Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik I — Blatt 11

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **WS 2012/13**

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zeigen Sie in $\mathrm{NK}'_=$: $\vdash \forall x\big(\dot f(x) = \dot g(x)\big) \to \forall x\big(\dot f(\dot f(x)) = \dot g(\dot g(x))\big)$

Aufgabe 2 (3 + 3 Punkte)

Es sei $\{T_i \mid i \in I\}$ eine nicht-leere Familie von Theorien, welche durch Mengeninklusion linear geordnet ist. Weiterhin sei $T = \bigcup\{T_i \mid i \in I\}$. Zeigen Sie:

(a) T ist eine Theorie, die jede Theorie T_i erweitert.

(b) Wenn jede Theorie T_i konsistent ist, dann ist auch T konsistent.

Aufgabe 3 (2 + 4 Punkte)

Sei $\mathcal{L}$ eine formale Sprache, so dass die beiden Konstanten $\dot c$ und $\dot d$ die einzigen nichtlogischen Zeichen sind.

(a) Geben Sie eine Formel $\varphi \in \mathcal{L}$ an, die genau dann in einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ gültig ist, wenn A 2-elementig ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Sei dann $\Gamma := \{\varphi, \dot c \neq \dot d\}$ und $T := \mathrm{Ded}(\Gamma)$ die resultierende Theorie. Prüfen Sie, ob T eine Henkintheorie ist.

Aufgabe 4 (3 + 3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass im Beweis des Modell-Existenz-Satzes (Theorem 12.12) die Funktion $f^{\mathfrak{A}}$ wohldefiniert ist, d.h. dass gilt:

$$t_1 \sim s_1, \ldots, t_n \sim s_n \implies f^{\mathfrak{A}}(\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_n}) = f^{\mathfrak{A}}(\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_n}).$$

(b) Zeigen Sie, dass für jeden geschlossenen Term t gilt: $[\![t]\!]^{\mathfrak{A}} = \bar t$.

Aufgabe 5 (2 + 2 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie in NK:

(a) $\forall x(x = x),\ \forall xyz(x = y \land z = y \to x = z) \ \vdash\ \forall xy(x = y \to y = x)$

(b) $\vdash \exists x(\varphi(x) \to \forall y \varphi(y))$

Abgabe der Aufgaben am 31.1. nach der Vorlesung oder als PDF.