

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Zeigen Sie für NK:

- (a) $\sigma \vee \tau \vdash \tau \vee \sigma$ (1 Punkt)
- (b) $\vdash (\varphi \wedge \neg \varphi) \rightarrow \psi$ (2 Punkte)
- (c) $\vdash \neg \varphi \vee \psi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg \psi)$ (2 Punkte)
- (d) $\vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ (2 Punkte)

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $\varphi \downarrow \psi$ eine Abkürzung für $\neg(\varphi \vee \psi)$. Zeigen Sie für NK:

- (a) $\varphi \downarrow \psi, \varphi \vdash \perp$ und $\varphi \downarrow \psi, \psi \vdash \perp$. (1 Punkt)
- (b) $(\Gamma, \varphi \vdash \perp \text{ und } \Delta, \psi \vdash \perp) \implies \Gamma, \Delta \vdash \varphi \downarrow \psi$. (2 Punkte)
- (c) Geben Sie Einführungs- und Beseitigungsregeln für \downarrow an, in denen außer \perp und \downarrow keine weiteren Konnektive vorkommen. Beachten Sie dabei die Ergebnisse unter (a) und (b). (2 Punkte)

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Beweisen Sie für $\Gamma \subseteq \text{PROP}$, dass folgende Eigenschaften zueinander äquivalent sind:

- (a) Γ ist konsistent gemäß Definition 7.3.
- (b) Es gibt keine Formel $\varphi \in \text{PROP}$, so dass $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma \vdash \neg \varphi$.
- (c) Es gibt $\varphi \in \text{PROP}$ mit $\Gamma \not\vdash \varphi$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Welche der folgenden Mengen sind konsistent gemäß Definition 7.3? Geben Sie jeweils eine Begründung an.

- (a) $\Gamma = \{\neg p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_0, p_1 \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow p_2), p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$ (1 Punkt)
- (b) $\Delta = \{p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, p_3 \rightarrow p_0\}$ (2 Punkte)
- (c) $\Theta = \{p_0 \rightarrow p_1, p_0 \wedge p_2 \rightarrow p_1 \wedge p_3, (p_0 \wedge p_2) \wedge p_4 \rightarrow (p_1 \wedge p_3) \wedge p_5, \dots\}$ (2 Punkte)