Mathematische Logik I

— Foliensatz 5 —

Dr. Michael Arndt

Wintersemester 2014/15

Verallgemeinerung $\wedge$ und $\vee$

Definition 1 (Verallgemeinerung $\wedge$ und $\vee$)

Seien $\phi_i \in \mathrm{PROP}$ (für gewisse $i \in \mathbb{N}$). Dann seien folgende Schreibweisen rekursiv erklärt:

- Verallgemeinerte Konjunktion

$$\bigwedge_{i=1}^{1} \phi_i \;\hat{=}_{\mathrm{def}}\; \phi_1$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n+1} \phi_i \;\hat{=}_{\mathrm{def}}\; \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_k \wedge \phi_{n+1}\right)$$

- Verallgemeinerte Disjunktion

$$\bigvee_{i=1}^{1} \phi_i \;\hat{=}_{\mathrm{def}}\; \phi_1$$

$$\bigvee_{i=1}^{n+1} \phi_i \;\hat{=}_{\mathrm{def}}\; \left(\bigvee_{i=1}^{n} \phi_k \vee \phi_{n+1}\right)$$

Verallgemeinerung $\wedge$ und $\vee$

Beispiel:

- $\bigvee_{i=1}^{5} p_i \mathrel{\hat{=}} ((((p_1 \vee p_2) \vee p_3) \vee p_4) \vee p_5)$

Bemerkungen:

1. Es wurden hier *keine* unendlichen Konjunktionen und Disjunktionen definiert, sondern beliebige endliche Konjunktionen und Disjunktionen.
2. Als Grenzfall wird noch vereinbart:

$$\bigwedge_{i=1}^{0} \phi_k \mathrel{\hat{=}}_{\mathrm{def}} \neg\bot$$

$$\bigvee_{i=1}^{0} \phi_k \mathrel{\hat{=}}_{\mathrm{def}} \bot$$

Verallgemeinerung $\wedge$ und $\vee$

3 Genau genommen müßte man die Definitionen mit dem jeweiligen Grenzfall beginnen und erhielte gemäß der rekursiven Klauseln:

$$\bigwedge_{i=1}^{1} \phi_i \doteq \neg\bot \wedge \phi_1$$
$$\bigvee_{i=1}^{1} \phi_i \doteq \bot \vee \phi_1$$

Entsprechend wäre $\bigvee_{i=1}^{5} p_i \doteq (((((\bot \vee p_1) \vee p_2) \vee p_3) \vee p_4) \vee p_5)$.

Solche Formulierungen verallgemeinerter Konjunktion und Disjunktion wären unelegant, da neben den gewünschten noch andere Junktoren vorkämmen.

Algebraische Gesetze

Lemma 2 (Äquivalenzen der verallgemeinerten Junktoren)

Die bekannten algebraischen Gesetze für $\wedge$ und $\vee$ aus Lemma 2.13 gelten auch für die Verallgemeinerungen.

D.h.: Für jedes $n \in \mathbb{N}$, für alle $\phi_0, \ldots, \phi_n, \psi \in \mathrm{PROP}$ gilt:

1. *De Morgan:*

$$\neg \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i \mathrel{=\!\mid\!\models} \bigvee_{i=1}^{n} \neg\phi_i$$

$$\neg \bigvee_{i=1}^{n} \phi_i \mathrel{=\!\mid\!\models} \bigwedge_{i=1}^{n} \neg\phi_i$$

Algebraische Gesetze

Lemma 2 (Äquivalenzen der verallgemeinerten Junktoren)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$, *für alle* $\phi_0, \ldots, \phi_n, \psi \in \mathrm{PROP}$ *gilt:*

2. *Einfaches Distributivgesetz:*

$$(\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i) \vee \psi \dashv\models \bigwedge_{i=1}^{n} (\phi_i \vee \psi)$$

$$(\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i) \wedge \psi \dashv\models \bigvee_{i=1}^{n} (\phi_i \wedge \psi)$$

3. *Allgemeines Distributiv-Gesetz:*

$$(\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i) \vee (\bigwedge_{j=1}^{m} \psi_j) \dashv\models \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{j=1}^{m} (\phi_i \vee \psi_j)$$

$$(\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i) \wedge (\bigvee_{j=1}^{m} \psi_j) \dashv\models \bigvee_{i=1}^{n}\bigvee_{j=1}^{m} (\phi_i \wedge \psi_j)$$

Algebraische Gesetze

Korollar 3 (Dualität der verallgemeinerten Junktoren)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$, *für alle* $\phi_0, \ldots, \phi_n, \psi \in \mathrm{PROP}$ *gilt:*

$$\neg\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m} \phi_{i,j}\Big) \mathrel{=\!|\!\models} \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} \neg\phi_{i,j}$$

$$\neg\Big(\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} \phi_{i,j}\Big) \mathrel{=\!|\!\models} \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m} \neg\phi_{i,j}$$

Normalformen

Definition 4 (Normalformen)

Sei $\phi \in \mathrm{PROP}$ eine Formel.

1. ϕ heißt *Literal*, falls ϕ eine Aussagevariable ($\phi \doteq p$) oder eine negierte Aussagevariable ($\phi \doteq \neg p$) ist.
2. ϕ heißt *konjunktive Normalform* (KNF), falls es Literale $\lambda_{i,j}$ gibt mit:
$$\phi \doteq \bigwedge \bigvee \lambda_{i,j}$$
3. ϕ heißt *disjunktive Normalform* (DNF), falls es Literale $\lambda_{i,j}$ gibt mit:
$$\phi \doteq \bigvee \bigwedge \lambda_{i,j}$$

Normalformen

Bemerkungen:

1. Die beiden Formeln $p_1 \wedge \neg p_2$ und $p_1 \vee \neg p_2$ sind beide sowohl konjunktive als auch disjunktive Normalformen.
2. Zur übersichtlichen Darstellung konkreter konjunktiver und disjunktiver Normalformen dürfen bei iterierten Konjunktionen die Klammern der geschachtelten Konjunktionen weggelassen werden. Entsprechendes gilt bei iterierten Disjunktionen.

Beispiel:

Folgende Aussage ist eine konjunktive Normalform:
$(\neg p_0 \vee p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_0 \vee p_1 \vee p_2)$

Existenz von Normalformen

Theorem 5 (Existenz von Normalformen)

Sei $\phi \in \mathrm{PROP}$*. Dann gibt es zu* ϕ *eine Formel* $\mathrm{KNF}(\phi)$ *und eine Formel* $\mathrm{DNF}(\phi)$*, so dass:*

1. $\mathrm{KNF}(\phi) \mathrel{\Dashv\vDash} \phi$*, und* $\mathrm{KNF}(\phi)$ *ist eine konjunktive Normalform,*
2. $\mathrm{DNF}(\phi) \mathrel{\Dashv\vDash} \phi$*, und* $\mathrm{DNF}(\phi)$ *ist eine disjunktive Normalform.*

Beweis:

Durch Induktion über den Formelaufbau von ϕ, wobei nur Formeln über der Menge $\{\wedge, \vee, \neg\}$ betrachtet werden.

Existenz von Normalformen

I. Induktionsanfang

p: Eine Aussagenvariable p ist sowohl KNF als auch DNF.

Setze $\mathrm{KNF}(p) \mathrel{\hat{=}}_{\mathrm{def}} p$ und $\mathrm{DNF}(p) \mathrel{\hat{=}}_{\mathrm{def}} p$.

Damit $\mathrm{KNF}(p) \mathrel{=\!\mid\mid\!=} p$ und $\mathrm{KNF}(p) \mathrel{=\!\mid\mid\!=} p$.

II. Induktionsvoraussetzung

Es gelte die Behauptung für ψ, χ. Das heißt:

$$\psi \mathrel{=\!\mid\mid\!=} \mathrm{KNF}(\psi) \mathrel{\hat{=}} \bigwedge_{i=1}^{k} \delta_i \quad \text{und} \quad \chi \mathrel{=\!\mid\mid\!=} \mathrm{KNF}(\chi) \mathrel{\hat{=}} \bigwedge_{j=1}^{l} \delta_{k+i}$$

$$\psi \mathrel{=\!\mid\mid\!=} \mathrm{DNF}(\psi) \mathrel{\hat{=}} \bigvee_{i=1}^{m} \kappa_i \quad \text{und} \quad \chi \mathrel{=\!\mid\mid\!=} \mathrm{DNF}(\chi) \mathrel{\hat{=}} \bigvee_{j=1}^{n} \kappa_{m+i}$$

wobei κ_i Konjunktionen und δ_i Disjunktionen von Literalen sind.

Existenz von Normalformen

III. Induktionsschluß

$\neg\psi$: Mit Lemma 5.2 (3) gilt:

$$\neg\psi \overset{\text{IV}}{\mathrel{=\!\mid\!\models}} \neg \bigwedge_{i=1}^{k} \delta_i \mathrel{=\!\mid\!\models} \bigvee_{i=1}^{k} \neg\delta_i \mathrel{=\!\mid\!\models} \bigvee_{i=1}^{k} \tilde{\kappa}_i$$

und

$$\neg\psi \overset{\text{IV}}{\mathrel{=\!\mid\!\models}} \neg \bigvee_{i=1}^{m} \kappa_i \mathrel{=\!\mid\!\models} \bigwedge_{i=1}^{m} \neg\kappa_i \mathrel{=\!\mid\!\models} \bigwedge_{i=1}^{m} \tilde{\delta}_i$$

Dabei gelten $\tilde{\kappa}_i \mathrel{=\!\mid\!\models} \neg\delta_i$ und $\tilde{\delta}_i \mathrel{=\!\mid\!\models} \neg\kappa_i$ unter erneuter Verwendung von Lemma 5.2 (3) und Entfernung doppelter Negationen.

Setze $\mathrm{KNF}(\neg\psi) \mathrel{\hat{=}}_{\mathrm{def}} \bigwedge_{i=1}^{m} \tilde{\delta}_i$ und $\mathrm{DNF}(\neg\psi) \mathrel{\hat{=}}_{\mathrm{def}} \bigvee_{i=1}^{k} \tilde{\kappa}_i$.

Existenz von Normalformen

$(\psi \wedge \chi)$: Offenbar ist $\psi \wedge \chi \overset{\text{IV}}{\mathrel{=\!\!|\!\models}} \mathrm{KNF}(\psi) \wedge \mathrm{KNF}(\chi)$.

Da $\mathrm{KNF}(\psi) \wedge \mathrm{KNF}(\chi) \doteq \bigwedge_{i=1}^{k} \delta_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{l} \delta_{k+j} \mathrel{=\!\!|\!\models} \bigwedge_{i=1}^{k+l} \delta_i$,

können wir festlegen, dass $\mathrm{KNF}(\psi \wedge \chi) \doteq_{\text{def}} \bigwedge_{i=1}^{k+l} \delta_i$.

Weiterhin ist $\psi \wedge \chi \overset{\text{IV}}{\mathrel{=\!\!|\!\models}} \mathrm{DNF}(\psi) \wedge \mathrm{DNF}(\chi)$.

$\mathrm{DNF}(\psi) \wedge \mathrm{DNF}(\chi) \doteq \bigvee_{i=1}^{m} \kappa_k \wedge \bigvee_{j=1}^{n} \kappa_{m+j} \overset{\star}{\mathrel{=\!\!|\!\models}} \bigvee_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n} (\kappa_i \wedge \kappa_{m+j})$

Dabei $(\star)$ gilt nach Lemma 5.3.

Existenz von Normalformen

Nun kann man leicht zeigen, dass

$$\bigvee_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n} (\kappa_i \wedge \kappa_{m+j}) \mathrel{=\!\mid\!\models} \bigvee_{i=1}^{m+n} \kappa_k$$

Daher ist $\mathrm{DNF}(\psi \wedge \chi) \mathrel{\hat{=}}_{\text{def}} \bigvee_{i=1}^{m+n} \kappa_k$.

$(\psi \vee \chi)$: Analog zum Fall $(\psi \wedge \chi)$.

$\square$

Normalformen

Bemerkungen:

1. Das Theorem beweist die Existenz einer logisch-äquivalenten konjunktiven Normalform zu jeder beliebigen Formel.

   Dazu muss aber die stärkere Aussage gezeigt werden, dass gleichzeitig konjunktive und disjunktive Normalformen zu einer gegebenen Formel existieren.

   Im Beweis werden lediglich Formeln über der Junktorenmenge $\{\wedge, \vee, \neg\}$ betrachtet. Dies genügt, da diese Menge funktional vollständig ist (wenn $\bot$ durch $\neg p_0 \wedge p_0$ definiert wird).

   Zu einer Formel, in der andere Junktoren vorkommen, muß zunächst eine äquivalente Formel gefunden werden, die nur Junktoren aus $\{\wedge, \vee, \neg\}$ enthält.

Normalformen

Bemerkungen:

2. Eine Normalform (sowohl disjunktiv als auch konjuntiv) läßt sich direkt aus der Wahrheitstafel der gegebenen Formel konstruieren.
3. Zu einer gegebenen Formel gibt es weder nur eine einzige konjunktive Normalform noch nur eine einzige disjunktive Normalform.
4. Es handelt sich hier um Normalformen, die zu einer gegebenen Ausgangsformel logisch äquivalent sind.

   Daneben kann man auch Normalformen betrachten, die also genau dann allgemeingültig (erfüllbar) sind, wenn die Ausgangsformel allgemeingültig (erfüllbar) ist.