Mathematische Logik I

— Foliensatz 2 —

Dr. Michael Arndt

Wintersemester 2014/15

Semantik

Im Folgenden wird die Semantik für die formale Sprache der Aussagenlogik (AL) als rekursive Funktion über der Struktur von AL-Aussagen eingeführt.

Die Semantikfunktion weist jeder AL-Aussage eine *Bedeutung* zu.

Die möglichen Bedeutungen einer AL-Aussage sind die Wahrheitswerte *wahr* und *falsch*.

Aus Gründen der Darstellung stehe 1 für *wahr* und 0 für *falsch*.

Wahrheitstafeln

Definition 1 (Wahrheitstafel)

Eine *Wahrheitstafel* definiert die Wahrheitsfunktion eines Junktors in tabellarischer Form, d.h. sie erklärt für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Abbildung $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Bemerkung:

- Für die zweistelligen Junktoren erklärt jede Wahrheitstafel eine Abbildung $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$.
- Für die einstellige Negation erklärt deren Wahrheitstafel eine Abbildung $f : \{0,1\}^1 \to \{0,1\}$.
- Für die nullstellige Absurdität erklärt deren Wahrheitstafel eine Abbildung $f : \{0,1\}^0 \to \{0,1\}$.

Wahrheitstafeln

Definition 1 (Wahrheitstafel (Forts.))

$\bot$
0

ϕ	$\neg\phi$
0	1
1	0

ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ϕ	ψ	$(\phi \to \psi)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

ϕ	ψ	$(\phi \leftrightarrow \psi)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Wahrheitstafeln

Bemerkung:
Die so definierten Funktionen können aufgrund der Wahl der Wahrheitswerte auch arithmetisch dargestellt werden:

- $\bot$: $f_\bot() = 0$
- $\neg$: $f_\neg(x) = 1 - x$
- $\wedge$: $f_\wedge(x, y) = \min\{x, y\} = x \cdot y$
- $\vee$: $f_\vee(x, y) = \max\{x, y\} = x + y - x \cdot y$
- $\rightarrow$: $f_\rightarrow(x, y) = 1 - x + x \cdot y$
- $\leftrightarrow$: $f_\leftrightarrow(x, y) = 1 - |x - y|$

Belegung/Bewertung

Definition 2 (Belegung/Bewertung)

Eine Abbildung $v : \mathrm{AV} \to \{0,1\}$ heißt *Belegung der Aussagevariablen*.

Eine Abbildung $[\![\cdot]\!] : \mathrm{PROP} \to \{0,1\}$ heißt *Bewertung*, falls für alle Formeln $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$ folgendes erfüllt ist:

- $[\![\bot]\!] = f_\bot()$
- $[\![\neg\phi]\!] = f_\neg\big([\![\phi]\!]\big)$
- $[\![(\phi \circ \psi)]\!] = f_\circ\big([\![\phi]\!], [\![\psi]\!]\big)$

Bewertung

Theorem 3 (Eindeutigkeit von Bewertungen)

Sei eine Belegung $v : \mathrm{AV} \to \{0, 1\}$ *der Aussagevariablen gegeben.*

Dann gibt es eine eindeutige Bewertung $[\![\cdot]\!]_v : \mathrm{PROP} \to \{0, 1\}$*,*
so dass für jede Aussagevariable $p \in \mathrm{AV}$ *gilt:* $[\![p]\!]_v = v(p)$*.*

<u>Beweis:</u>

Einfache Anwendung des Rekursionssatzes mit

- $H_{ATM}(\phi) =_{\mathrm{def}} \begin{cases} v(\phi) & \text{falls } \phi \in AV \\ f_\perp() & \text{falls } \phi \doteq \perp \end{cases}$
- $H_\neg =_{\mathrm{def}} f_\neg$
- $H_\circ =_{\mathrm{def}} f_\circ$

□

Bewertungen

Bemerkungen:

1. Die im Satz durch die Belegung v bestimmte Bewertung nennen wir auch die *durch v induzierte Bewertung*.
2. Wenn aus dem Kontext hervorgeht, um welche Belegung v der Aussagevariablen es sich handelt, werden wir auch einfach $[\![\cdot]\!]$ statt $[\![\cdot]\!]_v$ schreiben.

Koinzidenz-Lemma

Theorem 4 (Koinzidenz-Lemma)

Sei $\phi \in \mathrm{PROP}$ *beliebige Formel. Seien* v *und* w *zwei Belegungen derart, dass für alle in* ϕ *vorkommenden Aussagevariablen* p *gilt:* $v(p) = w(p)$.

Dann gilt auch: $[\![\phi]\!]_v = [\![\phi]\!]_w$.

Beweis:

Durch Induktion über dem Aufbau von ϕ.

I. Induktionsanfang:

- p_k Nach Voraussetzung gilt: $[\![p_k]\!]_v = v(p_k) = w(p_k) = [\![p_k]\!]_w$.
- $\perp$ Nach Definition von Bewertungen gilt: $[\![\perp]\!]_v = [\![\perp]\!]_w$.

Koinzidenz-Lemma

II. Induktionsvoraussetzung:

Angenommen, die Behauptung gelte für ϕ und ψ.

III. Induktionsschluß:

$(\neg\phi)$ Analog zu $(\phi \circ \psi)$.

$(\phi \circ \psi)$ Da v und w auf allen Aussagevariablen von $(\phi \circ \psi)$ übereinstimmen, tun sie das auch jeweils auf ϕ und ψ.

Damit:

$$[\![\phi \circ \sigma]\!]_v = f_\circ([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v) \overset{(IV)}{=} f_\circ([\![\phi]\!]_w, [\![\psi]\!]_w) = [\![\phi \circ \psi]\!]_w$$

□

Definition 5

Sei $\phi \in$ PROP eine Formel.

- ϕ heißt *allgemeingültig* oder *tautologisch*, falls für jede Belegung v gilt: $[\![\phi]\!]_v = 1$.
- ϕ heißt *widersprüchlich* oder *kontradiktorisch*, falls für jede Belegung v gilt: $[\![\phi]\!]_v = 0$.
- ϕ heißt *kontingent*, falls es zwei Belegung v und w gibt mit: $[\![\phi]\!]_v = 1$ und $[\![\phi]\!]_w = 0$.
- ϕ heißt *erfüllbar* oder *konsistent*, falls es eine Belegung v gibt mit: $[\![\phi]\!]_v = 1$.

Logische Folgerung

Der Begriff der *logischen Folgerung* geht auf Bernard Bolzano und Alfred Tarski zurück.

Deren Idee war, dass logische Folgerung darin besteht, dass sich die Wahrheit der Voraussetzungen (Prämissen) auf die Wahrheit der Konklusion überträgt, und zwar unabhängig von der Interpretation der nichtlogischen Zeichen.

Das wird hier so verstanden, dass sich die Wahrheit unter alle Belegungen der nichtlogischen Zeichen überträgt.

Logische Folgerung

Definition 6 (Logische Folgerung)

Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ eine Menge von Aussagen und ψ eine Aussage.

Die Aussage ψ *folgt logisch* aus Γ, falls für jede Belegung v gilt:
Falls $[\![\phi]\!]_v = 1$ für jedes $\phi \in \Gamma$ gilt, dann gilt auch $[\![\psi]\!]_v = 1$.

Wir schreiben dafür $\Gamma \models \psi$.

Weitere Schreibweisen:

- $\phi_1, \dots, \phi_n \models \phi$ für $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \models \phi$.
- $\Gamma, \Delta \models \phi$ für $\Gamma \cup \Delta \models \phi$.
- $\Gamma, \psi \models \phi$ für $\Gamma \cup \{\psi\} \models \phi$.
- $\Gamma \not\models \phi$, falls ϕ *keine* Folgerung aus Γ ist.

Logische Folgerung

Bemerkungen:

1. Aus $\Gamma \not\models \phi$ folgt im Allgemeinen *nicht* $\Gamma \models \neg\phi$.
2. ϕ ist genau dann eine Tautologie, wenn ϕ aus der leeren Menge logisch folgt, d.h. wenn $\varnothing \models \phi$.

   Dann schreiben wir auch: $\models \phi$.
3. Wir lassen zunächst zu, dass Γ eine unendliche Menge von Formeln sein kann.

   Wir werden jedoch noch zeigen, dass man sich bei der aussagenlogischen Folgerung stets auf eine endliche Teilmenge beschränken kann.

Import-Export-Theorem

Theorem 7 (Import-Export)

Es sei $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ *und* $\phi, \psi \in \text{PROP}$ *gegeben. Dann gilt:*

$\Gamma, \phi \models \psi$ *genau dann, wenn* $\Gamma \models \phi \to \psi$*.*

Bemerkung:

Das Theorem besagt, dass der semantische Charakter einer Formel, die Prämisse einer logischen Folgerung ist, in gewisser Weise mit dem semantischen Charakter des Vorderglieds einer Implikation verwandt ist.

Import-Export-Theorem

<u>Beweis:</u>

Es sind zwei Richtungen zu zeigen:

1. „$\Rightarrow$“:

Es gelte: $\Gamma \not\models \phi \to \psi$.

Dann gibt es eine Belegung v für die folgendes gilt:
Für alle $\chi \in \Gamma$ ist zwar $[\![\chi]\!]_v = 1$, aber $[\![\phi \to \psi]\!]_v = 0$.

Unter dieser Belegung gilt insbesondere: $[\![\phi]\!]_v = 1$ und $[\![\psi]\!]_v = 0$

Also: $\Gamma, \phi \not\models \psi$.

Import-Export-Theorem

2. „$\Leftarrow$“:

Es gelte: $\Gamma, \phi \not\models \psi$.

Dann gibt es eine Belegung v für die folgendes gilt:
Für alle $\chi \in \Gamma$ ist $[\![\chi]\!]_v = 1$ und $[\![\phi]\!]_v = 1$, aber $[\![\psi]\!]_v = 0$.

Unter dieser Belegung gilt dann: $[\![\phi \rightarrow \psi]\!]_v = 0$

Also: $\Gamma \not\models \phi \rightarrow \psi$. $\square$

Wichtige logische Folgerungsbeziehungen

Folgende Beziehungen gelten für alle Formeln ϕ, χ, ψ:

1. Kettenschluß:
   $\phi \rightarrow \chi, \chi \rightarrow \psi \models \phi \rightarrow \psi$
2. Modus ponendo ponens:
   $\phi \rightarrow \psi, \phi \models \psi$
3. Modus tollendo tollens:
   $\phi \rightarrow \psi, \neg\psi \models \neg\phi$
4. Modus tollendo ponens:
   $\phi \vee \psi, \neg\phi \models \psi$
5. Modus ponendo tollens:
   $\neg(\phi \wedge \psi), \phi \models \neg\psi$

Logische Äquivalenz

Definition 8 (Logische Äquivalenz)

Seien $\phi, \psi \in$ PROP. Wir nennen die Formeln ϕ und ψ *logisch äquivalent*, falls $\phi \models \psi$ und $\psi \models \phi$ gilt.

Wir schreiben dann auch $\phi \mathrel{=}\!\mid\!\models \psi$.

Logische Äquivalenz

Lemma 9 (Äquivalenzrelation)

Die logische Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf PROP*.*
Damit gilt für alle $\phi, \psi, \sigma \in \mathrm{PROP}$*:*

1. *Reflexivität:* $\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \phi$.
2. *Symmetrie: Wenn* $\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi$ *gilt, dann auch* $\psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \phi$.
3. *Transitivität: Wenn* $\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \psi$ *und* $\psi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \chi$*, dann auch* $\phi \mathrel{=\!\!|\!\!\models} \chi$.

Beweis:

1. und 2. sind trivial. 3. verbleibt als leichte Übung. $\square$

Logische Äquivalenz

Lemma 10

Für alle Formeln $\phi, \psi \in \mathrm{PROP}$ *sind äquivalent:*

1. $\phi \mathrel{=\!\mid\!\models} \psi$.
2. *Für alle Belegungen* v *gilt:* $[\![\phi]\!]_v = [\![\psi]\!]_v$.
3. $\models \phi \leftrightarrow \psi$.

Beweis:

Übung. $\square$

Wichtige logische Äquivalenzbeziehungen

Folgende Beziehungen gelten für alle Formeln ϕ, χ, ψ:

1. Kommutativität von $\wedge$ und $\vee$:
   $\phi \wedge \psi \mathrel{=}\!\mid\!\models \psi \wedge \phi$
   $\phi \vee \psi \mathrel{=}\!\mid\!\models \psi \vee \phi$
2. Assioziativität von $\wedge$ und $\vee$:
   $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi \mathrel{=}\!\mid\!\models \phi \wedge (\psi \wedge \chi)$
   $(\phi \vee \psi) \vee \chi \mathrel{=}\!\mid\!\models \phi \vee (\psi \vee \chi)$
3. Distributivität von $\wedge$ und $\vee$:
   $(\phi \wedge \psi) \vee \chi \mathrel{=}\!\mid\!\models (\phi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$
   $(\phi \vee \psi) \wedge \chi \mathrel{=}\!\mid\!\models (\phi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)$

Wichtige logische Äquivalenzbeziehungen

Folgende Beziehungen gelten für alle Formeln ϕ, χ, ψ:

4. Absorption:
   $(\phi \wedge \psi) \vee \phi \dashv\models \phi$
   $(\phi \vee \psi) \wedge \phi \dashv\models \phi$
5. Idempotenz:
   $\phi \wedge \phi \dashv\models \phi$
   $\phi \vee \phi \dashv\models \phi$
6. Neutralität von $\perp$:
   $\phi \vee \perp \dashv\models \phi$
7. Satz vom Widerspruch:
   $\phi \wedge \neg\phi \dashv\models \perp$

Wichtige logische Äquivalenzbeziehungen

Folgende Beziehungen gelten für alle Formeln ϕ, χ, ψ:

8. Doppelte Negation:
   $\neg\neg\phi \Dashv\vDash \phi$
9. De Morgansche Gesetze:
   $\neg(\phi \wedge \psi) \Dashv\vDash \neg\phi \vee \neg\psi$
   $\neg(\phi \vee \psi) \Dashv\vDash \neg\phi \wedge \neg\psi$
10. Negation als Implikation der Absurdität:
    $\phi \rightarrow \bot \Dashv\vDash \neg\phi$
    $\neg\phi \rightarrow \bot \Dashv\vDash \phi$
11. Kontraposition:
    $\phi \rightarrow \psi \Dashv\vDash \neg\psi \rightarrow \neg\phi$

Wichtige logische Äquivalenzbeziehungen

Folgende Beziehungen gelten für alle Formeln ϕ, χ, ψ:

12 Materiale Implikation:
$\phi \rightarrow \psi \mathrel{=\!\!|\!\!|\!\!=} \neg\phi \vee \psi$

13 Import-/Export-Äquivalenz:
$\phi \wedge \psi \rightarrow \chi \mathrel{=\!\!|\!\!|\!\!=} \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$

14 Distribution von $\wedge$ und $\vee$ über die Implikation:
$\phi \wedge \psi \rightarrow \chi \mathrel{=\!\!|\!\!|\!\!=} (\phi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$
$\phi \vee \psi \rightarrow \chi \mathrel{=\!\!|\!\!|\!\!=} (\phi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)$
$\chi \rightarrow \phi \wedge \psi \mathrel{=\!\!|\!\!|\!\!=} (\chi \rightarrow \phi) \wedge (\chi \rightarrow \psi)$
$\chi \rightarrow \phi \vee \psi \mathrel{=\!\!|\!\!|\!\!=} (\chi \rightarrow \phi) \vee (\chi \rightarrow \psi)$

15 Biimplikation als wechselseitige Implikation:
$\phi \leftrightarrow \psi \mathrel{=\!\!|\!\!|\!\!=} (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$