$ .

## Wärmeleitung in Festkörpern

In elektrisch isolierenden Festkörpern erfolgt die Wärmeleitung über die Schwingungen des Kristallgitters. Nach den Gesetzen der Quantenmechanik zeigt sich, dass man diesen Schwingungen Quanten (die "Phononen") zuordnen kann, ähnlich wie die Photonen die Quanten des Lichts darstellen. Diese Phononen lassen sich ihrerseits als Gas behandeln, so dass man wiederum ähnliche Gesetze der Wärmeleitung erhält wie im Fall der Gase.

Bei Metallen können sich Elektronen frei bewegen. Die Wärmeausbreitung geschieht z. T. über die Phononen, zum überwiegenden Teil aber durch die Elektronen, die sich extrem schnell (bis zu einigen % der Lichtgeschwindigkeit) durch das Metall bewegen können. Die Wärmeleitfähigkeit von Metallen ist daher meist sehr hoch.

Im stationären Gleichgewicht (ein Ende eines Metallstabs der Länge  $L$  wird auf der Temperatur  $T_1$  gehalten, das andere auf  $T_2$ ) variiert Ändert sich die Temperatur praktisch linear über den Stab. Es gilt dann:  $j_q = -\lambda_w \frac{T_2 - T_1}{L}$ . Wir demonstrieren diesen linearen Verlauf an einem Cu-Stab, der sich im Vakuum befindet.

Tabelle 6.9 vergleicht die Wärmeleitfähigkeit einiger Substanzen bei 300 K,

Offensichtlich sind Metalle die besten Wärmeleiter. Die meisten Isolatoren, Gase und Flüssigkeiten leiten die Wärme dagegen deutlich schlechter.

# Kapitel 7

## Schwingungen und Wellen

### 7.1 Überlagerung von Schwingungen, Fourier Zerlegung

Im Abschnitt über die Bewegungen einzelner Teilchen haben wir uns sehr intensiv mit den **Harmonischen Schwingungen** beschäftigt, die auftraten, wenn einzelne Teilchen kleine Schwingungen um die Position ausführten, bei der das Potenzial ein Minimum besitzt. In diesem Fall ergibt sich in erster Näherung eine Rückstellkraft, die linear mit der Auslenkung  $x$  der Masse  $m$  aus dem Punkt minimaler potenzieller Energie anwächst. Diese führte zu einer Newtonschen Bewegungsgleichung, die auf die Form

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\frac{K}{m}x(t), \quad (7.1)$$

gebracht werden konnte. Dabei steht  $K$  für die Stärke der Rückstellkraft. Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung besitzt zwei voneinander unabhängige Lösungen

$$x_1(t) = \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}},$$

sodass man die allgemeine Lösung schreiben kann in der Form

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t). \quad (7.2)$$

Die Konstanten  $A$  und  $B$  können z.B. durch die Anfangsbedingungen  $x(t=0)$  und  $\dot{x}(t=0)$  festgelegt werden. Alternativ zu den Lösungen  $\cos(\omega t)$  und  $\sin(\omega t)$  kann man auch die komplexwertigen Exponentialfunktionen als unabhängige Lösungen heranziehen und die allgemeine Lösung darstellen durch

$$x(t) = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}, \quad (7.3)$$

wobei die komplexen Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  so zu wählen sind, dass die reellwertigen Anfangsbedingungen reproduziert werden. Wir bezeichnen solche Bewegungen, bei denen die Auslenkungen mit einer reinen Kosinus- oder Sinusfunktion beschrieben werden als Harmonische Schwingungen (siehe Abb. 7.1). Diese Bezeichnung gilt auch, wenn andere

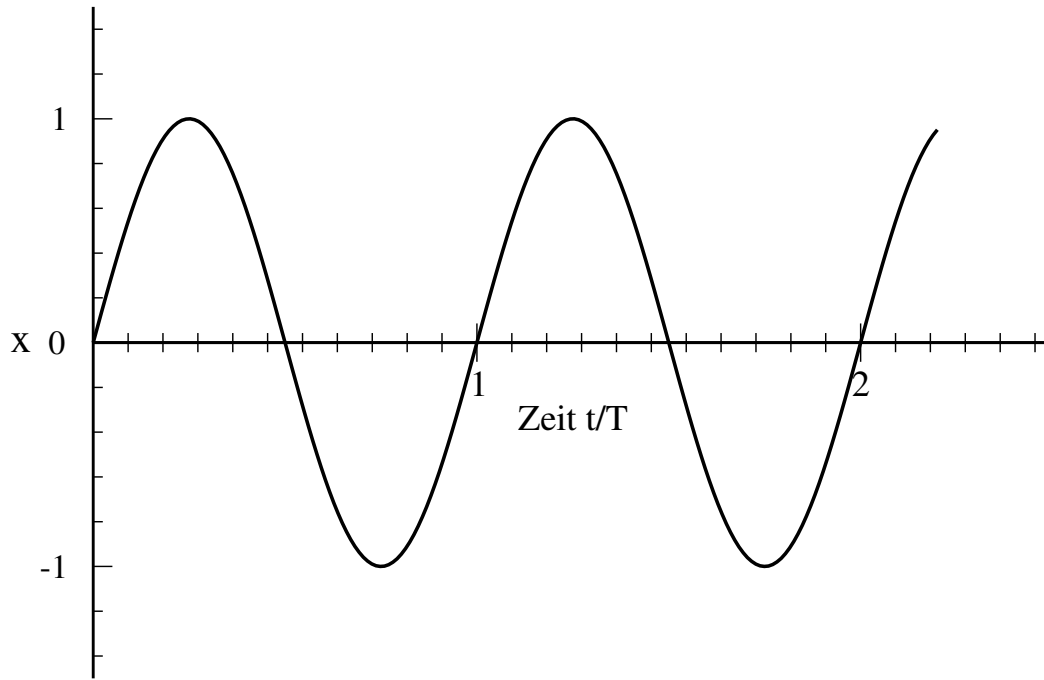


Abbildung 7.1: *Graphische Darstellung einer Harmonischen Schwingung*

physikalische Größen sich so verhalten, dass sie als Funktion der Zeit mit einer Kosinus- oder Sinusfunktion mit einer festen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  beschrieben werden. Als ein Beispiel für solche Harmonische Schwingungen wollen wir an dieser Stelle den Schall (hier ändert sich der Druck als Funktion der Zeit) und elektromagnetische Schwingungen, bei denen sich unter anderem die Stärke des elektrischen Feldes als Funktion der Zeit ändert, erwähnen. Weitere Beispiele werden wir später in diesem Kapitel betrachten.

Wir können die Schwingung (7.3) auch umschreiben auf die Form

$$x(t) = a \operatorname{Real} (e^{i(\omega t + \delta)}) = a \cos(\omega t + \delta) \quad (7.4)$$

Eine solche Harmonische Schwingung ist also definiert durch die Amplitude  $a$  die Phasenverschiebung  $\delta$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Diese Winkelgeschwindigkeit drückt man auch häufig aus durch die Frequenz  $\nu$  oder die Schwingungsdauer  $T$ , das ist die Zeit, die verstreicht bis das Argument der Kosinusfunktion eine volle Periode  $2\pi$  durchlaufen hat. Diese Größen sind zueinander definiert durch

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (7.5)$$

Was ergibt sich, wenn man mehrere Harmonische Schwingungen aufaddiert, man nennt dies auch eine Überlagerung von Schwingungen. Wir wollen dazu zunächst den Fall betrachten, dass wir nur zwei Schwingungen mit gleicher Amplitude  $a$  und 2 leicht unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_0 - \delta\omega$  bzw.  $\omega_0 + \delta\omega$  haben. Die Überlagerung berechnet sich am leichtesten durch Aufaddieren der Schwingungen und ergibt

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos((\omega_0 - \delta\omega)t) + a \cos((\omega_0 + \delta\omega)t) \\ &= 2a \sin(\delta\omega t) \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (7.6)$$



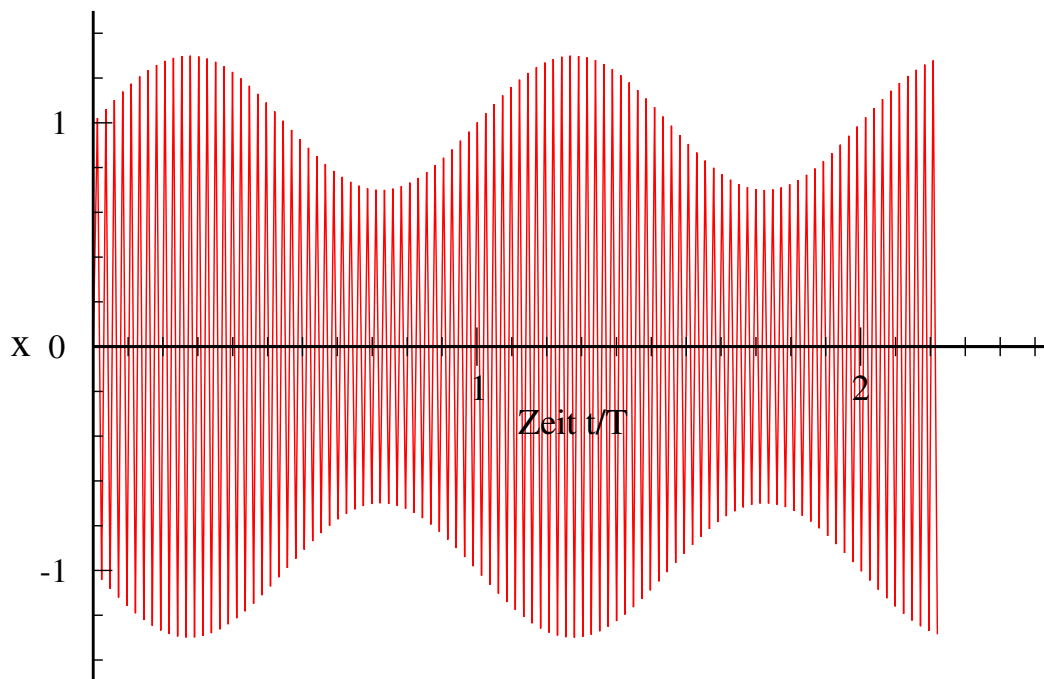


Abbildung 7.2: *Grundschiwingung mit Amplitudenmodulation.*

Dies entspricht also einer Schwingung der Grundwinkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  deren Amplitude mit der Zeit variiert und zwar mit einer Winkelgeschwindigkeit von  $\delta\omega$ , die sehr viel kleiner sein kann als  $\omega_0$ . Man spricht von einer Schwebung.

Eine Grundschiwingung mit der Trägerfrequenz  $\nu_0 = \omega_0/2\pi$  und einer Amplitude, die mit einer geringeren Frequenz moduliert ist, ist in Abb. 7.2 dargestellt. Solche amplitudenmodulierte Schwingungen ergeben sich durch die Überlagerung von Schwingungen mit leicht unterschiedlichen Frequenzen. Ein Anwendungsbeispiel für solche Schwingungsüberlagerungen findet man etwa in der Übertragung von Schallwellen mit Radiowellen. Die Trägerfrequenz  $\nu_0$  für eine Übertragung im Ultra - Kurz - Wellen (UKW) Bereich liegt z.B. bei 94 MHz, also 94 Millionen Schwingungen des elektromagnetischen Feldes pro Sekunde. Hörbare Schallwellen haben eine Frequenz  $\delta\nu$  von 10 Hz bis etwa 20 KHz. Zur Übertragung solcher Schallwellen benötigt man also Überlagerungen von Radiowellen mit  $\nu = \nu_0 \pm \delta\nu$ , also nicht nur eine einzige Frequenz sonder ein ganzes Frequenzband.

### 7.1.1 Fourier Reihen

Nun beobachtet man aber in der Natur sehr viele verschiedene periodische Vorgänge und zwar nicht nur solche, die durch eine Harmonische Schwingung dargestellt werden. Wir werden im folgenden sehen, dass sich solche periodischen Vorgänge stets durch eine Überlagerung von Harmonischen Schwingungen darstellen lassen. Man nennt diese Darstellung einer periodischen Funktion  $f(x)$  die **Fourier Reihe** dieser Funktion.

Um diese Fourier Reihe zu spezifizieren, definieren wir zunächst einmal, was wir unter einer periodischen Funktion  $f$  verstehen. Wir betrachten dazu eine reellwertige Funktion  $f$  einer Variablen  $x$ , die im Intervall  $-L \leq x \leq L$  definiert sein soll mit der Nebenbedingung,

dass  $f(-L) = f(L)$ . Die Länge des Definitionsintervalls,  $2L$ , heisst die Periodenlänge der Funktion. Eine solche Funktion kann dann periodisch ergänzt werden für beliebige Argumente durch die Definition

$$f(x) = f(x + 2nL) \quad \text{für } -L \leq x \leq L \quad \text{und } n \text{ eine ganze Zahl.}$$

Die Fourier Reihe zur Darstellung dieser Funktion lässt sich dann schreiben in der Form

$$f(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2L}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{L}} \cos(k_n x) + b_n \frac{1}{\sqrt{L}} \sin(k_n x). \quad (7.7)$$

Dabei sind die  $a_n$  und  $b_n$  Koeffizienten, also Zahlen, die für die Funktion  $f(x)$  charakteristisch sind und über deren Bestimmung noch zu reden sein wird. Die Wellenzahlen  $k_n$  sind definiert durch

$$k_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (7.8)$$

Damit sind die Funktionen  $\cos(k_n x)$  und  $\sin(k_n x)$  periodische Funktionen auf dem Intervall  $[-L, L]$ . Die Gleichung (7.7) sagt aus, dass jede reellwertige periodische Funktion  $f$  durch die entsprechenden periodischen Kosinus- und Sinusfunktionen dargestellt werden kann. Diese periodischen Funktionen bilden nämlich einen Vektorraum. Dies bedeutet zunächst einmal, dass jede Überlagerung von periodischen Funktionen  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  in der Form

$$f(x) = a f_1(x) + b f_2(x),$$

mit  $a$  und  $b$  beliebigen reellen Zahlen, selbst wieder ein Element dieses Vektorraumes ist, wovon man sich leicht überzeugen kann. Ausserdem sind die anderen Voraussetzungen für einen solchen Vektorraum erfüllt.<sup>1</sup>

Die Kosinus- und Sinusfunktionen bilden dann eine Basis in diesem Vektorraum und wir können (7.7) umschreiben auf die Form

$$|f\rangle = a_0 |e_0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n |e_n\rangle + b_n |\tilde{e}_n\rangle. \quad (7.9)$$

In dieser Schreibweise haben wir also die Elemente des Vektorraumes identifiziert mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow |f\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2L}} &\rightarrow |e_0\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{L}} \cos(k_n x) &\rightarrow |e_n\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{L}} \sin(k_n x) &\rightarrow |\tilde{e}_n\rangle, \end{aligned} \quad (7.10)$$

---

<sup>1</sup>siehe z.B. Kapitel II aus H. Fischer und H. Kaul: Mathematik für Physiker I, Teubner Taschenbücher, und die entsprechende Vorlesung Mathematik. Eine ausführliche Diskussion der Fourierreihe aus Sicht der Mathematik findet sich im Kapitel III Paragraph 6 von H. Fischer und H. Kaul: Mathematik für Physiker II.

eine Bezeichnung, die insbesondere in der Quantenmechanik benutzt wird und die wir deshalb an dieser Stelle auch schon mal einführen wollen. Diese Basiselemente  $|e_n\rangle$  und  $|\tilde{e}_n\rangle$  bilden eine Orthonormalbasis. Zum Nachweis müssen wir aber zunächst einmal definieren, wie das Skalarprodukt zweier Vektoren in diesem Vektorraum der periodischen Funktionen gebildet werden soll. Dazu führen wir die Definition ein, dass das Skalarprodukt zweier Elemente  $|f\rangle$  und  $|g\rangle$ , beziehungsweise der entsprechenden Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  berechnet werden soll durch

$$\langle f|g\rangle := \int_{-L}^L dx f(x) g(x). \quad (7.11)$$

Man muss sich davon überzeugen, dass diese Definitionen die Bedingungen an ein Skalarprodukt erfüllt. Insbesondere kann man mit dieser Definition den Abstand zweier Funktionen  $f$  und  $g$  definieren durch

$$\| |f\rangle - |g\rangle \| = \sqrt{\langle f-g|f-g\rangle}, \quad (7.12)$$

mit

$$\langle f-g|f-g\rangle = \int_{-L}^L dx (f(x) - g(x))^2 \quad (7.13)$$

Dieser Abstand ist also positiv definit und liefert nur dann den Wert Null, wenn die beiden Funktionen  $f$  und  $g$  identisch sind. Mit dieser Definition können wir uns nun davon überzeugen, dass die in (7.10) aufgeführten Elemente eine Orthonormalbasis darstellen. Es gilt also zum Beispiel

$$\begin{aligned} \langle e_i|e_j\rangle &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \cos(k_i x) \cos(k_j x) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{für } i = j > 0 \\ 2, & \text{für } i = j = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Entsprechende Beziehungen gelten für die anderen Elemente

$$\langle \tilde{e}_i|\tilde{e}_j\rangle \quad \text{und} \quad \langle e_i|\tilde{e}_j\rangle = 0.$$

Wir müssen nun noch die Entwicklungskoeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  des Elementes  $|f\rangle$  unseres Vektorraumes nach den Basiszuständen nach (7.9) bestimmen. Wie auch im einfachen Vektorraum der Ortsvektoren geschieht das dadurch, dass wir das Skalarprodukt der zu entwickelnden Funktion mit den einzelnen Elementen der Orthonormalbasis bilden. Es gilt also

$$\begin{aligned} a_0 &= \langle f|e_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L dx f(x), \\ a_n &= \langle f|e_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L dx f(x) \cos(k_n x), \\ b_n &= \langle f|\tilde{e}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L dx f(x) \sin(k_n x). \end{aligned} \quad (7.14)$$

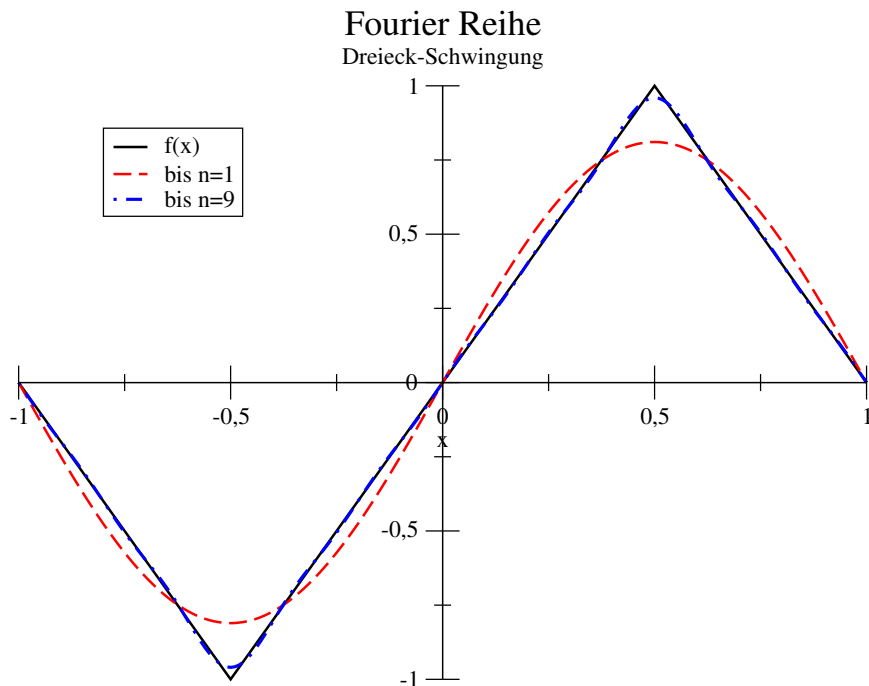


Abbildung 7.3: Dreiecksschwingung und deren Fourier Entwicklung nach (7.15)

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir das Intervall mit  $L = 1$  und darauf die Dreiecksfunktion, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -2(x+1) & \text{für } -1 \leq x \leq -0.5 \\ 2x & \text{für } -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ 2(1-x) & \text{für } 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

und dargestellt in Abb. 7.3. Für diese Funktion  $f(x)$  kann man nun z.B. mit der Hilfe von MAPLE die Entwicklungskoeffizienten nach (7.14) berechnen. Man findet

$$a_0 = a_n = 0 \tag{7.15}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{n+3}{2}} \frac{8}{n^2\pi^2} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{7.16}$$

Die Ergebnisse dieser Fourierreihe sind ebenfalls in Abb. 7.3 dargestellt. Wenn man die Fourierreihe (7.7) bei  $n = 1$  abbricht, wird die Funktion  $f(x)$  durch eine entsprechend normierte Sinusfunktion dargestellt, was einer sehr groben Näherung entspricht. Nimmt man aber alle Terme bis  $n = 9$  mit, so kann man das Ergebnis der Fourierreihe kaum noch von der exakten Funktion unterscheiden.

Als zweites Beispiel wollen wir die Fourierreihe für die Rechtecksschwingung betrachten. Diese Rechtecksschwingung ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -1 < x \leq 0 \\ 1 & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

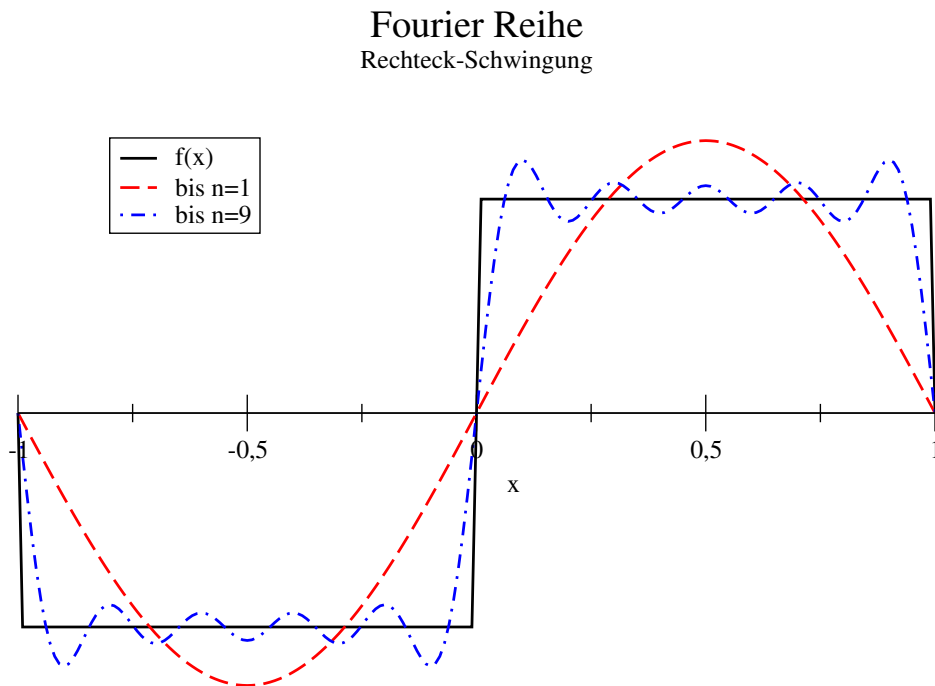


Abbildung 7.4: Rechtecksschwingung und deren Fourier Entwicklung nach (7.17)

und dargestellt in Abb. 7.4. Die Entwicklungskoeffizienten der Fourierreihe berechnen sich in diesem Fall zu

$$\begin{aligned}
 a_0 = a_n &= 0 \\
 b_n &= \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{7.17}$$

Auch in diesem Fall sind die Ergebnisse der Fourierreihe in Abb. 7.4 dargestellt. Durch die Mitnahme weiterer Terme in der Fourierreihe wird die Annäherung an die Rechteckschwingung weiter verbessert.

Der akustische Schall ist ein typisches Beispiel für eine periodische Schwingung. In diesem Fall ändert sich der Druck als Funktion der Zeit, wie wir im Laufe dieses Kapitels auch noch diskutieren werden. Die Frequenz dieser Schwingung ist charakteristisch für die Höhe des Tones. Liegt eine reine Sinusschwingung vor, so sprechen wir von einem Ton. Ein Klang, hingegen, ist ein streng periodisches Signal, das nicht die Form einer Sinuswelle hat. Die oben diskutierten Rechteck- und Dreieckschwingungen stellen also, wenn wir sie als Funktion der Druckabweichung in Abhängigkeit von der Zeit ansehen, einen solchen Klang dar. In diesem Sinne sind die Töne, die von Musikinstrumenten erzeugt werden als Klänge zu bezeichnen. Nachdem wir gesehen haben, dass wir solche streng periodischen Funktionen durch eine Fourierreihe darstellen können, wissen wir, dass auch ein Klang durch eine Überlagerung von Schwingungen mit Frequenzen  $n\omega_0$  dargestellt werden kann. Dabei ist  $\omega_0$  die Winkelfrequenz für die periodische Schwingung und  $n\omega_0$  mit einer ganzen Zahl  $n$  sind die Frequenzen der Obertöne.

### 7.1.2 Fouriertransformation

Als Ergänzung zur Diskussion der Fourierreihe sollen an dieser Stelle auch einige Bemerkungen zur Fouriertransformation einer beliebigen nicht notwendig periodischen Funktion gemacht werden. Dazu überlegen wir uns, dass man natürlich das Konzept des Vektorraumes von periodischen Funktionen auf einem Intervall  $[-L, L]$  erweitern kann auf komplexwertige Funktionen. In diesem Fall müssen wir lediglich die Definition des Skalarproduktes aus (7.11) erweitern für komplexwertige Funktionen zu

$$\langle f|g \rangle := \int_{-L}^L dx f^*(x) g(x), \quad (7.18)$$

wobei die Funktion  $f^*(x)$  gerade das komplex konjugierte Ergebnis zu  $f(x)$  liefert. Durch diese Definition ist gewährleistet, dass das Skalarprodukt  $\langle f|f \rangle$  einer Funktion mit sich selbst einen reellen, positiven Wert ergibt.

Für die periodischen komplexwertigen Funktionen sind die komplexwertigen Exponentialfunktionen eine geeignete Basis und wir können schreiben

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{ik_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n |e_n \rangle, \quad (7.19)$$

mit

$$k_n = \frac{n\pi}{L},$$

wie schon in (7.8). In (7.19) erstreckt sich die Summe aber auch auf negative Werte für  $n$ . Die Entwicklungskoeffizienten  $c_n$  in (7.8) sind komplexe Zahlen und berechnen sich durch

$$c_n = \langle e_n | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L dx e^{-ik_n x} f(x). \quad (7.20)$$

Wenn wir nun annehmen, dass die Grenzen des Intervalls anwachsen und schließlich gegen  $L \rightarrow \infty$  streben, so liegen die diskreten Wellenzahlen  $k_n$  mit wachsendem  $L$  immer enger zusammen. Aus der Summe über alle Wellenzahlen  $k_n$  wird dann ein Integral über kontinuierliche Wellenzahlen. Dies führt zur Fouriertransformation für eine beliebige Funktion  $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk c(k) e^{ikx}. \quad (7.21)$$

Die Gewichtsfunktion  $c(k)$  in dieser Darstellung der Funktion  $f(x)$  heisst auch die Fouriertransformierte Funktion zu  $f(x)$  und berechnet sich durch

$$c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}. \quad (7.22)$$

Wir werden auf diese Fouriertransformation einer Funktion später zurückkommen.

## 7.2 Wellengleichung

Unter Schwingungen verstehen wir die periodische Änderung einer physikalischen Größe als Funktion der Zeit. Dabei betrachten wir diese Größe aber stets am gleichen Ort. Wenn sich diese Änderung aber von einem Ort zu einem anderen ausbreitet, so sprechen wir von einer Welle. Als ein einfaches Modell für die Ausbreitung einer solchen Welle betrachten wir das Modell einer linearen Kette von Massenpunkten, bei denen die Nachbarpunkte jeweils über eine Feder miteinander verbunden sind (siehe Abb. 7.5). In der Ruhelage haben die Massenpunkte jeweils einen Abstand  $l$  voneinander, sodass sich der  $n$ -te Massenpunkt an der Position  $x_n = n * l$  befindet. Betrachten wir den Fall, dass die Massenpunkte aus dieser Ruhelage in Richtung auf die Nachbarn ausgelenkt werden können. Man spricht in diesem Fall von einer longitudinalen Auslenkung, beziehungsweise einer longitudinalen Schwingung, wenn diese Auslenkung sich periodisch mit der Zeit ändert. Bezeichnen wir diese Auslenkung mit  $w_n(t)$ , so befindet sich also der  $n$ -te Massenpunkt zur Zeit  $t$  an der Position

$$u_n(t) = x_n + w_n(t). \quad (7.23)$$

Der Abstand zwischen dem Massenpunkt  $n$  und dem Massenpunkt  $n - 1$  beträgt also dann  $u_n - u_{n-1}$ , was einer Auslenkung der verbindenden Feder aus der Ruhelage von  $u_n - u_{n-1} - l$  entspricht. Dadurch erfährt der Massenpunkt  $n$  eine Rückstellkraft vom Betrag  $D(u_n - u_{n-1} - l)$ , mit  $D$  der Federkonstanten der verbindenden Feder in Richtung auf den (linken) Nachbarn  $n - 1$ . Hinzu kommt eine Kraft durch die Verbindungsfeder mit dem Nachbarn  $n + 1$  von der Größe  $D(u_{n+1} - u_n - l)$ . Die Gesamtkraft auf den Massenpunkt  $n$  mit der Masse  $m$  ergibt sich aus der Summe dieser beiden Kräfte, was zu einer Newtonschen Bewegungsgleichung der Form

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -D(u_n - u_{n-1} - l) + D(u_{n+1} - u_n - l), \quad (7.24)$$

führt. Ersetzt man jetzt die Koordinaten der Massenpunkte  $u_n$  nach (7.23) durch die jeweiligen Auslenkungen  $w_n$  so führt dies zu

$$m \frac{d^2 w_n}{dt^2} = D(w_{n+1} - w_n) - D(w_n - w_{n-1}). \quad (7.25)$$

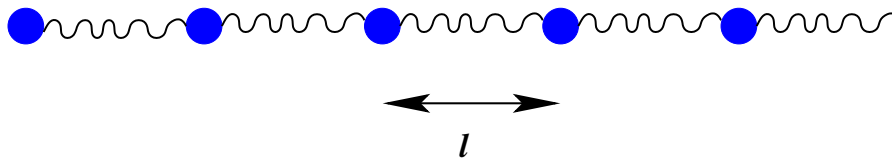


Abbildung 7.5: Schematische Darstellung einer Kette für eine longitudinale Schwingung

Im nächsten Schritt betrachten wir die Auslenkungen  $w_n$  als eine kontinuierliche Funktion vom Ort  $x$ , an dem sich der betreffende Massenpunkt befindet. Wir ersetzen also z.B.

$$\begin{aligned} w_n(t) &\rightarrow w(t, x) \\ w_{n+1}(t) &\rightarrow w(t, x + \Delta x). \end{aligned}$$

Damit können wir (7.25) umformen in

$$m \frac{d^2 w(t, x)}{dt^2} = D [w(t, x + \Delta x) - w(t, x)] - D [w(t, x) - w(t, x - \Delta x)]. \quad (7.26)$$

Für kleine Werte des Abstandes  $\Delta x$  benutzen wir die Taylor Entwicklung

$$w(t, x \pm \Delta x) \approx w(t, x) \pm \frac{dw(t, x)}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 w(t, x)}{dx^2} \Delta x^2. \quad (7.27)$$

Setzt man diese Entwicklungen in (7.26) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 w(t, x)}{dt^2} &= D \left[ \frac{dw(t, x)}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 w(t, x)}{dx^2} \Delta x^2 \right] + D \left[ -\frac{dw(t, x)}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 w(t, x)}{dx^2} \Delta x^2 \right] \\ &= D \Delta x^2 \frac{d^2 w(t, x)}{dx^2} \\ &= mc_L^2 \frac{d^2 w(t, x)}{dx^2}, \end{aligned} \quad (7.28)$$

wobei wir mit der Abkürzung

$$c_L^2 = \frac{D \Delta x^2}{m} \quad (7.29)$$

eine Konstante eingeführt haben, die vom Aufbau der Kette (Federkonstante  $D$ , Masse der Kettenglieder  $m$  und Abstand der Kettenglieder  $\Delta x$ ) abhängt. Damit können wir die Gleichung (7.28) umschreiben in eine homogene Differenzialgleichung der Ordnung 2 mit Ableitungen der gesuchten Funktion  $w(t, x)$  nach den Argumenten Zeit  $t$  und Ort  $x$

$$\frac{1}{c_L^2} \frac{d^2 w(t, x)}{dt^2} - \frac{d^2 w(t, x)}{dx^2} = 0. \quad (7.30)$$

Diese Differenzialgleichung hat den Namen **d'Alembert Gleichung** und ist benannt nach dem französischen Naturwissenschaftler und Philosophen Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-83).

Wir können uns nun leicht davon überzeugen, dass jede Funktion  $w(x, t)$ , die nicht unabhängig von den Parametern  $x$  und  $t$  abhängt sondern nur von der Kombination  $x - c_L t$ , also

$$w(x, t) = w_+(y) \quad \text{mit} \quad y = x - c_L t, \quad (7.31)$$

eine Lösung der d'Alembert Gleichung (7.30) liefert. Zum Beweis berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{dw(x, t)}{dt} &= \frac{dw_+(y)}{dy} \frac{dy}{dt} = -c_L \frac{dw_+}{dy} \\ \frac{d^2 w(x, t)}{dt^2} &= c_L^2 \frac{d^2 w_+}{dy^2} \\ \frac{dw(x, t)}{dx} &= \frac{dw_+(y)}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dw_+}{dy} \\ \frac{d^2 w(x, t)}{dx^2} &= \frac{d^2 w_+}{dy^2}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Ergebnisse für die Ableitungen in (7.30), so ergibt sich die Behauptung, dass die d'Alembert Gleichung für jede Lösung nach (7.31) erfüllt ist.



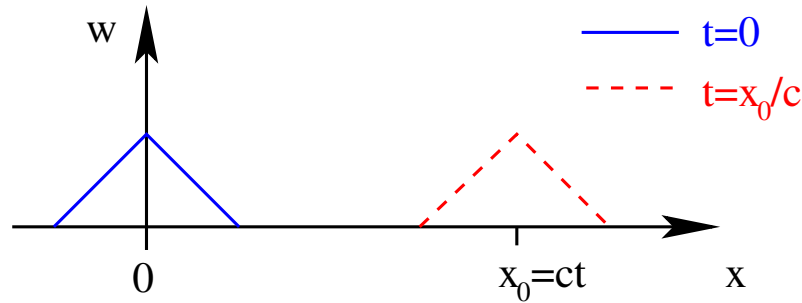


Abbildung 7.6: Beispiel für eine Lösung der d'Alembert Gleichung nach (7.31). Dargestellt ist die Funktion  $w(x, t)$  für  $t = 0$  und  $t = x_0/c_L$ .

Was bedeutet diese Lösung? Zur Veranschaulichung nehmen wir an, dass die Funktion  $w_+(y)$  durch die einfache Dreieckstruktur aus der Abb. 7.6 dargestellt ist. Zur Zeit  $t = 0$  gilt mit (7.31)  $y=x$  und die Funktion  $w(x, t = 0)$  hat also das Maximum bei  $x = y = 0$ . Zu einem späteren Zeitpunkt  $t > 0$  ist dieses Maximum an der Stelle  $x_0$ , die sich ergibt aus

$$y = 0 = x_0 - c_L t .$$

Dieses Maximum, entsprechendes gilt für die anderen charakteristischen Punkte der Dreieckstruktur, die durch  $w_+$  definiert ist, wandert also mit der Geschwindigkeit  $c_L$  in positiver Richtung der  $x$ -Achse (siehe Abb. 7.6). Die Konstante  $c_L$ , die ja über die Materialkonstanten der Kette gegeben ist (siehe (7.29)), ist also die Geschwindigkeit, mit der sich die Struktur ausbreitet. Man spricht auch von der Gruppengeschwindigkeit oder Phasengeschwindigkeit, 2 Geschwindigkeiten, die in diesem Zusammenhang identisch sind.

Neben der Lösung vom Typ (7.31) gibt es aber auch Lösungen der d'Alembert Gleichung vom Typ

$$w(x, t) = w_-(y) \quad \text{mit} \quad y = x + c_L t , \quad (7.32)$$

was man ganz analog zu den oben skizzierten Rechnungen beweisen kann. In diesem Fall bewegt sich die Struktur, die durch  $w_-$  beschrieben wird mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_L$  antiparallel zur  $x$ -Achse.

Da die d'Alembert Gleichung eine lineare Differenzialgleichung ist, ist aber auch jede Linearkombination der Lösungen vom Typ (7.31) und (7.32) eine Lösung. Eine solche Lösung hat also die Form

$$w(x, t) = \alpha w_+(x - c_L t) + \beta w_-(x + c_L t) .$$

Eine ganz spezielle Lösung der d'Alembert Gleichung erhalten wir, wenn wir die Funktion  $w_+$  in (7.31) in Form einer Sinusfunktion angeben, also

$$w(x, t) = A_0 \sin(k(x - c_L t)) . \quad (7.33)$$

Wir sprechen in diesem Fall von einer **Harmonischen Welle**. Es ist klar, dass diese Harmonische Welle eine Lösung der d'Alembert Gleichung ist.

Wenn wir diese Harmonische Welle zu einem festen Zeitpunkt betrachten, also z.B.  $t = 0$ , so ist  $w(x)$  als Funktion des Ortes eine Sinuswelle

$$w(x, t = 0) = A_0 \sin(kx) .$$

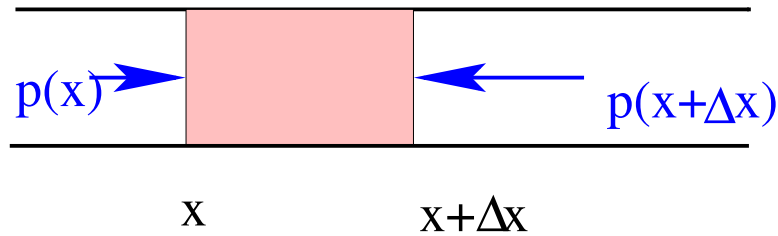


Abbildung 7.7: Schematische Darstellung einer Flöte zur Diskussion der Ausbreitungsgleichung für Schallwellen im Text

Diese Funktion durchläuft eine volle Periode zwischen  $x = 0$  und dem Wert  $x = \lambda$  mit

$$k\lambda = 2\pi \quad \text{also} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (7.34)$$

Man bezeichnet diese Länge  $\lambda$  als Wellenlänge der Harmonischen Welle mit der Wellenzahl  $k$ . Wir können die Harmonische Welle (7.33) aber auch bei festgehaltenem Wert von  $x$  (z.B.  $x = 0$ ) als Funktion der Zeit betrachten. Dies entspricht der Wahrnehmung der Welle für einen Beobachter, der sich an einem festen Ort aufhält. Dies führt zu

$$w(x = 0, t) = A_0 \sin(-kc_L t) = -A_0 \sin(kc_L t).$$

Wir haben es auch in diesem Fall mit einer Sinusschwingung zu tun. Die volle Periode wird durchlaufen zwischen  $t = 0$  und  $t = T$  mit

$$kc_L T = 2\pi \quad \text{also} \quad T = \frac{2\pi}{kc_L} = \frac{\lambda}{c_L}. \quad (7.35)$$

Diese Zeit  $T$  bezeichnet man auch als Periodendauer. Damit ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und die Frequenz  $\nu$  der Schwingung

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = kc_L. \quad (7.36)$$

In der Abbildung 7.5 und in der Diskussion, die zur d'Alembert Gleichung führte haben wir das Beispiel einer longitudinalen Schwingung der Massenpunkte und die Ausbreitung als Welle betrachtet. Charakteristisch für diese longitudinale Welle ist, dass die Bewegung der Massenpunkte in Ausbreitungsrichtung (bzw. antiparallel dazu) erfolgt. Führen die Massenpunkte Schwingungen aus, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle (d.h. der linearen Kette) verlaufen, spricht man von einer transversalen Welle. Auch die Ausbreitung einer solchen Schwingung führt auf die d'Alembert Gleichung. Allerdings werden die Materialkonstanten für eine solche transversale Schwingung in der Regel unterschiedlich sein zu denen der longitudinalen Schwingung (insbesondere die Stärke der Rückstellkraft  $D$ ). Dies bedeutet, dass man unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten für longitudinale Wellen,  $c_L$ , und transversale Wellen  $c_T$  im gleichen Material beobachtet.

Als einen weiteren Schwingungsvorgang, der sich in Form einer Welle ausbreitet, wollen wir den Schall betrachten. Dazu überlegen wir uns die Verteilung des Druckes im Inneren eines Zylinders, also z.B. einer Blockflöte. Dies ist schematisch in Abb. 7.7 dargestellt.

Wir betrachten dazu das Gas in einem Volumen  $\mathcal{V} = A\Delta x$ , mit  $A$  der Grundfläche des Zylinders und  $\Delta x$  der Ausdehnung dieses Volumens senkrecht zur Grundfläche, wie in Abb. 7.7 dargestellt. Auf dieses Gasvolumen wirkt an der Stelle  $x$  eine Kraft

$$F(x) = p(x)A$$

die sich aus dem Produkt Druck  $p(x)$  mal Fläche,  $A$ , ergibt. Die Kraft hat ein positives Vorzeichen, was andeuten soll, dass sie versucht, die Atome im Volumen  $\mathcal{V}$  parallel zur  $x$ -Achse zur verschieben. An der Stelle  $x + \Delta x$  wirkt die Kraft

$$F(x + \Delta x) = -p(x + \Delta x)A \approx -\left(p(x) + \frac{dp}{dx}\Delta x\right)A$$

wobei das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Kraft antiparallel zur  $x$ -Achse wirkt und die Taylorentwicklung für  $p(x + \Delta x)$  für kleine Werte von  $\Delta x$  gerechtfertigt ist. Die resultierende Kraft führt zu einer Beschleunigung der Atome im Volumen  $\mathcal{V}$  der Form

$$M \frac{dv}{dt} = -A \frac{dp}{dx} \Delta x. \quad (7.37)$$

Dabei ist  $v$  die Geschwindigkeit des Volumens und  $M$  die Masse, die sich mit der Masendichte  $\tilde{\rho}$  berechnet zu

$$M = \tilde{\rho}A\Delta x.$$

Damit ergibt sich aus (7.37) die Beziehung

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{dp}{dx}. \quad (7.38)$$

Die mittlere Geschwindigkeit  $v(x)$  mit der sich die Atome am linken Rand unseres Volumens im Mittel bewegen wird im Allgemeinen anders sein, als die Geschwindigkeit am rechten Rand  $v(x + \Delta x)$ . Es gilt in guter Näherung (Taylorentwicklung)

$$v(x + \Delta x) \approx v(x) + \frac{dv}{dx}\Delta x$$

Wenn sich die beiden Ränder mit unterschiedlicher Geschwindigkeit bewegen, so führt dies zu einer Änderung des Volumens

$$\Delta\mathcal{V} = A \frac{dv}{dx}\Delta x\Delta t = \mathcal{V} \frac{dv}{dx}\Delta t.$$

Im Grenzfall einer infinitesimalen Änderung der Zeit,  $\Delta t \rightarrow dt$ , kann man also schreiben

$$\frac{1}{\mathcal{V}}d\mathcal{V} = \frac{dv}{dx}dt. \quad (7.39)$$

Für die weiteren Rechnungen führen wir an dieser Stelle den Begriff der **Kompressibilität** ein und definieren ihn durch

$$\chi = -\frac{1}{\mathcal{V}} \frac{d\mathcal{V}}{dp}. \quad (7.40)$$

Die Kompressibilität  $\chi$  gibt also an, wie sehr sich das Volumen eines Materials ändert, wenn sich der auf das Volumen wirkende Druck  $p$  ändert. Damit die Kennziffer des Materials durch positive Zahlen angegeben werden kann ist in der Definition (7.40) ein Minuszeichen eingefügt. Der Faktor  $1/\mathcal{V}$  berücksichtigt, dass die Änderung eines Volumens  $d\mathcal{V}$  natürlich zunächst einmal proportional zum Volumen ist. Diese Definition der Kompressibilität kann man umformen in

$$dp = -\frac{1}{\chi} \frac{1}{\mathcal{V}} d\mathcal{V} = -\frac{1}{\chi} \frac{dv}{dx} dt, \quad (7.41)$$

wobei in der zweiten Gleichung die Beziehung (7.39) eingesetzt wurde. Daraus ergibt sich

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{\chi} \frac{dv}{dx}.$$

Leitet man diese Beziehung nach der Zeit ab, so ergibt sich

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = -\frac{1}{\chi} \frac{d}{dt} \frac{dv}{dx}. \quad (7.42)$$

Andererseits ergibt sich aus der Ableitung von (7.38) nach der Position  $x$

$$\frac{d}{dx} \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{d^2 p}{dx^2}. \quad (7.43)$$

Die beiden Gleichungen (7.42) und (7.43) können nun zusammengefügt werden zu

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{1}{\tilde{\rho}\chi} \frac{d^2 p}{dx^2} = c^2 \frac{d^2 p}{dx^2}. \quad (7.44)$$

Dies ist eine Differenzialgleichung vom Typ der d'Alembert Gleichung (7.30) zur Bestimmung des Drucks  $p$  als Funktion von Ort und Zeit. Die Eigenschaften der Lösungen dieser Gleichung haben wir bereits diskutiert und können deshalb daraus ablesen, dass sich Druckänderungen an einer Stelle  $x$  zur Zeit  $t$  ausbreiten mit der Geschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\rho}\chi}}. \quad (7.45)$$

Da wir die Druckänderungen mit akkustischem Schall identifizieren können, liefert diese Gleichung also einen Ausdruck für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schall in einem Medium mit der Massendichte  $\tilde{\rho}$  und der Kompressibilität  $\chi$ .

Als ein Beispiel betrachten wir die Schallausbreitung in einem Gas. Wenn wir dazu annehmen, dass die Kompressionen des Gases durch den Schalldruck so schnell vonstatten gehen, dass ein Austausch von Wärmeenergie unterdrückt wird, die Kompressionen und Dekompressionen also adiabatisch verlaufen, so gilt für die Beziehung zwischen Druck  $p$  und Volumen  $\mathcal{V}$  des Gases bei einem solchen adiabatischen Vorgang

$$p\mathcal{V}^\kappa = \alpha = \text{konst.} \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}, \quad (7.46)$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{d\mathcal{V}}{dp} = \frac{d}{dp} \left( \frac{\alpha}{p} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\mathcal{V}}{p}. \quad (7.47)$$

Setzt man diese Beziehung in den Ausdruck für die Kompressibilität (7.40) ein, so erhält man

$$\chi = \frac{1}{\kappa p},$$

und damit über die Beziehung (7.45) für die Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}. \quad (7.48)$$

Setzt man in diese Beziehung typische Werte für die uns umgebende Luft ein, also insbesondere  $\kappa = 7/5$  so ergibt sich ein Wert für die Schallgeschwindigkeit von  $c = 330$  Meter pro Sekunde, was sehr genau den Messergebnissen entspricht.

Bei dieser Berechnung der Schallgeschwindigkeit sind wir davon ausgegangen, dass die Kompressionen des Gases adiabatisch erfolgen (siehe (7.46)). Hätten wir stattdessen angenommen, dass diese Kompressionen so langsam erfolgen, dass sich der Druck isotherm einstellt, so hätten wir statt (7.46) die isotherme Beziehung  $p\mathcal{V} = \text{konstant}$  benutzt. Die weiteren Rechnungen zur Bestimmung von  $c$  sind analog zu den Gleichungen (7.46) - (7.47), wir müssen lediglich den adiabatischen Exponenten  $\kappa$  durch 1 ersetzen. Dies führt zu einer Vorhersage für die Schallgeschwindigkeit von  $c = 280$  Meter pro Sekunde, was sehr viel schlechter mit dem experimentellen Wert übereinstimmt als die Abschätzung von (7.48). Aus diesem Vergleich zwischen Theorie und Experiment können wir also schliessen, dass die Kompressionen der Luft bei der Ausbreitung von Schall adiabatisch ablaufen.

Zum Ende dieses Abschnittes wollen wir uns die Frage stellen: Welche Energie steckt in einer Welle. Als erstes Beispiel betrachten wir wieder die lineare Kette aus Massenpunkten für die Ausbreitung von longitudinalen oder transversalen Wellen. Eine harmonische Welle wird beschrieben durch die Form

$$A(x, t) = A_0 \sin(kx - \omega t), \quad (7.49)$$

und beschreibt die Auslenkung aus der Ruhelage für den Massenpunkt an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$ . Die Amplitude  $A_0$  steht für die maximale Auslenkung. Beschränken wir uns auf einen Massenpunkt etwa am Ort  $x = 0$ , so gilt für die Auslenkungsamplitude dieses Massenpunktes

$$A(t) = A_0 \sin(-\omega t)$$

und damit für seine Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{dA}{dt} = -A_0\omega \cos(-\omega t) = -v_0 \cos(-\omega t).$$

Die Energie dieses Massenpunktes wechselt ständig zwischen kinetischer und potenzieller Energie. Zur Zeit  $t = 0$  ist die Auslenkung und damit die potenzielle Energie gleich null, die Energie entspricht also der kinetischen Energie

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2.$$

Daraus ergibt sich eine Energiedichte, also Energie pro Volumen, von

$$\rho_E = \frac{1}{2}\tilde{\rho}\omega^2 A_0^2 \quad (7.50)$$

wobei  $\tilde{\rho}$  wieder für die Massendichte steht. Als nächstes betrachten wir nun die Intensität der Welle, das ist die Energie, die diese Welle pro Zeiteinheit  $\Delta t$  durch eine bestimmte Fläche  $\Delta F$  transportiert. Die Intensität  $I$  ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\text{Energie}}{\Delta F \Delta t} \\
 &= \frac{\text{Energie}}{\Delta F \Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\
 &= \underbrace{\frac{\text{Energie}}{\Delta F \Delta x}}_{=\rho_E} \underbrace{\frac{\Delta x}{\Delta t}}_{=c} \\
 &= \rho_E c = c \frac{1}{2} \tilde{\rho} \omega^2 A_0^2.
 \end{aligned} \tag{7.51}$$

Die Intensität einer Welle ist also proportional zum Quadrat der Amplitude  $A_0$ .

Betrachten wir nun die Ausbreitung einer Kugelwelle, das ist eine Welle, die in einem Punkt startet und sich gleichmäßig in alle Raumrichtungen (kugelförmig) ausbreitet. Aus Gründen der Energierhaltung muss die Energie, die diese Welle durch die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius  $r_1$  um den Ausgangspunkt der Welle transportiert, identisch sein mit der Energie, die durch eine zweite Kugel mit dem Radius  $r_2$  transportiert wird. Die Intensität dieser Welle muss also proportional zur Oberfläche der Kugel also proportional zu  $1/r^2$  mit dem Radius  $r$  der Kugel abnehmen. Da die Intensität nach (7.51) proportional zum Quadrat der Amplitude ist, muss also die Amplitude proportional zu  $1/r$  abfallen. Damit hat also eine solche Kugelwelle die Gestalt

$$A(\vec{r}, t) = \frac{A_0}{r} \sin(kr - \omega), \tag{7.52}$$

die Amplitude hängt also nur vom Abstand vom Ausgangspunkt  $r$  (hier gleich dem Koordinatenursprung), nicht aber von der Richtung ab.

## 7.3 Schwingungen und Wellen

### 7.3.1 Schwebung und Fourieranalyse im Experiment

In einer Reihe qualitativer Experimente demonstrieren wir **einige Schwingungsvorgänge**:

#### *Schwebung*

Die Überlagerung zweier Schwingungen der Form  $A(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t)$  mit leicht unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten bzw. Kreisfrequenzen  $\omega_1, \omega_2$  ist in Abb. 7.8 dargestellt, mit  $A_1 = A_2 = 1$ ;  $\omega_2 = 1.1\omega_1$ . Die Einhüllende variiert mit der Differenzfrequenz ( $\omega_1 - \omega_2$ ).

Wir demonstrieren den Effekt optisch (Messkurve auf Oszilloskop), sowie akustisch. Im letzten Fall hört man neben einem hohen Pfeifen die Differenzfrequenz als Brummtönen.

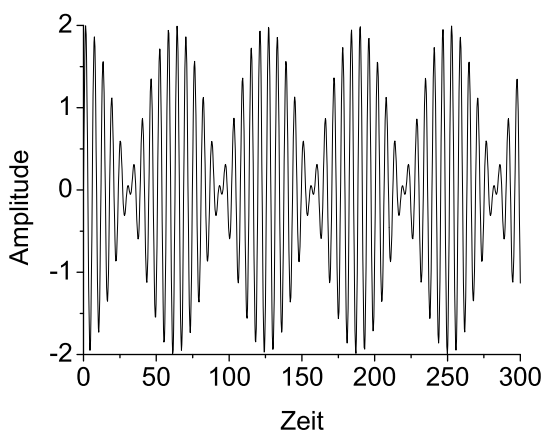


Abbildung 7.8: Überlagerung von zwei Schwingungen  $A(t) = \sin(t) + \sin(1.1 \cdot t)$

Generell lässt sich eine periodische Schwingung beliebiger Form  $A(t)$  in eine **Fourierreihe** entwickeln, wie im Theorieteil gezeigt wird. Die **Fourieranalyse** ist eine elegante und vielfach verwendete Methode, eine allgemeine Kurve  $A(t)$  zu analysieren.

#### *Fourieranalyse: Schwingende Saite und Kratzgeräusch*

Das Frequenzspektrum einer schwingenden Saite besteht aus einer Reihe diskreter Frequenzen, die ganze Vielfache einer Grundfrequenz  $f_0 = \omega_0/2\pi$  sind. Erhöht man den Ton durch Halbieren der Saite um eine Oktave, so treten nur noch Frequenzen bei Vielfachen von  $2f_0$  auf. Kratzt man dagegen an einem Mikrofon, so zeigt die Fourieranalyse eine sehr große Zahl von Frequenzen, die zum Signal beitragen.

Im Oszilloskop wird bei der Fourieranalyse zunächst das zeitabhängige Signal  $A(t)$  aufgezeichnet. Die Methode der "schnellen Fouriertransformation" (**Fast Fourier Transform**, FFT) erlaubt dabei eine Echtzeit-Darstellung des Frequenzspektrums.

### 7.3.2 Wellen in Natur und Technik

Wir demonstrieren zunächst qualitativ einige Wellentypen im Experiment.

An einem vertikal aufgehängten Draht sind waagrecht Nägel angebracht. Das untere Ende des Drahtes hängt frei. Jeder der Nägel kann Drehschwingungen ausführen, wobei die rückstellende Kraft proportional zur Verdrehung des Drahtes ist (vgl. Cavendish-Versuch). Lenkt man den untersten Nagel aus und lässt ihn dann los, so überträgt sich die Auslenkung auf benachbarte Nägel; eine pulsformige Anregung läuft die Nagelkette entlang, wird am eingespannten Ende reflektiert und läuft in Gegenrichtung weiter. Analoge Effekte lassen sich beobachten, wenn ein Seil an einem Ende angeschlagen wird oder wenn ein Gegenstand in ein Wasserbad geworfen wird. Das Prinzip dieser pulsformigen Anregungen ist in Abb. 7.9 skizziert.

Regt man dagegen z. B. in der Wellenwanne eine Stelle durch einen periodisch eintauchenden Stab an, so entsteht ein Wellenzug mit einer periodischen Abfolge von Wellenbergen und -tälern, der sich kreisförmig vom Eintauchpunkt ausbreitet. In drei Dimensionen würde dem eine Kugelwelle entsprechen, die sich von einem Punkt weg nach allen Richtungen ausbreitet. Analog führt die periodische Anregung durch einen breiten Schieber zu einer ebenen Welle, bei der die Wellenkämme bzw. -täler eine Abfolge ebener Linien bilden.

Nach diesen einführenden Beispielen kommen wir nun zu einigen konkreten Wellenarten. Betrachten wir zunächst **Schallwellen in Gasen**. Hier handelt es sich, um **longitudinale Druckwellen**, wobei die Kompression lokal adiabatisch erfolgt. (Demonstration: brennende Kerze vor Lautsprecher; die Flamme bewegt sich mit der Musik). Wie im Theorieteil gezeigt wurde, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit) gegeben durch:  $c = \sqrt{\frac{1}{\chi\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}$ . Hierbei ist  $\delta = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$  die Kompressibilität,  $\kappa = c_p/c_v$  und  $\tilde{\rho} = m/V$  die Massendichte. Mit  $pV = \nu RT$  lässt sich  $c$  auch ausdrücken durch  $c = \sqrt{\frac{\kappa\nu RT}{m}}$ , ist also proportional zu  $T^{1/2}$  und zu  $m^{-1/2}$ . Für ein Gas aus leichten Molekülen ist also  $c$  deutlich größer als für ein Gas aus schweren Molekülen.

Typische **Zahlenwerte für  $T=0^\circ\text{C}$**  sind:

Luft: 331 m/s

He: 965 m/s

H<sub>2</sub>: 1284 m/s

**Schallwellen in Flüssigkeiten** sind ebenfalls **longitudinale Druckwellen**. Da die Kompressibilität von Flüssigkeiten deutlich unter der von Gasen liegt, ist  $c$  größer als bei (nicht allzu leichten) Gasen. Man findet z. B.

Aceton: 1378 m/s

Hg: 1451 m/s

H<sub>2</sub>O: 1497 m/s

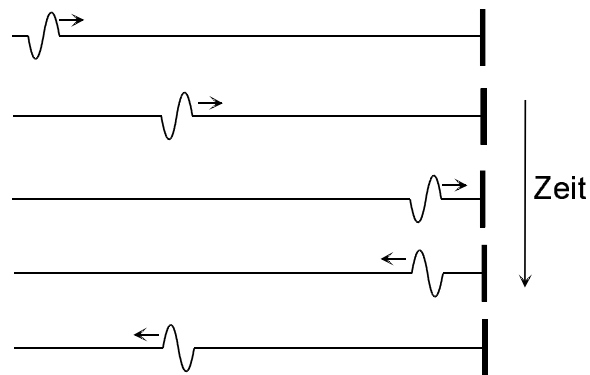


Abbildung 7.9: Pulsförmige Welle, die an einem Seil entlangläuft und am eingespannten rechten Rand reflektiert wird. Bei der Reflexion dreht sich das Vorzeichen der Welle um.



Von diesen Druckwellen zu unterscheiden sind **Oberflächenwellen**, wie sie sich z. B. in der Wellenwanne beobachten lassen. Die Behandlung dieser Wellen und das Bewegungsmuster der Moleküle im Wasser ist relativ kompliziert. Wir wollen hier nur einige Ergebnisse wiedergeben. Grundsätzlich wirken zwei Kräfte als Rückstellkräfte, nämlich einerseits die Schwerkraft und andererseits die Oberflächenspannung, die versucht, die Oberfläche der Welle zu minimieren. Die Oberflächenspannung  $\sigma$  bewirkt beispielsweise auch die Kugelform einer Seifenblase.

Für **kleine Wellenlängen**  $\lambda$  (Wasser:  $\lambda < 1.6$  cm) überwiegt der Effekt der Oberflächenspannung. Man spricht von **Kapillarwellen**. Für die Geschwindigkeit der Wellen ergibt sich:  $c = \sqrt{2\pi\sigma/(\rho\lambda)}$ . Die Schallgeschwindigkeit hängt also von  $\lambda$  selbst ab und steigt für kurze Wellenlängen. Für große Wellenlängen (Wasser:  $\lambda > 1.6$  cm) ist der Einfluss der Schwerkraft dominant (die potentielle Energie einer welligen Wasseroberfläche ist offensichtlich höher als sie einer glatten). Man spricht dann von **Schwerewellen**. Falls die Wassertiefe  $h$  wesentlich größer ist als  $\lambda$ , ergibt sich:  $c \approx \sqrt{\lambda g/2\pi}$ . Im entgegengesetzten Grenzfall  $\lambda \gg h$  findet man:  $c \approx \sqrt{gh}$ .

Die Besonderheit der Oberflächenwellen ist, dass  $c$  von der Wellenlänge (bzw. der Frequenz) der Welle abhängt. Diese Eigenschaft wird als **Dispersion** bezeichnet.

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sei die Welle durch eine gewisse Form  $A(x)$  gekennzeichnet. Man kann nun  $A(x)$  eine Summe von sin- und cos-Termen darstellen (Fourierreihe, diesmal mit dem Ort  $x$  als Argument). Wenn  $c$  nicht von  $\lambda$  abhängt, bewegen sich alle Teilwellen mit der gleichen Geschwindigkeit und das gesamte Wellenpaket behält seine Form, d. h. wir können schreiben:  $A(x, t) = A(x \pm c \cdot t)$ . Bei dispersiven Wellen bewegen sich die Fourierkomponenten mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten, das Wellenpaket  $A(x, t)$  kann seine Form ändern.

Dies lässt sich bei Wasserwellen beim Phänomen der **Brandung** oder, in größerem Maßstab, bei **Tsunamis** beobachten.

Wenn Wasserwellen auf das Ufer zulaufen, wird die Wassertiefe  $h$  irgendwann vergleichbar bzw. kleiner als  $\lambda$ . Die Wellenberge bekommen dann bei  $c \approx \sqrt{gh}$  eine höhere Geschwindigkeit als die Wellentäler. Die Welle steilt sich auf. Wenn Erdbeben im Ozean stattfinden, lösen diese Wellen mit Wellenlängen aus, die größer sind als die Meerestiefe. Es sei  $h = 9$  km. Dann ergibt sich  $c \approx \sqrt{gh} \approx 1000$  km/h. Die entsprechende Welle mag im Ozean sehr unscheinbar sein. In Küstennähe steilt sie sich aber zu enormer Größe auf und kann große Verwüstungen anrichten.

Kommen wir nochmals zurück zu Schallwellen. Noch nicht betrachtet hatten wir **Schallwellen in Festkörpern**. Hier wirken die Kräfte zwischen den Gitterbausteine als Rückstellkräfte. Sie wirken in allen Raumrichtungen, so dass Schallwellen in Festkörpern **sowohl longitudinal als auch transversal** sein können. Typische Schallgeschwindigkeiten liegen für longitudinale Wellen im Bereich 10 km/s, für transversale Wellen leicht darunter. Die möglichen Wellenlängen solcher Schallwellen umfassen enorme Distanzen. Die kleinsten Wellenlängen liegen im Bereich der Atomabstände (kleinere Wellenlängen sind nicht mehr sinnvoll), die größten im Bereich der Abmessung des gesamten Festkörpers. Im Extremfall ist dies der Erddurchmesser (bzw. Sonnen- oder Sterndurchmesser, falls man extraterrestrische Objekte mit einbezieht).

Besondere Bedeutung haben diese großen Wellenlängen für die **Geologie**. Durch Erdbeben ausgelöste Wellen wandern durch die Erde und können an verschiedenen Messstationen an der Erdoberfläche registriert werden. Geschwindigkeit der Welle hängt dabei

von der Beschaffenheit des Erdinneren ab, so dass durch systematische Beobachtung der (mittleren) Schallgeschwindigkeit zwischen "Sender" und "Empfänger" die Beschaffenheit des Erdinneren spektroskopiert werden kann. Das Prinzip ist in Abb. 7.10 skizziert.

Die Abb. 7.11 zeigt die aus solchen Messungen gewonnene Geschwindigkeit transversaler und longitudinaler Schallwellen in unterschiedlichen Tiefen. Man beachte insbesondere, dass bei Tiefen zwischen 3000 km und 5000 km keine Transversalwellen vorkommen. Dies ist der Bereich des flüssigen äußeren Kerns der Erde.

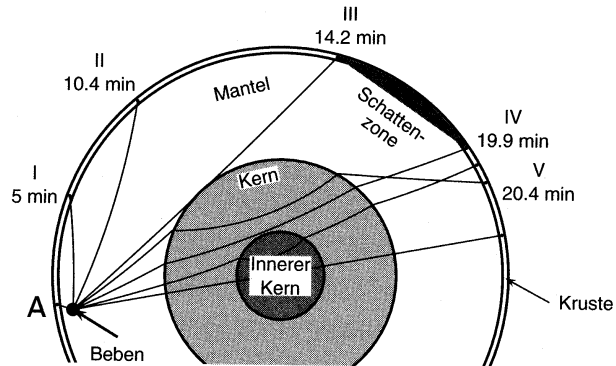
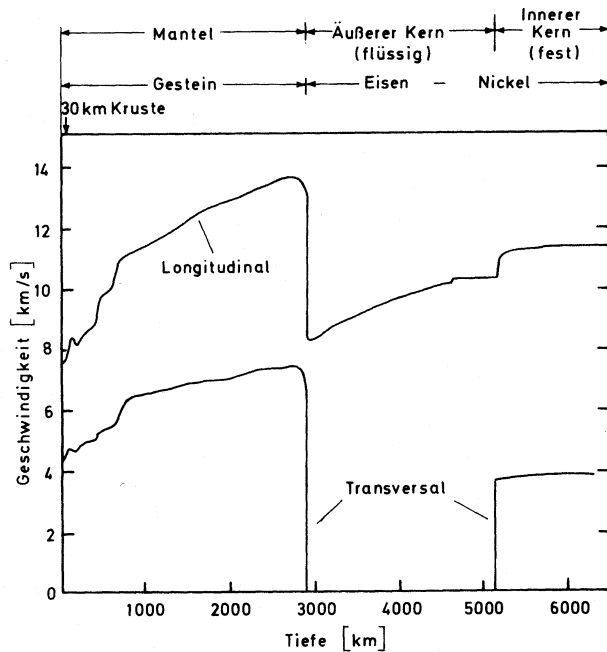


Abbildung 7.10: Ausbreitung von Wellen nach einem Erdbeben (aus: Dransfeld / Kienle / Kalvius, Physik I, Abb. 9.20)

Abbildung 7.11: Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Erdtiefe (aus: Dransfeld / Kienle / Kalvius, Physik I, Abb. 9.21).

Im Zusammenhang mit Schallwellen sollten wir noch auf einige **Eigenschaften unseres Gehörs** (vgl. Abb. 7.12) eingehen.

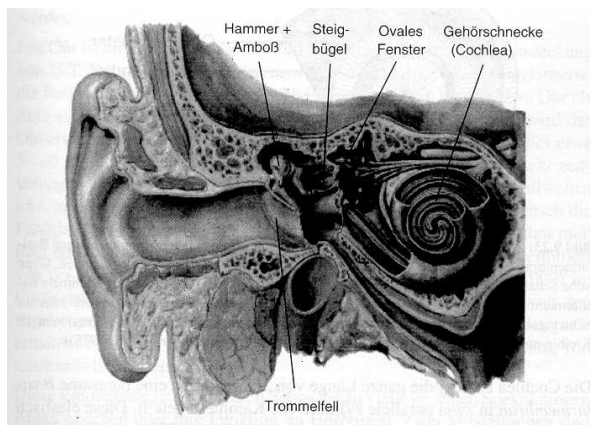


Abbildung 7.12: Aufbau des menschlichen Ohrs. (aus: Dransfeld / Kienle / Kalvius, Physik I, Abb. 9.22).

Am empfindlichsten ist das menschliche Gehör bei Frequenzen um 1 kHz. Es kann dort minimale Schallintensitäten von ca.  $10^{-12} \text{ W/m}^2$  wahrnehmen, was einer Druckänderung um  $20 \mu\text{Pa}$  bzw. einer Schwingungsamplitude der Luftmoleküle von lediglich  $10^{-10} \text{ m}$  entspricht.

Die maximal detektierbare Intensität (Schmerzgrenze) liegt bei ca.  $100 \text{ W/m}^2$ . Das Gehör hat damit einen dynamischen Bereich, der 14 Zehnerpotenzen umfasst.

Innerhalb dieses Bereichs besitzt das Ohr ein logarithmisches Lautstärkeempfinden [Weber-Fechner'sches Gesetz; Lautstärke  $\propto \log(\text{Intensität})$ ].

Quantitativ wird diese Lautstärke in **Phon** bzw. in **Dezibel** (dB) angegeben. Hierbei ist  $\text{dB} = 10 \cdot \log_{10}(I/I_0)$ , wobei  $I_0$  geeignet zu wählen ist (z. B. Hörschwelle). Die Einheit dB ist also dimensionslos und misst auf logarithmischer Skala die Schallintensität im Verhältnis zu einer Normier-Intensität  $I_0$ . Man kann wegen  $I \propto (\text{Druck})^2$  dB ebenfalls durch  $20 \cdot \log_{10}(p/p_0)$  ausdrücken. Abb. 7.13 gibt die "Hörfläche" des menschlichen Gehörs in dB an. Hierbei ist die Normiereinheit die frequenzabhängige Hörschwelle  $I_0(f)$ . Die Kurve 0 dB bezeichnet gerade diese Hörschwelle. In Abb. 7.14 sind schließlich typische Schallpegel aufgetragen.

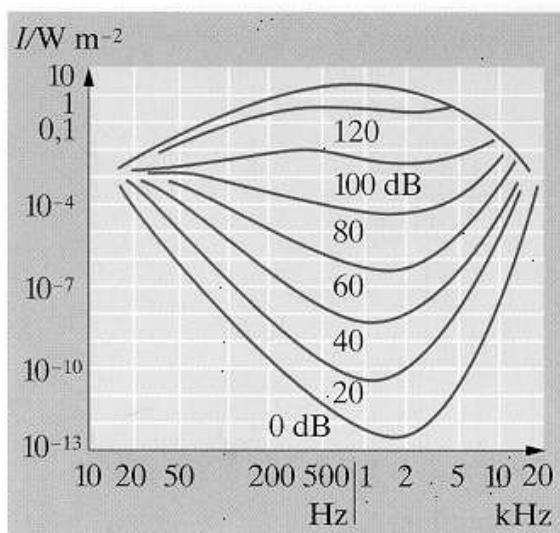


Abbildung 7.13: "Hörfläche" des menschlichen Gehörs (aus: Gerthsen Physik, Abb. 4.69).

Oberhalb von 20 kHz beginnt der Frequenzbereich des **Ultraschalls** bis zu Maximalfrequenzen von 20 GHz. Der daran anschließende Frequenzbereich heisst **Hyperschall**, dessen Maximalfrequenzen bei 20 THz liegen. Bei noch höheren Frequenzen würde die Wellenlänge des Schalls kürzer als der Atomabstand.

Man erzeugt Ultraschall beispielsweise durch **Piezokristalle** (z.B. Quarzkristalle). Diese ändern ihre Form bzw. ihre Dicke durch anlegen einer Spannung. Legt man eine hochfrequente Spannung an einen dieser Kristalle, so vibriert dieser mit der angelegten Frequenz und erzeugt dadurch Ultraschall. Umgekehrt erzeugt ein zur Vibration angeregter Piezokristall auch eine elektrische Spannung, die abgegriffen werden kann. Der Kristall wirkt dann als Mikrofon (wir demonstrieren beide Mechanismen im Experiment, sowie die Wirkung des auf eine Wasseroberfläche gerichteten Ultraschalls; auf dieser bildet sich ein "Springbrunnen").

Eine zweiter Effekt, der die Erzeugung von Ultraschall ermöglicht, ist die **Magnetostriktion**. Bei einigen magnetischen Materialien ändert sich der Abstand der Gitterbausteine bei Anlegen eines Magnetfeldes. Bei Verwendung eines zeitlich oszillierenden Magnetfeldes lässt sich damit wiederum die Vibration des Kristalls erreichen.

Schließlich sollen einige weitere Wellenarten kurz erwähnt werden.

**Elektromagnetische Wellen** (im Detail: s. Physik II) umfassen ebenfalls einen extrem großen Frequenz- bzw. Wellenlängenbereich. Im Gegensatz zu akustischen Wellen benötigen sie kein Trägermedium, um sich auszubreiten. Bei Wellenlängen im m- bis km-Bereich spricht man von Radiowellen. Daran schließen sich Mikrowellen (Wellenlängen: cm ... 0.4 mm) an, gefolgt vom Infrarot (0.4 mm ... 0.4  $\mu\text{m}$ ). Das für das Auge sichtbare Licht umfasst lediglich die Wellenlängen 0.4 ... 0.7  $\mu\text{m}$ . Zu kürzeren Wellenlängen folgen das Ultraviolett, für  $\lambda < 10$  nm schließlich der Röntgen- und Gamma-Bereich. Nach den Gesetzen der Quantenmechanik kann jeder Welle ein Quant und umgekehrt zugeordnet werden (**Welle-Teilchen-Dualismus**; Elektromagnetische Wellen: Photonen; Schall: Phononen). Analog besitzen Elektronen, Protonen oder andere Teilchen Welleneigenschaften. Generell gilt für **Materiewellen** die Zuordnung:

$$(\text{Impuls}) \vec{p} = \hbar \vec{k} \text{ (Wellenvektor)}$$

$$(\text{Energie}) E = \hbar \omega \text{ (Kreisfrequenz)}$$

Hierbei ist  $\hbar \approx 10^{-34}$  Js das Planck'sche Wirkungsquantum.

Für ein Elektron mit  $E = 10\text{eV}$  (typische Bindungsenergie im Atom),  $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$  kg ergibt sich eine Geschwindigkeit  $v = \sqrt{2E/m} \approx 2 \cdot 10^6$  m/s. Die Wellenlänge ist  $\lambda = 2\pi/k = \hbar/p = \hbar/(mv) \approx 0.36$  nm, was ungefähr einem Atomdurchmesser entspricht. Für  $\omega$  ergibt sich  $2.5 \cdot 10^{15}$  Hz. Für ein Proton der Energie 10 MeV (Typische Energie im Atomkern) findet man mit  $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$  kg eine Wellenlänge von ca.  $10^{-14}$  m, was von der Größenordnung des Kerndurchmessers ist. Für ein Objekt mit  $m = 1\text{g}$ ,  $v = 1$  mm/s ergibt sich eine Wellenlänge von ca.  $6 \cdot 10^{-28}$  m. Die Wellenlängen makroskopischer Objekte sind also zu klein, um wahrgenommen werden zu können.

### 7.3.3 Einige allgemeine Eigenschaften von Wellen

Im folgenden betrachten wir einige ganz allgemeine Eigenschaften von Wellen, die für viele oder gar alle der oben angesprochenen Typen von Wellen gelten.

#### Dopplereffekt

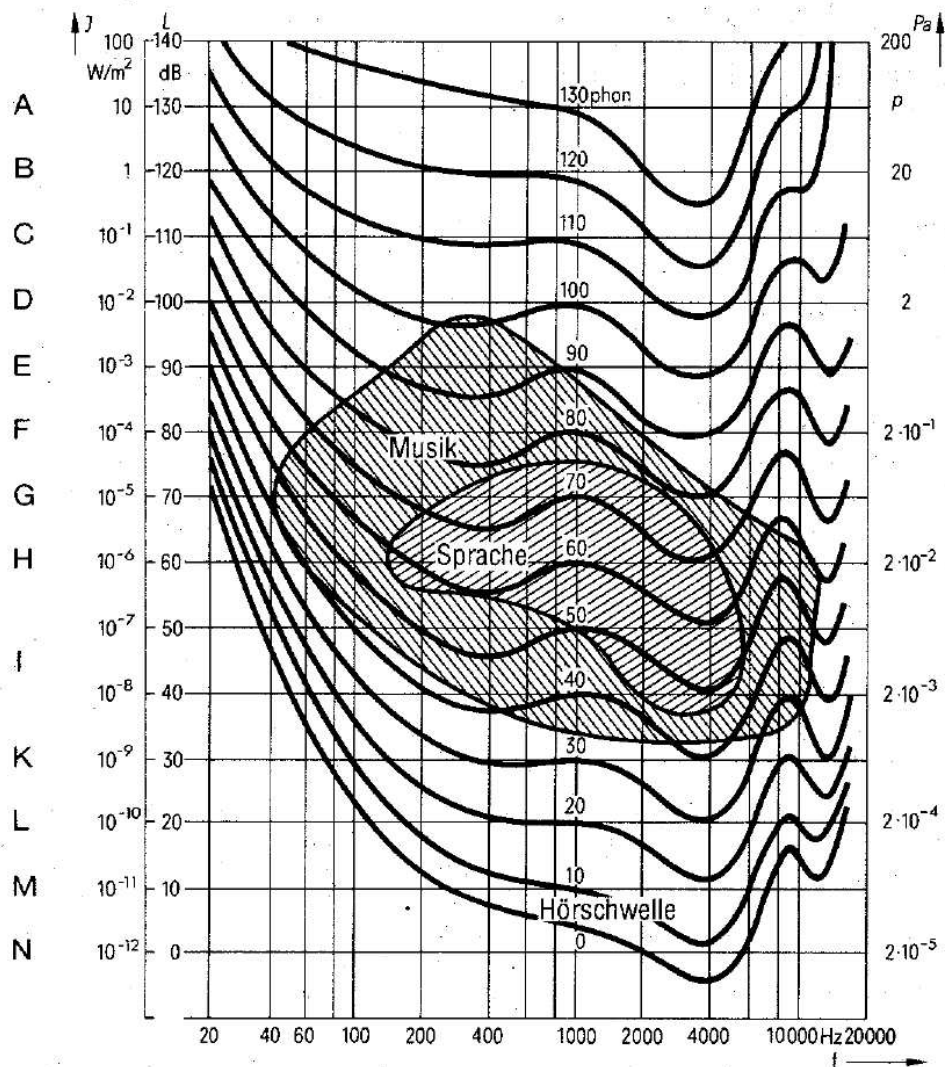
Der Dopplereffekt tritt auf, wenn sich ein Sender oder ein Empfänger relativ zueinander oder relativ zu dem die Wellen übertragenden Medium bewegen.

Wir nehmen zunächst an, sowohl **der Sender als auch der Empfänger ruhen**. Der Sender strahle Wellen der Frequenz  $f_0$  bzw. der Wellenlänge  $\lambda_0$  aus. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im Medium sei  $c$ . Damit gilt  $c = f_0 \lambda_0$ .

Der ebenfalls ruhende Empfänger hört die Frequenz  $f_0$ ; er misst für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle den Wert  $c$ .

### Lautstärke von Schallvorgängen

Kurven gleicher Lautstärke



#### Vergleichsschall

A Schmerzempfindung	F Großstadtverkehr
B Start einer Düsenmaschine (100 m entfernt)	G Großraumbüro
C Pop-Gruppe live	H Umgangssprache
D Preßlufthammer	I Insektengeräusche auf einer Wiese im Sommer
E Schwerlastverkehr	K Stille Wohnung
	L Taschenuhr (1 m entfernt)
	M Windstille Winternacht bei Schnee
	N Hörschwelle (= 20 $\mu$ Pa)

Schalldruckpegel:  $L = 20 \lg \frac{p}{p_0}$  in dB

( $p$  = Schalldruck in  $\mu$ Pa;  $p_0 = 20 \mu$ )

Abbildung 7.14: Lautstärke unterschiedlicher Schallvorgänge. Quelle: Skript Ihringer

Wenn sich der **Empfänger mit der Geschwindigkeit  $u$  auf die Quelle zubewegt**, misst er eine höhere effektive Schallgeschwindigkeit  $c_{eff} = c + u$ . Er hört demnach die Frequenz

$$f = \frac{c_{eff}}{\lambda_0} = \frac{u + c}{\lambda_0} = f_0 \left(1 + \frac{u}{c}\right) \quad (7.53)$$

Die relative Frequenzverschiebung  $\Delta f/f_0 = (f - f_0)/f_0$  beträgt:  $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{u}{c}$ .

Wenn sich der Empfänger mit der Geschwindigkeit  $u' = -u$  vom Sender wegbewegt, erhält man genau das selbe Ergebnis  $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{u'}{c} = -\frac{u}{c}$ . Die Frequenz ist jetzt lediglich zu niedrigeren Werten verschoben.

Ein etwas anderer Gedankengang muss verwendet werden, wenn der **Empfänger ruht** und sich der **Sender mit der Geschwindigkeit  $v$  auf den Empfänger zu bewegt**.

Der Sender bewegt sich jetzt in den von ihm erzeugten Wellenzug hinein. In einer Schwingungsperiode  $T = 1/f_0$  legt er dabei den Bruchteil  $\Delta\lambda = vT = v/f_0$  der Wellenlänge  $\lambda_0$  zurück. Die vom Sender ausgesandten Wellenmaxima haben deshalb den Abstand  $\lambda_{eff} = \lambda_0 - \Delta\lambda = \lambda_0 - v/f_0$ . Der Empfänger misst die Schallgeschwindigkeit  $c$ . Die Frequenz, die er jetzt hört, beträgt:

$$f = \frac{c}{\lambda_{eff}} = \frac{c}{\lambda_0 - v/f_0}. \quad (7.54)$$

Bewegt sich der Sender vom Empfänger weg, so erhält man das selbe Ergebnis, mit  $v < 0$ .

Für  $v \ll c$  lässt sich das Ergebnis nähern als  $f = f_0 \left(\frac{1}{1-v/c}\right) \approx f_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$ , bzw:  $\frac{\Delta f}{f_0} \approx v/c$ . Bei nicht allzu großen Geschwindigkeit erhält man also die gleiche Frequenzverschiebung wie im Fall des bewegten Empfängers.

#### *Dopplereffekt bei elektromagnetischen Wellen*

Bei elektromagnetischen Wellen muss der Dopplereffekt etwas anders behandelt werden, da sich diese Wellen einerseits ohne ein Medium ausbreiten, andererseits ein Beobachter unabhängig von seinem eigenen Bewegungszustand immer die gleiche Lichtgeschwindigkeit misst.

Die genaue Behandlung benötigt den Formalismus der speziellen Relativitätstheorie, die Sie im nächsten Semester kennenlernen werden. Wir geben hier nur das Ergebnis für die Frequenzverschiebung an:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}. \quad (7.55)$$

Hierbei ist  $v$  die Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger ("+"), falls sich die beiden aufeinander zubewegen.

Für  $v/c \ll 1$  erhält man durch Taylor-Entwicklung:  $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f - f_0}{f_0} \approx \frac{v}{c}$ , was das Ergebnis für den akustischen Fall für  $u, v \ll c$  reproduziert.

Eine Anwendung des Dopplereffekts mit elektromagnetischen Wellen ist der Polizeiradar oder die Laserpistole (s. Einleitung).

### Mach'scher Kegel und Schockwellen

Wir kehren nun zurück zu akustischen Wellen und betrachten die Schallausbreitung durch **Objekte**, die sich mit **Überschallgeschwindigkeit** bewegen.

Das Objekt erzeuge zur Zeit  $t = 0$  einen Schallpuls. Dieser Puls breitet sich in Form einer Kugelwelle in den Raum aus und hat zur Zeit  $t_1 = \Delta t$  einen Radius  $r = c\Delta t$ . Das Geschoss selbst hat in der Zeit  $\Delta t$  die Strecke  $v\Delta t$  zurückgelegt. Zu Zeit  $t_2 = 2\Delta t$  hat der zur Zeit 0 abgesandte Puls einen Radius  $2c\Delta t$  erreicht, ein zur Zeit  $t_1$  abgesandter Puls den Radius  $c\Delta t$ . Das Objekt selbst hat die Strecke  $2v\Delta t$  zurückgelegt. Diese Situation ist graphisch in Abb. 7.15 veranschaulicht.

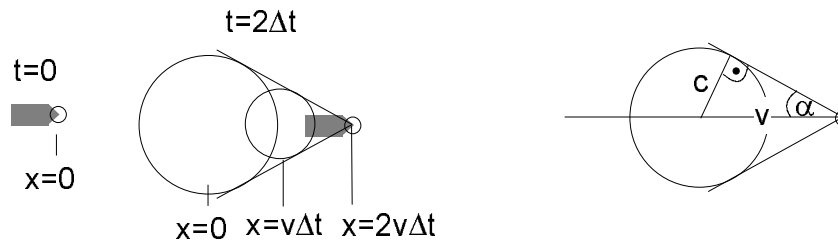


Abbildung 7.15: Schallausbreitung durch ein überschallschnelles Objekt. Links: Schallpuls entsteht zur Zeit  $t = 0$  am Ort  $x = 0$ . Mitte: Die Schallpulse zur Zeit  $t_1 = \Delta t$  und zur Zeit  $t = 2\Delta t$  haben sich über einen Radius  $c\Delta t$  bzw.  $2c\Delta t$  vom Entstehungsort ausgebreitet. Rechts: Geometrische Darstellung des Öffnungswinkels des "Machschen Kegels"

Das Geschoss zieht offensichtlich einen Schallkegel, den "**Mach'schen Kegel**" nach sich, dessen Öffnungswinkel sich aus der Abb. 7.15 zu  $\sin \alpha = c/v$  ergibt. Die Abb. 7.16 zeigt eine Aufnahme eines überschallschnellen Geschosses. Der Machsche Kegel ist deutlich erkennbar.

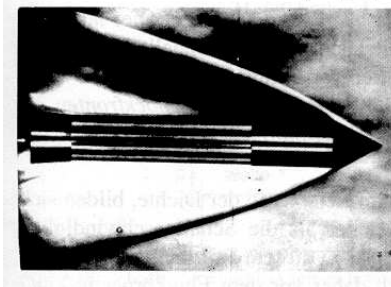


Abbildung 7.16: Hochgeschwindigkeitsaufnahme eines überschallschnellen Geschosses. Quelle: Dransfeld / Kienle / Vonach, Physik I

Die Größe  $M = (\sin \alpha)^{-1} = v/c$  wird Machzahl genannt. Man beachte, dass speziell für  $M = 1$   $\alpha = 90^\circ$  ist. Das Geschoss fliegt dann auf gleicher Höhe mit der flachen "Schallmauer".

Nahe des Mach'schen Kegels wird die relative Schallamplitude, d. h. die relative Druckschwankung  $\Delta p/p$  sehr groß. Die Schallgeschwindigkeit war ihrerseits proportional zu  $\sqrt{p/\tilde{\rho}}$  bzw. proportional zu  $T^{1/2}$ . In den adiabatisch verdichteten Bereichen sind Druck und Temperatur deutlich höher als in den dekomprimierten Bereichen. Damit breiten sich ähnlich wie bei der Brandung im Fall der Wasserwellen die verdichteten Regionen schneller aus als die dekomprimierten. Dadurch stellt sich die Vorderkante der Schallfront zu

einer Schockfront auf, an der sich Druck und Temperatur enorm rasch auf Distanzen um  $0.1 \mu\text{m}$  ändern. In der Schockfront können Temperaturen von mehreren 1000 K auftreten. Beispielsweise werden für ein sich mit  $M = 9$  in 16 km Höhe bewegendes Objekt in der Schockfront Temperaturen um 5000 K erreicht.

In speziell konzipierten Schockrohren (Gaskanonen) lässt man ein unter hohem Druck (z. B. 40 bar) stehendes Gasvolumen aus  $\text{H}_2$  rapide in einen praktisch evakuierten Bereich (Druck: wenige mbar) ausbreiten. Hierbei rast eine Schockwelle durch das Rohr, an deren Vorderfront Temperaturen von 20.000 K und mehr erreicht werden.

## Reflexion, Stehwellen und Interferenz

### Reflexion von Wellen<sup>2</sup>

Kehren wir nochmals zur Abb. 7.9 zurück und betrachten die Reflexion von Wellen. Das eingespannte Ende eines Seiles oder Stabes muss in Ruhe bleiben, wenn die Welle hier ankommt. Diese Randbedingung lässt sich elegant dadurch erfüllen, dass man sich das Seil über den Verankerungspunkt hinaus verlängert vorstellt und eine Welle entgegengesetzten Vorzeichens auf diesen Punkt zulaufen lässt (Abb. 7.17). Man hat damit erreicht, dass der Verankerungspunkt bei der "Kollision" der beiden Wellen in Ruhe bleibt. Nach der "Kollision" wechseln realer und virtueller Puls ihre Rolle; die Welle ist reflektiert worden. Für eine sinusförmige Welle lässt sich auch sagen, die **Reflexion am festen Ende** führt zu einem "Phasensprung" um  $\pi$ .

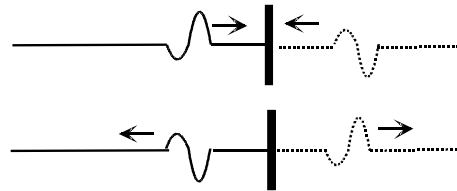


Abbildung 7.17: Reflexion einer Welle am festen Ende als "Kollision" mit einer viertellen Welle (gestrichelte Linie)

Wenn der Puls auf ein **offenes Ende** zuläuft, wird das Seilende dagegen voll ausschlagen, was letztlich den Ausgangspuls reproduziert. Es findet also **kein Phasensprung** statt.

### Stehwellen

Stellen wir uns jetzt einen Puls vor, der zwischen zwei eingespannten Enden hin- und herläuft (Abb. 7.18a). Wenn wir die Einspannpunkte immer mehr verkürzen, erhalten wir die in Abb. 7.18b dargestellte Situation. Die Welle läuft nicht mehr, sondern bildet eine stationäre Stehwelle.

Man kann ganz allgemein eine **Stehwelle als Überlagerung zweier entgegengesetzt laufender** (periodischer) **Wellen** auffassen. Dies lässt sich leicht durch Rechnung verifizieren:

$$\begin{aligned}
 y &= y_0 \cdot \sin(\omega t - kx) - y_0 \cdot \sin(\omega t + kx) \\
 &= y_0 \cdot [\sin(\omega t) \cos(kx) - \cos(\omega t) \sin(kx)] \\
 &\quad - y_0 \cdot [\sin(\omega t) \cos(kx) + \cos(\omega t) \sin(kx)] \\
 &= -2y_0 \cos(\omega t) \sin(kx) \qquad (7.56)
 \end{aligned}$$

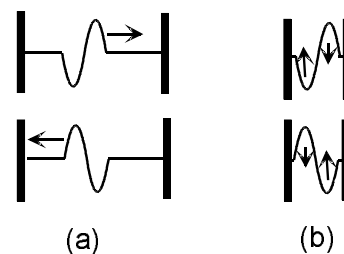


Abbildung 7.18: Konstruktion einer Stehwelle durch wiederholte Reflexion einer laufenden Welle

<sup>2</sup>Die folgenden Abschnitte (Reflexion Stehwellen, Interferenz) sind sehr kurz gefasst. Diese Effekte werden im 2. Semester ausführlich beschrieben



Der erste Term auf der rechten Seite der ersten Zeile entspricht der einlaufenden Welle, der zweite der reflektierten Welle. Man beachte das "-"- Zeichen, das den Phasensprung bei der Reflexion berücksichtigt. Der Ausdruck in der letzten Zeile enthält die Ortsfunktion  $\sin(kx)$ , die mit der Funktion  $\cos(\omega t)$  multipliziert ist. Jeder Punkt  $x$  führt also eine Oszillation mit der Amplitude  $y_0 \sin(kx)$  aus.

Betrachtet man zwei fest eingespannte Enden einer Saite, einer Feder oder eines Seils der Länge  $L$ , so muss  $\sin(kx)$  für  $x = 0$  und für  $x = L$  verschwinden. Hieraus folgt, dass  $k$  die Werte  $n\pi/L$ , mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  annehmen kann. Mit  $k = 2\pi/\lambda$  folgt:  $L = n\frac{\lambda}{2}$ , es "passen" also Vielfache einer halben Wellenlängen zwischen die eingespannten Enden.

Genau diese Stehwellen können angeregt werden, wenn man beispielsweise an einer Saite zupft. Der Grundton etwa des Tons "A" liegt bei ca. 100 Hz. Die Saite schwingt dabei mit der Frequenz  $f_0$ , bei Obertönen  $nf_0$ . Diese Obertöne entsprechen der Bedingung  $L = n\frac{\lambda}{2}$ . Halbiert man durch Fingerdruck die Saite erhält man Grundschwingungen der beiden Hälften bei  $2f_0$ , sowie Obertöne bei  $2nf_0$ . Die Saitenverhältnisse, die gespielt werden müssen, sind z. T. relativ kompliziert. So entspricht eine kleine Sekunde einem Verhältnis 16:15. Bei der großen Sekunde ist das Verhältnis 9:8, bei der großen Terz 6:5, bei der Quarte 4:3, der reinen Quinte 3:2 und bei der großen Sexte 5:3.

Auch bei offenen Enden lassen sich Stehwellen erzeugen. Hierbei schwingen die Enden maximal durch, man erhält eine Serie  $\cos(kx)$  von Stehwellen, mit  $k = \pi/L$ . Ist ein Ende z. B. eines Stabes eingespannt, das andere offen, so ergeben sich Stehwellen für  $L = (2n + 1)\lambda/4$ , mit  $n = 0, 1, 2, \dots$

Stehwellen dieser Art können mit dem Quinke-Rohr hörbar gemacht werden. Hier ist am oberen Ende eines zylindrischen Rohrs ein Lautsprecher angebracht. Im Rohr befindet sich Wasser. Die Distanz  $L$  zwischen Lautsprecher und Wasseroberfläche kann variabel eingestellt werden. Die Wasseroberfläche entspricht dem offenen Ende (die Amplitude der Druckschwankungen ist hier nicht fixiert), der Lautsprecher dem geschlossenen Ende.

Auch in zwei bzw. drei Raumdimensionen treten Stehwellen auf. In 2D demonstrieren wir dies an Hand einer runden Plexiglasscheibe, deren Zentrum durch einen vibrierenden Stab mit variabler Frequenz angeregt wird. Die Platte ist mit feinkörnigem Pulver bestreut, das sich in den Minima der Stehwellen ansammelt. Die Stehwellen haben für diese Geometrie Nullstellen in radialer Richtung, u. U. aber auch in azimuthaler Richtung<sup>3</sup>.

Für eine quadratische (2D) bzw. kubische Form (3D) ist die Ortsabhängigkeit der Stehwellen von der Form  $\sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot \sin(k_z z)$ , wobei die Wellenzahlen in  $x$ ,  $y$  bzw  $z$  die Bedingungen  $k_x = \pi n_x/a$ ,  $k_y = \pi n_y/a$ ,  $k_z = \pi n_z/a$ , mit  $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$  erfüllen. Man fasst die Wellenzahlen  $(k_x, k_y, k_z)$  zum "Wellenvektor"  $\vec{k}$  zusammen. Der Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz  $\omega$  und dem Wellenvektor  $\vec{k}$  ist im einfachsten Fall:  $\omega^2 = c^2 k^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$ . Für den Würfel (Kantenlänge  $a$ ) erhält man:  $\omega^2 = c^2 \frac{\pi^2}{a^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$ . Für die Stehwelle mit der niedrigsten Frequenz ist eine der Zahlen  $n_x, n_y, n_z$  gleich 1, die beiden anderen sind 0.

Wichtig sind solche zwei- oder dreidimensionalen Resonanzen beispielsweise in der Mikrowellentechnik. Man verwendet z. B. Hohlleiter (offene Rohre mit rechteckigem Querschnitt). Die elektromagnetische Welle kann sich entlang des Hohlleiters (in  $z$ -Richtung)

<sup>3</sup>Die mathematische Behandlung würde auf Besselfunktionen führen, die die Amplitude dieser Stehwellen beschreiben.

ausbreiten, die Feldkomponenten in  $(x, y)$  Richtung werden wiederum durch Ortsfunktionen  $\sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y)$  (bzw.  $\cos(k_x x) \cdot \cos(k_y y)$ ), mit diskreten Werten  $(k_x, k_y)$  beschrieben.

Ein Beispiel für akustische Wellen ist unser Kehlkopf. Hier regen die Stimmbänder ganz bestimmte Wellenzahlen an. Für eine gegebene Stehwelle ist  $\omega = \text{const.} \cdot c$ . Erhöht man  $c$  (Einatmen von He-Gas), wird damit  $\omega$  drastisch erhöht, wie wir im Experiment bestätigen.

### Interferenz

Auf einer Wasseroberfläche  $(x, y)$  sollen  $N$  Quellen Wellen der Form  $z_n(x, y, t)$  erzeugen. Diese Wellen überlagern sich zu einer Gesamtwellen  $z(x, y, t) = \sum_{n=1}^N z_n(x, y, t)$ .

Der einfachste Fall besteht in der Überlagerung zweier ebener, sich in  $x$ -Richtung ausbreitender Wellen:  $z = z_1 e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} + z_2 e^{i(k_2 x - \omega_2 t + \varphi)}$ . Hierbei haben wir angenommen, dass die Wellen am Ort  $x$  eine Phasenverschiebung  $\varphi$  haben. Frequenz, Wellenzahl und Amplitude  $a$  der beiden Wellen seien gleich, d. h.  $z_1 = z_2 = \hat{z}$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $k_1 = k_2 = k$ . Die Intensität der Welle ist dann  $I = |A|^2 = [2a(1 + \cos \varphi)]^2$ . Sind die beiden Teilwellen in Phase ( $\varphi = 0$ ) ist  $I = 4\hat{z}^2$  bzw.  $z(x, t) = 2\hat{z} e^{i(k_1 x - \omega t)}$ . Für  $\varphi = \pi$  löschen sich die Wellen dagegen vollständig aus:  $z(x, t) = 0$ .

Im Experiment demonstrieren wir die Überlagerung von Wellen in zwei Dimensionen (Wellenwanne). Wir betrachten qualitativ die Überlagerung der von zwei Quellen ausgehenden Kreiswellen, die Wellen, die durch einen Spalt durchtreten sowie die Interferenz von Wellen beim Durchgang durch zwei benachbarte Spalte. In allen Fällen wechseln sich Bereiche maximaler Amplitude mit Nullstellen in  $z(x, y, t)$  ab. Diese Interferenzerscheinungen werden wir im Zusammenhang mit der Behandlung elektromagnetischer Wellen detailliert analysieren.

Schließlich seien einige Wellen erwähnt, die entsprechend dem Welle-Teilchen-Dualismus aus der kohärenten Überlagerung einer sehr großen Zahl von Quanten gehörenden hervorgehen. Hierzu gehören:

- **Laserlicht:** kohärente Überlagerung von Photonen
- **Supraleiter:** kohärente Überlagerung von Elektronenpaaren
- **Bose-Einstein-Kondensate:** kohärente Überlagerung elektrisch neutraler Gasatome (Alkaliatome)
- **Superfluide:** Kohärente Überlagerung von elektrisch neutralen  $^4\text{He}$ -Atomen oder von Paaren von  $^3\text{He}$ -Atomen

Diese Systeme spielen in der modernen Physik eine enorm wichtige Rolle. Sie werden ihre Eigenschaften in späteren Semestern kennenlernen.

## 7.4 Gekoppelte Schwingungen

Als Beispiel für 2 gekoppelte Schwingungen betrachten wir das Doppelpendel, das in Abb. 7.19 dargestellt ist. Zunächst vernachlässigen wir die rot eingezeichnete Feder zwischen den beiden Pendeln. In diesem Fall haben wir zwei unabhängige Pendel. Das einzelne Pendel wurde bereits im Abschnitt zum Mathematischen Pendel behandelt. Wir haben dort gesehen, dass wir für die Auslenkung des Massenpunktes z.B. für des ersten Pendels,  $x_1$ , eine Differenzialgleichung erhalten der Form

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -Dx_1$$

Dabei steht  $m_1$  für die Masse die an dem Pendel hängt und  $D$  ist die sogenannte Rückstellkonstante, die sich ja beim Pendel aus der Masse, der Länge der Pendelaufhängung und der Beschleunigung durch die Erdanziehung ergibt. Eine entsprechende Gleichung erhalten wir auch für die Auslenkung des zweiten Pendels,  $x_2$ .

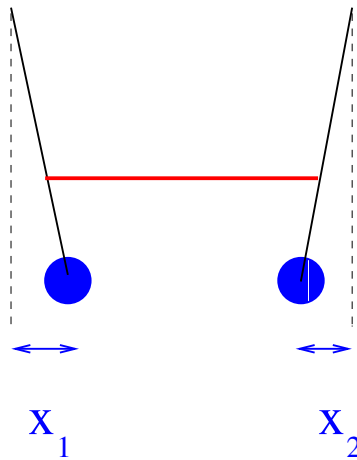


Abbildung 7.19: Darstellung von 2 gekoppelten Pendeln. Die rote Verbindungslinie zwischen den beiden Pendelaufhängungen repräsentiert die Feder, die die beiden Pendel koppelt.

Aus den zwei unabhängigen Pendeln wird ein System von 2 gekoppelten Pendeln, wenn wir die beiden Massenpunkte oder die zugehörigen Pendelstangen durch eine Feder verbinden, so wie es in Abb. 7.19 dargestellt ist. Dabei wollen wir annehmen, dass diese Feder genau dann keine Rückstellkraft erzeugt, wenn die beiden Pendel sich in ihrer Ruhelage befinden. Die Rückstellkraft ist also von null verschieden, wenn die Differenz der beiden Auslenkungen  $x_2 - x_1$  ungleich null ist. Bezeichnen wir die Federkonstante dieser Verbindungsfeder mit  $d$ , so ergeben sich, wie man sich leicht aus den entstehenden Kräften überlegen kann, für die beiden Massenpunkte die folgenden Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -Dx_1 + d(x_2 - x_1) \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -Dx_2 + d(x_1 - x_2) . \end{aligned} \quad (7.57)$$

Dabei haben wir zur Vereinfachung der Nomenklatur angenommen, dass die beiden Massen identisch sind,  $m_1 = m_2 = m$ . Die beiden Bewegungsgleichungen in (7.57) sind ein

System von 2 gekoppelten Differenzialgleichungen, da für den Fall, dass die Verbindungsfeder eingebaut ist (also  $d$  ungleich null), die gesuchten Funktion  $x_i(t)$  in beiden Gleichungen auftauchen. Damit können diese Gleichungen nicht isoliert voneinander behandelt werden.

Trotzdem können wir uns vorstellen, dass es auch im Fall der gekoppelten Pendel Lösungen gibt, bei denen die beiden Massenpunkte im Takt hin und her schwingen und die Verbindungsfeder nicht ausgelenkt wird. Man spricht in diesem Fall von einer **Eigenschwingung** oder **Normalschwingung** des Systems. Den Ansatz für solche Normalschwingungen schreiben wir in der Form

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} e^{i\omega t}. \quad (7.58)$$

Die Normalschwingung ist als ein Vektor  $\vec{q}$  aus 2 Komponenten (zweidimensional) dargestellt, wobei die obere Komponente durch die Funktion  $x_1(t)$  und die untere durch  $x_2(t)$  gegeben ist. Im zweiten Teil der Gleichung wird zum Ausdruck gebracht, dass diese Funktion durch jeweils eine konstante Amplitude  $x_{i0}$  multipliziert mit der komplexwertigen Exponentialfunktion, die hier wieder zur Darstellung der harmonischen Schwingung genutzt wird. Dabei interessiert uns also wieder nur der Realteil dieser Funktionen.

Setzt man diesen Ansatz für die Funktionen  $x_i(t)$  in (7.57) ein, so ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} -m\omega^2 x_{10} e^{i\omega t} &= [-Dx_{10} + dx_{20} - dx_{10}] e^{i\omega t} \\ -m\omega^2 x_{20} e^{i\omega t} &= [-Dx_{20} + dx_{10} - dx_{20}] e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Alle Terme dieser Gleichungen besitzen den Faktor  $e^{i\omega t}$ , den wir deshalb aus diesem Gleichungssystem herauskürzen können. Mit kleinen Umformungen ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} m\omega^2 x_{10} &= (D + d)x_{10} - dx_{20} \\ m\omega^2 x_{20} &= (D + d)x_{20} - dx_{10}, \end{aligned}$$

zwei algebraische Gleichungen, die wir mit Hilfe der Rechenregeln für Vektoren der Dimension 2 und zugehörigen  $2 \times 2$  Matrizen auf die Form bringen können

$$\begin{pmatrix} D + d & -d \\ -d & D + d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = m\omega^2 \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}. \quad (7.60)$$

Diese Gleichung vom Typ

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}}_{\text{Matrix } A} \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor } \vec{q}} = \lambda \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad (7.61)$$

bezeichnet man als **Eigenwertgleichung** der symmetrischen Matrix  $A$ . Die Konstante  $\lambda$  auf der rechten Seite der Gleichung hat den Namen **Eigenwert** der Matrix  $\lambda$  und den zweidimensionale Vektor  $\vec{q}$  für den diese Gleichung gilt bezeichnet man als **Eigenvektor zum Eigenwert**  $\lambda$ . Für den Ansatz (7.58) reduziert sich das Problem der gekoppelten Differenzialgleichungen (7.57) auf das algebraische Eigenwertproblem (7.60).

Solche Eigenwertprobleme begegnen uns an vielen Stellen in der Physik. Insbesondere in der Quantenmechanik stehen Eigenwertprobleme im Zentrum. Aber auch in dieser Vorlesung ist uns bereits ein solches Eigenwertproblem begegnet, ohne dass wir dort darauf

hingewiesen haben. Für den Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls  $\vec{L}$  und der Rotationsgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  eines starren Körpers gilt ja die Beziehung

$$\vec{L} = \mathcal{I}\vec{\omega},$$

wobei  $\mathcal{I}$  für den Trägheitstensor des starren Körpers steht, also durch eine  $3 \times 3$  Matrix repräsentiert wird. Für Drehungen um Hauptträgheitsachsen, stehen Drehimpuls und Rotationsgeschwindigkeiten parallel zueinander und es gilt

$$\vec{L} = I\vec{\omega},$$

mit einer Zahl  $I$ , dem Hauptträgheitsmoment. Daraus ergibt sich also die Bedingung für Hauptträgheitsachsen

$$\mathcal{I}\vec{\omega} = I\vec{\omega}. \quad (7.62)$$

Die Bestimmung der Hauptträgheitsmomente und Hauptträgheitsachsen ist also ebenfalls ein Eigenwertproblem hier für Vektoren und Matrizen der Dimension 3: die Hauptträgheitsmomente sind die Eigenwerte des Trägheitstensors und die zugehörigen Hauptträgheitsachsen liegen parallel zu den Eigenvektoren.

Die Methoden zur Lösung von Eigenwertproblemen werden in der Linearen Algebra diskutiert<sup>4</sup>. Wir wollen an dieser Stelle nur auf einige zentrale Ergebnisse hinweisen und ein ‘‘Kochrezept’’ zur Lösung angeben. Man kann zeigen, dass eine symmetrische  $N \times N$  Matrix  $A$  (mit reellwertigen Matrixelementen) genau  $N$  Eigenwerte und jeweils zugehörige Eigenvektoren besitzt, die zueinander orthogonal sind. Diese Eigenvektoren bilden also eine Basis des  $N$ -dimensionalen Vektorraumes. Das bedeutet, dass man jeden Vektor durch eine Linearkombination von Eigenvektoren darstellen kann.

Wie bestimmt man aber nun die Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix  $A$ , so wie das z.B. in (7.61) formuliert ist? In einem ersten Schritt bestimmt man das **Charakteristische Polynom**. Dieses Charakteristische Polynom ergibt sich als **Determinante** der Matrix  $(A - \lambda E_1)$  wobei  $E_1$  die Matrix die ‘‘Eins-Matrix’’ also mit Einträgen 1 in der Diagonale und Null sonst. Damit ist also die Matrix  $(A - \lambda E_1)$  gegeben durch

$$(A - \lambda E_1) = \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \beta & \gamma - \lambda \end{pmatrix},$$

wenn wir als Beispiel die  $2 \times 2$  Matrix aus (7.61) heranziehen. Die Determinante einer  $2 \times 2$  Matrix berechnet sich als das Produkt der beiden Elemente in der Diagonalen minus dem Produkt der beiden nichtdiagonalen Elemente. Für die Determinante von  $(A - \lambda E_1)$  ergibt sich also

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_1) &= (\alpha - \lambda)(\gamma - \lambda) - \beta^2 \\ &= \lambda^2 - \lambda(\alpha + \gamma) + \alpha\gamma - \beta^2. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Die Berechnung von Matrizen einer größeren Dimension als 2 ist etwas aufwendiger und wir werden diese zu gegebener Zeit diskutieren. Das Ergebnis dieser Rechnung in (7.63) ist ein Polynom vom Grade 2 in der Variablen  $\lambda$ , die den Namen Charakteristisches Polynom der Matrix  $A$  trägt.

<sup>4</sup>siehe z.B. H. Fischer und H. Kaul: Mathematik für Physiker I, § 18.

Die Eigenwerte der Matrix  $A$  sind gleich den Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Wir bekommen also für unsere Beispielmatrix  $A$  die Eigenwerte dadurch, dass wir die Werte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  bestimmen, für die der Ausdruck in (7.63) null ergibt. Dies führt zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha + \gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{(\alpha + \gamma)^2}{4} - \alpha\gamma + \beta^2}. \quad (7.64)$$

Ersetzen wir die Matrixelemente von  $A$ , also  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  durch die Einträge der entsprechenden Matrix in (7.60), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = m\omega_{1,2}^2 &= D + d \pm \sqrt{(D + d)^2 - (D + d)^2 + d^2} \\ &= D + d \pm d \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich also für die Winkelgeschwindigkeiten der Normalschwingungen die Werte

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2d}{m}}. \quad (7.65)$$

In einem weiteren Schritt müssen nun die Eigenvektoren bestimmt werden. Dazu setzen wir zunächst das Ergebnis für  $\omega = \omega_1$  in (7.60) ein und erhalten

$$\begin{pmatrix} D + d & -d \\ -d & D + d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}. \quad (7.66)$$

Daraus ergibt sich, dass alle Vektoren mit  $x_{10} = x_{20} = \chi$  Eigenvektoren zu diesem Eigenwert sind. Für die Normalschwingung ergibt sich also (siehe (7.58))

$$\begin{aligned} x_1(t) = x_2(t) &= \text{Real}(\chi e^{i\omega_1 t}) \\ &= \text{Real}(\chi (\cos(\omega_1 t) + i \sin(\omega_1 t))) \\ &= u_1 \cos(\omega_1 t) + u_2 \sin(\omega_1 t). \end{aligned} \quad (7.67)$$

Die Koeffizienten  $u_1$  und  $u_2$  dieser Normalschwingung ergeben sich aus den Anfangsbedingungen der Schwingung. Wenn wir etwa den Fall betrachten, dass zur Zeit  $t = 0$  das System in Ruhe sein soll, so ist  $u_2 = 0$  und  $u_1$  entspricht der Auslenkung  $x_1 = x_2 = u_1$  der beiden Massenpunkte aus der Ruhelage.

Diese erste Normalschwingung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  entspricht also genau der Schwingung, die wir bei der Motivation des Ansatzes (7.58) im Auge hatten: Die beiden Massenpunkte schwingen im Gleichtakt mit der Winkelgeschwindigkeit der ungestörten Einzelpendel. Da der Abstand der beiden Massenpunkte  $x_2 - x_1$  stets dem Abstand in der Ruhelage entspricht, wird durch Verbindungsfeder keine Rückstellkraft hervorgerufen.

Unsere Rechnungen führen aber auch zu einem zweiten Eigenwert bzw. einer zweiten Winkelgeschwindigkeit  $\omega_2$  in (7.65). Setzen wir diese Lösung  $\omega = \omega_2$  in (7.60) ein, so erhalten wir zur Bestimmung des Eigenvektors zu diesem zweiten Eigenwert die Gleichung

$$\begin{pmatrix} D + d & -d \\ -d & D + d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = (D + 2d) \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}. \quad (7.68)$$

In diesem Fall gilt für die zugehörigen Normalschwingungen  $x_{10} = -x_{20} = \chi$ , also:

$$x_1(t) = -x_2(t) = w_1 \cos(\omega_2 t) + w_2 \sin(\omega_2 t). \quad (7.69)$$

Auch hier werden die Koeffizienten  $w_1$  und  $w_2$  durch die Startbedingungen festgelegt. Für den Fall, dass die Geschwindigkeiten der Massenpunkte zur Zeit  $t = 0$  identisch Null sein soll, ergibt sich, dass  $w_2 = 0$  und  $w_1$  der Auslenkung des Massenpunktes 1 zur Zeit  $t = 0$  entspricht. Bei dieser zweiten Normalschwingung schwingen die beiden Pendel "gegeneinander", da ja stets gilt:  $x_1(t) = -x_2(t)$ .

Es wurde bereits oben gesagt, dass die Eigenvektoren einer Matrix eine orthogonale Basis des zugehörigen Vektorraumes bilden. In unserem Fall bedeutet das, dass jede beliebige Lösung der gekoppelten Differenzialgleichungen (7.57) als Linearkombination der Normalschwingungen (7.67) und (7.69) darstellen lassen. Beschränken wir uns weiter auf solche Lösungen, die zur Zeit  $t = 0$  in Ruhe sind, also  $u_2 = w_2 = 0$ ) so lautet der Ausdruck für eine beliebige Lösung von (7.57):

$$\begin{aligned}x_1(t) &= u_1 \cos(\omega_1 t) + w_1 \cos(\omega_2 t) \\x_2(t) &= u_1 \cos(\omega_1 t) - w_1 \cos(\omega_2 t).\end{aligned}\tag{7.70}$$

Als Beispiel für eine solche gekoppelte Schwingung sind in Abb. 7.20) solche Auslenkungen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  dargestellt für den Fall, dass  $D/m = 1$  und  $d = 0.1 * D$ , also eine relativ schwache Kopplung vorliegt. Die Anfangsbedingungen sind so gewählt, dass für  $t = 0$  die Amplitude  $x_1 = 1$  maximal ist, während der zweite Massenpunkt sich in der Ruhelage  $x_2 = 0$  befindet. Dies führt auf die Werte  $u_1 = w_1 = 0.5$  in (7.70). Man sieht an den Auslenkungen, dass die Energie, die zur Zeit  $t = 0$  vollständig auf den ersten Massenpunkt konzentriert ist, während des Schwingvorganges auf den zweiten Massenpunkt übertragen wird, bis bei etwa  $t = 6 * \pi$  der erste Massenpunkt fast zur Ruhe kommt während der zweite eine maximale Amplitude aufweist. Daraufhin wird die Energie der Schwingbewegung wieder auf den ersten Massenpunkt übertragen. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch.

Eine etwas andere Darstellung des gleichen Vorganges ist in Abb. 7.21 gegeben. In dieser Abbildung sind jeweils die Positionen  $x_1$  (auf der horizontalen Achse) und  $x_2$  (auf der vertikalen Achse aufgetragen). Während das linke Teilbild, damit der Leser sich mit dieser Darstellung vertraut machen kann, die Schwingungen für  $0 \leq t \leq 3 * \pi$  wiedergibt, sind im rechten Teilbild die Amplituden für  $0 \leq t \leq 30 * \pi$  dargestellt.

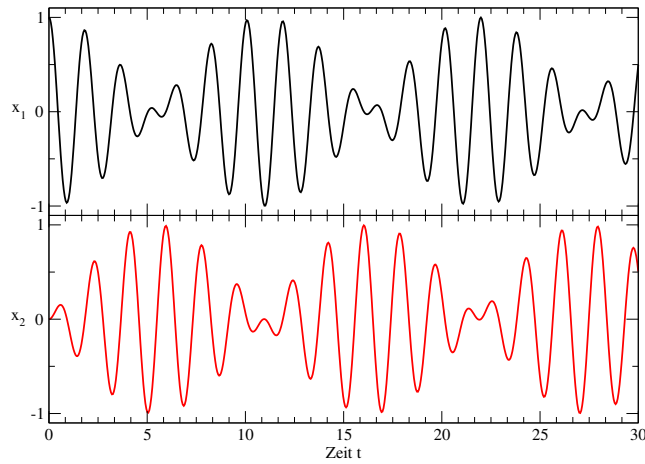


Abbildung 7.20: Amplituden von 2 gekoppelten Pendeln. In diesem Beispiel sind  $D/m = 1$  und  $d = 0.2 * D$  gewählt. Die Zeit auf der horizontalen Achse ist in Einheiten von  $\pi$  angegeben.

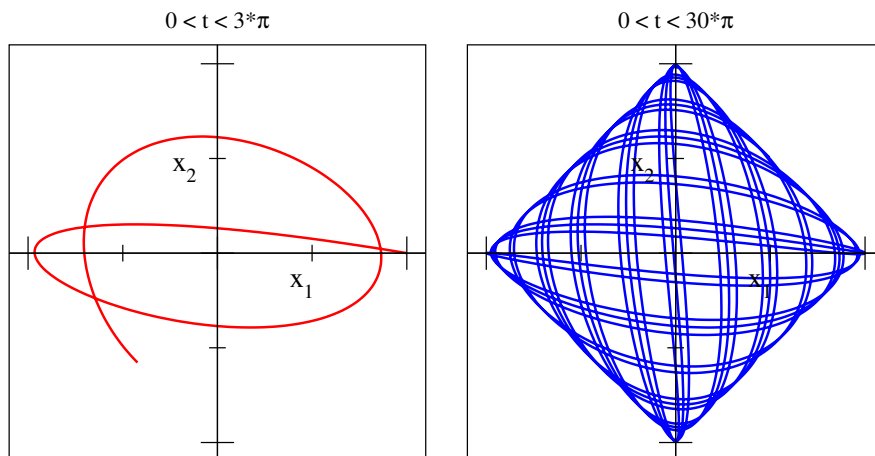


Abbildung 7.21: Darstellung der 2 gekoppelten Pendel aus der Abb. 7.20. In dieser Darstellung sind  $x_1$ , horizontale Achse, und  $x_2$  auf der vertikalen Achse für gleichen Zeitpunkt aufgetragen.



## 7.5 Gekoppelte Schwingungen im Kristallgitter

Wir betrachten jetzt die Eigenschwingungen, die die regelmäßig angeordneten Atome im Kristall ausführen können.

In einem Kristall wiederholt sich eine Anordnung von  $\tilde{m}$  Atomen periodisch in allen Raumrichtungen. Man kann den Kristall durch wiederholtes Aneinanderfügen eines geeignet geformten Volumens ("Einheitszelle") erhalten, das gerade diese  $\tilde{m}$  Atome enthält. Der gesamte Kristall bestehe aus  $N$  Einheitszellen, enthalte also  $N \cdot \tilde{m}$  Atome. Jedes dieser Atome kann sich in drei Raumrichtungen verschieben, sowie Drehungen um 3 Achsen durchführen. Der gesamte Kristall hat also  $3 N \cdot \tilde{m}$  Freiheitsgrade der Bewegung. Hierbei entsprechen 3 Freiheitsgrade der Translation des gesamten Kristalls und drei Freiheitsgrade der Rotation des Kristalls. Die übrigen  $3 N \cdot \tilde{m} - 6$  Freiheitsgrade entsprechen Schwingungen der Atome gegeneinander.

### 7.5.1 Die einatomige lineare Kette

Bevor wir den allgemeinen Fall behandeln, betrachten wir zunächst ein stark vereinfachtes Modell, bei dem  $N$  identische Atome (Masse:  $M$ ) in  $x$ -Richtung in Form einer Kette aufgereiht sind (einatomige lineare Kette). Die Atome sollen sich nur in  $x$ -Richtung bewegen können und um Gleichgewichtspositionen  $x_n^0$  herum schwingen können. Die entsprechende Anordnung ist in Abb. 7.22 skizziert.

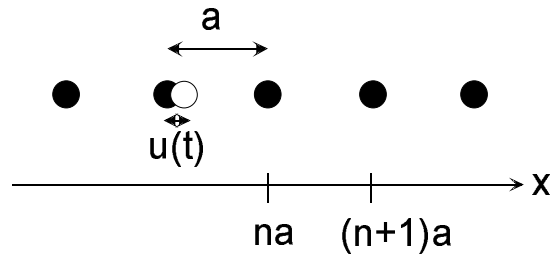


Abbildung 7.22: Einatomige lineare Kette.

Der Gleichgewichtsabstand der Atome sei  $a$ , wobei sich das erste Atom bei  $x = 0$  befindet. Für den Gleichgewichtsabstand  $x_n^0$  gilt daher:  $x_n^0 = na$ . Die zeitabhängige Position des Atoms  $n$  ist:  $x_n(t) = na + u_n(t)$ , wobei  $u_n(t)$  Schwingungen beschreibt. Im Folgenden benutzen wir aus Gründen der Einfachheit<sup>5</sup> **zyklische Randbedingungen**, d. h. wir nehmen an, Atom 1 sei identisch mit Atom  $N$  (dies lässt sich dadurch erreichen, dass wir die Enden der Kette zu einem Ring verbinden).

Weiter sei die Kraft zwischen Atom  $n$  und seinen nächsten Nachbarn an den Positionen  $x_{n+1}$  und  $x_{n-1}$  durch das Hook'sche Gesetz beschrieben, d. h. proportional zur relativen Vergrößerung des Abstands dieser Atome über den Gleichgewichtsabstand  $a$  hinaus.

Es gilt also:

$$F_{n,n-1} = D(u_{n-1} - u_n) = D(u_{n-1} - u_n) \quad (7.71)$$

bzw.

$$F_{n,n+1} = -D(u_{n+1} - u_n), \quad (7.72)$$

mit der Federkonstanten  $D$ .

Die Kräfte zwischen weiter entfernten Atomen, d. h.  $F_{n,n-2}$  usw., sollen vernachlässigt werden.

<sup>5</sup>Eine analoge Rechnung ließe sich auch für offene Randbedingungen durchführen.

Die Gesamtkraft auf das Atom  $n$  ist:  $F_n = D(u_{n+1} - u_n) + D(u_n - u_{n-1})$ ,  
die **Newton'sche Bewegungsgleichung** für dieses Atom lautet:

$$M\ddot{u} = D \cdot (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad \text{mit} \quad n = 1, \dots, N \quad (7.73)$$

Wir nehmen jetzt an, alle Atome schwingen mit der gleichen Frequenz  $\omega$ , d. h. wir wählen den **Ansatz**:  $u_n = \hat{u}_n e^{-i\omega t}$ .

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen liefert:

$$-M\omega^2 \hat{u}_n = D \cdot (\hat{u}_{n+1} + \hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n) \quad (n = 1..N) \quad (7.74)$$

Mit  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$  können wir dies in der Matrixform:

$$-\frac{M\omega}{D} \vec{u} = \overleftrightarrow{A} \vec{u} \quad (7.75)$$

schreiben. Hierbei sind die Diagonalelemente  $A_{nn}$  der  $N \times N$ -Matrix<sup>6</sup>  $\overleftrightarrow{A}$  gleich  $-2$ , die Elemente  $A_{n,n-1}$  und  $A_{n,n+1}$  gleich  $1$  und alle anderen Elemente gleich  $0$ .

Gleichung 7.75 hat die Form einer Eigenwertgleichung, wie Sie sie bei der Behandlung zweier gekoppelter Pendel kennengelernt haben. Allerdings ist die Matrix jetzt erheblich größer.

Wenn man die lineare Kette an einem Atom anstößt, breitet sich eine Welle entlang der Kette aus. Es liegt daher Nahe, einen Ansatz für die Atompositionen  $\hat{u}_n$  so zu wählen, dass die Atompositionen eine Welle  $e^{ikx}$  "abtasten".

Wir setzen deshalb an:  $\hat{u}_n = u \cdot e^{ikna}$ .

Einsetzen in 7.74 liefert:

$$-M\omega^2 u e^{ikna} = D \cdot u \cdot (e^{ik(n+1)a} + e^{ik(n-1)a} - 2e^{ikna}) \quad (7.76)$$

Kürzen von  $u$  und Multiplikation mit  $e^{-ikna}$  liefert:

$$M\omega^2 = -D(e^{ika} + e^{-ika} - 2) = 2C(1 - \cos ka) \quad \text{bzw} \quad \omega^2 = \frac{2D}{M}(1 - \cos ka) \quad (7.77)$$

Es gilt:  $1 - \cos(ka) = 2 \sin^2(ka/2)$ , woraus folgt

$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \quad (7.78)$$

Für die Amplituden  $x_n(t)$  erhalten wir schließlich:  $x_n(t) = na + u \cdot e^{i(nka - \omega t)}$

(bzw. im reeller Schreibweise:  $x_n(t) = na + u \cdot \cos(nka - \omega t)$ )

Wir müssen jetzt diskutieren, welche Werte  $k$  annehmen kann.

Zunächst ist zu beachten, dass zur Phase  $k \cdot a$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  addiert werden kann, ohne den Wert von  $x_n(t)$  zu ändern. Daher kann  $k \cdot a$  auf den Wertebereich

<sup>6</sup>Die zyklischen Randbedingungen können wir dadurch berücksichtigen, dass wir die Matrix um eine 0-te Zeile bzw. Spalte erweitern, die wiederum die Elemente  $u_N$  enthält.

$-\pi \leq ka \leq \pi$  eingeschränkt werden. Dieses Intervall nennt man auch die "1. Brillouin-Zone" (eine analoge Definition lässt sich auch in 3 Dimensionen machen). Die Abb. 7.23 zeigt die Funktion  $\omega(k)$

Jetzt nutzen wir die Annahme zyklischer Randbedingungen aus. Es gilt:  $u_n = u_{N+n}$  und damit:

$$e^{inka} = e^{i[(n+N)ka+2\pi l]} \quad (7.79)$$

Hierbei ist  $l$  eine ganze Zahl. Der Ausdruck  $2\pi l$  gibt an, dass die Phase nur bis auf Vielfache von  $2\pi$  bestimmt ist. Hieraus folgt:  $Nka = 2\pi l$  und daraus:

$$k = \frac{2\pi}{Na} \cdot l. \quad (7.80)$$

Da  $ka$  nur zwischen  $-\pi$  und  $\pi$  zu variieren braucht, kann man  $l$  einschränken auf die ganzen Zahlen zwischen  $-N/2$  und  $N/2$ . Dies sind  $N$  unabhängige Werte (eigentlich  $N+1$ ; man beachte aber, dass durch die zyklischen Randbedingungen ist aber der erste und der letzte Wert äquivalent).

Damit nimmt  $k$   $N$  Werte an, also genau der Zahl der Freiheitsgrade entspricht, die in einer Dimension zu "vergeben" sind. Der Wert  $k = 0$  entspricht dabei der Translation der gesamten Kette.

Die Abb. 7.24 illustriert, dass  $k$ -Werte außerhalb der 1. Brillouin-Zone keine Informationen an den durch die Atome vorgegebenen Positionen liefert, die nicht auch durch eine Welle mit  $|ka| < \pi$  geliefert würde.

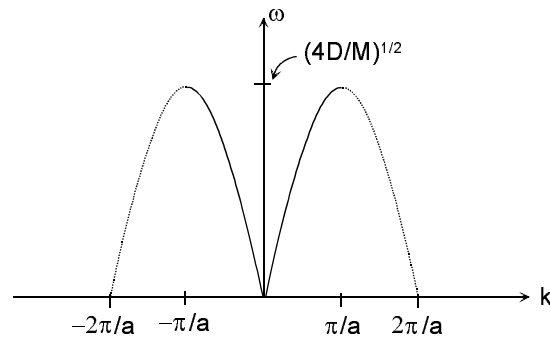


Abbildung 7.23: Dispersionsrelation  $\omega(k)$  der einatomigen linearen Kette.

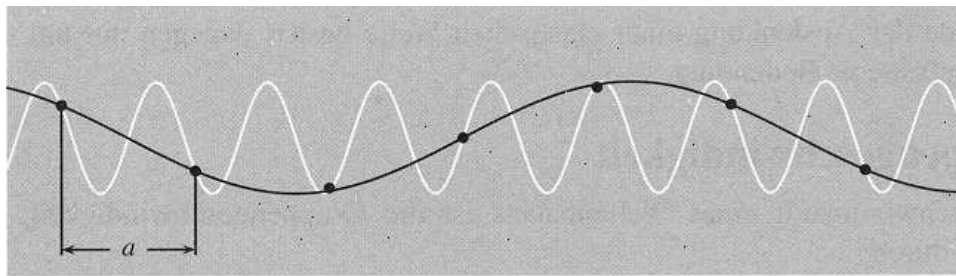


Abbildung 7.24: Die Welle der durchgezogenen Kurve übermittelt keine Information, die nicht auch durch die gestrichelte Kurve gegeben wird. Man braucht nur Wellenlängen größer als  $2a$ , um die Bewegung der Atome wiederzugeben (aus Ch. Kittel, Festkörperphysik, Abb. 4.5)

Wir betrachten jetzt die Lösungen  $u_n(t)$  bei  $k = \pm\pi/a$  (d. h. am Zonenrand):

$$u_n = u \cdot e^{\pm i\pi n} e^{-i\omega t} = u \cdot (-1)^n \cdot e^{-i\omega t} \quad (7.81)$$

Dies entspricht einer *stehenden Welle*. Benachbarte Atome schwingen dabei abwechselnd voneinander weg und zueinander hin.

Im Grenzfall  $ka \ll 1$  (langwelliger Grenzfall) gilt:  $\sin ka/2 \approx ka/2$  und damit:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{M}} \cdot s \cdot k \equiv ck. \quad (7.82)$$

Hier wird also der Zusammenhang zwischen  $\omega$  und  $k$  für Schallwellen reproduziert.

### 7.5.2 Die zweiatomige lineare Kette

Wir diskutieren nun die Eigenschwingungen einer eindimensionalen Kette aus 2 unterschiedlichen Atomen mit Massen  $M_1$ ,  $M_2$  (s. Abb. 7.25)

Die Vorgehensweise besteht darin, der einen Atomsorte die Koordinaten  $u_n$ , der anderen die Koordinaten  $v_n$  zu geben.

Es ergeben sich ganz analog zur einatomigen linearen Kette die Bewegungsgleichungen:

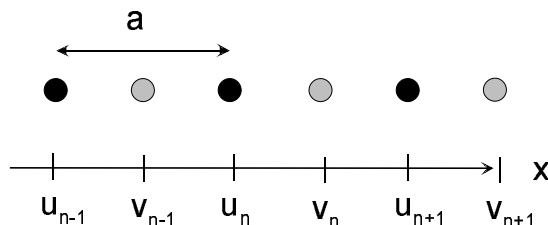


Abbildung 7.25: *Eindimensionale zweiatomige Kette*

$$M_1 \ddot{u}_n = D \cdot (v_n + v_{n-1} - 2u_n) \quad (7.83a)$$

$$M_2 \ddot{v}_n = D \cdot (u_{n+1} + u_n - 2v_n) \quad (7.83b)$$

Mit dem Ansatz  $u_n = u \cdot e^{i(nka - \omega t)}$ ;  $v_n = v \cdot e^{i(nka - \omega t)}$  findet man das Gleichungssystem:

$$-\omega^2 M_1 u = Dv[1 + e^{-ika}] - 2Du \quad (7.84a)$$

$$-\omega^2 M_2 v = Du[1 + e^{ika}] - 2Dv \quad (7.84b)$$

Diese beiden Gleichungen stellen wiederum ein Eigenwertproblem für die Größen  $u$  und  $v$  dar. Kombiniert man  $(u, v)$  zu einem Vektor so ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 2D - M_1 \omega^2 & -D \cdot [1 + e^{-ika}] \\ -D \cdot [1 + e^{ika}] & 2D - M_2 \omega^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad (7.85)$$

Die Determinante der  $2 \times 2$ -Matrix muss verschwinden, um eine nichttriviale Lösung zu erhalten. Dies liefert:

$$M_1 M_2 \omega^4 - 2C \cdot (M_1 + M_2) \omega^2 + 2C^2(1 - \cos ka) = 0 \quad (7.86)$$

was eine quadratische Gleichung für  $\omega^2$  darstellt, also elementar gelöst werden kann. Wir betrachten aber nur zwei Grenzfälle:

- Lösung für  $ka \ll 1$ :

$$\omega^2 = 2D \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \quad (\text{"optischer Zweig"}) \quad (7.87)$$

oder

$$\omega^2 = \frac{C}{2(M_1 + M_2)} k^2 a^2 \quad (\text{"akustischer Zweig"}) \quad (7.88)$$

- Lösung an der Zonengrenze bei  $k = \pm\pi/a$ : 
$$\omega^2 = \frac{2D}{M_1} \quad (7.89)$$

oder 
$$\omega^2 = \frac{2D}{M_2} \quad (7.90)$$

Die kompletten Lösungen  $\omega(k)$  sind in Abb. 7.26 aufgetragen.

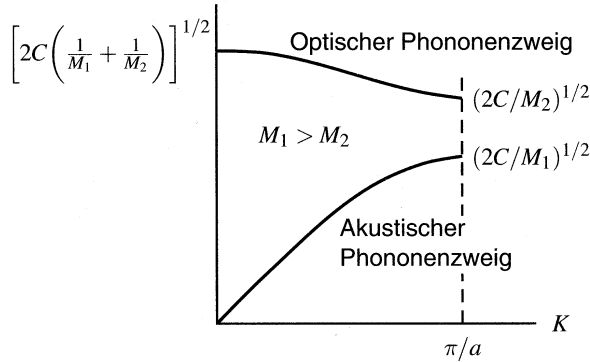


Abbildung 7.26: *Optischer und akustischer Zweig der linearen zweiatomigen Kette. Die Wellenzahl ist in der Abbildung mit  $K$  bezeichnet, die Federkonstante mit  $D$ . (aus Ch. Kittel, Festkörperphysik, Abb. 4.7)*

Für  $ka \ll 1$  schwingen auf dem akustischen Zweig die beiden Atomsorten im wesentlichen miteinander. Auf dem optischen Zweig dagegen gegeneinander. An der Zonengrenze erhält man wiederum eine Stehwelle, wobei bei der ersten Lösung die Atome der Sorte 1 gegeneinander schwingen und die Atome der Sorte 2 in Ruhe sind. Bei der zweiten Lösung sind die Atome der Sorte 1 in Ruhe, die Atome der Sorte 2 schwingen gegeneinander. In Abb. 7.27 sind die Schwingungsmoden für  $ka \ll 1$  skizziert.

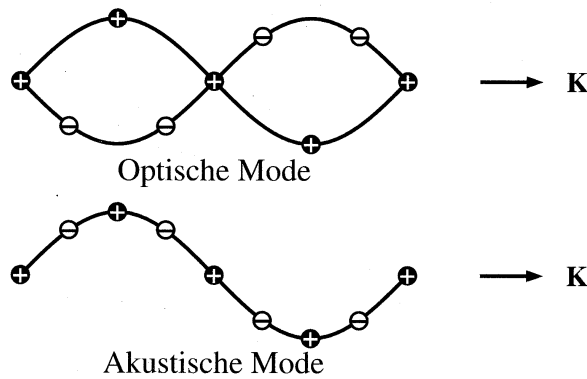


Abbildung 7.27: *Optische und akustische Mode der zweiatomigen linearen Kette für  $ka \ll 1$ . Die Verschiebungen der Atome sind in transversaler Richtung aufgetragen. (aus Ch. Kittel, Festkörperphysik, Abb. 4.10)*

Durch die beiden Zweige erhält man  $2N$  Werte für die Wellenzahl  $k$ . Dies entspricht wiederum der Zahl der Freiheitsgrade der  $2N$  Atome. Betrachtet man allgemein  $\tilde{m}$  unterschiedliche Atome, so erhält man insgesamt  $\tilde{m}$  Zweige, von denen einer für  $k = 0$  bei  $\omega = 0$  beginnt (akustischer Zweig). Alle anderen Zweige beginnen bei endlichen Werten von  $\omega$  (optische Zweige).

### 7.5.3 Gekoppelte Schwingungen in drei Dimensionen

Lässt man bei der linearen Kette weiter die Bewegung der Atome in alle drei Raumrichtungen zu, so verdreifacht sich die Zahl der Lösungen. Jeder Zweig spaltet in zwei

transversale Moden und eine longitudinale Mode auf. Hierbei sind die transversalen Moden oft entartet, d. h. sie haben für festes  $k$  die gleiche Frequenz.

Auch in diesem allgemeineren Fall liegen alle verfügbaren Schwingungsfreiheitsgrade innerhalb der ersten Brillouin-Zone.

Geht man weiter zu dreidimensionalen Atomanordnungen über, so vergrößert sich die Zahl der Freiheitsgrade bzw. die Zahl der Zweige nicht mehr. Die Wellen können sich aber in verschiedene Kristallrichtungen ausbreiten, man muss von der Wellenzahl  $k$  zum Wellenvektor  $\vec{k}$  übergehen. Graphisch wird dann  $\omega(\vec{k})$  entlang besonders symmetrischer Kristallrichtungen aufgetragen. Die Abb. 7.28 zeigt dies am Beispiel von Germanium. Hier wurde  $\omega(\vec{k})$  entlang der Raumdiagonalen [”(111)-Richtung“].

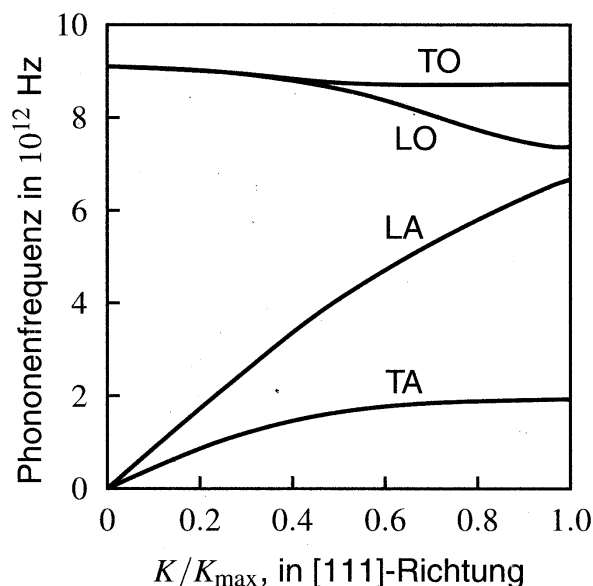


Abbildung 7.28: *Dispersionsrelation entlang der Raumdiagonalen [”(111)-Richtung“]. TO: Transversal-optischer Zweig; LO: Longitudinal-optischer Zweig; LA: Longitudinal akustischer Zweig; TA: Longitudinal akustischer Zweig.* (aus Ch. Kittel, *Festkörperphysik*, Abb. 4.8a)

Abb. 7.29 zeigt die mit Hilfe von Neutronen-Streuexperimenten gemessene Dispersionsrelation von GaAs entlang verschiedener Kristallrichtungen. Das Symbol  $\Gamma$  entspricht dem Ursprung, d. h.  $k = 0$ .

Die Abb. 7.30 zeigt schließlich die berechneten Eigenmoden der supraleitenden Verbindung  $Tl_2Ba_2CaCu_2O_8$ , die 15 Atome in der Einheitszelle enthält. Entsprechend komplex ist die Zahl der Phononzweige. Man sieht aber sehr schön, dass am  $\Gamma$ -Punkt ( $k = 0$ ) jeweils drei akustische Zweige beginnen. Die optischen Zweige sind z. T. entartet. Es sind aber insgesamt 42 optische Zweige zu jedem  $k$ -Wert vorhanden.

#### 7.5.4 Nichtlineare Effekte

Abschließend wollen wir noch kurz erwähnen, dass eine Vielzahl neuer Effekte auftreten, wenn Schwingungen nichtlinear werden, d. h. die Rückstellkräfte nicht mehr proportional zur Auslenkung sind (Beim Fadenpendel war die Rückstellkraft ja eigentlich proportional zum Sinus aus dem Aulenkwinkel).

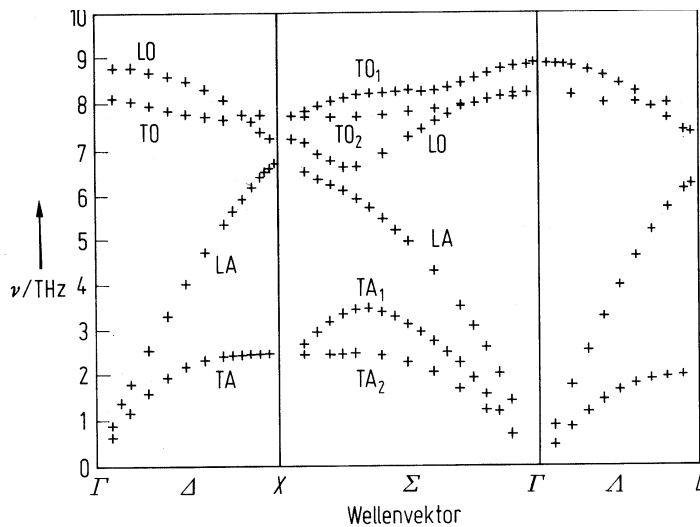


Abbildung 7.29: Mit Hilfe von Neutronen-Streuexperimenten gemessene Dispersionsrelation von GaAs entlang verschiedener Kristallrichtungen. (aus Bergmann-Schaefer, Festkörperphysik, Abb. 1.30)

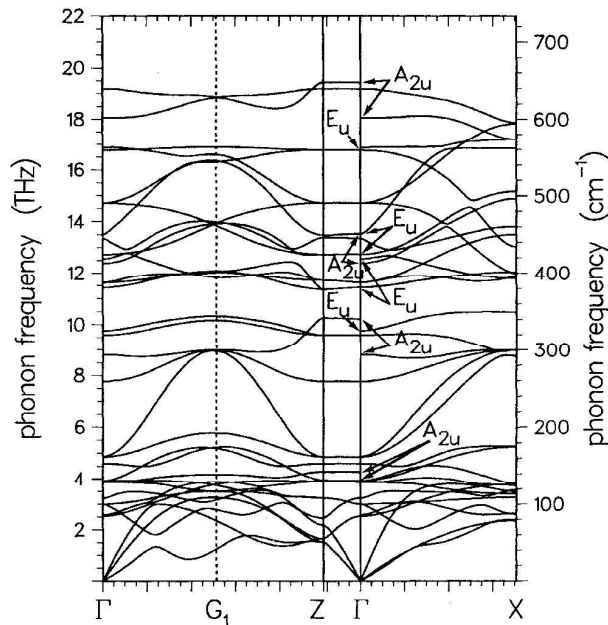


Abbildung 7.30: Berechnete Eigenmoden der Verbindung  $Tl_2Ba_2CaCu_2O_8$  (aus: Kulkarni et al., *Physical Review B* 43, S. 5451).

In vielen Fällen werden die **Schwingungen chaotisch**. Der Auslenkwinkel  $\varphi$  eines chaotischen Pendels beispielsweise verläuft dann unperiodisch und vor allem auch unvorhersagbar. Jede kleinste Störung ändert den zeitlichen Verlauf völlig. Dieses Verhalten kann beispielsweise bei Pendeln auftreten, deren Aufhängepunkt selbst durch ein Pendel gegeben ist.

Eine weitere Eigenschaft nichtlinearer Pendel ist die Möglichkeit der **Phasensynchronisation**. So beobachtete Hughens im 19. Jh. dass, zwei an einer Wand befestigte, ursprünglich mit leicht unterschiedlicher Frequenz schwingende Pendeluhr nach einiger Zeit mit gleicher Frequenz synchron schwingen. Dieser Effekt der Phasensynchronisation nichtlinearer Oszillatoren wird in der Physik häufig ausgenutzt.

Ein letztes Beispiel ist eine Kette von Pendeln, die durch Gummibänder verbunden sind. Auch hier ist die durch die Gravitation hervorgerufene Rückstellkraft proportional zum

Sinus des Auslenkwinkels<sup>7</sup>. Verdreht man ein Ende der **Pendelkette** um  $360^\circ$ , so kann sich diese Verdrillung inkl. der daran hängenden Pendel wie ein Teilchen bewegen. Diese Anregungsform heisst "**Soliton**". Die Bewegung gehorcht den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie. Die Abb. 7.31 bis 7.33 zeigen abschließend einige Bewegungsformen einer solchen Pendelkette.

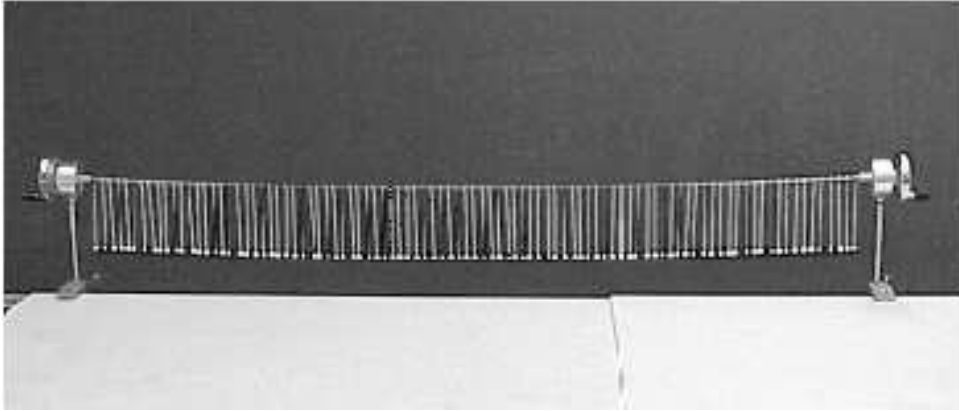


Abbildung 7.31: *Durch ein Gummiband verbundene Kette von Pendeln. (aus: "Wellenmaschine zur Demonstration harmonischer und anharmonischer Wellenphänomene (Solitonen)", M. Dietrich, H. J. Patt, <http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).*

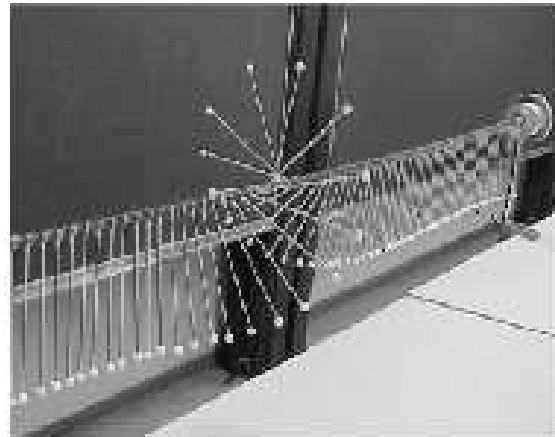


Abbildung 7.32: *links: Wellen kleiner Amplitude auf der Pendelkette; rechts: um  $360^\circ$  verdrehte Pendelkette. Die Verdrehung wird auch als "Soliton" bezeichnet. (aus: "Wellenmaschine zur Demonstration harmonischer und anharmonischer Wellenphänomene (Solitonen)", M. Dietrich, H. J. Patt, <http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).*

<sup>7</sup>Die Bewegungsgleichung der Kette, eine nichtlineare Wellengleichung, heisst "Sinus-Gordon-Gleichung".



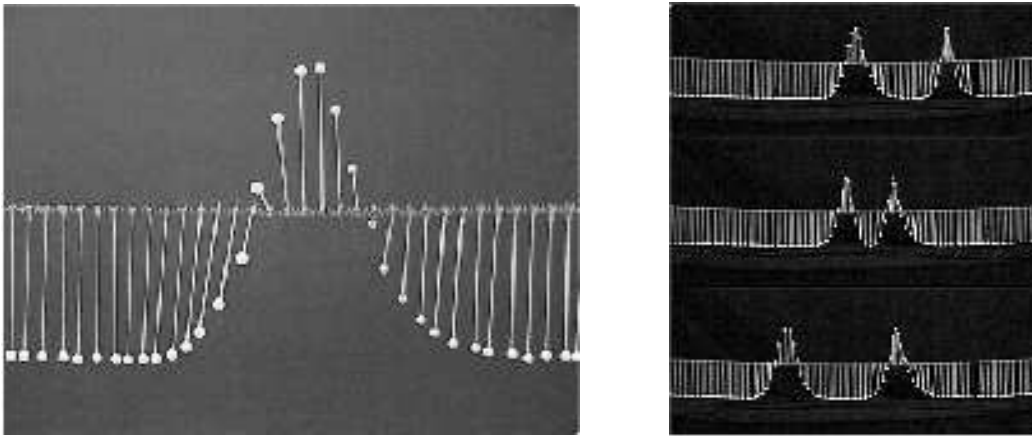


Abbildung 7.33: links: ruhendes Soliton von der Seite betrachtet; rechts: Stoß eines sich von links nach rechts bewegenden Solitons mit einem gegenläufigen "Antisoliton" mit umgekehrten Drehsinn der Verdrillung des Bandes (aus: "Wellenmaschine zur Demonstration harmonischer und anharmonischer Wellenphänomene (Solitonen)", M. Dietrich, H. J. Patt, <http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).