Übungen zur Mathematischen Logik I — Blatt 4

Prof. Schroeder-Heister — **Wintersemester 2017/18**
René Gazzari — **Universität Tübingen**

DEF (Deduktiver Abschluss): Wir definieren den *deduktiven Abschluss* $\mathrm{Ded}(\Gamma)$ einer Formelmenge $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ wie folgt: $\mathrm{Ded}(\Gamma) \;=\; \{\phi \in \mathrm{PROP};\ \Gamma \models \phi\}$

Aufgabe 13: Zeigen Sie, dass der deduktive Abschluss die folgenden Eigenschaften hat:

1. *extreme Werte:* $\mathrm{Ded}(\bot) = \mathrm{PROP}$, $\mathrm{Ded}(\neg\bot) = \mathrm{TAUT}$
2. *reflexiv:* $\Gamma \subseteq \mathrm{Ded}(\Gamma)$
3. *abgeschlossen:* $\mathrm{Ded}(\Gamma) = \mathrm{Ded}(\mathrm{Ded}(\Gamma))$
4. *monoton:* Falls $\Delta \subseteq \Gamma$, dann $\mathrm{Ded}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Ded}(\Gamma)$.

Dabei ist TAUT die Menge aller Tautologien von PROP.

Aufgabe 14: Es seien $\phi, \psi, \sigma \in \mathrm{PROP}$ beliebige Formeln. Prüfen Sie, ob folgende Strukturen zu Ableitungen ergänzt werden können. Geben Sie gegebenenfalls die jeweilige Ableitung vollständig an; geben Sie zudem auch zwei Ableitbarkeitsbehauptungen an, die durch diese Ableitung belegt wird. Andernfalls begründen Sie kurz, warum keine Ergänzung möglich ist.

(a)
$$\dfrac{\phi \qquad \psi \qquad \sigma}{(\phi \wedge \psi) \wedge \sigma}$$

(b)
$$\dfrac{\dfrac{[\phi \wedge \psi]}{\phi \qquad \psi}}{\phi \wedge \psi \to \phi \qquad \phi \wedge \psi \to \psi}$$

(c)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi}{\phi \to \phi}}{(\phi \to \phi) \to (\phi \to \phi)}}{\phi \to ((\phi \to \phi) \to (\phi \to \phi))}$$

(d)
$$\dfrac{\dfrac{[\phi] \qquad \neg\phi}{\bot}}{\neg\phi}\ (\mathrm{RAA})$$

(e)
$$\dfrac{\dfrac{[\phi] \qquad \neg\phi}{\bot}}{\neg\phi}$$

(f)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^1 \qquad [\neg\phi]^2}{\bot}}{\neg\phi}\,(1)}{\bot \to \neg\phi} \qquad [\neg\phi]^2}{\bot}}{\phi}\,(2)$$

Aufgabe 15: Beweisen Sie ausführlich, dass für alle Formeln $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$ und alle Formelmengen $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{PROP}$ die folgenden Strukturregeln im Kalkül NK' gelten. (Vgl. Prop 6.6.)

(a) $\phi \vdash \phi$ (Identität)
(b) $\Gamma \vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \Gamma, \Delta \vdash \phi$ (Verdünnung)
(c) $\big(\Gamma \vdash \phi \quad \text{und} \quad \Delta, \phi \vdash \psi\big) \quad \Rightarrow \quad \Gamma, \Delta \vdash \psi$ (Schnitt)

Aufgabe 16: Beweisen Sie die folgenden Behauptungen mithilfe des Kalküls NK:

(a) $\vdash \phi \to (\psi \to \phi)$
(b) $\vdash \phi \wedge \psi \to \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$ und $\vdash \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \to \phi \wedge \psi$
(c) $\vdash \phi \vee \psi \to \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$ und $\vdash \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \to \phi \vee \psi$

Abgabe der Aufgaben montags bis 17:30 Uhr (Internet) bzw. in der Vorlesung.