

# Physik II

*Integrierter Kurs  
für  
Physiker, Mathematiker  
und Informatiker*

---

**Prof. Dr. Reinhold Kleiner**

Raum D6 P40  
PHYSIKALISCHES INSTITUT: EXPERIMENTALPHYSIK II  
Auf der Morgenstelle 14  
72076 Tübingen  
*kleiner@uni-tuebingen.de*

**Prof. Dr. Herbert Müther**

Raum D7 A11  
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK  
Auf der Morgenstelle 14  
72076 Tübingen  
*herbert.muether@uni-tuebingen.de*

---

Sommersemester 2003



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>v</b>
<b>1 Elektrostatik</b>	<b>1</b>
1.1 Vorbemerkungen . . . . .	1
1.2 Die Coulomb-Kraft . . . . .	3
1.3 Das Coulombsche Gesetz, elektrostatisches Feld . . . . .	9
1.3.1 Die Delta-Funktion . . . . .	11
1.4 Differentialoperatoren und Integralsätze . . . . .	15
1.4.1 Das Flächenintegral . . . . .	15
1.4.2 Divergenz . . . . .	17
1.4.3 Der Gaußsche Integralsatz . . . . .	20
1.4.4 Die Rotation . . . . .	22
1.4.5 Der Stokessche Integralsatz . . . . .	24
1.4.6 Eindeutigkeitssatz . . . . .	27
1.4.7 Zusammenfassung . . . . .	28
1.5 Die Grundgleichungen des elektrostatischen Feldes . . . . .	29
1.5.1 Bedeutung des elektrostatischen Potentials und Energieinhalt des elektrischen Feldes . . . . .	32
1.6 Ladungen in Metallen; Influenz . . . . .	35
1.6.1 Massiver geladener metallischer Körper . . . . .	35
1.6.2 Geladener metallischer Hohlraum . . . . .	37
1.6.3 Influenz . . . . .	38
1.7 Randwertprobleme . . . . .	41
1.7.1 Beispiele, Spiegelladungsmethode . . . . .	41
1.7.2 Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems . . . . .	45
1.8 Versuche zur Influenz . . . . .	47
1.9 Multipolentwicklung . . . . .	51
1.10 Dipole in der Natur . . . . .	59
1.10.1 Induzierte Dipole und Verschiebungspolarisation . . . . .	59
1.10.2 Permanente Dipole und Orientierungspolarisation . . . . .	60
1.10.3 Ferroelektrische Stoffe . . . . .	61
1.10.4 Versuche zur Aufladung und Polarisation von Isolatoren . . . . .	65
1.10.5 Wechselwirkende Dipole: Quantitative Betrachtungen . . . . .	67
1.11 Der Plattenkondensator . . . . .	75
1.11.1 Das elektrische Feld einer unendlich großen metallischen Platte . . . . .	75
1.11.2 Das elektrische Feld im unendlich großer Plattenkondensator . . . . .	76
1.11.3 Das elektrische Feld im endlich großen Plattenkondensator . . . . .	77

1.11.4	Das Potenzial im Plattenkondensator . . . . .	78
1.11.5	Experimente zum Potenzial . . . . .	79
1.11.6	Die Kapazität des Plattenkondensators . . . . .	81
1.11.7	Energie des Plattenkondensators . . . . .	81
1.11.8	Parallel- und Reihenschaltungen von Kondensatoren . . . . .	83
1.11.9	Freie Ladungen im Kondensator . . . . .	85
1.11.10	Kondensator mit Dielektrikum . . . . .	87
1.12	Makroskopische Elektrostatik . . . . .	89
1.12.1	Polarisation, dielektrische Verschiebung . . . . .	89
1.12.2	Grenzbedingungen der Elektrostatik . . . . .	92
1.12.3	Energieinhalt des elektrischen Feldes im Medium . . . . .	94
<b>2</b>	<b>Stromfluss durch Leiter; elektrischer Widerstand</b>	<b>97</b>
2.1	Allgemeines . . . . .	97
2.2	Einfache Schaltungen mit Ohmschen Widerständen; Kirchhoffsche Regeln .	105
2.2.1	Ideale Spannungsquelle . . . . .	106
2.2.2	Reale Spannungsquelle . . . . .	107
2.2.3	Reihenschaltung von Widerständen . . . . .	108
2.2.4	Parallelschaltung von Widerständen . . . . .	109
2.2.5	Stromquellen . . . . .	110
2.2.6	Amperemeter . . . . .	110
2.2.7	Voltmeter . . . . .	111
2.2.8	Leistungsmesser . . . . .	111
2.2.9	Widerstandsmessung: Vierpunktmethode . . . . .	111
2.2.10	Widerstandsmessung: Wheatstone-Brückenschaltung . . . . .	112
2.3	Spannungsquellen . . . . .	115
2.3.1	Kondensatoren . . . . .	115
2.3.2	Galvanische Elemente . . . . .	116
2.4	Moderne Messverfahren zur Bestimmung von Ampere, Volt und Ohm . . .	121
<b>3</b>	<b>Magnetostatik</b>	<b>123</b>
3.1	Einführende Versuche . . . . .	123
3.2	Gesetze von Biot-Savart und Ampere . . . . .	129
3.2.1	Experimente zur Lorentzkraft . . . . .	134
3.3	Die Differenzialgleichungen der Magnetostatik . . . . .	137
3.4	Das magnetische Feld einer lokalisierten Stromverteilung . . . . .	143
3.5	Kraft auf magnetische Dipole in einem äusseren Magnetfeld . . . . .	151
3.6	Magnetische Kräfte und Drehmoment: Versuche . . . . .	155
3.7	Das magnetische Feld in Materie . . . . .	157
3.7.1	Das Verhalten von $\vec{B}$ und $\vec{H}$ an Grenzflächen . . . . .	159
3.8	Magnetische Dipole in der Natur . . . . .	163
3.8.1	Einige Grundbegriffe . . . . .	163
3.8.2	Induzierte Dipole, Diamagnetismus . . . . .	163
3.8.3	Permanente Dipole; Paramagnetismus . . . . .	164
3.8.4	Ferromagnetismus . . . . .	165
3.8.5	Weitere Anmerkungen . . . . .	167

<b>4</b>	<b>Maxwell-Gleichungen</b>	<b>171</b>
4.1	Das Faradaysche Induktionsgesetz . . . . .	171
4.2	Versuche zum Faraday'schen Induktionsgesetz . . . . .	177
4.2.1	Veränderliche Fläche der Leiterschleife . . . . .	177
4.2.2	Rotierende Leiterschleife . . . . .	177
4.2.3	Rotierende Spule im Erdfeld . . . . .	178
4.2.4	Spannungsinduktion in einer Leiterschleife: Zeitliche Änderung des Magnetfelds . . . . .	178
4.2.5	Induktionsgesetz bei zeitlich veränderlichem Magnetfeld: Quantita- tive Analyse . . . . .	178
4.3	Wechselstromgeneratoren und Elektromotoren . . . . .	181
4.4	Maxwellscher Verschiebungsstrom, Potenziale . . . . .	183
4.4.1	Potenziale der Elektrodynamik . . . . .	186
4.5	Energie der elektromagnetischen Felder . . . . .	191
<b>5</b>	<b>Spulen und einfache elektronische Schaltungen</b>	<b>195</b>
5.1	Allgemeines . . . . .	195
5.1.1	Induktivität einer Spule . . . . .	195
5.1.2	Energieinhalt einer Spule . . . . .	196
5.1.3	Spezielle Spulentypen . . . . .	197
5.1.4	Spulen mit Kern . . . . .	199
5.1.5	Erzeugung von Magnetfeldern . . . . .	199
5.1.6	Messung von Magnetfeldern . . . . .	200
5.2	Schaltungen mit Induktivitäten und anderen Bauelementen . . . . .	201
5.2.1	Auf- und Entladen einer Spule . . . . .	201
5.2.2	Spule unter Wechselstrom . . . . .	202
5.2.3	Komplexe Widerstände . . . . .	203
5.2.4	Leistung unter Wechselspannung . . . . .	204
5.2.5	Zweipole und Vierpole . . . . .	206
5.2.6	Tiefpass . . . . .	206
5.2.7	Hochpass . . . . .	208
5.2.8	Serieller Schwingkreis . . . . .	209
5.2.9	Paralleler Schwingkreis . . . . .	214
5.2.10	Selbsterregender Schwingkreis . . . . .	214
5.2.11	Transistoren und andere verstärkende Bauelemente . . . . .	216
5.2.12	Transformatoren . . . . .	218
<b>6</b>	<b>Elektromagnetische Wellen</b>	<b>221</b>
6.1	Lösung der Maxwellschen Gleichungen in einem Isolator . . . . .	221
6.2	Erzeugung von elektromagnetischen Wellen . . . . .	229
6.3	Überlagerung von elektromagnetischen Wellen . . . . .	235
6.4	Wellen in einem leitenden Medium . . . . .	239
6.4.1	Der Skineneffekt . . . . .	241
6.4.2	Frequenzabhängige Dielektrizitätskonstante . . . . .	242
6.5	Erzeugung, Übertragung, Empfang von Radio- und Mikrowellen . . . . .	245
6.5.1	Erzeugung . . . . .	245
6.5.2	Übertragung . . . . .	250

6.6	Empfang . . . . .	259
6.6.1	Antennen . . . . .	259
6.6.2	Homodyn- und Heterodyn-Empfang . . . . .	259
<b>7</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>261</b>
7.1	Konstanz der Lichtgeschwindigkeit . . . . .	261
7.2	Der 4-dimensionale Raum . . . . .	269
7.3	Lorentz Transformation . . . . .	273
7.4	Einige Konsequenzen aus der Lorentz Transformation . . . . .	279
7.5	Relativistische Bewegungsgleichung . . . . .	285
7.6	Relativitätstheorie und Elektrodynamik . . . . .	291

# Einleitung

Im kommenden Semester werden wir uns mit physikalischen Vorgängen beschäftigen, die mit elektrischen Ladungen zusammenhängen. Wir werden sehen, dass sich eine Vielzahl von Erscheinungen, von der statischen Reibungselektrizität über Stromfluss und Magnetismus bis hin zu elektromagnetischen Wellen sehr elegant und einheitlich beschreiben lassen.





# Kapitel 1

## Elektrostatik

### 1.1 Vorbemerkungen

Im letzten Semester hatten Sie die Newtonsche Gravitationskraft als eine fundamentale Kraft kennengelernt. Sie wirkt zwischen allen massebehafteten Körpern und ist stets anziehend.

Das **Newtonsche Gravitationsgesetz** lautete für zwei Körper (Massenpunkte) mit Massen  $m_1$  und  $m_2$ :

$$\vec{F}_{12}^G = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.1)$$

Hierbei sind  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  Abstandsvektoren, die vom Ursprung eines (z. B. kartesischen) Koordinatensystems zu den Massenschwerpunkten der beiden Körper 1 und 2 zeigen. Der Vektor  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  ist der Verbindungsvektor zwischen den beiden Massenschwerpunkten, der von Körper 1 nach Körper 2 zeigt und  $r$  ist dessen Betrag.  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$  ist die Gravitationskonstante. Die Indizes "1" und "2" an  $\vec{F}_{12}^G$  deuten an, dass die Gravitationskraft vom Körper 2 ausgeht und auf Körper 1 wirkt.  $\vec{F}_{12}^G$  zeigt von  $m_1$  nach  $m_2$ , ist also anziehend.  $\vec{F}_{21}^G$  fällt außerdem quadratisch mit dem Abstand der beiden Körper ab. Die Eigenschaft "Masse" eines Körpers ist ein Maß dafür, wie stark dieser einen zweiten Körper anzieht.

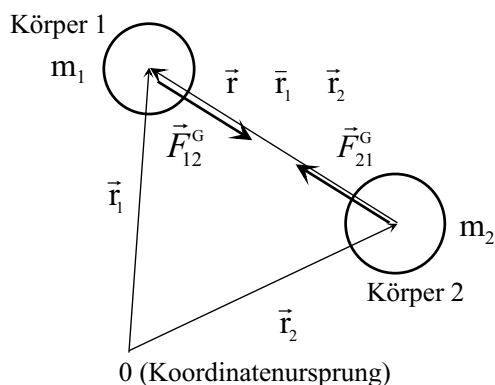


Abbildung 1.1: Zur Gravitationskraft zwischen zwei Körpern 1 und 2.

Ganz entsprechend können wir die Kraft  $\vec{F}_{21}^G$  betrachten, die Körper 1 auf Körper 2 ausübt. Aus (1.1) erkennt man sofort, dass  $\vec{F}_{21}^G = -\vec{F}_{12}^G$  gilt.  $\vec{F}_{21}^G$  und  $\vec{F}_{12}^G$  sind also entgegengesetzt gleich, was letztlich einen speziellen Fall des 3. Newtonschen Axioms darstellt.

Die Newtonsche Gravitationskraft ist eine extrem schwache Kraft. Dies erkennen wir auch ohne Rechnung daran, dass es der Masse der gesamten Erde bedarf, um auf einen Menschen eine Kraft von ca. 750 N in Richtung Erdmittelpunkt auszuüben. Die Gravitationskraft ist z. B. für die Bewegung der Planeten um die Sonne verantwortlich und sorgt dafür, dass Planeten wie die Erde oder auch die Sonne die Gestalt einer Kugel annehmen. Sie ist aber viel zu schwach, um Materie auf kleineren Skalen "im Inneren" zusammenzuhalten. So können wir beispielsweise an einen wenige Zentimeter dicken Stahlstab durchaus ein Gewicht von mehreren Tonnen hängen, bevor dieser zerbricht. Es muss also zwischen den Bestandteilen der Materie Kräfte geben, die erheblich stärker sind als die Gravitationskraft.

Hier stellt sich die Frage, warum wir diese Kräfte nicht ohne weiteres wahrnehmen können, bzw. warum diese Kräfte die Gravitationskraft auf großen Maßstäben nicht völlig überdecken. Grundsätzlich gibt es zwei mögliche Antworten:

1. die Kräfte wirken nur auf sehr kurzen Abständen, fallen also wesentlich schneller ab als die Gravitationskraft
2. die Kräfte fallen zwar langsam ab, "neutralisieren" sich aber in irgend einer Form auf großen Skalen.

Beide Formen von Kräften existieren. In späteren Kursen werden Sie die "starke Kraft" kennenlernen, die zwischen den Bestandteilen des Atomkerns auf Abständen von nur ca.  $10^{-15}$  m wirkt. Ähnliche Eigenschaften hat die "schwache Kraft", die z. B. beim radioaktiven Zerfall ( $\beta$ -Zerfall) eine Rolle spielt. Sie ist zwar durchaus nicht schwach, wirkt aber nur auf extrem kleinen Abständen. Die elektrostatischen Kräfte, die wir im folgenden betrachten werden, sind vom zweiten Typ. Sie können sowohl abstoßend als auch anziehend sein. Im Allgemeinen sind Körper makroskopischer Größe elektrisch neutral, die elektrostatischen Kräfte kompensieren sich im Inneren des Körpers.

## 1.2 Die Coulomb-Kraft

**Versuch:** Wenn wir ein Wolltuch (Katzenfell) an einem Kunststoffstab reiben und Stab und Wolltuch anschließend trennen, so stellen wir fest, dass sich beide anschließend relativ stark anziehen. Umgekehrt stoßen sich zwei geriebene Kunststoffstäbe ab.

Wir haben hier offensichtlich eine neue Kraft beobachtet (die "elektrostatische Kraft" oder die "Coulomb-Kraft"), die uns hier in Form von "Reibungselektrizität" entgegengetreten ist. Wir können jetzt dem Stab bzw. dem Wolltuch ganz in Analogie zu den Massen bei der Gravitationskraft eine neue Eigenschaft zuschreiben, die ein Maß dafür ist, wie stark dieser Körper einen anderen anzieht oder abstößt. Wir nennen diese Eigenschaft die "**elektrische Ladung**"  $Q$ . Die **Einheit der elektrischen Ladung** ist das "**Coulomb**" ( $C$ ).

Der Kunststoffstab trage die Ladung  $Q_1$ , das Wolltuch die Ladung  $Q_2$ . Ganz in Analogie zum Newtonschen Gravitationsgesetz können wir vermuten, dass auch die Coulombkraft einem Gesetz der Form

$$\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}} = \text{const.} \cdot f(r) \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.2)$$

gehört. Wir setzen also an<sup>1</sup>, dass die Coulomb-Kraft in Richtung des Verbindungsvektors  $\vec{r}$  zwischen den Massen wirkt, einem uns noch unbekanntem Abstandsgesetz  $f(r)$  gehorcht und symmetrisch in den Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  aufgebaut ist.  $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}}$  ist so angesetzt, dass wie beim Gravitationsgesetz  $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}} = -\vec{F}_{21}^{\text{Coulomb}}$  ist, d. h. das dritte Newtonsche Axiom weiterhin gilt.

Im Gegensatz zur Gravitationskraft kann die Coulombkraft sowohl anziehend als auch abstoßend sein. Dies können wir durch unterschiedliche Vorzeichen der Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  ausdrücken. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die Ladung des Wolltuchs als positiv ansetzen, die Ladung des Kunststoffstabs als negativ. Zwei gleichnamig geladene Körper (z. B. zwei Kunststoffstäbe) stoßen sich ab.  $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}}$  muss also in Richtung  $\vec{r}$  zeigen, d. h. die Konstante in (1.2) muss positiv sein. Für ungleichnamige Ladungen ist  $Q_1 Q_2 < 0$ ,  $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}}$  ist antiparallel zu  $\vec{r}$  gerichtet, die beiden Körper ziehen sich an.

Historisch gesehen war es ein weiter Weg, von der Beobachtung von Phänomenen wie der Reibungselektrizität zu einem Verständnis der Grundbausteine der Materie zu gelangen. Wir wollen diesen Weg an dieser Stelle nicht nachzeichnen. Heute wissen wir, dass die Atome aus Elektronen und Atomkernen aufgebaut sind, wobei sich die Atomkerne aus Neutronen und Protonen zusammensetzen. Neutronen und Protonen setzen sich ihrerseits aus elementaren Quarks zusammen. Elektronen und Protonen (bzw. die Quarks) sind die Träger der elektrischen Ladung. Die **Ladung eines Elektrons** beträgt  $-e \approx -1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , die **Ladung der Protonen**  $+e \approx +1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Ein elektrisch neutrales Atom enthält eine gleiche Anzahl von Protonen und Elektronen. Ionisiert man ein Atom (d. h. man entfernt Elektronen), so wird dieses positiv geladen.

Die Reibungselektrizität können wir nun qualitativ wie folgt erklären: Beim engen Kontakt des Wolltuchs mit dem Kunststoffstab treten einige Elektronen aus dem Wolltuch in den Stab über. Bei der Trennung von Stab und Tuch bleiben diese Elektronen im

<sup>1</sup>Dies muss nicht notwendig so sein. Magnetische Kräfte haben beispielsweise eine kompliziertere Form, aber auch Scheinkräfte wie die Corioliskraft, die wir im letzten Semester kennengelernt haben.

Stab, dieser trägt dann eine negative Ladung, während das Tuch positiv geladen wird. Dass die Elektronen aus dem Tuch in den Stab übertraten und nicht umgekehrt können wir an dieser Stelle noch nicht beweisen. Tatsächlich ist es auch möglich, durch Reiben eines Porzellanstabs Elektronen in das Tuch übertreten zu lassen. Ein mit dem Wolltuch geriebener Porzellanstab und ein aufgeladener Kunststoffstab ziehen sich an, was die umgekehrte Aufladung der beiden Stäbe demonstriert.

An dieser Stelle stellt sich die Frage, wie sich die elektrischen Ladungen in einem gegebenen Material (Kunststoffstab, Metallstab, Gase, Flüssigkeiten usw.) verteilen. In einem Festkörper wie einem Metall- oder Kunststoffstab sind die Atome auf einem regelmäßigen Gitter angeordnet. Elektronen, die sich in der Nähe der Kerne auf "inneren Schalen" befinden, bleiben im allgemeinen fest an die Gitterbausteine gebunden, während sich die äußeren Elektronen über den gesamten Festkörper ausbreiten können. In Metallen können sich diese Elektronen frei bewegen, in Isolatoren dagegen nicht ohne weiteres<sup>2</sup>.

In Gasen sind stets einige Atome ionisiert. Wie wir im letzten Semester diskutiert haben, sind die Geschwindigkeiten der Gasatome bzw. -moleküle über einen weiten Bereich verteilt (Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung). Einige dieser Atome besitzen eine kinetische Energie, die groß genug ist, um beim Stoß mit einem anderen Gasatom dieses zu ionisieren. Damit liegen auch in einem insgesamt neutralen Gas einige frei bewegliche Elektronen bzw. Ionen vor.

Auch in Flüssigkeiten sind einige Atome bzw. Moleküle ionisiert. Insbesondere sind etwa in Wasser eine Reihe von Salzen (z. B. NaCl) gelöst, wobei die  $\text{Na}^+$ -Ionen einfach positiv ( $Q = +e$ ), die  $\text{Cl}^-$ -Ionen einfach negativ ( $Q = -e$ ) geladen sind. Auch das Wasser selbst spaltet teilweise in  $\text{H}^+$ -Ionen (d. h. einfach positiv geladene Protonen) und  $\text{OH}^-$ -Ionen auf.

Die freie Beweglichkeit von Elektronen in Metallen können wir leicht experimentell demonstrieren.

**Versuch:** Berühren wir ein metallisches "Braunsches Elektrometer" (s. Abb. 1.2) mit einem geladenen Porzellanstab, so schlägt das drehbar geladene Blättchen des Elektrometers aus.

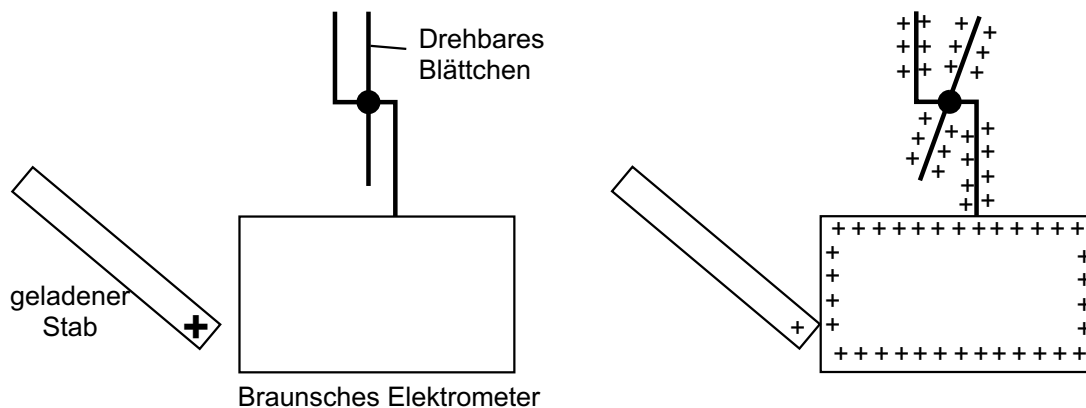


Abbildung 1.2: Das Braunsche Elektrometer

<sup>2</sup>Auf genauere Details, wie sich Elektronen in einem Isolator bewegen können, wollen wir hier nicht eingehen.

Bei Berührung des Elektrometers mit dem Stab treten Elektronen auf den Stab über, so dass das Elektrometer selbst positiv geladen wird. In dem Elektrometer können sich Elektronen wie in jedem Metall frei ausbreiten, so dass die positive Aufladung nicht auf die Kontaktstelle beschränkt bleibt, sondern sich über das gesamte Elektrometer verteilt. Da sich gleichnamige<sup>3</sup> Ladungen abstoßen, dreht sich das Plättchen. Aus dem selben Grund tritt ist die positive Ladung auf eine dünne Oberflächenschicht des Metalls beschränkt.

Ganz ähnlich funktioniert das Blättchenelektroskop (Abb. 1.3). Hier werden durch die aufgebrachte Ladung zwei leicht biegbare metallische Blättchen voneinander weggespreizt.

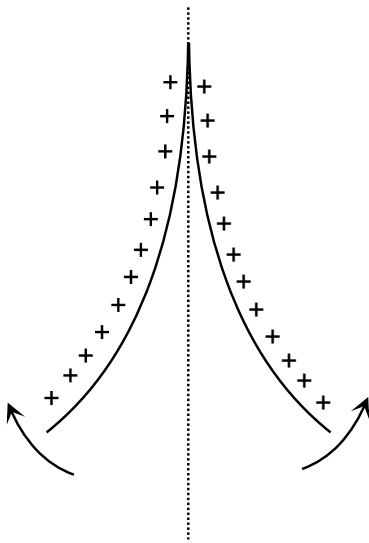


Abbildung 1.3: *Blättchenelektroskop*

Das Braunsche Elektrometer und das Blättchenelektroskop lassen sich auch zur *quantitativen* Bestimmung der aufgebrachten Ladung verwenden. Wir wollen aber an dieser Stelle auf eine quantitative Auswertung des Ausschlags der Elektrometer verzichten.

Statt dessen zeigen wir noch qualitativ, wie sich das Elektrometer bei Berührung mit verschiedenen, anfänglich ungeladenen Gegenständen verhält:

- bei Berührung mit einem neutralen Kunststoffstab, einem trockenen Holzstab oder einem Porzellanstab passiert nichts; die Ladungen bleiben auf dem Elektrometer
- bei Berührung mit einem Metall, einem feuchten Holz oder einem wassergefüllten Hohlrohr geht der Ausschlag des Elektrometers zurück, d. h. die Ladungen können abfließen. Das gleiche gilt, wenn wir die Luft durch einen Bunsenbrenner in der Nähe des Elektrometers erhitzen, da dann in der Luft zahlreiche freie Ladungen erzeugt werden.

Dies zeigt nochmals, dass Metalle bzw. der Wasserfilm auf dem Holzstab Ladungen leiten können, gute Isolatoren wie der Kunststoffstab dagegen nicht.

<sup>3</sup>Das Elektrometer hätte auch beim Aufbringen einer negativen Ladung ausgeschlagen, was wir durch Berührung mit dem Kunststoffstab zeigen.

Wenn wir mit dem wassergefüllten Rohr ein weiteres, zunächst ungeladenes Elektrometer berühren, so schlägt dieses aus. Wir haben also mit dem Rohr Ladungen von einem Elektrometer zu einem anderen transportiert.

Die Übertragung von Ladungen auf ein neutrales Objekt demonstrieren wir weiterhin durch einen mit Graphit überzogenen, an einer Schnur hängenden Ball, der vor einer geladenen Platte hängt. Der Ball ist zunächst neutral. Nachdem er die Platte berührt hat, wird er von der Platte abgestoßen. Der Ball wird von der Platte abgestoßen, wobei die abstoßende Kraft offensichtlich in Richtung des Verbindungsvektors zwischen den Ladungen wirkt, wie wir bei unserem Ansatz (1.2) bereits unterstellt hatten.

Wir wollen nun die Abstandsabhängigkeit  $f(r)$  der elektrostatischen Kraft mittels einer Balkenwaage genauer untersuchen.

**Versuch:** Auf dem Waagearm einer Balkenwaage befindet sich eine geladene Kugel (Ladung  $Q_1$ ) (s. Abb. 1.4). Ihr gegenüber wird in einem bestimmten Abstand  $r$  eine Kugel mit der Ladung  $Q_2$  angebracht. Auf  $Q_1$  wirkt die Coulombkraft  $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}}$ , die wir durch Gegengewichte so kompensieren, dass der Abstand  $r$  konstant bleibt. Durch die Gegengewichte lässt sich  $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}}$  quantitativ messen. Misst man  $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}}$  für verschiedene Abstände  $r$ , so findet man, dass  $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}}$  *quadratisch* mit dem Abstand zwischen den Ladungen abnimmt.

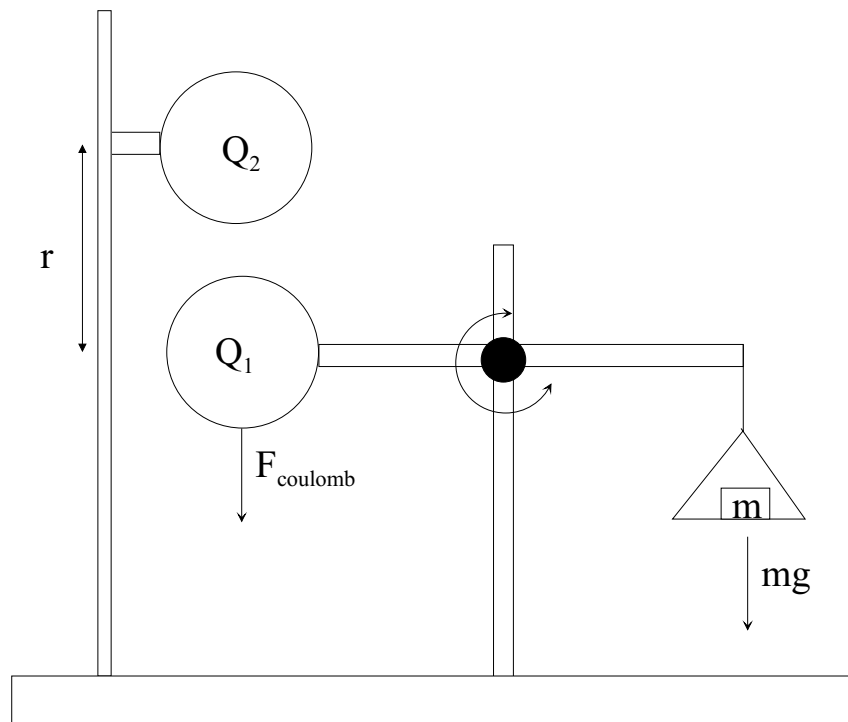


Abbildung 1.4: Waage zur Messung des quadratischen Abstandsgesetzes  $f(r)$ . Für  $Q_1 = Q_2 = 0$  steht der Balken der Waage waggerecht. Nach Aufladung der beiden Kugeln (Abstand:  $r$ ) wird die Masse  $m$  benötigt, um den Balken wagerecht zu halten. Bei Halbierung des Abstands  $r$  wird hierfür das vierfache Gewicht  $4m$  benötigt.

Mit diesem experimentellen Ergebnis können wir in (1.2)  $f(r) = 1/r^2$  setzen.  $\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}}$  gehorcht also dem gleichen Abstandsgesetz wie das Newtonsche Gravitationsgesetz.

Wir erhalten:

$$\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}} = \text{const.} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.3)$$

Es bleibt noch die Konstante festzulegen.

Im cgs-System wählt man:  $\text{const.} = 1$ , also

$$\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{Coulomb-Kraft, cgs-System}) \quad (1.4a)$$

Mit dieser Definition hat die Ladung die Einheit  $\text{N}^{1/2}\text{m}$ .

Im SI-System, das wir stets verwenden wollen, wählt man:  $\text{const.} = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ , also

$$\vec{F}_{12}^{\text{Coulomb}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{Coulomb-Kraft, SI-System}) \quad (1.4b)$$

Hierbei ist  $\varepsilon_0$  die **Influenzkonstante** oder **elektrische Feldkonstante**. Sie hat den Zahlenwert

$$\varepsilon_0 = 8.8543 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \quad (1.5)$$

Diese Definition, die das Coulomb als eigenständige Einheit einführt, ist im Moment noch nicht sehr einsichtig. Wir werden aber in den nachfolgenden Abschnitten sehen, dass sie durchaus Sinn macht.





## 1.3 Das Coulombsche Gesetz, elektrostatisches Feld

Zur Einführung verschiedener Grundbegriffe betrachten wir zunächst einmal die Kraft, die zwischen zwei Ladungen  $q_1$  an der Position  $\vec{r}_1$  und  $q_2$  an der Position  $\vec{r}_2$  wirkt. Aus der Experimentalphysik ist das Coulombsche Gesetz für diese Kraft bekannt. Danach wirkt auf die Ladung  $q_1$  durch die Wechselwirkung mit der Ladung  $q_2$  die Kraft

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (1.6)$$

Dieses Coulombsche Gesetz beinhaltet insbesondere die folgenden Aussagen:

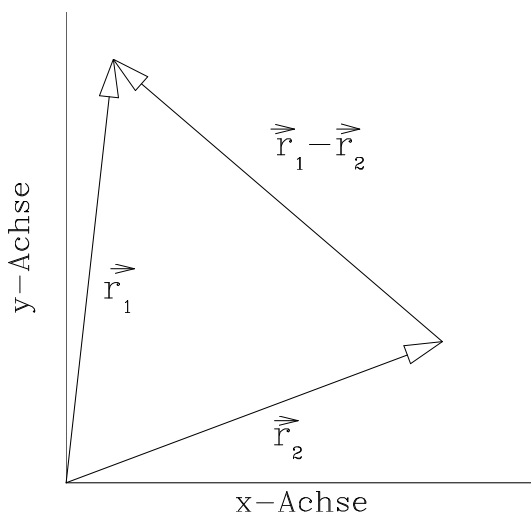


Abbildung 1.5: Kraft auf Ladung 1 von 2

- Die Stärke der Kraft ist proportional dem Produkt der beteiligten Ladungen:  $|\vec{F}_{12}| \sim q_1 q_2$ .
- Die Stärke der Kraft ist invers proportional zum Quadrat des Abstandes der beiden Ladungen:  $|\vec{F}_{12}| \sim |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{-2}$ .
- Die Richtung der Kraft ist parallel beziehungsweise antiparallel zum Einheitsvektor in Richtung der Verbindungslinie von der Position  $\vec{r}_2$  zur Position der Ladung, auf die die Kraft ausgeübt wird ( $\vec{r}_1$ ), siehe auch Abbildung 1.1:  $\vec{F}_{12} \sim \hat{e}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ .
- Haben also beide Ladungen das gleiche Vorzeichen (die Proportionalitätskonstante  $k$  im Coulombschen Gesetz ist positiv), so wird die Ladung  $q_1$  durch die Kraft  $\vec{F}_{12}$  abgestoßen. Haben die beiden Ladungen unterschiedliches Vorzeichen (sei z. B.  $q_1$  die Ladung eines Elektrons, d. h.  $q_1 < 0$ , und  $q_2$  die Ladung eines Protons,  $q_2 > 0$ ), so wird die Ladung  $q_1$  von der Ladung  $q_2$  angezogen.

Das Coulombsche Gesetz ist natürlich verträglich mit den Newtonschen Gesetzen der Mechanik. So gilt für die Kraft, die von der Ladung  $q_1$  auf die Ladung  $q_2$  ausgeübt wird („actio = reactio“)

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (1.7)$$

Das Coulombsche Gesetz stellt eine Beziehung her zwischen mechanischen und elektrostatischen Größen. Daher kann diese Beziehung benutzt werden, um die Einheiten, in denen wir die die Ladungen angeben wollen, festzusetzen.

In dem von uns verwendeten *SI System* setzen wir die Konstante

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{mit} \quad \epsilon_0 = 8,854 \dots 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}. \quad (1.8)$$

Dabei steht "C" für Coulomb, der Einheit, in der Ladungen angegeben werden sollen. Zwei Ladungen vom Betrag  $|q_1| = |q_2| = 1 \text{ C}$  im Abstand  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = 1 \text{ m}$  üben nach dem Coulombgesetz (1.6) eine Kraft aus vom Betrag

$$|\vec{F}_{12}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2} = 8.988 \dots 10^9 \text{ N}.$$

Betrachtet man  $N$  Ladungen, die sich an den Stellen  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$  befinden, so gilt nach dem Superpositionsprinzip für die Kraft auf eine Probeladung  $q$  am Ort  $\vec{r}$ :

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (1.9)$$

Ziel ist es, eine Messgröße für das Kraftfeld zu finden, das durch die  $N$  Ladungen  $q_i$  an den Positionen  $\vec{r}_i$  erzeugt wird. Der Betrag dieser Kraft ist abhängig von der Größe der Probeladung  $q$ . Ausserdem wird das Einbringen einer Probeladung die Verteilung der anderen Ladungen und damit das Feld der  $N$  Ladungen beeinflussen. Deshalb definiert man das *elektrische Feldes*  $\vec{E}$  an der Stelle  $\vec{r}$ :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q}}. \quad (1.10)$$

Die Grenzwertbildung drückt aus, dass die Probeladung  $q$  verschwindend klein sein muss, um die Ladungsverteilung, die das Kraftfeld erzeugt, nicht zu stören.

Das elektrische Feld ist ein Vektorfeld, für das die aus der Mechanik bekannten Transformationseigenschaften gelten. Beispielsweise beschreibt man also die Transformation des elektrischen Feldes bei einer Drehung des Koordinatensystems durch die Multiplikation mit der zugehörigen Drehmatrix.

Graphisch darstellen lässt sich das elektrische Feld durch *Feldlinien*, die folgende Eigenschaften besitzen:

- a) Die Richtung der Feldlinien gibt die Richtung des  $\vec{E}$ -Feldes an der Position der Feldlinien an.
- b) Die Zahl der Feldlinien durch eine Einheitsfläche senkrecht zu ihnen ist ein Maß für den Betrag von  $\vec{E}$  an dieser Stelle.
- c) Da eine positive Probeladung von positiven Punktladungen abgestoßen wird, sind diese positiven Punktladungen Ausgangspunkte von Feldlinien. Entsprechend sind negative Punktladungen Endpunkte von Feldlinien. Man spricht auch von *Quellen* und *Senken* des elektrischen Feldes.

Das elektrische Feld von  $N$  Punktladungen berechnet sich nach dem Superpositionsprinzip zu

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (1.11)$$

Statt diskreter Punktladungen treten oft kontinuierliche Ladungsverteilungen auf. An die Stelle der Summation tritt nun die Integration über die räumliche Verteilung der Ladung. Diese bezeichnen wir als *Ladungsdichte*  $\rho(\vec{r}')$ , die die Ladung pro Volumen an  $\vec{r}'$  im infinitesimalen Volumenelement  $d^3\vec{r}'$  angibt. Die Ladungsdichte wird also angegeben in Einheiten von Ladung pro Volumen. Wir erhalten für das elektrische Feld einer Ladungsverteilung:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.12)$$

Integriert man die Ladungsdichte über ein Volumen  $V$ , so erhält man die Gesamtladung in diesem Volumen:

$$\int_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') = Q.$$

### 1.3.1 Die Delta-Funktion

Wie lässt sich die Ladungsdichte von einzelnen Punktladungen mathematisch beschreiben? Man benutzt dafür die *Delta-Funktion*, die von Paul Dirac in Analogie zum Kronecker-Symbol  $\delta_{ik}$  als Verallgemeinerung für kontinuierliche Indizes eingeführt wurde. Es ergibt sich für die Ladungsdichte von Punktladungen:

$$\rho(\vec{r}') = \sum_i q_i \cdot \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i),$$

wobei die  $\vec{r}_i$  die Orte bezeichnen, an denen die einzelnen Punktladungen angebracht sind. Im folgenden soll auf die wichtigsten Eigenschaften der Delta-Funktion eingegangen werden. Genaugenommen ist sie weder eine *Funktion* im üblichen Sinne noch im Riemannschen Sinne integrierbar. Sie stellt jedoch ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel dar und wird exakt im Rahmen der Distributionentheorie behandelt.

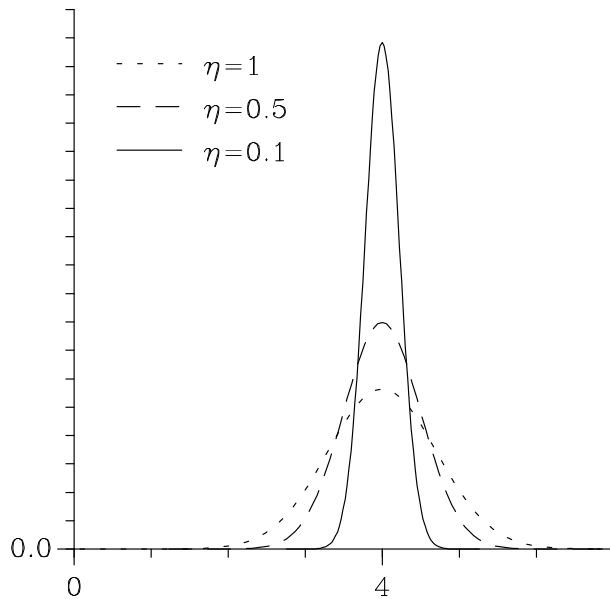
1. Betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall. Eine Definitionsgleichung für die Delta-Funktion lautet

$$\int_a^b dx \delta(x - x_0) f(x) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } x_0 \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Man kann sich die Delta-Funktion aus einer Folge von Gauß-Kurven entstanden denken, deren Halbwertsbreite  $\eta$  immer kleiner wird, der Flächeninhalt jedoch gleich bleibt (vgl. Figur 1.2):

$$\delta(x - a) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\eta}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - a)^2}{\eta}\right).$$

Der Vorfaktor  $1/\sqrt{\pi\eta}$  ist ein Normierungsfaktor, der dafür sorgt, dass das Integral über die ganze reelle Achse für die jeweilige Gauß-Kurve immer auf 1 normiert ist.

Abbildung 1.6:  $\delta$  Funktion als Grenzfall von Gauß Funktionen ( $a=4$ )

3. Ist das Argument der Delta-Funktion eine Funktion  $y(x)$ , die im betrachteten Intervall  $[a, b]$  bei  $x_i$  eine einfache Nullstelle besitzt (d.h.  $y(x_i) = 0, y'(x_i) \neq 0$ ), so gilt:

$$\delta(y(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{d}{dx} y \right|_{x_i}}.$$

Beispiel:  $y(x) = x^2 - a$ , mit den Nullstellen  $x_{1/2} = \pm\sqrt{a}$ . Einsetzen:

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = |2x|_{x_{1/2}} = 2\sqrt{a}$$

$$\delta(x^2 - a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} (\delta(x - \sqrt{a}) + \delta(x + \sqrt{a})).$$

4. Im dreidimensionalen Fall gelten

$$\delta(\vec{r}' - \vec{r}) = \begin{cases} \infty & \text{falls } \vec{r} = \vec{r}' \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Stellt man die Vektoren im Argument der Delta-Funktion durch kartesische Koordinaten dar, so ergibt sich die Delta-Funktion im 3-dimensionalen Raum als Produkt

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0).$$

Die Darstellung ist etwas komplizierter im Fall von krummlinigen Koordinaten  $(u, v, w)$ . In diesem Fall betrachten wir einen Ansatz für die Delta-Funktion der Form:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \Gamma(u, v, w) \delta(u - u_0) \cdot \delta(v - v_0) \cdot \delta(w - w_0). \quad (1.13)$$

Falls  $\vec{r}_0$  im betrachteten Integrationsvolumen  $V$  liegt muss gelten

$$\begin{aligned} 1 &= \int_V d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= \int_V du dv dw \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \Gamma(u, v, w) \delta(u - u_0) \cdot \delta(v - v_0) \cdot \delta(w - w_0) \end{aligned}$$

Dabei erhalten wir durch die Anwendung der Substitutionsregel für das Volumenelement  $d^3r$  im zweiten Teil dieser Gleichung

$$d^3r = dx dy dz = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du dv dw$$

die Funktionaldeterminante oder auch Jakobideterminante

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_v x & \partial_w x \\ \partial_u y & \partial_v y & \partial_w y \\ \partial_u z & \partial_v z & \partial_w z \end{vmatrix}$$

Dabei haben wir für die Ableitungen die abkürzende Schreibweise benutzt:

$$\partial_u x = \frac{\partial x}{\partial u}. \quad (1.14)$$

Es ist klar, dass die Gleichung (1.14) genau dann erfüllt wird, wenn wir in dem Ansatz (1.13) einsetzen

$$\Gamma(u, v, w) = \left( \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \Big|_{r_0} \right)^{-1}$$

Mit dieser Regel ergibt sich zum Beispiel für die Delta-Funktion in Kugelkoordinaten

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin \vartheta_0} \delta(r - r_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0).$$



## 1.4 Differentialoperatoren und Integralsätze

Es sollen nun einige mathematische Voraussetzungen geschaffen werden, die für die Beschreibung elektrostatischer (und elektrodynamischer) Effekte notwendig sind.

Als **Beispiel** zur Motivation wollen wir zunächst die mathematische Beschreibung der Ladungserhaltung diskutieren: Sei  $V$  ein Volumen mit der Oberfläche  $O$  und der Raumladungsdichte  $\varrho(\vec{r})$ . Die Gesamtladung in diesem Volumen  $V$  ( $Q(V)$ ) ist also das Integral der Ladungsdichte über das Volumen  $V$ :

$$Q(V) = \int_V \varrho(\vec{r}) dV$$

Ändert sich nun diese Ladung in  $V$  mit der Zeit ( $dQ/dt \neq 0$ ), so kann dies wegen der Ladungserhaltung nur so geschehen, dass durch die Oberfläche von  $V$  ein Strom  $\vec{j}$  fließt. Übersetzt in die Sprache der Mathematik bedeutet dies:

$$\frac{d}{dt} Q(V) = \frac{d}{dt} \int_V \varrho(\vec{r}) dV = - \oint_O \vec{j} \cdot d\vec{f} \quad (1.15)$$

Das letzte Integral ist ein **Flächenintegral**, das als “Wächter” beobachtet, wieviel Ladung durch die Oberfläche in das Volumen hineinfließt (der Integrand  $\vec{j} \cdot d\vec{f}$  muss dann negativ sein) oder aus diesem herausfließt (der Integrand ist in diesem Fall positiv, d.h.  $\vec{j}$  steht parallel zu  $d\vec{f}$ ). Bei der Definition des Flächenintegrals sollte also der Vektor  $d\vec{f}$  senkrecht zur Oberfläche stehen und nach aussen weisen.

### 1.4.1 Das Flächenintegral

Mit dem Flächenintegral (auch Flussintegral)

$$\Phi = \int_F \vec{A} \cdot d\vec{f} \quad (1.16)$$

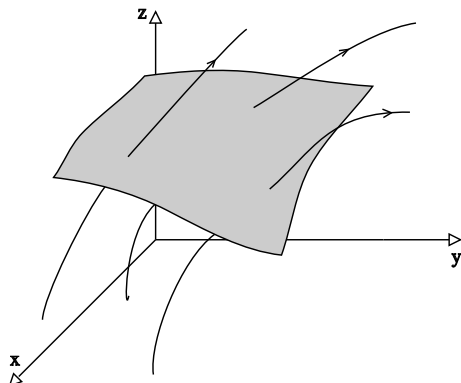


Abbildung 1.7: Flächenintegral eines Vektorfeldes

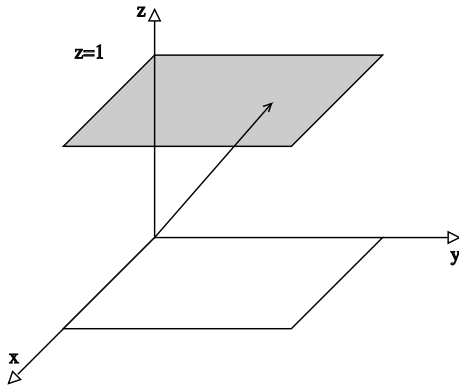


Abbildung 1.8: Parametrisierung der Abbildung des Einheitsquadrates

wird der Fluss von  $\vec{A}$  durch  $F$  beschrieben, wobei  $\vec{A}$  ein beliebiges Vektorfeld und  $F$  eine Fläche im dreidimensionalen Raum sein soll. (s. Abb 1.3). Dabei ist der Betrag von  $d\vec{f}$  ein infinitesimales Flächenstück, dessen Richtung senkrecht zur Fläche steht. Zur Berechnung von  $\Phi$  muss die Fläche parametrisiert und anschließend  $d\vec{f}$  bestimmt werden.

**a)** Analog der Parametrisierung eines Linienintegrals wird auch hier die Fläche  $F$  parametrisiert dadurch dass wir die Ortsvektoren, die auf dieser Fläche enden, als Funktion von 2 Parametern darstellen:

$$F := \{\vec{r}(u, v); \quad u \in [u_0, u_1], \quad v \in [v_0, v_1]\}$$

Dabei ist die Parametrisierung ( $\vec{r}(u, v)$ ) eine Abbildung der ebenen Fläche  $UV$  in die gekrümmte Fläche  $F$  im  $\mathcal{R}^3$ .

### Beispiele :

1. Sei  $F$  ein Einheitsquadrat parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene durch  $z = 1$  (s. Abb. 1.4), so lautet die entsprechende Flächenparametrisierung

$$F_{\square} = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} u \in [u_0, u_1] \\ v \in [v_0, v_1] \end{array} \right\}.$$

2. Sei  $F_0$  die Oberfläche einer Kugel mit Radius  $R$ , dann lautet die Flächenparametrisierung

$$F_0 = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} R \sin \vartheta \cos \varphi \\ R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \vartheta \in [0, \pi] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{array} \right\}$$

**b)** Nachdem wir zunächst einmal die Fläche parametrisiert haben, wollen wir nun die Differentialform  $d\vec{f}$  bestimmen. Dazu konstruieren wir zunächst einmal in jedem Punkt der Fläche 2 linear unabhängige Vektoren,  $d\vec{a}$  und  $d\vec{b}$ , die tangential zur Fläche stehen:

$$\begin{aligned} d\vec{a} &= \vec{r}(u + du, v) - \vec{r}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du \\ d\vec{b} &= \vec{r}(u, v + dv) - \vec{r}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv. \end{aligned}$$



Damit ist

$$d\vec{f} = \pm d\vec{a} \times d\vec{b}.$$

**Forderung :** Das Vorzeichen soll so gewählt werden, dass  $d\vec{f}$  bei geschlossenen Flächen nach aussen zeigen soll.

Betrachten wir die Kugelfläche: Mit der Parametrisierung nach obigem Beispiel gilt

$$\begin{aligned} d\vec{a} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} d\vartheta = R \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi d\vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} d\vartheta, \\ d\vec{b} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi = R \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\ \implies d\vec{f} &= \pm R^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \vartheta \cos \varphi \\ \sin^2 \vartheta \sin \varphi d\vartheta \\ -\sin \vartheta \cos \varphi \end{pmatrix} d\vartheta d\varphi \\ &= +R^2 \sin \vartheta \hat{e}_r d\vartheta d\varphi. \end{aligned}$$

Das positive Vorzeichen ergibt sich mit der oben genannten Forderung, dass die Flächennormale  $d\vec{f}$  einer geschlossenen Oberfläche nach aussen weist.

c) Mit diesen Überlegungen folgt nun für das Flächenintegral über eine Kugelfläche  $O$  mit einem Vektorfeld  $\vec{A}(\vec{r}) = a\vec{r}$

$$\begin{aligned} \oint_O \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi aR\hat{e}_r R^2 \sin \vartheta \hat{e}_r d\vartheta d\varphi \\ &= aR^3 \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 4\pi aR^3. \end{aligned}$$

## 1.4.2 Divergenz

Mit dieser Definition des Flächenintegrals können wir nun Aussagen machen, an welchen Stellen ein Vektorfeld  $\vec{A}$  Quellen besitzen muss. Analog zu dem Beispiel, dass das Vektorfeld  $\vec{A}$  den Fluss einer Flüssigkeit beschreibt, sagen wir, dass das Vektorfeld  $\vec{A}$  in all den Volumina eine Quelle haben muss, aus denen mehr herausfließt als hineinfließt. Bei diesen Volumina ist also das Integral des Vektorfeldes über die Oberfläche des Volumens positiv. Liefert dieses Oberflächenintegral einen negativen Wert, so sagen wir, dass das Vektorfeld in dem betrachteten Volumen eine Senke besitzt. Um die Quellen (Senken) genauer zu lokalisieren, betrachten wir eine Folge von Volumina  $\Delta V$ , die alle einen Punkt  $\vec{r}_0$  enthalten, und deren Volumen kleiner wird. Dies erlaubt uns die Quellstärke oder **Divergenz** des Vektorfeldes im Punkte  $\vec{r}_0$  zu definieren als

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_0) := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_O \vec{A}(\vec{r}_0) \cdot d\vec{f}, \quad (1.17)$$

wobei das Integral jeweils über die Oberfläche von  $\Delta V$  zu berechnen ist. Für diese Definition gilt also:

- $\operatorname{div} \vec{A}$  ist eine skalare Größe,
- $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_0) > 0 \iff \vec{A}$  hat Quellen in  $\vec{r}_0$ ,
- $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_0) < 0 \iff \vec{A}$  hat Senken in  $\vec{r}_0$ ,
- $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_0) = 0 \iff \vec{A}$  ist quellenfrei in  $\vec{r}_0$ .

Die Definition 1.17 ist natürlich sehr umständlich für eine explizite Berechnung der Quellstärke. Wie wir aber in der folgenden Behauptung sehen, gibt es sehr einfache Methoden zur Berechnung der Divergenz.

**Behauptung:** Beschreibt man das Vektorfeld  $\vec{A}$  in kartesischen Koordinaten und kartesischen Einheitsvektoren  $\hat{e}_i$

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z && \text{so gilt:} \\ \operatorname{div} \vec{A} &= \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \vec{A} \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \end{aligned}$$

auch hier haben wir zur Abkürzung für die Ableitungen die Schreibweise von (1.14) gewählt. Die Schreibweise der Divergenz mit dem Nabla Operator  $\vec{\nabla}$  erinnert an die Berechnung des Gradienten eines skalaren Feldes  $u$  in kartesischen Koordinaten:

$$\operatorname{grad} u = \vec{\nabla} u = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} u$$

**Beweis:** Zum Beweis betrachten wir eine Folge von kubischen Volumina mit dem Punkt  $\vec{r}_0$  in einer Ecke und Seiten gegeben durch die Intervalle  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ ,  $[y_0, y_0 + \Delta y]$ ,  $[z_0, z_0 + \Delta z]$  (siehe auch Figur 1.5). Das Volumen dieser Würfel ist  $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

Das Integral des Vektorfeldes  $\vec{A}$  integriert über die Oberfläche  $O$  dieses Würfels lässt sich aufteilen in die Beiträge über die 6 Teilflächen des Würfels:  $F_i$

$$\int_O \vec{A} \cdot d\vec{f} = \sum_i \int_{F_i} \vec{A} \cdot d\vec{f}, \quad F_i: \text{Oberflächen von } V.$$

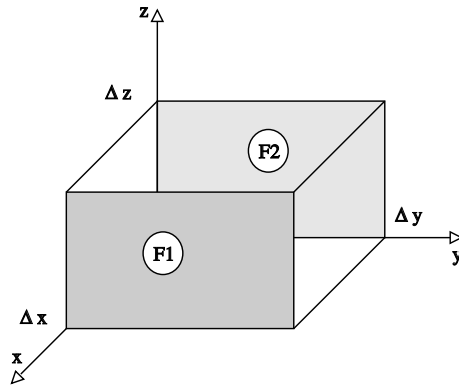


Abbildung 1.9: Das Volumen  $\Delta V$  zum Berechnung der Divergenz in kartesischen Koordinaten

Für die Flächen  $F_1$  und  $F_2$  (beide parallel zur  $yz$  Ebene) gilt nach geeigneter Parametrisierung:

$$\begin{aligned}
 \int_{F_1, F_2} \vec{A} \cdot d\vec{f} &= \int_{F_1} \vec{A}(x_0 + \Delta x, y, z) \cdot d\vec{f} + \int_{F_2} \vec{A}(x_0, y, z) \cdot d\vec{f} \\
 &= \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} A_x(x_0 + \Delta x, y, z) dy dz + \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} -A_x(x_0, y, z) dy dz \\
 &= \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} \left[ A_x(x_0, y, z) dx dz + \frac{\partial A_x(\vec{r}_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 A_x(\vec{r}_0)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \left( -A_x(x_0, y, z) \right) \right] dy dz
 \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile  $A_x(x_0 + \Delta x, y, z)$  nach Taylor entwickelt wurde. Da  $\Delta x \ll 1$  gelten soll, kann die Reihe nach der ersten Ordnung abgebrochen werden.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int_{F_1, F_2} \vec{A} \cdot d\vec{f} &= \int \frac{\partial}{\partial x} A_x(\vec{r}_0) \Delta x dy dz \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} A_x(\vec{r}_0) \Delta x \Delta y \Delta z \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} A_x(\vec{r}_0) \Delta V.
 \end{aligned}$$

Analog erhält man die Flächenintegrale für die vier weiteren Flächen. Eingesetzt in die Definition der Divergenz (1.17) folgt:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{A} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_O \vec{A}(\vec{r}_0) \cdot d\vec{f} \\
 &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \left( \frac{\partial}{\partial x} A_x(\vec{r}_0) + \frac{\partial}{\partial y} A_y(\vec{r}_0) + \frac{\partial}{\partial z} A_z(\vec{r}_0) \right) \Delta V \quad \square
 \end{aligned}$$

**Achtung:** Diese Darstellung der Divergenz gilt nur in kartesischen Koordinaten!

In Kugelkoordinaten gilt z.B.:

$$\text{mit } \vec{A} = A_r \hat{e}_r + A_\vartheta \hat{e}_\vartheta + A_\varphi \hat{e}_\varphi \quad (1.18)$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi. \quad (1.19)$$

Obwohl also die Divergenz in Kugelkoordinaten recht wüst aussieht, kann es sich als zweckmäßig herausstellen mit ihr zu rechnen.

**Beispiel:** Als Beispiel für die Berechnung der Divergenz in verschiedenen Koordinatensystemen betrachten wir die Kraft auf eine Probeladung  $q = 1$  Coulomb an der Position  $\vec{r}$ , die durch Ladung  $q_1 = 1$  C an der Position in  $\vec{r}_1 = \vec{0}$  ausgeübt wird:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_1}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

a) in kartesischen Koordinaten gilt:

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}; \quad F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}; \quad F_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}.$$

$$\text{Mit } \text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z \quad \text{ist dann}$$

$$\text{div} \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5} \right) = 0.$$

Die letzte Gleichung gilt natürlich nur für Vektoren  $\vec{r} \neq 0$ , da im Fall  $\vec{r} = 0$  auch der Nenner identisch 0 wird, die Divergenz von  $\vec{F}$  ist also in diesem Fall noch nicht definiert.

b) in Kugelkoordinaten gilt:

$$\vec{F} = F_r \hat{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r; \quad F_\vartheta = F_\varphi = 0!$$

Mit (1.19) ist also

$$\text{div} \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{1}{r^2} \right) = 0, \quad (1.20)$$

was offensichtlich einfacher zu rechnen ist. Auch hier ist natürlich der Vorbehalt zu machen, dass wir nur Vektoren  $\vec{r} \neq 0$  betrachten; den Fall  $\vec{r} = 0$  werden wir weiter unten noch einmal aufgreifen

### 1.4.3 Der Gaußsche Integralsatz

Sei  $O$  die Oberfläche eines Volumens  $V$  und  $\vec{A}(\vec{r})$  ein Vektorfeld. Der Gaußsche Integralsatz ist nun eine Umrechnungsbeziehung zwischen Flächen- und Volumenintegral :

$$\boxed{\oint_O \vec{A} \cdot d\vec{f} = \int_V \text{div} \vec{A} dV} \quad (1.21)$$

Die linke Seite der Gleichung stellt den Fluss des Vektorfeldes aus der geschlossenen Oberfläche  $O$  dar, die rechte Seite der Gleichung ist das Volumenintegral über die Divergenz des Vektorfeldes im ganzen Volumen  $V$ .

**Beweis:** Wegen der Linearität des Integrals gilt

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) dV = \sum \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \int_{\Delta V_i} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) dV$$

wo  $V$  in  $n$  Teile  $\Delta V_i$  zerlegt wurde, die das ganze Volumen  $V$  ausschöpfen.

Dann folgt bei immer feinerer Zerlegung die Riemannsche-Summe (mit  $\vec{r}_i$  einem Punkt in  $V_i$ )

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV &= \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_i) \Delta V_i \\ &\stackrel{\text{(Glg. 1.17)}}{=} \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{1}{\Delta V_i} \oint_O \vec{A} \cdot d\vec{f} \Delta V_i = \int_O \vec{A} \cdot d\vec{f}; \end{aligned}$$

letzteres, da sich die beiden Integrale über die gemeinsame Grenzfläche zweier aneinandergrenzender Volumina wegen ihrer antiparallelen Flächennormalen gegenseitig kompensieren.  $\square$

Mit den nun gewonnenen mathematischen Kenntnissen noch einmal zurück zur Kontinuitätsgleichung (1.15), die wir zu Beginn dieses Abschnittes formuliert haben. Wir hatten gesagt, dass die zeitliche Änderung der Ladung in einem Volumen  $V$  begleitet sein muss von einem entsprechenden Strom  $\vec{j}$  durch die Oberfläche des konstanten Volumens

$$\frac{d}{dt} Q(V) = \frac{d}{dt} \int_V \varrho(\vec{r}) dV = - \oint_O \vec{j} \cdot d\vec{f} = - \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV,$$

wobei wir bei dem letzten Teil dieser Gleichung den Gaußschen Satz angewandt haben. Da diese Gleichung für all Volumina  $V$  gelten muss, können wir die Integranden der beiden Volumenintegrale in dieser Beziehung gleich setzen oder auch schreiben

$$\boxed{\frac{d}{dt} \varrho(\vec{r}) + \operatorname{div} \vec{j} = 0.} \quad (1.22)$$

Dies ist die **differentielle Form der Kontinuitätsgleichung**, die im übrigen nicht nur in der Elektrodynamik eine Rolle spielt.

Mit den oben eingeführten Werkzeugen lässt sich noch folgende interessante Behauptung beweisen:

Sei  $\vec{F}$  ein Vektorfeld mit  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r$ , dann ist

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r}). \quad (1.23)$$

**Beweis:** Bereits in Gleichung (1.20) haben wir gezeigt, dass  $\operatorname{div} \vec{F}$  identisch 0 ist für alle Vektoren  $\vec{r} \neq 0$ . Betrachten wir nun eine Kugel mit Radius  $R$ , Volumen  $V$  um  $\vec{r} = 0$ , dann ist

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV \stackrel{\text{Gaußscher Satz}}{=} \oint_O \vec{F} \cdot d\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{R^2} \hat{e}_r R^2 \sin \vartheta \hat{e}_r d\vartheta d\varphi = \frac{1}{\epsilon_0}$$

Wobei  $R = r$  mit der Begründung benutzt wurde, dass die Kugeloberfläche in den Aufpunkt  $\vec{r}$  gelegt wird.

Mit der Definition der  $\delta$ -Funktion folgt die Behauptung.  $\square$

#### 1.4.4 Die Rotation

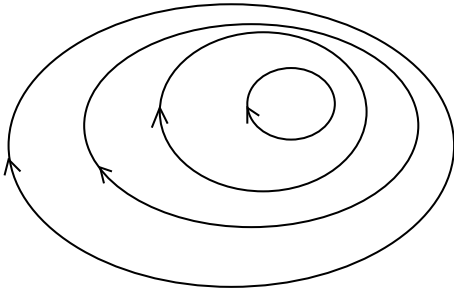


Abbildung 1.10: Nicht-wirbelfreies Vektorfeld  $\vec{A}_1$ :  $\oint_\tau \vec{A}_1 \cdot d\vec{s} \neq 0$

Ähnlich wie bei dem oben definierten Flächenintegral müssen wir auch bei der Berechnung des Wegintegrals für ein Vektorfeld  $\vec{A}$  entlang eines Weges  $\tau$  zunächst einmal den Weg parametrisieren, in dem wir die Folge von Vektoren, die unseren Weg  $\tau$  definieren darstellen als Funktion einer Variablen  $t$ , unter die wir uns zB. die Zeit vorstellen können, die bei der “Wanderung” entlang des Weges vom Startwert  $t_0$  bis zum Endwert  $t_1$  anwächst:

$$\tau := \{\vec{r}(t); \quad t \in [t_0, t_1]\}$$

Mit dieser Parametrisierung berechnet sich das Wegintegral

$$\int_\tau \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \quad (1.24)$$

Solche Linienintegrale sind uns bereits in der Mechanik begegnet, ist zB.  $\vec{A}$  ein Kraftfeld, so ergibt das Integral in Gleichung (1.24) die Arbeit, die in diesem Kraftfeld entlang des Weges  $\tau$  geleistet wird.

Ist das Vektorfeld  $\vec{A}$  charakterisiert durch geschlossene Feldlinien, wie das in Abbildung 1.6 der Fall ist, so sagt man das Vektorfeld  $\vec{A}$  besitzt Wirbel in Anlehnung zB. an das Strömungsfeld eines Flusses. In diesem Fall ist das Linienintegral des Vektorfeldes

$\vec{A}$  entlang des Weges, der durch die Feldlinie bezeichnet ist sicher von 0 verschieden (die Vektoren  $\vec{A}$  und  $d\vec{r}$  sind stets parallel).

Dementsprechend definiert man die Wirbelstärke oder Rotation eines Vektorfeldes an einem Punkt  $\vec{r}_0$  als einen Vektor  $\text{rot}\vec{A}(\vec{r}_0)$ , dessen Projektion in Richtung eines Einheitsvektors  $\hat{n}$  berechnet werden kann durch

$$\hat{n} \text{rot}\vec{A}(\vec{r}_0) := \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (1.25)$$

wobei die Flächen  $\Delta F$  eine Folge von Flächen bilden, die alle den Punkt  $\vec{r}_0$  enthalten und deren Flächennormale in Richtung von  $\hat{n}$  weist. Das Integral in (1.25) ist dann das Linienintegral über den Rand der Fläche  $\Delta F$ , wobei der Umlauf entsprechen der "rechten Hand Regel" so zu führen ist, dass die Flächennormale parallel zu  $\hat{n}$  steht.

Bei der Benutzung von kartesischen Koordinaten kann die Rotation einfach berechnet werden gemäß :

**Behauptung:**

$$\text{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}$$

**Beweis:** den Beweis führen wir nur für die  $x$ -Komponente, für die anderen Komponenten ergibt sich der Beweis entsprechend:  $(\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \hat{e}_x \text{rot}\vec{A}$ . ( $\hat{e}_x$  steht senkrecht auf der  $y$ - $z$ -Ebene). Mit (1.25) folgt dann

$$\hat{e}_x \text{rot}\vec{A} = \lim_{\Delta F_{yz} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F_{yz}} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Betrachten wir nun die in Abbildung 1.7 dargestellte Parametrisierung der Fläche  $\Delta F_{yz}$ , so ergibt sich

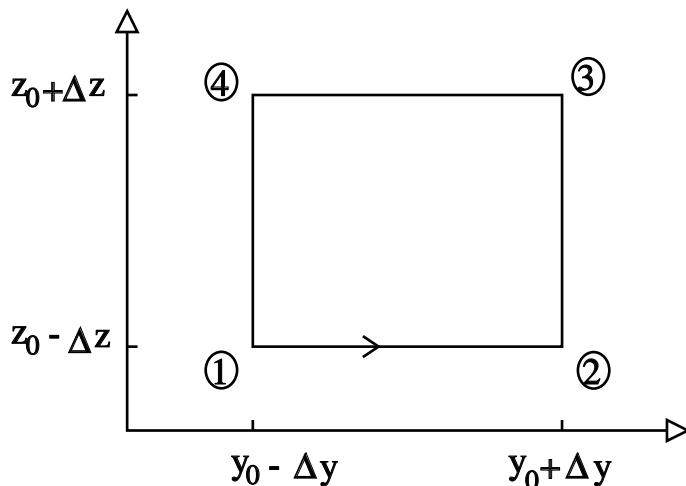


Abbildung 1.11: Parametrisierung der  $x = x_0$ -Fläche

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 A_y dy + \int_2^3 A_z dz + \int_3^4 A_y dy + \int_4^1 A_z dz \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \int_1^2 A_y dy &= \int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} A_y(x_o, y, z_o - \Delta z) dy \\ &= \int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} \left[ A_y(x_o, y, z_o) dy + (-\Delta z) \frac{\partial A_y}{\partial z} + \dots \right] dy \\ \text{und } \int_3^4 A_y dy &= - \int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} A_y(x_o, y, z_o + \Delta z) dy \\ &= \int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} \left[ A_y(x_o, y, z_o) dy + (\Delta z) \frac{\partial A_y}{\partial z} + \dots \right] dy. \end{aligned}$$

Analoges gilt für die Wege 2 nach 3 und 4 nach 1, wobei die Taylorentwicklung stets nach dem linearen Glied abgebrochen wurde.

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} &= \left[ A_y(x_o, y, z_o) dy + (-\Delta z) \frac{\partial A_z}{\partial y} - A_y(x_o, y, z_o) dy + \Delta z \frac{\partial A_z}{\partial y} \right] dy \\ &+ \int_2^3 A_z dz + \int_4^1 A_z dz = \left( -\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) 4\Delta y \Delta z \\ \iff \hat{e}_x \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \lim_{\Delta F_{yz} \rightarrow 0} \frac{4\Delta y \Delta z}{\Delta F_{yz}} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Der Beweis für die  $y$ - und  $z$ -Komponente folgt auf die gleiche Weise.

### Achtung:

Auch die Rotation sieht in anderen Koordinaten anders aus und muss entsprechend abgeändert werden!

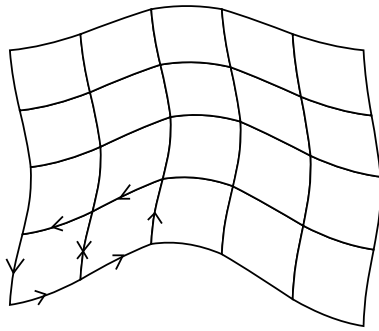
## 1.4.5 Der Stokessche Integralsatz

Ähnlich wie der Gaußsche Integralsatz ein Volumen- in ein Flächenintegral umwandelt, verbindet der Stokessche Integralsatz Flächen- und Linienintegrale:

$$\boxed{\oint_{\tau} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_F \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{f}} \quad (1.27)$$

Mit  $\tau$  als Rand der Fläche  $F$ ;  $d\vec{f}$  und der Umlaufsinn von  $\tau$  sind einander im Sinne einer Rechtsschraube zugeordnet.



Abbildung 1.12: Zerlegung einer gekrümmten Fläche in kleine Flächenelemente  $\Delta F_i$ 

**Beweis:** Wir denken uns  $F$  in kleine Flächenstücke  $\Delta F_i$  zerlegt, also gilt (s. Abb. 1.8):

$$\int_F \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{f} = \sum_i \int_{\Delta F_i} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{f}.$$

Man lässt nun die Flächenstücke  $\Delta F_i$  immer kleiner werden, das bedeutet, dass die Wirbelstärke  $\operatorname{rot} \vec{A}$  in diesen Flächenelementen  $\Delta F_i$  konstant gesetzt werden kann. Also lässt sich das Integral als Riemann-Summe schreiben:

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{\Delta F_i} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} &= \lim_{\Delta F_i \rightarrow 0} \sum_i \hat{n}_i \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \Delta F_i \\ &= \lim_{\Delta F_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta F_i \frac{1}{\Delta F_i} \oint_{\tau_i} \vec{A} d\vec{s} \end{aligned}$$

letzteres gilt nach der Definition der Rotation nach Glg (1.25).

Beachtet man nun, dass sich an allen Grenzlinien zwischen 2 Flächen  $\Delta F_i$  die Linienintegrale wegen der gegenläufigen Integrationsrichtung wegheben, so verbleibt nur das Linienintegral über den äusseren Rand der Gesamtfläche  $F$ . Damit ist (1.27) bewiesen.

Mit der Definition der Rotation und dem Stokesschen Satz kann man nun auf einfache Weise nachweisen ob Kraftfelder konservativ sind.

$$\begin{aligned} \text{Sei } \vec{A}(\vec{r}) \text{ wirbelfrei} &\iff \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{0} \\ &\implies \oint_{\tau} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_F \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{f} = 0 \end{aligned}$$

Dabei ist  $F$  eine beliebige Fläche und  $\tau$  der orientierte Rand dieser Fläche. Wähle nun zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  auf dem Rand  $\tau$ . Sei der Weg  $W_1$  der Integrationsweg  $W_1 \hat{=} P_1 \rightarrow P_2$  und  $W_2 \hat{=} P_2 \rightarrow P_1$ , wobei beide Weg in gleicher Richtung durchlaufen werden sollen wie entlang durch das Wegintegral über die geschlossene Kurve  $\tau$  vorgegeben (siehe Abbildung 1.9). Dann gilt:

$$\oint_{\tau} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1, W_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{s} + \int_{P_2, W_2}^{P_1} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{P_1, W_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{s} - \int_{P_1, -W_2}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{s}.$$

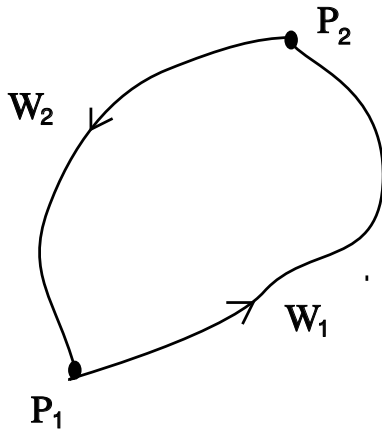


Abbildung 1.13: Zur Wegunabhängigkeit des Integrales über  $\vec{A}$

Das Minuszeichen in der letzten Gleichung erhalten wir durch Umkehrung des Weges  $W_2$ . Wir haben also gezeigt, dass bei wirbelfreien Feldern das Linienintegral vom Punkt  $P_1$  zum Punkt  $P_2$  unabhängig ist vom Weg den wir dabei wählen (Beachte, dass der Beweis gültig ist für alle Flächen  $F$ , d.h. für alle geschlossenen Wege  $\tau$ ). Hängt der Wert des Linienintegrals aber nur von den Endpunkten ab, so können wir eine Funktion  $\Phi$  bestimmen mit:

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = -[\Phi(P_2) - \Phi(P_1)] = - \int_{P_1}^{P_2} d\Phi = - \int_{P_1}^{P_2} \text{grad}\Phi(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (1.28)$$

Damit haben wir also gezeigt, dass sich jedes wirbelfreie Vektorfeld  $\vec{A}$  als negativer Gradient eines Skalarfeldes darstellen lässt:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\text{grad}\Phi(\vec{r}). \quad (1.29)$$

Das Minuszeichen in dieser Beziehung ist natürlich nur eine Frage der Konvention. Kraftfelder  $\vec{A}$ , die die Bedingung (1.29) erfüllen werden in der Mechanik "konservative Kraftfelder" genannt, weil bei der Bewegung eines Teilchens in einem solchen Kraftfeld die Energie erhalten bleibt.

Zur Vervollständigung wiederholen wir an dieser Stelle die wichtigsten Eigenschaften des Gradient Operators:

1. Mit dem Gradient Operator können wir das Differential  $d\Phi$  umschreiben:  $d\Phi = \text{grad}\phi \cdot d\vec{r}$ .
2.  $\text{grad}\Phi(\vec{r}_0)$  lässt sich als Vektor interpretieren, der am Punkt  $\vec{r}_0$  in die Richtung weist, in der das skalare Feld  $\Phi$  am stärksten ansteigt. Die Länge dieses Vektors entspricht dem Betrag dieses stärksten Anstiegs.
3. In der kartesischen Darstellung kann man den Gradienten berechnen

$$\text{grad}\Phi = \vec{\nabla}\Phi = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \Phi$$

**Behauptung:**

Wir wollen nun zeigen, dass aus der Definition 1) die Eigenschaften 2) und 3) folgen:

**Beweis:**

Es gilt:  $d\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r} + d\vec{r}) - \Phi(\vec{r})$ .

Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung liefert

$$\begin{aligned} d\Phi(\vec{r}) &= \text{grad}\Phi \cdot d\vec{r} \\ &= \Phi(\vec{r}) + \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz - \Phi(\vec{r}) \\ &= \begin{pmatrix} \partial\Phi/\partial x \\ \partial\Phi/\partial y \\ \partial\Phi/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} \partial\Phi/\partial x \\ \partial\Phi/\partial y \\ \partial\Phi/\partial z \end{pmatrix} \right| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

wobei der Winkel  $\alpha$  der Winkel zwischen den Vektoren  $\vec{\nabla}\Phi$  und  $d\vec{r}$  ist. Damit ist klar, dass der Anstieg von  $\Phi$ , d.h.  $d\Phi$  genau dann maximal ist, wenn der Vektor  $d\vec{r}$  in Richtung von  $\text{grad}\Phi$  weist. Damit ist der Beweis erbracht.

Zweimaliges Anwenden des Nabla-Operators führt auf den Laplace-Operator  $\Delta$ :

$$\text{div} \cdot \text{grad}\Phi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = \Delta\Phi(\vec{r})$$

$$\iff \Delta \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (1.30)$$

**Achtung!**

Wie bei dem Nabla-Operator muss auch der Laplace-Operator nach Wahl des Koordinatensystems angepasst werden!

**1.4.6 Eindeutigkeitssatz****Zerlegungssatz, Eindeutigkeitssatz**

Sei  $\vec{A}(\vec{r})$  ein Vektorfeld, das mit genügend hoher Ordnung im Unendlichen verschwindet. der Zerlegungssatz sagt nun:  $\vec{A}(\vec{r})$  lässt sich in einen rotationsfreien (longitudinalen) Teil  $\vec{A}_r(\vec{r})$  und einen divergenzfreien (transversalen) Teil  $\vec{A}_d(\vec{r})$  Teil zerlegen, wobei gilt:

$$1) \quad \vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_r(\vec{r}) + \vec{A}_d(\vec{r}) \quad (1.31)$$

$$2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{A}_r(\vec{r}) = 0; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_d(\vec{r}) = 0 \quad (1.32)$$

Der **Eindeutigkeitssatz** besagt, dass jedes Vektorfeld eindeutig bestimmt ist, wenn seine Divergenz (1.17) und seine Rotation (1.25) für **jeden** Raumpunkt  $\vec{r}$  bekannt ist. Auf den Beweis des Zerlegungssatzes und des Eindeutigkeitssatzes soll hier verzichtet werden.

### 1.4.7 Zusammenfassung

Wir fassen noch einmal die wichtigsten Ergebnisse zusammen:

- 1.)  $\operatorname{div}\vec{A}$ : Aussage über die Quelledichte von  $\vec{A}$
- 2.)  $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d^3r = \oint_O \vec{A} d\vec{f}$ : Gaußscher Integralsatz
- 3.)  $\operatorname{rot}\vec{A}$ : Aussage über das Wirbelverhalten von  $\vec{A}$
- 4.)  $\int_F \vec{\nabla} \times \vec{A} d\vec{f} = \oint_\tau \vec{A} d\vec{s}$ : Stokescher Integralsatz
- 5.)  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \iff \vec{A} = \vec{\nabla}\psi \iff \vec{A}$  lässt sich als Gradientenfeld darstellen
- 6.) Ein Vektorfeld ist eindeutig charakterisiert durch seine Quelledichte ( $\operatorname{div}\vec{A}$ ) und die Wirbelstärke ( $\operatorname{rot}\vec{A}$ ).

## 1.5 Die Grundgleichungen des elektrostatischen Feldes

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass ein Vektorfeld, wie zB. das elektrische Feld  $\vec{E}$ , charakterisiert ist durch seine Quellen und Wirbel. In diesem Abschnitt wollen wir nun die entsprechenden Feldgleichungen diskutieren für den Fall der Elektrostatik, das bedeutet: für den Fall, dass das elektrische Feld durch eine statische, zeitunabhängige Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  generiert wird. Wir nehmen also an, dass es keine Ströme gibt. In diesem Fall ist das elektrische Feld charakterisiert durch die folgenden Feldgleichungen:

$$\text{a) } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\text{b) } \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

$$\text{c) } \vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'.$$

Sie sollen im folgenden erläutert werden.

**zu a)**

- (i) Befinde sich bei  $\vec{r} = 0$  eine Punktladung, dann erzeugt sie, wie wir bereits im Abschnitt 1.1 gesehen haben, das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Für dieses elektrische Feld gilt nach Gleichung (1.23)

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{\epsilon_0} \cdot \delta(\vec{r} - 0).$$

- (ii) Betrachten wir nun eine Punktladung  $q_i$ , die sich nicht notwendigerweise im Ursprung, sondern an der Stelle  $\vec{r}_i$  befindet, dann gilt entsprechend nach einer Verschiebung des Koordinatensystems

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{q_i}{\epsilon_0} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_i).$$

- (iii) Befinden sich schließlich mehrere Punktladungen  $q_i$  an den verschiedenen Stellen  $\vec{r}_i$ , so gilt

$$\operatorname{div} \vec{E} = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}.$$

**Zur Interpretation:** Betrachten wir das Volumenintegral der Divergenz des elektrischen Feldes über ein endliches Volumen  $V$  mit einer Oberfläche  $\mathcal{O}(V)$

$$\begin{aligned} \int_V d^3\vec{r} \operatorname{div} \vec{E} &= \int d^3\vec{r} \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \\ &= \frac{Q(V)}{\varepsilon_0} \\ &= \oint_{\mathcal{O}(V)} \vec{E} d\vec{f} \end{aligned}$$

Das Volumenintegral über die Divergenz gibt also anschaulich die Zahl der auslaufenden vermindert um die Zahl der einlaufenden Feldlinien an. Die in  $V$  befindliche Ladung  $Q(V)$ , beziehungsweise  $\rho$ , bezeichnet also bis auf den Faktor  $1/\varepsilon_0$  die Quellen bzw. die Senken des elektrischen Feldes.

**zu c)**

Es gilt

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (1.33)$$

Dies können wir leicht nachvollziehen, wenn wir in kartesischen Koordinaten für die x-Komponente schreiben

$$\begin{aligned} \left( \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)_x &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2(x - x')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}^3} \\ &= -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt natürlich auch für die y- und z-Komponente. Damit erhält man für das elektrische Feld

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= -\nabla \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\nabla \phi(\vec{r}). \end{aligned}$$

**zu b)**

Kann man aber nun das elektrische Feld als Gradienten eines Skalarfeldes  $\Phi$  darstellen.

so gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi \\ &= -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi \\ &= \begin{pmatrix} \partial_y \partial_z - \partial_z \partial_y \\ \partial_z \partial_x - \partial_x \partial_z \\ \partial_x \partial_y - \partial_y \partial_x \end{pmatrix} \Phi \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

wobei wir in der zweitletzten Zeile Rotation und Gradient in kartesischer Darstellung benutzt haben.

Für die explizite Berechnung des elektrischen Feldes aus einer vorgegebenen Ladungsverteilung betrachten wir nun den wichtigen Spezialfall, dass die Ladungsverteilung **kugelsymmetrisch** ist: Sei also  $\rho(\vec{r})$  symmetrisch gegenüber einer Drehung um den Koordinatenursprung. Die Ladungsverteilung  $\rho$  hängt also nur vom Betrag von  $\vec{r}$  ab. Durch diese Ladungsverteilung ist keine Raumrichtung ausgezeichnet. Deshalb kann es auch für das elektrische Feld keine ausgezeichnete Richtung geben und es gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(|\vec{r}|) \cdot \hat{e}_r.$$

Wie läßt sich  $E(|\vec{r}|)$  aus der Ladungsverteilung  $\rho(|\vec{r}|)$  bestimmen, ohne den „Umweg“ über die Berechnung des Potentials  $\Phi$  zu nehmen?

Zum einen gilt bei der Integration über die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius  $r$

$$\oint_{\text{Kugel}} \vec{E} d\vec{f} = E(|\vec{r}|) \cdot 4\pi r^2,$$

zum anderen gilt nach dem Satz von Gauß und den Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} d\vec{f} &= \int_V \operatorname{div} \vec{E} d^3\vec{r} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int_V \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} \\ &= \frac{Q(V)}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Daraus erhält man das elektrische Feld

$$\vec{E}(|\vec{r}|) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q(V)}{r^2}.$$

Wie das Ergebnis zeigt, ist das von  $\rho$  erzeugte Feld im Abstand  $r$  vom Koordinatenursprung identisch mit dem Punktladung  $Q(V)$ , die sich im Ursprung befindet. Die Ladung  $Q(V)$  ist gerade die gesamte Ladung, die sich in der Kugel vom Radius  $r$  befindet.

Dieses Ergebnis entspricht dem Resultat bei der Berechnung der Gravitationsanziehung einer ausgedehnten kugelsymmetrischen Massenverteilung. Auch dort haben wir gesehen,

dass diese Anziehung identisch ist mit der Anziehung durch eine entsprechende Punktmasse im Koordinatenursprung.

### Die Poisson-Gleichung

Wie wir gesehen haben sind die Quellen des  $\vec{E}$ -Feldes durch die Ladungsverteilung  $\rho$  gegeben und das elektrostatische Feld lässt sich als Gradient eines Skalarfeldes schreiben. Zusammengefasst ergibt dies:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (-\nabla\phi) = -\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Die Beziehung

$$\Delta\phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad (1.34)$$

wird als *Poisson-Gleichung* bezeichnet. In ladungsfreien Raumbereichen ( $\rho = 0$ ) geht sie über in die *Laplace-Gleichung*

$$\Delta\phi = 0.$$

## 1.5.1 Bedeutung des elektrostatischen Potentials und Energieinhalt des elektrischen Feldes

Um die Bedeutung des Skalarfeldes  $\Phi$  zu erläutern, berechnen wir die mechanische Arbeit, die aufgebracht werden muss, um eine Probeladung  $q$  von  $\vec{a}$  nach  $\vec{b}$  zu bringen:

$$\begin{aligned} W_{ab} &= - \int_a^b \vec{F} d\vec{s} \\ &= - \int_a^b q \cdot \vec{E} d\vec{s} \quad \text{Definition von } \vec{E} \\ &= q \cdot \int_a^b \nabla\Phi d\vec{s} \\ &= q \cdot \int_a^b d\phi \quad \text{Definition des grad} \\ &= q \cdot (\Phi(b) - \Phi(a)). \end{aligned}$$

Die aufzubringende Arbeit ist also nur von den Endpunkten der Verschiebung, nicht aber von dem zurückgelegten Weg abhängig.  $q \cdot \phi(\vec{r})$  gibt die potentielle Energie einer Ladung  $q$  in einem Feld  $\vec{E}$  an der Position  $\vec{r}$  an.

Das Potential  $\Phi$  ist vergleichbar (bis auf die Ladung der Probeladung) mit dem bereits bekannten mechanischen Potential des konservativen Kraftfeldes.

### Energieinhalt des elektrischen Feldes

Wir betrachten eine Verteilung von  $N$  Ladungen  $q_i$ , die sich an den Stellen  $\vec{r}_i$  befinden.



Wie groß ist die Energie, die aufgebracht werden muss, um die Ladungen zu plazieren? Zur Beantwortung dieser Frage machen wir ein Gedankenexperiment und bringen die einzelnen Ladungen in der Reihenfolge ihrer Nummerierung an ihre Positionen.

Sei  $W_1$  die benötigte Arbeit, um  $q_1$  aus dem Unendlichen nach  $\vec{r} = \vec{r}_1$  zu transportieren. Da der Raum bisher ladungsfrei ist, also noch kein  $\vec{E}$ -Feld vorhanden ist, kann man die Ladung kräftefrei verschieben, und somit gilt  $W_1 = 0$ . Ist aber die Ladung  $q_1$  an der Position  $\vec{r}_1$  so ergibt sich ein elektrostatisches Potential

$$\Phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}.$$

Um die Ladung  $q_2$  im Feld der Ladung  $q_1$  nach  $\vec{r}_2$  zu bringen, benötigt man die Arbeit

$$\begin{aligned} W_2 &= q_2 \cdot (\Phi_1(\vec{r}_2) - \Phi_1(\vec{r} \rightarrow \infty)) \\ &= q_2 \cdot \Phi_1(\vec{r}_2), \end{aligned}$$

wobei wir das Potential so normieren dass es für  $\vec{r} \rightarrow \infty$  verschwindet. Für die weiteren Ladungen ergibt sich

$$\begin{aligned} W_3 &= q_3 \cdot (\Phi_1(\vec{r}_3) + \Phi_2(\vec{r}_3)) \quad \text{mit} \quad \Phi_2(\vec{r}_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \\ &\vdots \\ W_n &= q_n \cdot (\Phi_1(\vec{r}_n) + \dots + \Phi_{n-1}(\vec{r}_n)). \end{aligned}$$

Somit erhält man die Gesamtenergie, die man aufwenden muß, um *alle*  $N$  Ladungen zu plazieren:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^N W_i \\ &= \sum_{i=2}^N q_i \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{i=2}^N q_i \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \right) \right) + \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{i=2}^N q_i \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{i=2}^N q_i \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \right) \right) + \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{k=1}^N q_k \left( \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}. \end{aligned}$$

Beim Übergang von diskreten Ladungen zur einer stetigen Ladungsverteilung  $\rho$  wird die

Summation durch eine Integration ersetzt:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{= \Phi(\vec{r})} \cdot \rho(\vec{r}) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \cdot \Phi(\vec{r}) \\
 &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{r} \Delta\Phi \cdot \phi \\
 &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int (\Delta\Phi \cdot \phi + (\nabla\Phi)^2 d^3\vec{r}) + \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla\Phi)^2 d^3\vec{r} \\
 &= \underbrace{-\frac{\epsilon_0}{2} \oint_{\mathcal{O}(V)} (\nabla\phi)\phi d\vec{f}}_{= 0 \text{ für } V \rightarrow \mathbf{R}^3} + \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla\phi)^2 d^3\vec{r}.
 \end{aligned}$$

Beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile wurde die Poissongleichung 1.34 angewandt. Beim Übergang von der vorletzten zur letzten Zeile wurde benutzt, dass

$$\nabla \cdot (\nabla\phi\phi) = \Delta\phi\phi + (\nabla\phi)^2$$

ist und dann der Satz von Gauß benutzt. Der erste Summand der letzten Zeile verschwindet, da

$$\phi \sim \frac{1}{r} \text{ für } r \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \nabla\phi = \frac{\partial}{\partial r}\phi \sim \frac{1}{r^2}.$$

Für das Produkt von beiden gilt

$$\phi \cdot \nabla\phi \sim \frac{1}{r^3} \quad \text{und} \quad \phi \cdot \nabla\phi d\vec{f} \sim \frac{1}{r}.$$

Für  $r \rightarrow \infty$  verschwindet der letzte Ausdruck. Man erhält also

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla\phi)^2 d^3\vec{r} \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}^2 d^3\vec{r}.
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Daraus folgt für die Energiedichte, also der Energieinhalt des elektrischen Feldes pro Volumen:

$$w = \epsilon_0 \vec{E}^2 / 2. \tag{1.36}$$

## 1.6 Ladungen in Metallen; Influenz

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst betrachten, wie sich Ladungen in geladenen metallischen<sup>4</sup> Objekten anordnen und welche allgemeinen Aussagen sich über das elektrische Feld an der Oberfläche von Metallen treffen lassen. Wir werden danach untersuchen, wie sich anfänglich ungeladene Metalle in der Nähe von Ladungen verhalten.

### 1.6.1 Massiver geladener metallischer Körper

Als erstes Beispiel betrachten wir einen metallischen Körper (z. B. eine Kugel), der zunächst ungeladen ist, und auf den wir dann Elektronen aufbringen<sup>5</sup>. Wie wir wissen, stoßen sich gleichnamige Ladungen ab. Die zusätzlichen Elektronen werden also bestrebt sein, sich möglichst weit voneinander zu entfernen. Dies gelingt dadurch, dass sie sich in einer dünnen Schicht in der Nähe der Oberfläche ansammeln. Man kann zeigen, dass die Dicke dieser Schicht nur wenige Atomlagen beträgt.

Wie ordnen sich die **Ladungen innerhalb der Oberflächenschicht** an? Auch hier stoßen sich die Ladungen ab. Im Fall einer Kugel lässt sich bereits aus Symmetriegründen erraten, dass sich die Ladungen homogen über die Oberfläche verteilen werden. Für allgemeinere Geometrien müssen wir das elektrische Feld betrachten, das durch die Ladungen erzeugt wird. Solange dieses eine Komponente  $\vec{E}_{\parallel}$  parallel zur Oberfläche hat, wirken Kräfte auf die Ladungen, die diese verschieben. Eine stabile Anordnung wird erst dann erreicht, wenn  $\vec{E}_{\parallel}$  verschwindet, d. h. **das elektrische Feld senkrecht zur Oberfläche** steht. Aus dem gleichen Grund ist ersichtlich, dass **das Innere des Metalls feldfrei** sein muss. Wäre  $\vec{E}$  im Inneren ungleich null, würden sich die Ladungen wiederum solange bewegen, bis verschwindet.

Wir demonstrieren das Ergebnis, dass  $\vec{E}$  senkrecht auf geladenen Metalloberflächen steht, durch Abbildung der Feldlinien um das in Abb. 1.14 gezeigte Objekt im mit Weizengries gefüllten Ölbad (s. Abb. 1.15):

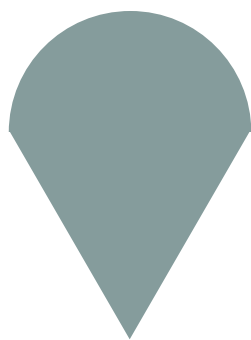
Man erkennt, dass die Feldlinien an der Rundung und der Spitze Ecken besonders dicht liegen. Entsprechend ist hier die auch Ladungsdichte am höchsten.

Wir stellen nun die geladene Spitze vor eine ebene metallische Platte, die entgegengesetzt geladen ist. Auch im Gesamtsystem Spitze/Platte stehen die Feldlinien senkrecht auf den Metalloberflächen, wobei die Feldüberhöhung an der Spitze klar zu erkennen ist (Abb. 1.15). An solchen Spitzen kann die Feldstärke sogar derart groß werden, dass Elektronen aus dem Metall an die Luft bzw. ins Vakuum austreten können. Diese **”Feldemission”** wird beispielsweise eingesetzt, um einen Strahl freier Elektronen im Elektronenmikroskop zu erzeugen.

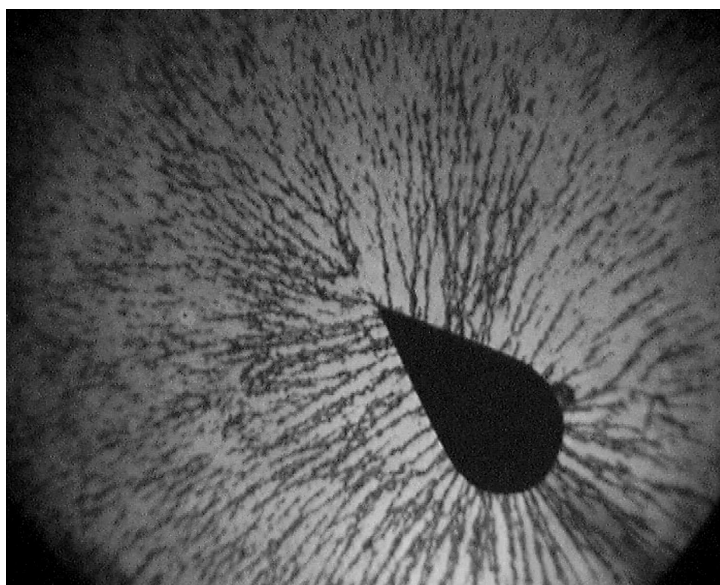
Wir haben bislang implizit angenommen, dass wir sehr viele Elektronen auf das Metall aufgebracht haben, d. h. wir kümmerten uns nicht um die Quantisierung der Ladung in

<sup>4</sup>Etwas allgemeiner können wir von **”Leitern”** sprechen und damit alle Materialien zusammenfassen, in denen sich Ladungsträger frei bewegen können. Dies schließt auch Materialien wie sog. Halbleiter oder Halbmetalle ein.

<sup>5</sup>Wir könnten auch Elektronen entfernen und damit, etwas schlampig ausgedrückt, positive Ladungen **”aufbringen”**.



(a)



(b)

Abbildung 1.14: *Feldlinien um ein metallisches Objekt. (a) Schematische Darstellung des Objekts. (b) Abbildung der Feldlinien im Objekte*

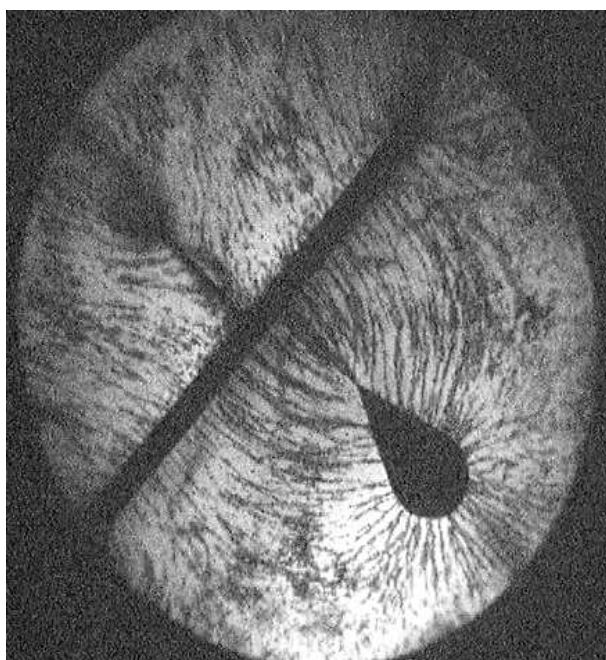


Abbildung 1.15: *Feldlinien zwischen einer metallischen geladenen Spitze und einer entgegengesetzt geladenen metallischen Platte.*

Vielfachen der Elementarladung  $e$ . Was wäre passiert, wenn wir nur sehr wenige Elektronen (z. B. nur eines) aufgebracht hätten? Auch dann hätten sich die bereits im Metall befindlichen  $10^{24}$  Elektronen so lange von der Zusatzladung wegbewegt, bis das elektrische Feld wiederum senkrecht auf der Oberfläche gestanden wäre. An einem gegebenen Ort der Oberfläche kompensieren die (positiven) Ladungen der Gitterionen nicht mehr vollständig die Ladung der jetzt dichter gepackten Elektronen. Die Ladung des zusätzlichen Elektrons wurde gewissermaßen kontinuierlich über die Oberfläche "verteilt".

## 1.6.2 Geladener metallischer Hohlraum

Ganz analog zum Inneren eines massiven Leiters verschwindet das elektrische Feld auch im Inneren eines metallischen Hohlraums (solange sich in diesem keine Zusatzladungen befinden). Feldlinien, die über den Hohlraum hinweg zu Ladungen an einer anderen Stelle des Hohlraums führen würden, würden wiederum zu einer Verschiebung der Ladungen im Metall führen.

Feldfreie metallische Kammern werden oft **”Faradaykäfig”** oder **”Abschirmkammern”** genannt (Faraday hatte die Feldfreiheit mittels eines Käfigs demonstriert). Man verwendet Abschirmkammern oft, um Messungen durchzuführen, die gegen elektrische Störfelder sehr empfindlich sind. Wie sich metallische Hohlräume bei Anwesenheit äußerer Ladungen verhalten, werden wir weiter unten (Abb. 1.25) darstellen.

Wir demonstrieren die Feldfreiheit metallischer Hohlräume in mehreren Versuchen:

### 1. Elektrometer im Faradaykäfig:

Ein Braunschensches Elektrometer steht auf einer geladenen Metallplatte und zeigt einen Ausschlag. Stellt man jetzt einen Käfig auf die Platte, so geht der Ausschlag auf null zurück. Dagegen schlägt ein weiteres Elektrometer aus, das auf der Außenseite des Käfigs angebracht ist (s. Abb. 1.16) Trennt man jetzt Käfig und Platte, so verbleiben Ladungen auf der Platte wie auf dem Käfig, beide Elektrometer schlagen aus.

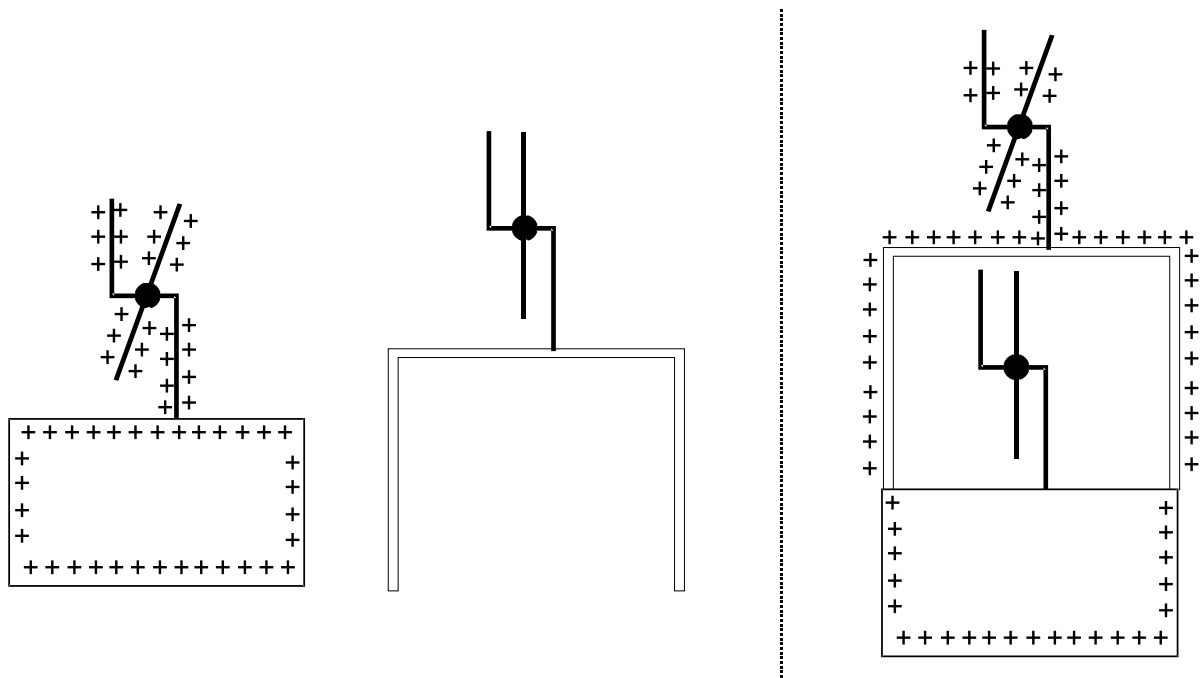


Abbildung 1.16: Zum Prinzip des Faraday-Käfigs. Die **”+”** Zeichen kennzeichnen symbolisch die Ladungsverteilung. **Deren Zahl ist wie auch in den nachfolgenden Zeichnungen rein willkürlich.**

### 2. Darstellung der Feldlinien um verschieden geformte geschlossen verbundene Drähte: Ring, Viereck, Stern

In allen Fällen bleibt das Innere der Körper feldfrei. Außen stehen die Feldlinien senkrecht auf dem Metall, wobei die Feldlinien an den Ecken besonders dicht liegen (Abb. 1.17).

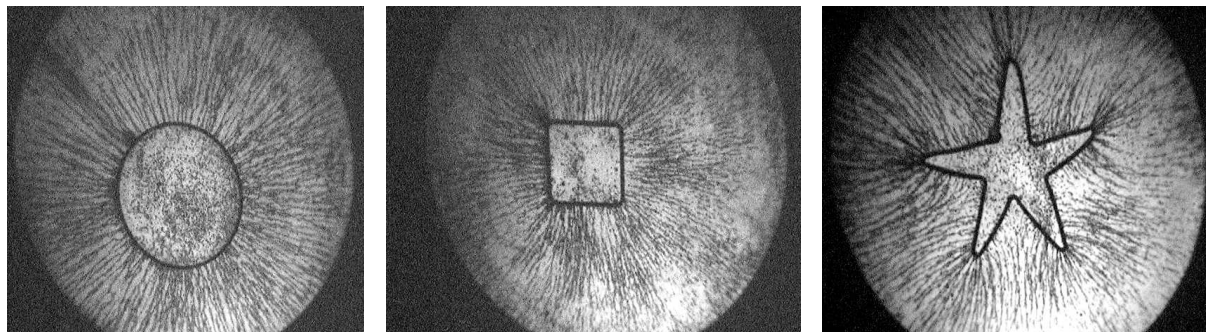


Abbildung 1.17: *Feldlinien um verschieden geformte Hohlräume.*

Die Feldfreiheit metallischer Hohlräume werden beim **Van-de-Graaf-Generator** (Abb. 1.18) ausgenutzt. Über eine Spitze S1 wird auf ein endlos umlaufendes Gummiband Ladung aufgesprüht. Die Spitze S2 leitet diese Ladung auf die Innenfläche einer metallischen Kugel. Von dort fließt die Ladung sofort auf die Außenfläche der Kugel, das Innere bleibt (weitgehend) feldfrei. Man kann die Kugel so lange aufladen, bis die elektrische Feldstärke an der Kugeloberfläche einen kritischen Wert überschreitet, oberhalb dem die aufgebracht Ladungen durch das umgebende Medium (im Versuch: Luft) abfließen kann (Funkenschlag). In Luft beträgt die kritische Feldstärke<sup>6</sup> ca.  $2 \cdot 10^6$  V/m.

Mit Van-de-Graaf-Generatoren können elektrische Spannungen (Potenzialdifferenzen) im Megavoltbereich erzeugt werden. Mit diesen Spannungen können dann elektrische geladenen Teilchen auf entsprechend hohe Energien beschleunigt werden.

Abb. 1.19 zeigt zwei Personen, die durch einen van-de-Graaf Generator aufgeladen wurden. An den Haaren erkennt man wiederum, dass sich gleichnamige Ladungen abstoßen.

In einem weiteren Versuch bringen wir im Ölbad eine Punktladung ins Zentrum eines neutralen, elektrisch isolierten Rings (Abb. 1.20). Es gehen Feldlinien von der Punktladung radial zum Ring, wie man es entsprechend des Gaußschen Satzes auch erwarten kann. Die Feldlinien treten scheinbar durch den Ring hindurch und setzen sich außerhalb des Rings in radialer Richtung fort. Da der Ring selbst elektrisch neutral ist, muss dies nach dem Gaußschen Satz erwartet werden. In einem Kugelvolumen (bzw. in 2 Dimensionen: Kreis), das den Ring mit einschließt, ist nach wie vor die Punktladung enthalten. Die von ihr ausgehenden Feldlinien durchdringen auch das Kugelvolumen. Auf der anderen Seite sollte im Leitermaterial selbst kein Feld vorliegen. Diesen scheinbaren Widerspruch klären wir im nächsten Abschnitt.

### 1.6.3 Influenz

Wir betrachten zunächst eine Punktladung vor einer ungeladenen, von der Außenwelt elektrisch isolierten, Metallplatte. Die Platte sei unendlich ausgedehnt. Ohne Anwesenheit der Metallplatte gehen von der (als positiv angenommenen) Punktladung in radialer

<sup>6</sup>Man bezeichnet eine Potenzialdifferenz  $\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)$  als Spannung und gibt dieser im SI-System die Einheit Volt (V). Das elektrische Feld, das sich als  $-\vec{\nabla}\phi$  berechnet, hat entsprechend die Einheit V/m.

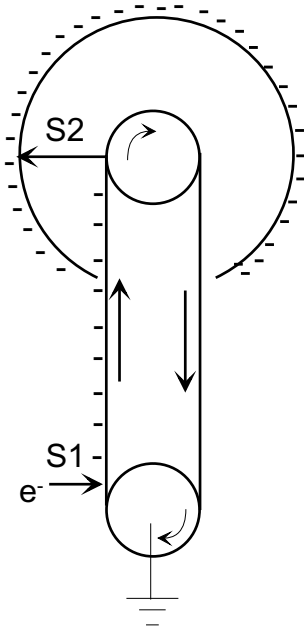


Abbildung 1.18: Das Prinzip des van-de-Graaf Generators



Abbildung 1.19: Elektrische Aufladung am van-de-Graaf Generator. Quelle: <http://www.ph.ed.ac.uk/scifun/Activities/FunPhysics/vandg.html>

Richtung Feldlinien aus. Diese würden eine in die Nähe gebrachte Metallplatte unter schiefen Winkeln schneiden (Abb. 1.21(a)), was zu einem Feld im Inneren des Leiters führen würde und ebenfalls die Bedingung verletzt, dass das elektrische Feld senkrecht auf der Metalloberfläche steht. In der Platte bewegen sich daher Elektronen so auf die der Punktladung zugewandten Seite zu, dass, wie in Abb. 1.21(b) schematisch angedeutet, beide Bedingungen erfüllt werden. Da die Platte insgesamt neutral ist, entsteht auf der gegenüberliegenden Seite ein Überschuss an negativen Ladungen, diese Plattenseite wird positiv aufgeladen. Auch von diesen Ladungen gehen wiederum Feldlinien aus. Man kann die Platte zusätzlich mit einer elektrisch leitenden Verbindung zur Erde (einer Erdung) versehen. Die Erde stellt letztlich ein Ladungsreservoir dar, aus dem Elektronen in die Platte nachströmen, so dass die positive Ladung auf der Rückseite der Platte kompensiert wird (Abb. 1.21(c)).

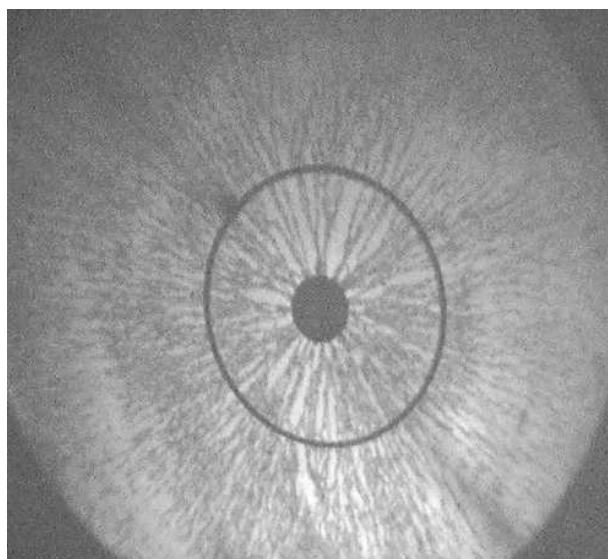


Abbildung 1.20: Feldlinien um eine Punktladung, die von einem elektrisch neutralen metallischen Ring umschlossen ist.

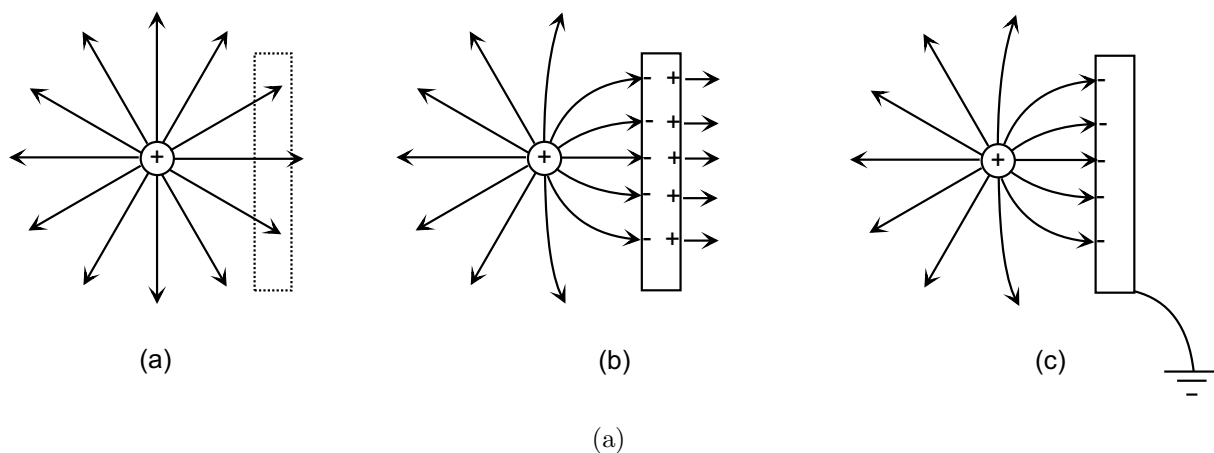


Abbildung 1.21: *Influenz: Punktladung vor einer metallischen Platte: (a) Platte noch nicht vorhanden; (b) ungeerdete, insgesamt elektrisch neutrale Platte; (c) geerdete Platte.*

Das elektrische Feld zwischen der Platte und der Punktladung lässt sich quantitativ mit der Methode der "Spiegelbildungen" bestimmen, wie im Theorieteil vorgeführt wird. Die Methode wird auch eingesetzt, um auch allgemeinere Feldverteilungen, etwa von mehreren Punktladungen, zu berechnen.



## 1.7 Randwertprobleme

Wir haben gesehen, dass sich aus einer gegebenen Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}')$  das elektrostatische Potential  $\phi(\vec{r})$  mit

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

berechnen läßt. Hierbei muß  $\rho(\vec{r}')$  allerdings für *alle*  $\vec{r}'$  im Universum bekannt sein.

In der Regel ist die Ladungsverteilung aber nur in einem begrenzten Volumen  $V$  bekannt. Ist ausserdem noch eine Information über Eigenschaften des Potentials auf der Oberfläche dieses Volumens gegeben, so spricht man von einem *Randwertproblem der Elektrostatik*. Je nach der vorgegebenen Information über das Potential auf der Grenzfläche oder Randfläche des Volumens unterscheidet man zwei Fälle:

1. Neben der Ladungsverteilung im Volumen  $V$  ist auch der Wert des Potentials auf dem Rand vorgegeben. Dies bezeichnet man als das *Dirichletsche Randwertproblem*.
2. Ist dagegen neben der Ladungsverteilung in  $V$  die Komponente des Potentialgradienten, die senkrecht zur Oberfläche steht bekannt, bezeichnet man dies als *von Neumannsches Randwertproblem*. In diesem Fall ist also auf der Oberfläche von  $V$  die Komponente des elektrischen Feldes ( $\vec{E} = -\text{grad}\Phi$ ) vorgegeben, die senkrecht zu dieser Oberfläche steht.

Ziel dieser Randwertprobleme ist es aus den vorgegebenen Informationen (Ladungsdichte in  $V$  plus Information über den Rand) das Potential  $\phi$  und damit das elektrische Feld im gesamten Volumen  $V$  zu bestimmen. Weiter unten in diesem Paragraphen werden wir zeigen, dass die gerade definierten Randwertprobleme (Dirichlet und v. Neumann) eindeutige Lösungen besitzen.

### 1.7.1 Beispiele, Spiegelladungsmethode

Zunächst soll aber ein Beispiel für das Randwertproblem von Dirichlet betrachtet werden. Mit Hilfe der sogenannten *Spiegelladungsmethode* werden wir ein Potential finden, für das gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{Poisson Gleichung} & \Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}), \quad \text{für alle } \vec{r} \text{ aus } V \\ \text{Randbedingung} & \phi(\vec{r}') = \phi_{\text{Rand}}(\vec{r}') \quad \text{für alle } \vec{r}' \text{ des Randes} \end{array} \quad (1.37)$$

Als **Beispiel** betrachten wir eine Punktladung  $q$ , die sich an der Stelle  $\vec{x}_0 = (x_0, 0, 0)$  befindet (Abb. 1.22) In der  $y$ - $z$ -Ebene befindet sich eine unendlich weit ausgedehnte Metallplatte vernachlässigbarer Dicke. Diese Metallplatte sei geerdet, also gilt  $\phi = 0$  auf der Platte. Das betrachtete Volumen  $V$  ist also der Raum mit  $x > 0$  und als Randbedingung geben wir vor, dass das Potential auf dem Rand (d.h. auf der Metallplatte und für  $\vec{r} \rightarrow \infty$ ) gleich 0 wird.

Um den Potentialverlauf im ganzen rechten Halbraum und die auf der Metallplatte induzierte Ladung zu bestimmen, greifen wir auf die Spiegelladungsmethode zurück und

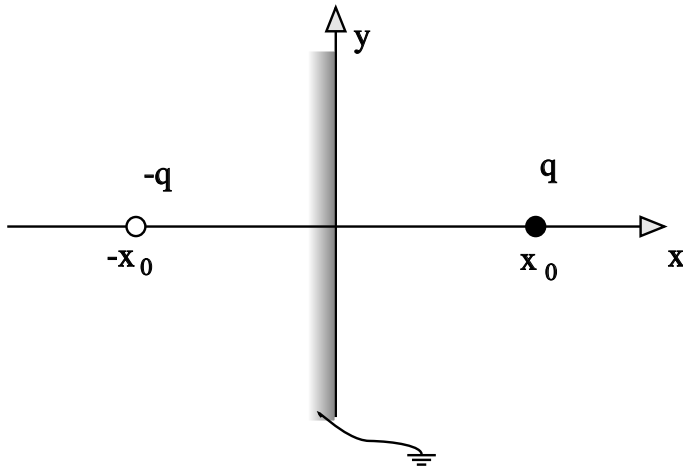


Abbildung 1.22: Beispiel für die Lösung eines Randwertproblems mit Hilfe einer Spiegelladung

behaupten, dass das Dirichletsche Randwertproblem gelöst ist, wenn wir der Ladung  $q$  eine Spiegelladung mit der Ladung  $-q$  an der Position  $-\vec{x}_0$  gegenüberstellen (siehe auch Abb. 1.22). Zu zeigen ist also, dass die Gleichungen (1.37) erfüllt werden durch den Ansatz für das Potential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{|\vec{r} - \vec{x}_0|} - \frac{q}{|\vec{r} - (-\vec{x}_0)|} \right].$$

Der zweite Term entspricht dem Beitrag der *Spiegelladung* in  $-\vec{x}_0$ . Zu überprüfen ist nun, ob  $\Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}q\delta(\vec{r} - \vec{x}_0)$  für alle  $\vec{r}$  im rechten Halbraum erfüllt ist. Dazu betrachten wir zunächst einmal

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}_0|} \stackrel{(1.33)}{=} -\operatorname{div} \frac{(\vec{r} - \vec{x}_0)}{|\vec{r} - \vec{x}_0|^3} \stackrel{(1.23)}{=} -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{x}_0). \quad (1.38)$$

Damit ergibt sich direkt

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\vec{r}) &= -\frac{1}{\epsilon_0}q\delta(\vec{r} - \vec{x}_0) - \underbrace{\frac{1}{\epsilon_0}(-q)\delta(\vec{r} + \vec{x}_0)}_{=0 \text{ im rechten Halbraum}} \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}). \end{aligned}$$

Die Poisson-Gleichung ist also erfüllt. Betrachten wir jetzt das Verhalten von  $\phi$  auf dem Rand, also auf der Metallplatte (die Randbedingung für  $\vec{r} \rightarrow \infty$  ist sicher erfüllt). Auf der Metallplatte bei  $x = 0$  aber gilt

$$\begin{aligned} \phi\left(\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist auch die Randbedingung erfüllt. Mit der Spiegelladungsmethode ist es uns also gelungen, einen Potentialverlauf zu finden, der die Bedingungen erfüllt. Allgemein besteht diese Methode darin, Ladungen ausserhalb des betrachteten Bereiches so zu bestimmen, dass sie zusammen mit den vorgegebenen Ladungen innerhalb des betrachteten Bereiches ein Potential erzeugen, das die Randbedingungen erfüllt.

Durch das Vorhandensein der Ladung  $q$  in  $\vec{x}_0$  werden in die Metallplatte Ladungen induziert. Ist also  $q$  positiv, so werden Elektronen in der Metallplatte durch die Coulombwechselwirkung in die Nähe der Ladung  $q$  gezogen. Da diese Ladungsträger in der Metallplatte frei beweglich sind und die Platte geerdet ist, können Elektronen zufließen. Es entsteht also eine induzierte negative Ladung in der Metallplatte. Die Effekte dieser induzierten Ladung werden durch die Spiegelladung dargestellt. Um uns von diesem Sachverhalt zu überzeugen, berechnen wir nun das elektrische Feld in der Nähe der Trennfläche:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \text{für } \vec{r} = (0, y, z),$$

für die einzelnen Komponenten:

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \phi \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+x_0)^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2yq}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2yq}{\sqrt{(x+x_0)^2 + y^2 + z^2}^3} \\ &\stackrel{x=0}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2yq}{2\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2yq}{2\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Genau so gilt auch

$$E_z = 0$$

Hätte das elektrische Feld eine Komponente parallel zur Metalloberfläche, so würden die frei beweglichen Ladungsträger in der Metallfläche sich diesen Kraftkomponenten entsprechend bewegen. Für die x-Komponente gilt aber im rechten Halbraum:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \phi \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(x+x_0)}{\sqrt{(x+x_0)^2 + y^2 + z^2}^3} \\ &\stackrel{x=0}{=} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qx_0}{\sqrt{x_0^2 + y^2 + z^2}^3} \end{aligned}$$

Da aber im linken Halbraum das elektrische Feld gleich Null ist enden diese Feldlinien senkrecht auf der Metallwand. In der Wand gibt es also Quellen beziehungsweise Senken des elektrischen Feldes. Diese Quellen und Senken sind die diskutierten induzierten Ladungen.

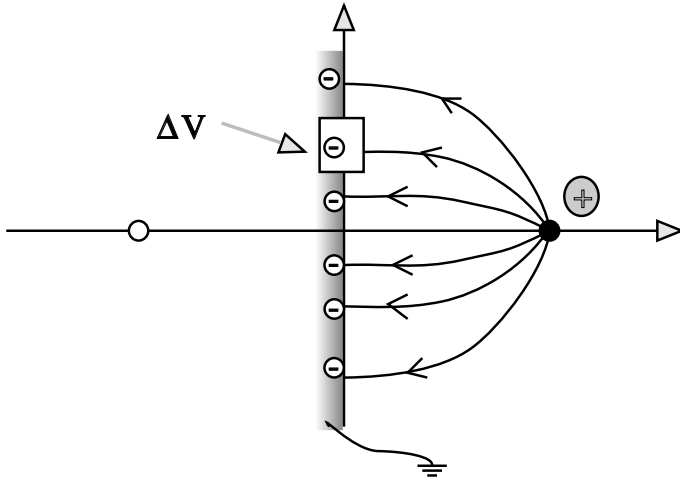


Abbildung 1.23: Zur Berechnung der induzierten Flächenladung

Wie groß ist nun diese Oberflächenladung  $\sigma$ ?

Um diese zu berechnen, wählen wir ein Volumenelement,  $\Delta V$  (siehe auch Abb. 1.23), welches aus der Metallplatte ein infinitesimales Flächenstück herausschneidet und eine Fläche  $\Delta F$  parallel zur Metallfläche besitzt. Da es ein elektrisches Feld nur senkrecht zur rechten Fläche  $\Delta F$  dieses Volumenelementes gibt, gilt

$$\begin{aligned}
 \oint_{O(\Delta V)} \vec{E} d\vec{f} &= \int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{E} d^3\vec{r} \\
 &= \int_{\Delta V} \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} d^3\vec{r} \\
 &= \frac{\Delta F \cdot \sigma}{\epsilon_0} \\
 \Rightarrow \sigma(\eta) &= \oint_{O(\Delta V)} \vec{E} d\vec{f} \cdot \frac{\epsilon_0}{\Delta F} \\
 &= \frac{\epsilon_0}{\Delta F} \Delta F \cdot \left( -\frac{2qx_0}{\sqrt{x_0^2 + \eta^2}} \right),
 \end{aligned}$$

wobei  $\eta = \sqrt{y^2 + z^2}$  den Abstand vom Ursprung bezeichnet. Man erkennt, dass die Flächenladungsdichte  $\sigma$  im Ursprung ein Maximum besitzt.

Als letztes soll die Gesamtladung berechnet werden, die in die Metallplatte induziert wird:

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sigma(\eta) d\eta \eta d\varphi \\
 &= -\frac{2q}{4\pi} \int_0^{2\pi} \pi d\varphi \int_0^\infty \frac{\eta \cdot x_0}{\sqrt{x_0^2 + \eta^2}} d\eta \\
 &= -q.
 \end{aligned}$$

Die induzierte Ladung ist betragsmäßig gleich der Punktladung und auf der Wand „verteilt“.

### 1.7.2 Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass ein Potential  $\phi$ , das eine Lösung des Randwertproblems von Dirichlet darstellt, stets eindeutig bestimmt ist. Bei der Lösung des v. Neumannschen Randwertproblems ist das Potential bis auf eine ortsunabhängige Konstante bestimmt.

Wie bereits zu Beginn dieses Paragraphen gesagt wurde, ist bei einem v. Neumannschen Problem die Normalenableitung des Potentials gegeben. Damit gelten für diese Randwertprobleme folgende Bestimmungsgleichungen:

- i)  $\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$  für  $\vec{r} \in V$
- ii)  $\partial\phi/\partial\hat{n} = -\vec{E} \cdot \hat{n}$ ,  $\hat{n}$  ist dabei der Normalenvektor auf dem Rand von  $V$ .

Haben wir nun ein Potential gefunden, das diese Anforderungen erfüllt, so werden wir zeigen, dass dieses Potential bis auf eine Konstante eindeutig ist. Da aber eine Konstante im Potential, das daraus berechnete Feld nicht beeinflusst ( $\vec{E} = -\text{grad}\phi$ ), ist das  $\vec{E}$ -Feld eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien  $\phi_1$  und  $\phi_2$  zwei Lösungen eines Dirichletschen oder v. Neumannschen Randwertproblems. Wir definieren  $u = \phi_1 - \phi_2$ . Nach Voraussetzung gilt dann:

$$\Delta u = \Delta\phi_1 - \Delta\phi_2 = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} + \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} = 0, \quad \text{für alle } \vec{r} \in V.$$

Betrachten wir nun das Integral

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\nabla} \cdot (u\vec{\nabla}u) d^3\vec{r} &= \int_V (\vec{\nabla}u\vec{\nabla}u + \underbrace{u\Delta u}_{=0}) d^3\vec{r} \\ &= \int_V (\vec{\nabla}u)^2 d^3\vec{r} \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_{\mathcal{O}(V)} (u\vec{\nabla}u) d\vec{f} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung gilt im Fall des Dirichletschen Randwertproblems, da dann ja nach Voraussetzung  $u = \phi_1 - \phi_2$  für alle Punkte auf dem Rand verschwindet also auch das Integral über  $u\vec{\nabla}u$  gleich 0 wird. Im Fall des v. Neumannschen Randwertproblems gilt aber für alle Randpunkte von  $V$

$$\text{da } \vec{\nabla}u d\vec{f} = \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} d\vec{f} = \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial \hat{n}} - \frac{\partial \phi_2}{\partial \hat{n}} \right] d\vec{f} = 0$$

(Beachte: auf der rechten Seite dieser Gleichung stehen keine Vektoren) und damit verschwindet das Integral der Funktion  $u\vec{\nabla}u$  integriert über die Oberfläche von  $V$  ebenfalls. Wir haben also in beiden Fällen gezeigt, daß

$$\int_V (\vec{\nabla}u)^2 d^3\vec{r} = 0$$

Daraus folgt  $\vec{\nabla}u = 0$  für alle  $\vec{r}$  in  $V$ . Also ist  $u = \text{const.}$

Im Fall des Dirichlet-Problems wird diese Konstante 0, da ja  $u$  auf dem Rand bereits den konstanten Wert 0 annimmt.  $\square$

## 1.8 Versuche zur Influenz

Zur Influenz von Ladungen in Metallen zeigen wir mehrere Versuche:

- Wir bringen einen geladenen, an einer Schnur hängenden Ball in die Nähe einer ungeladenen Platte (vgl. auch Abschnitt 1.2). Es entwickeln sich Feldlinien in Analogie zur Abb. 1.21(b). Die resultierende attraktive Kraft zwischen Platte und Ball führt zu einer Anziehung des Balls.
- Bringt man einen (negativ) geladenen Stab in die Nähe eines ungeladenen Braunschens Elektrometers, so schlägt dieses bereits aus, bevor der Stab das Elektrometer berührt (vgl. Abb. 1.24). Es sammeln sich im Elektrometer Elektronen in Stabnähe an. Dadurch wird der Rest des insgesamt neutralen Elektrometers positiv geladen. Diesen Effekt hatten wir in Abschnitt 1.2 (Abb. 1.2) noch unterschlagen.

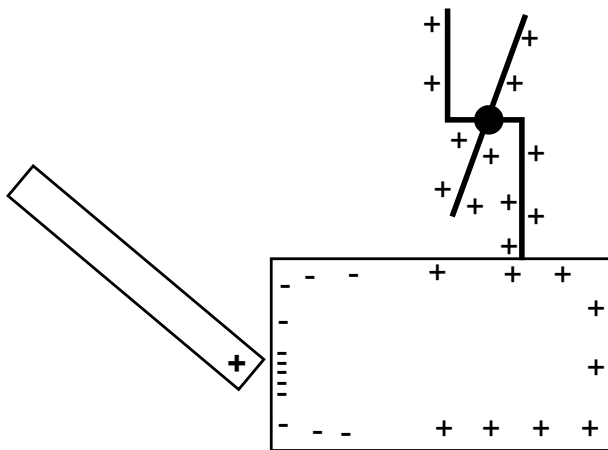


Abbildung 1.24: *Influenz: Ein geladener Stab befindet sich in der Nähe eines Braunschens Elektrometers, ohne dieses zu berühren.*

Entfernt man den geladenen Stab, so verschwindet der Ausschlag des Elektrometers, da dieses ja insgesamt neutral war. Wir erden jetzt das Elektrometer und bringen dann den Stab in dessen Nähe. Das Elektrometer schlägt wiederum aus. Jetzt fließen aber in Analogie zu Abb. 1.21(c) Elektronen auf das Elektrometer, die dieses negativ aufladen. Entfernen wir jetzt die Erdung und entfernen anschließend den geladenen Stab, so bleibt das Elektrometer negativ geladen.

- Auch den leitenden Ring der Abb. 1.20 betrachten wir nochmals bei Anwesenheit zusätzlicher Ladungen. Der Ring ist jetzt geerdet. Wenn sich eine Punktladung außerhalb des Rings befindet, bilden sich Feldlinien zwischen Ring und der Ladung aus, das Ringinnere bleibt feldfrei (Abb. 1.25(a)). Der Ring schirmt also auch diese Felder ab. Wenn die Punktladung in das Ringinnere gebracht wird, gehen von dieser Feldlinien aus, die an der Ringinnenwand enden, das Ringäußere (und auch der Ring selbst) bleibt feldfrei (Abb. 1.25(b)) im Gegensatz zur Abb. 1.20, wo an der Ringaußenseite induzierte Ladungen das Feld in den Außenraum fortsetzten.
- Wir bringen zwei elektrisch leitende und sich berührende Kugeln in das Feld eines Konduktors (Abb. 1.26) und trennen diese dort. Durch Influenz wurde eine der Kugeln positiv geladen, die andere negativ; die Ladungen bleiben auf den Kugeln auch nach ihrer Trennung erhalten. Wenn wir mit einer der beiden Kugeln ein

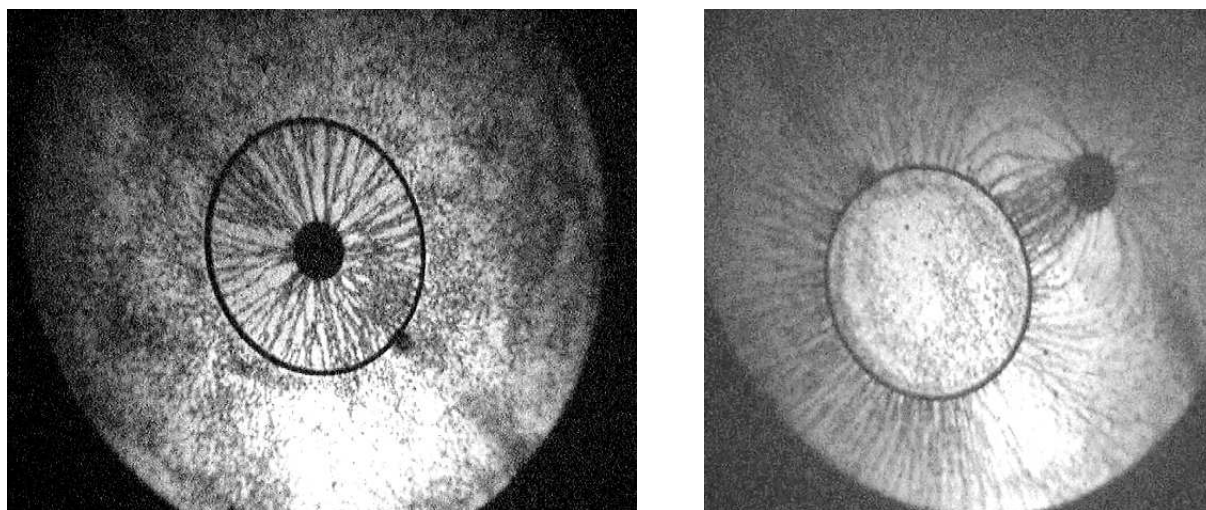


Abbildung 1.25: *Feldlinien einer Punktladung in der Nähe eines geerdeten metallischen Rings.*

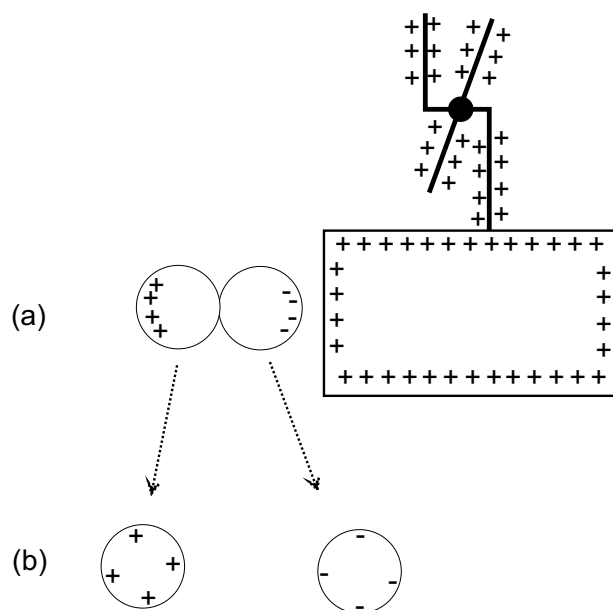


Abbildung 1.26: *Trennung induzierter Ladungen*

vormals neutrales Elektrometer berühren, so schlägt dieses aus, die Berührung mit der zweiten Kugel neutralisiert das Elektrometer wieder.

Zum Abschluss dieses Abschnitts erläutern wir das Prinzip der **Influenzmaschine** (s. Abb. 1.27), die wir in bereits mehreren Versuchen zur Aufladung unterschiedlichen Gegenständen verwendet haben. Ein Gerät dieser Art wurde bereits 1865 von Holz in Berlin vorgestellt. Sie nutzt das Prinzip der Trennung von durch Influenz erzeugter Ladungen auf trickreiche Weise.

*Die Maschine besteht aus zwei gegeneinander laufenden Scheiben (A), auf denen voneinander isolierte leitende Segmente (Staniolstreifen) aufgebracht sind.*



*Auf den beiden Glassäulen (D) befinden sich Konduktoren zur Ladungsaufnahme, die mit einem mit Saugbüschel versehenen Arm die Ladung von den Staniolbelägen absaugen. Jede Scheibe besitzt einen Konduktor mit zwei Metallbüscheln. Die Maschine erregt sich selbst. Ist irgendein Staniolbelag z.B. der vorderen Scheiben zufällig elektrisch negativ geladen, so erregt er in einem bei ihm vorbei rotierenden Belag durch Influenz der hinteren Scheibe positive Ladung, die durch Abfließen der Elektronen über die Bürsten in den Konduktor kommt. Bei weiterer Drehung induziert diese positive Ladung auf der hinteren Scheibe auf den Staniolstreifen der vorderen Scheibe negative Ladung, die durch Elektronenfluss über die Bürsten aus dem vorderen Konduktor kommt. Durch die versetzte Anbringung der Bürsten schaukelt sich das gegenseitige Aufladen der Konduktoren immer mehr auf. Diese Ladung sammelt sich nun in den Konduktoren und den "Leydener Flaschen"<sup>7</sup> (B). Bei zu großer Spannung springt dann Ladung in Form eines kräftigen Funkens zwischen den Elektrodenkugeln über.*

(Erklärungstext: [http://www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/U\\_materialien/leifiphysik/web\\_ph10/versuche/01\\_ladung/influenzmaschine/influenzmasch.html](http://www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/U_materialien/leifiphysik/web_ph10/versuche/01_ladung/influenzmaschine/influenzmasch.html))

---

<sup>7</sup>Auszug aus: <http://www.wundersamessammelsurium.de/Elektrisches/LeydenerFlasche/index.html>: Die "Leydener Flasche" (auch: Kleist'sche Flasche, Kleist'sche Verstärkungsflasche) wurde 1745 von Ewald Jürgen von Kleist und dann 1746 noch einmal von dem Physiker Pieter van Musschenbroek (Cunaeus) an der Universität Leyden erfunden (Kleist und Musschenbroek agierten unabhängig voneinander). Mit der Leydener Flasche konnte erstmals elektrische Ladung gesammelt, verstärkt, aufbewahrt und transportiert werden. Diese Flasche besteht aus einem oben offenen zylindrischen Nichtleiter (ein Glasgefäß) und trägt auf seiner Innen- und Außenfläche gegeneinander isoliert zwei leitende Schichten (aufgeklebtes Stanniol). Die innere Schicht ist zu bequemerem Aufladen der "Flasche" mit einer Metallstange verbunden, die nach außen ragt. Wird die Flasche über die Stange negativ aufgeladen, so entsteht durch Influenz am äußeren Belag eine positive Ladung. Die verdrängten Elektronen entweichen in die Erde, wenn die Flasche nicht isoliert steht. Damals war es beliebt, einer Menschenkette einen elektrischen Schlag (den sogenannten Kleist'schen Stoß) zu versetzen. Man erfreute sich an den zuckenden und springenden Opfern. In einem Physiklehrbuch bemerkt Lichtenberg dazu: "Zu Paris glaubte man vor einigen Jahren gefunden zu haben, daß der Stoß immer bey "frigidis et impotentibus" aufhöre. Der Graf von Artois, der davon hörte, berief dazu die Castraten der Oper; und man fand die Beobachtung falsch. Auf diese Weise ist die Elektrisiermaschine um die Ehre gekommen, dereinst als ein nützliches Instrument in den Versammlungs-Sälen der Consistorien und Ehegerichte zu prangen."

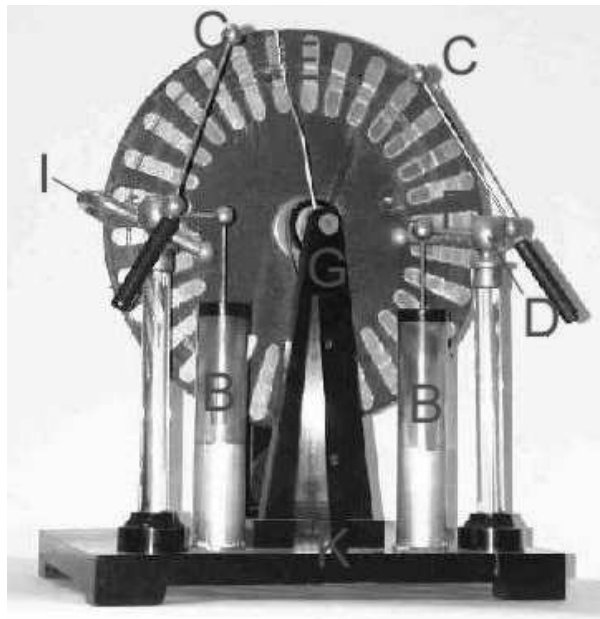


Abbildung 1.27: Die Influenzmaschine.

A: Scheiben;

B: Leydener Flaschen;

C: Elektroden mit Funkenüberschlag;

D: Ausgleichskonduktoren;

E: Saugbüschel;

F: Kontakt zu den Leydener Flaschen;

G: Hartgummibalken (Scheiben-Lager);

I: Kontakt zu gegenüberliegenden Büscheln;

K: Klemmen zur Stromentnahme

Quelle: [http://www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/U\\_materialien/leifphysik/web\\_ph10/versuche/01\\_ladung/influenzmaschine/influenzmasch.html](http://www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/U_materialien/leifphysik/web_ph10/versuche/01_ladung/influenzmaschine/influenzmasch.html)

## 1.9 Multipolentwicklung

Ziel der Multipolentwicklung ist es, das elektrische Feld einer Ladungsverteilung anzugeben, die nicht auf einem Punkt konzentriert ist sondern in einem kleinen Bereich um den Koordinatenursprung lokalisiert ist. Dies bedeutet, dass die Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  nur für Vektoren  $\vec{r}$  mit kleinem Betrag von Null verschieden ist. Als Beispiel betrachten wir die Ladungsverteilung eines Atomkernes. Aus der Sicht der Elektronen, die diesen Atomkern in einem Atom umgeben, ist diese Ladungsverteilung in erster Näherung punktförmig und trägt die Gesamtladung  $Ze$  mit  $Z$  der Kernladungszahl, also der Zahl der Protonen im Kern, und  $e$  die Elementarladung eines Protons. Bei genauerer Untersuchung stellt sich aber heraus, dass die Ladung des Atomkernes nicht punktförmig ist. Berechnet man mit den Methoden der Quantenmechanik die stationären Lösungen der Schrödingergleichung für die Elektronen im Feld des Atomkernes, so hängen die Ergebnisse für die Energien dieser stationären Lösungen ein wenig von der genauen Form der Ladungsverteilung ab. Aus der charakteristischen Strahlung des Atoms erhält man die Information über die Differenzen dieser Energien und damit im Prinzip auch Information über die Ladungsverteilung des Atomkernes. Genauere Daten erhält man aus Experimenten, bei denen Elektronen an der Ladungsverteilung des Kernes gestreut werden.

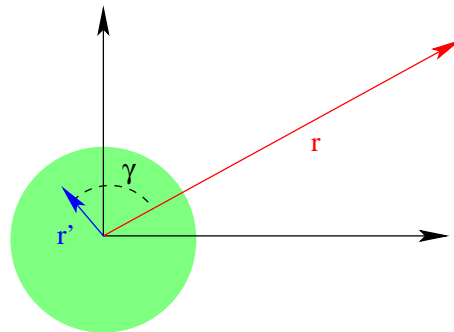


Abbildung 1.28: *Koordinaten für die Berechnung des Potentials einer lokalisierten Ladungsverteilung*

Im folgenden wollen wir eine lokalisierte Ladungsverteilung im feldfreien Raum betrachten. Für das elektrostatische Potential, das von dieser Ladungsverteilung erzeugt wird, gilt:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.39)$$

Da wir uns für das Potential an Stellen  $\vec{r}$  ausserhalb der Ladungsverteilung, die am Koordinatenursprung lokalisiert sein soll, interessieren, gilt  $r > r'$ , der Abstand des Beobachtungspunktes  $\vec{r}$  vom Zentrum der Ladungsverteilung ist sehr groß im Vergleich zu den Abständen  $r'$  von Punkten an denen sich Ladungen befinden (siehe auch Abb 1.28). Für diesen Fall betrachten wir nun die Funktion

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2}}, \quad (1.40)$$

wobei  $\gamma$  den Winkel zwischen den Vektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  bezeichnet. Diese Funktion in (1.40) bestimmt nach (1.39) den Einfluss einer Ladung am Ort  $\vec{r}'$  auf das elektrostatische Potential  $\phi$  am Ort  $\vec{r}$ . Um eine geeignete Approximation für diese Funktion zu finden, schreiben wir sie um auf die Form

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\chi \cos \gamma + \chi^2}} \quad \text{mit} \quad \chi = \frac{r'}{r},$$

wobei  $\chi$  Werte annimmt die sehr klein sind im Vergleich zu 1. Deshalb ist es sinnvoll diese Funktion in eine Potenzreihe nach Potenzen von  $\chi$  zu entwickeln (Taylorreihe um  $\chi = 0$ ) was uns auf einen Ausdruck der Form

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \chi^l P_l(\cos \gamma), \quad (1.41)$$

führt. In dieser Entwicklung bezeichnen  $P_l(\cos \gamma)$  die sogenannten Legendre Polynome, das sind Polynome vom Grad  $l$  in ihrem Argument  $\cos \gamma$ . Als Beispiele für diese Legendre Polynome geben wir explizit an:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Die Legendre Polynome höherer Ordnung  $l$  kann man dann mit Hilfe der Rekursionsformel

$$(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x) \quad (1.43)$$

bestimmen. Betrachten wir diese Gleichung für  $l = 1$  so ergibt sich

$$2P_2(x) = 3xP_1(x) - 1P_0(x),$$

was mit (1.42) auf

$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad (1.44)$$

führt. Damit ergibt sich also für die Entwicklung in (1.41)

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \chi \cos \gamma + \chi^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2} \right) + \dots \right]. \quad (1.45)$$

Setzt man diese Entwicklung in (1.39) ein, so ergibt sich eine Summe nach den Beiträgen geordnet nach dem Summationsindex  $l$  in dieser Entwicklung

$$\phi(\vec{r}) = \sum_l \phi_l(\vec{r}). \quad (1.46)$$

Man nennt diese Entwicklung die **Multipolentwicklung** für das elektrostatische Potential. Aus der Herleitung wissen wir, dass diese Multipolentwicklung gut konvergiert, wenn  $\chi \ll 1$ , beziehungsweise  $r' \ll r$  ist. In diesem Fall reicht es also aus die Terme niedriger Ordnung in  $l$ , die niedrigen Multipole zu betrachten. Insbesondere ergibt sich für  $l = 0$  der **Monopolbeitrag** der Ladungsverteilung zu

$$\begin{aligned} \phi_0(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \end{aligned}$$

Der Monopolbeitrag der Ladungsverteilung zum Potential,  $\phi_0$  ist also identisch mit dem Potenzial, das sich ergibt, wenn die Gesamte Ladung  $Q$  im Koordinatenursprung, also der Position der Ladungsverteilung vereinigt ist. Wenn die Ladungsverteilung elektrisch neutral ist, also  $Q = 0$ , so ist der wichtigste Beitrag zu  $\phi$  gegeben durch den **Dipolanteil** ( $l = 1$ ) in der Form

$$\begin{aligned}
 \phi_1(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \int_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \frac{r'}{r} \cos \gamma \\
 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \int_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \frac{r'}{r} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'} \\
 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \int_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \vec{r}' \\
 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{d}, \tag{1.47}
 \end{aligned}$$

mit der Definition

$$\vec{d} = \int_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \vec{r}', \tag{1.48}$$

für das Dipolmoment  $\vec{d}$  der Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}')$ . Dieses Dipolmoment ist genau so wie das Monopolmoment (d.h. die Gesamtladung  $Q$ ) eine charakteristische Größe für die Ladungsverteilung. Da es sich bei dem Dipolmoment  $\vec{d}$  um einen Vektor handelt, sind hier also 3 charakteristische Größen enthalten, z.B. repräsentiert durch die kartesischen Komponenten von  $\vec{d}$ .

Allgemein können die Multipolbeiträge  $\phi_l(\vec{r})$  in (1.46) berechnet werden mit

$$\begin{aligned}
 \phi_l(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \int_V d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \frac{r'^l}{r^l} P_l(\cos \gamma) \\
 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^{l+1}} \int_V d^3r' (r')^l \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{l,m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) \cdot \rho(\vec{r}') \\
 &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_l \sum_m \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \cdot \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') (r')^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi'). \tag{1.49}
 \end{aligned}$$

Bei dem Übergang von der ersten zur zweiten Zeile wurde das **Additionstheorem** benutzt

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \tag{1.50}$$

wobei  $Y_{lm}$ , die sogenannten **Kugelflächenfunktionen**, wohldefinierte Funktionen von den Winkelparametern  $\vartheta$  und  $\varphi$  des Vektors  $\vec{r}$  (beziehungsweise  $\vartheta'$  und  $\varphi'$  für  $\vec{r}'$ ) in Kugelkoordinaten sind. Beachte, dass  $\gamma$  der Winkel zwischen  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  ist. Mit der Darstellung in (1.49) ist die Berechnung des Potentials also aufgeteilt in die Summe von jeweils zwei Faktoren, wobei der erste vom Ort  $\vec{r}$  abhängig ist, an dem das Potential bestimmt werden

soll. Die zweiten Faktoren, die nur von der Form der Ladungsverteilung abhängen, nennen wir die *Multipolmomente* der Ladungsverteilung:

$$q_{l,m}^* = \int_V d^3 r' \rho(\vec{r}') (r')^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi'). \quad (1.51)$$

In diesen Multipolmomenten  $q_{l,m}$  ist also die ganze Information über die Ladungsverteilung enthalten, und mit ihnen ist das Potential direkt berechenbar.

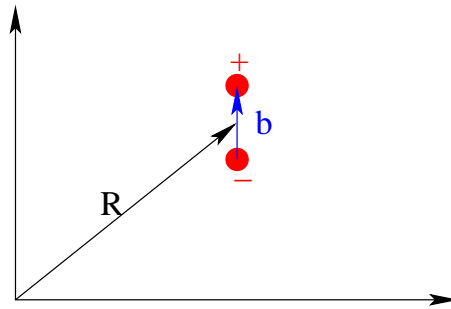


Abbildung 1.29: Einfache Ladungsverteilung mit Dipolmomente an der Position  $\vec{R}$ .

Als ein Beispiel für eine lokalisierte Ladungsverteilung betrachten wir ein System aus 2 Punktladungen. Eine positive Ladung  $q$  befinde sich an der Position  $\vec{R} + \vec{b}/2$ , eine zweite negative Ladung an der Stelle  $\vec{R} - \vec{b}/2$  (siehe auch Abb. 1.29). Der Vektor  $\vec{R}$  bezeichnet also das Zentrum dieser Ladungsverteilung und der Vektor  $\vec{b}$  steht für den Verbindungsvektor von der negativen Ladung zur positiven. Mit Hilfe der  $\delta$ -Funktionen ist diese Ladungsverteilung definiert durch

$$\rho(\vec{r}) = q\delta\left(\vec{r} - \left(\vec{R} + \vec{b}/2\right)\right) - q\delta\left(\vec{r} - \left(\vec{R} - \vec{b}/2\right)\right).$$

Die Gesamtladung dieser Ladungsverteilung  $\rho$  ist offensichtlich Null, d.h. diese Ladungsverteilung besitzt kein Monopolmoment. Das Dipolmoment der Ladungsverteilung berechnet sich nach (1.48)

$$\begin{aligned} \vec{d} &= q \int d^3 \vec{r} \vec{r} \delta\left(\vec{r} - \left(\vec{R} + \vec{b}/2\right)\right) - q \int d^3 \vec{r} \vec{r} \delta\left(\vec{r} - \left(\vec{R} - \vec{b}/2\right)\right) \\ &= q \left(\vec{R} + \vec{b}/2\right) - q \left(\vec{R} - \vec{b}/2\right) \\ &= q\vec{b}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Für diese wohl einfachste Realisierung eines Dipolmomentes ist der Dipol also ein Vektor, dessen Richtung von der negativen zur positiven Ladung weist (parallel zum Verbindungsvektor  $\vec{b}$ ), und dessen Betrag sich aus dem Produkt der Ladung  $q$  und dem Abstand der Punktladungen ergibt.

Wie verhält sich eine Ladungsverteilung, die kein Monopolmoment besitzt und nur durch ihr Dipolmoment charakterisiert ist in einem externen elektrischen Feld  $\vec{E}$ ? Es soll zunächst die Energie einer solchen Anordnung berechnet werden. Nach den Grundgleichungen der Elektrostatik wissen wir, dass ein solches elektrisches Feld sich als Gradient

eines Potentials,  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$  berechnen lässt. Die Energie eine Ladung  $q$  an eine Position  $\vec{r}$  zu positionieren ist gegeben durch  $U = q\phi(\vec{r})$ . Um also die beiden Punktladungen der Ladungsverteilung (1.9) an ihre Positionen zu bringen, muss also insgesamt die Energie

$$U = q\phi(\vec{R} + \vec{b}/2) - q\phi(\vec{R} - \vec{b}/2),$$

aufgebracht werden. Da wir annehmen können, dass der Abstand  $b$  der beiden Ladungen klein ist gegenüber anderen Abmessungen des Systems (es soll sich ja um eine gut lokalisierte Ladungsverteilung handeln), können wir die Werte für das Potential in dieser Gleichung mit einer Taylorentwicklung um den Punkt  $\vec{R}$  schreiben

$$\begin{aligned} U &= q \left[ \phi(\vec{R}) + \frac{\vec{b}}{2} \cdot \vec{\nabla}\phi + \dots \right] - q \left[ \phi(\vec{R}) - \frac{\vec{b}}{2} \cdot \vec{\nabla}\phi + \dots \right] \\ &\approx q\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\phi \\ &= -\vec{d} \cdot \vec{E}, \end{aligned} \tag{1.53}$$

wobei wir das Ergebnis (1.52) für das Dipolmoment und  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$  benutzt haben. Die Energie des Systems, Dipol in einem elektrischen Feld  $\vec{E}$  ist also minimal, wenn der Dipolvektor  $\vec{d}$  parallel zum elektrischen Feld  $\vec{E}$  steht.

Da die Gesamtladung einer reinen Dipolverteilung identisch Null ist, wirkt auf eine solche Dipolladungsverteilung in einem homogenen elektrischen Feld  $\vec{E}$  keine Kraft, denn es gilt ja

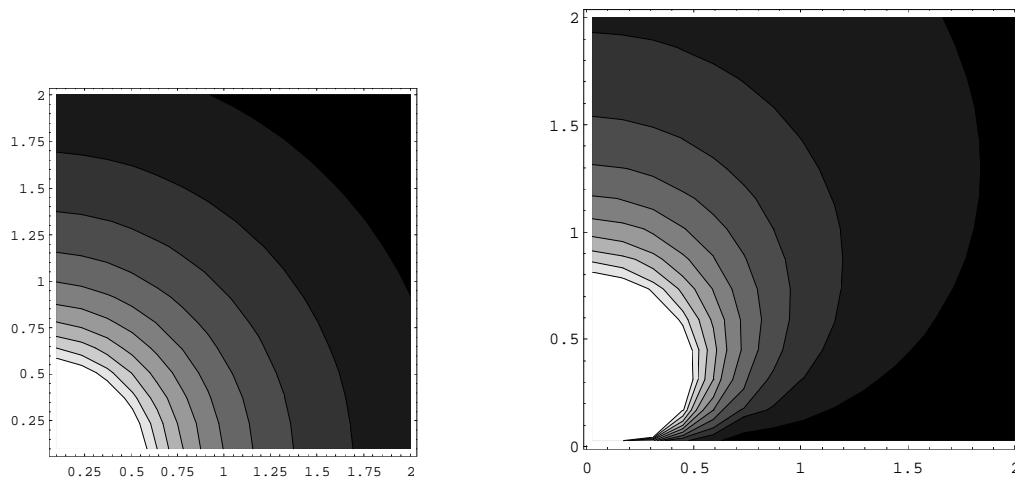
$$\vec{F}_d = -\vec{\nabla}U = \vec{\nabla}(\vec{d} \cdot \vec{E}) = 0,$$

da ja in einem homogenen Feld  $\vec{E}$  die Ableitungen der kartesischen Komponenten  $E_x$ ,  $E_y$  und  $E_z$  nach den Koordinaten identisch Null sind. Aber in einem solchen Feld ergibt sich ein Drehmoment, das wir aus der Addition der Drehmomente auf die beiden Punktladungen bestimmen können zu

$$\begin{aligned} \vec{D}_d &= \left( \vec{R} + \frac{\vec{b}}{2} \right) \times q\vec{E} + \left( \vec{R} - \frac{\vec{b}}{2} \right) \times (-q)\vec{E} \\ &= q\vec{b} \times \vec{E} \\ &= \vec{d} \times \vec{E} \end{aligned} \tag{1.54}$$

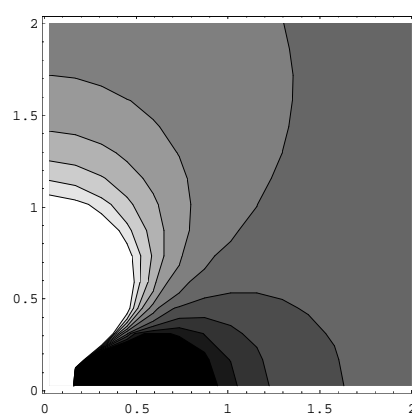
Zur Illustration sind in den Bildern 1.30 und 1.31 Kontourplots oder Höhenlinien für die elektrostatischen Potentiale eines elektrischen Monopols, Dipols und Quadrupolmoments in einem Ausschnitt der  $x-z$  Ebene aufgetragen. Diese Illustrationen sollen nur einen Eindruck vermitteln und es wird deshalb auf eine genauere Angabe der Einheiten usw. verzichtet.

Das elektrische Feld für einen elektrischen Dipol im Koordinatenursprung in Richtung der  $z$ -Achse ist durch die Vektorpfeile in Figur 1.32 skizziert. An einigen willkürlich ausgewählten Punkten in der  $x-z$  Ebene geben die Vektorpfeile die Stärke und die Richtung des elektrischen Feldes an.



(a) Monopolmoment

(b) Dipolmoment

Abbildung 1.30: *Potential elektrischer Multipole in der  $x - z$  Ebene*

Quadrupolmoment

Abbildung 1.31: *Potential elektrischer Multipole in der  $x - z$  Ebene*



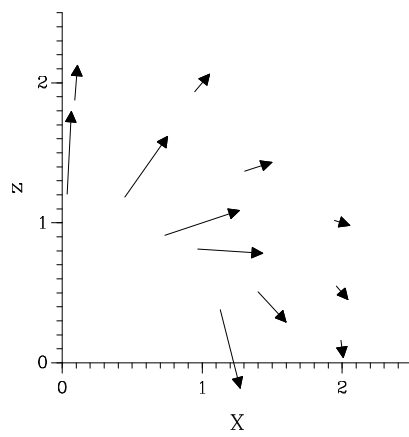


Abbildung 1.32: *Elektrisches Feld eines Dipols in z-Richtung*



## 1.10 Dipole in der Natur

Das Dipolmoment zweier entgegengesetzt geladener Punktladungen  $\pm q$  im Abstand  $\vec{r}$  ist<sup>8</sup>:

$$\vec{d} = q\vec{r}, \quad (1.55)$$

wobei der Verbindungsvektor  $\vec{r}$  von der negativen zur positiven Ladung zeigt. Befinden sich  $M$  Dipole in einem Volumen  $V$ , so definieren wir die **Polarisation**

$$\vec{P} := \frac{1}{V} \sum_{i=1}^M \vec{d}_i. \quad (1.56)$$

Das **Dipolmoment** hat die **Einheit Cm**, die **Polarisation** entsprechend die **Einheit C/m<sup>2</sup>**.

Wenn wir anstelle zweier Punktladungen kompliziertere Ladungsverteilungen betrachten, so können wir die Schwerpunkte der positiven bzw. negativen Ladung ermitteln. Das Dipolmoment dieser Ladungen beträgt ganz analog zu den Punktladungen  $\vec{p} = q\vec{r}$ , wobei jetzt  $\vec{r}$  die Ladungsschwerpunkte verbindet.

Nehmen wir an, in einem zweiatomigen Molekül seien die Ladungen  $\pm e$  (bzw. ihre Schwerpunkte um  $0.1 \text{ \AA}$  ( $10^{-11} \text{ m}$ ) voneinander getrennt. Das Dipolmoment dieses Moleküls beträgt dann  $1.6 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$ , was wir als "typische" Größenordnung eines atomaren Dipolmoments annehmen können. Hätte man  $10^{23}$  solcher Moleküle in einem Volumen von  $1 \text{ cm}^3$  vollständig ausgerichtet, so würde deren Polarisation  $0.16 \text{ C/m}^2$  bzw.  $1.6 \cdot 10^{-5} \text{ C/cm}^2$  betragen.

In der Natur können wir **induzierte und permanente Dipole** beobachten. Induzierte Dipole entstehen erst bei Anlegen eines elektrischen Feldes. Auch Moleküle mit permanentem Dipolmoment sind ohne äußeres elektrisches Feld in der Regel zufällig orientiert. Sie richten sich bei Anlegen eines Feldes teilweise in Feldrichtung aus. Daneben existieren sogenannte **Ferroelektrete**, bei denen die Dipolmomente unterhalb einer gewissen Temperatur auch ohne angelegtes Feld eine Vorzugsrichtung aufweisen.

Besprechen wir nun die verschiedenen Dipole im einzelnen:

### 1.10.1 Induzierte Dipole und Verschiebungspolarisation

Sehr vielen Materialien (Gase, Flüssigkeiten, Festkörper) sind bei Abwesenheit eines äußeren Feldes unpolar, die positiven und negativen Ladungsschwerpunkte fallen zusammen. Dies gilt z. B. für Atome wie He, gleichatomige Moleküle wie  $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$ , oder auch für linear aufgebaute Moleküle wie  $\text{CO}_2$  (die beiden Sauerstoffatome und das Kohlenstoffatom liegen auf einer Geraden, die O-Atome sind dabei symmetrisch um das C-Atom angeordnet). Auch viele Festkörper sind ohne äußeres Feld unpolar.

Bei Anlegen eines elektrischen Feldes verschieben sich die Ladungsschwerpunkte proportional zum angelegten Feld:

$$\vec{d} = \alpha \vec{E}, \quad (1.57)$$

<sup>8</sup>Das Dipolmoment wird häufig auch mit  $\vec{p}$  bezeichnet.

wobei  $\alpha$  die **molekulare elektrische Polarisierbarkeit** ist. Die Dimension von  $\alpha$  ist  $\text{C}^2\text{m}/\text{N}$ .

Bezogen auf die Polarisation definiert man<sup>9</sup>:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (1.58)$$

mit der elektrischen Suszeptibilität  $\chi_e$ , die eine dimensionlose Größe ist.

Befinden sich  $M$  gleichartige induzierte Dipole im Einheitsvolumen (Dipoldichte:  $n$ ), so hängen  $\alpha$  und  $\chi_e$  über  $\chi_e = n\alpha/\varepsilon_0$  zusammen. Dies gilt, wenn die Dipoldichte so gering ist, dass wir Rückwirkungen der Dipole aufeinander vernachlässigen können. In Abschnitt 1.10.5 werden wird diese Beziehung erweitern und Rückwirkungen mit einbeziehen.

Man muss weiterhin zwischen einer **elektronischen Polarisierbarkeit** und einer **ionischen Polarisierbarkeit** unterscheiden. Im ersten Fall verschiebt das elektrische Feld den Ladungsschwerpunkt der Elektronen in einem Atom bzw. Molekül gegenüber dem/den Atomkern(en), im zweiten Fall, der in Festkörpern wichtig ist, verschieben sich positive und negative Ionenrümpfe gegeneinander.

Für Gase liegt  $\chi_e$  typischerweise im Bereich  $10^{-2} - 10^{-4}$ . In Festkörpern werden Werte der Größenordnung  $1 - 10$  erreicht. Genauere Angaben wollen wir hier noch nicht machen, da wir mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$  noch eine weitere Größe einführen werden, die von  $\chi_e$  bzw.  $\alpha$  abhängt und leichter experimentell zugänglich ist ( $\varepsilon = \chi_e + 1$ ).

### 1.10.2 Permanente Dipole und Orientierungspolarisation

Viele Moleküle (prominentes Beispiel:  $\text{H}_2\text{O}$ ) besitzen ein permanentes Dipolmoment. Im Fall von Wasser bilden die beiden  $\text{H}^+$ -Ionen einen Winkel von  $108^\circ$  zum  $\text{O}^{2-}$ -Ion, positive und negative Ladungsschwerpunkte sind damit getrennt. Das Dipolmoment des Wassers beträgt  $6.2 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$ .

Im äußeren Feld versuchen sich diese permanenten Dipole parallel zum Feld auszurichten, es gilt auch hier:  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ . Bei endlicher Temperatur wirkt dem allerdings die statistische Bewegung der Moleküle entgegen. Für nicht allzu tiefe Temperaturen findet man, dass die Polarisation näherungsweise durch

$$\vec{P} \approx \frac{1}{3} n \frac{\vec{d}\vec{E}}{k_B T} \cdot \vec{d} \quad (1.59)$$

gegeben ist, also proportional zu  $1/T$  ist. In (1.59) ist  $n$  die Zahl der Dipole pro Volumeneinheit und  $k_B$  die Boltzmann-Konstante. Der Faktor  $\vec{d}\vec{E}$  ist bis auf das Vorzeichen gerade die potentielle Energie eines Dipols im elektrischen Feld, der Faktor  $\vec{d}\vec{E}/k_B T$  ergibt sich aus einer Taylor-Entwicklung des Boltzmannfaktors  $\exp(\vec{d}\vec{E}/k_B T)$ , der wie bei vielen anderen statistischen Problemen der Thermodynamik auch hier auftritt.<sup>10</sup>

Man nennt die Abhängigkeit  $\chi_e \propto 1/T$  auch **Curie-Gesetz**. Materialien, die diesem Gesetz gehorchen, bezeichnet man als **paraelektrisch**.

Für  $\text{H}_2\text{O}$  hat  $\chi_e$  bei Zimmertemperatur einen Wert von 80.

<sup>9</sup>Wir nehmen hierbei an, dass  $\vec{d}$  bzw.  $\vec{P}$  in Feldrichtung induziert werden. Dies ist notwendigerweise so. Falls  $\vec{d}$  und  $\vec{E}$  nicht parallel sind, müssen  $\alpha$  bzw.  $\chi$  durch eine Matrix (Tensor) ersetzt werden. Auch ist der lineare Zusammenhang zwischen  $\vec{d}$  und  $\vec{E}$  nur bei nicht allzu großen Feldstärken erfüllt.

<sup>10</sup>Ohne äußeres Feld weisen die Dipole statistisch in alle 3 Raumrichtungen.  $1/3$  der Dipole weist im Mittel in die  $z$ -Richtung, parallel zu der das elektrische Feld angelegt sein soll. Die Energie der

### 1.10.3 Ferroelektrische Stoffe

Einige Festkörper entwickeln ein permanentes Dipolmoment innerhalb der Kristallstruktur. Beispiele für **Ferroelektrika** sind Bariumtitanat ( $\text{BaTiO}_3$ ),  $\text{PbTiO}_3$  oder das Seignette-Salz ( $\text{KNaCH}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ). Die Kristallstruktur des  $\text{BaTiO}_3$  ist in Abb. 1.34(a) gezeigt. Innerhalb einer Einheitszelle<sup>11</sup> beträgt das Dipolmoment ca.  $2 \cdot 10^{-29}$  Cm. Die Abb. 1.34(b) zeigt schematisch die Phasenumwandlungen des Materials bei Abkühlung zusammen mit der sich bei der jeweils ausbildenden spontanen Polarisierung. Es bilden sich eine Reihe unterschiedlicher ferroelektrischer Phasen aus

In "Ferroelektrika" sind diese Dipole unterhalb einer charakteristischen Temperatur, der **Curie-Temperatur**  $T_c$  über viele Atome hinweg parallel zueinander ausgerichtet.

Bei Temperaturen  $T > T_c$  sind die Dipolmomente in Abwesenheit eines äußeren Feldes ungeordnet (oder noch nicht vorhanden). Man erhält im äußeren Feld ein Gesetz der Form  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ , wobei  $\chi_e = \text{const.}/(T - T_c)$  ist. Die elektrische Suszeptibilität divergiert also bei der Curietemperatur  $T_c$ .

Die Abb. 1.35 illustriert dieses Verhalten am Beispiel von  $\text{PbTiO}_3$ . In der Abbildung sind drei Größen gegen die Temperatur aufgetragen: die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon = \chi_e + 1$ , die Änderung  $dP/dT$  der Polarisierung mit der Temperatur, sowie die spezifische Wärme bei konstantem Druck (vgl. Physik I). Die Dielektrizitätskonstante ist ebenso wie<sup>12</sup>  $\chi_e$  oberhalb von  $T_c$  proportional zu  $1/(T - T_c)$ . Unterhalb  $T_c$  hängt die (spontane) Polarisierung stark von der Temperatur ab,  $dP/dT$  erreicht ein Maximum bei  $T_c$ . Die spezifische Wärme  $C_p$  hat ein scharfes Maximum bei  $T_c$ , was charakteristisch für einen Übergang in eine geordnete Phase ist<sup>13</sup>.

Die Abb. 1.36 zeigt nochmals die Abhängigkeit  $\varepsilon \propto 1/(T - T_c)$  für verschiedene Ferroelektrika.

Kühlt man einen Ferroelektriken durch  $T_c$ , so ordnen sich die Dipolmomente allerdings im allgemeinen nicht über die gesamte Probe hinweg parallel an. Es existieren vielmehr ferroelektrisch geordnete Bereiche (**Domänen**), deren Polarisierung in unterschiedliche Richtungen zeigt.

Durch Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes vergrößern sich die Domänen, deren Polarisierung in Feldrichtung zeigt, bis oberhalb einer gewissen "**Sättigungsfeldstärke**" praktisch alle Dipolmomente parallel zum Feld zeigen. Der Effekt ist in Abb. 1.37 gezeigt.

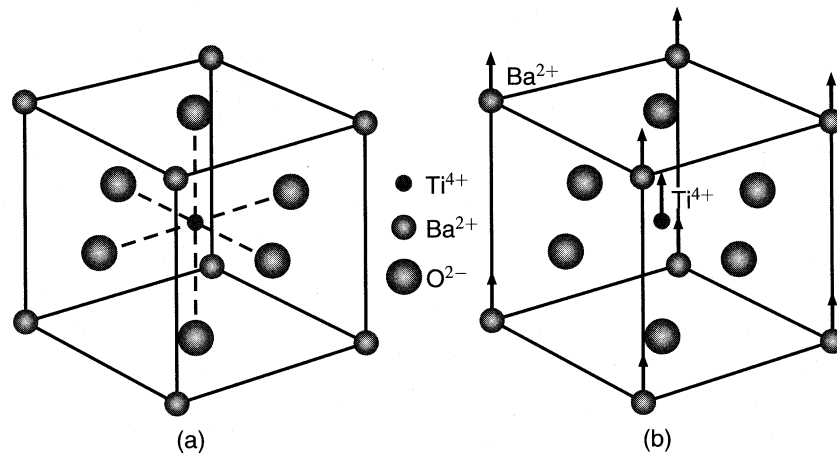
---

in Richtung  $\pm z$  weisenden Dipole ist  $\mp d\vec{E} = \mp d_z E_z$ . Die Wahrscheinlichkeit, einen Dipol  $\pm d_z$  zu finden, ist proportional zu  $\exp(\pm d_z E_z / k_B T)$ . Die Polarisierung ist gerade durch die Differenz der in  $+z$  bzw. in  $-z$ -Richtung orientierten Dipole gegeben, also proportional zu  $[\exp(+d_z E_z / k_B T) - \exp(-d_z E_z / k_B T)] / [\exp(+d_z E_z / k_B T) + \exp(-d_z E_z / k_B T)]$ . Der Nenner sorgt dafür, dass die Wahrscheinlichkeit 1 wird, dass die Dipole entweder in  $+z$  oder in  $-z$ -Richtung orientiert sind. Die Taylor-Entwicklung für  $d_z E_z / k_B T \ll 1$  ergibt für diesen Ausdruck den Wert  $d_z E_z / k_B T$ , womit  $P_z \approx (1/3) d_z (d_z E_z / k_B T)$  folgt. Dieser Ausdruck wurde in (1.59) vektoriell geschrieben.

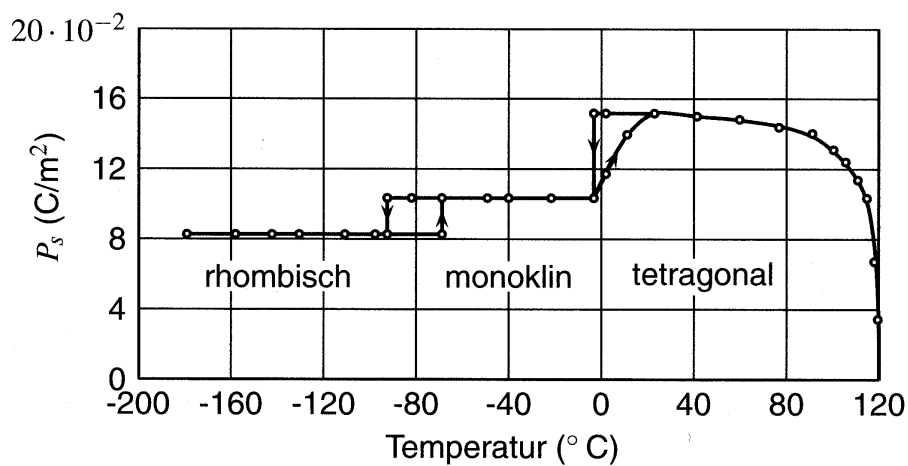
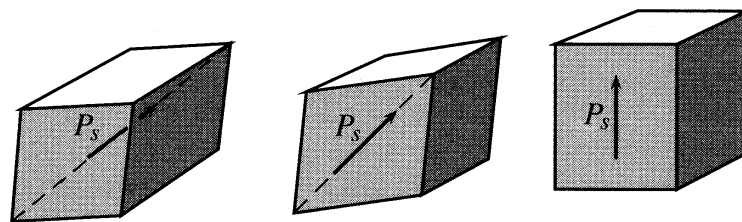
<sup>11</sup>Die "Einheitszelle" ist die elementare Atomanordnung, die, immer wieder in den drei Raumrichtungen zusammengefügt, schließlich den gesamten Kristall ergibt.

<sup>12</sup>Den Unterschied  $\varepsilon - \chi = 1$  können wir für  $\varepsilon \gg 1$  vernachlässigen.

<sup>13</sup>Genauer gesagt liegt hier ein Phasenübergang 2. Ordnung vor, bei dem die Entropie  $S$ , d. h. der Grad der Unordnung im Kristall stetig verläuft, aber einen Knick aufweist. Die Ableitung  $C_p \propto dS/dT$  springt dann beim Phasenübergang.



(a) Kristallstruktur von  $\text{BaTiO}_3$  im unpolaren (links) und polaren (rechts) Zustand (Quelle: Ch. Kittel, Festkörperphysik, 12. Auflage, Abb. 13.10).



(b) Spontane Polarisation von  $\text{BaTiO}_3$  bei verschiedenen Temperaturen (Quelle: Ch. Kittel, Festkörperphysik, 12. Auflage, Abb. 13.11).

Abbildung 1.34: Kristallstruktur und Phasenumwandlung von  $\text{BaTiO}_3$

Hier wurde ein  $\text{BaTiO}_3$ -Kristall in verschiedenen elektrischen Feldern mit einer schwachen Säure angeätzt. An den Domänengrenzen findet ein verstärkter Ätzprozess statt, die Domänen werden sichtbar.

Abb. 1.38 zeigt schematisch die Anordnung der Dipole in einer im hohen äußeren Feld eindomänig polarisierten Probe. In diesem Fall erhält man netto makroskopische Ober-

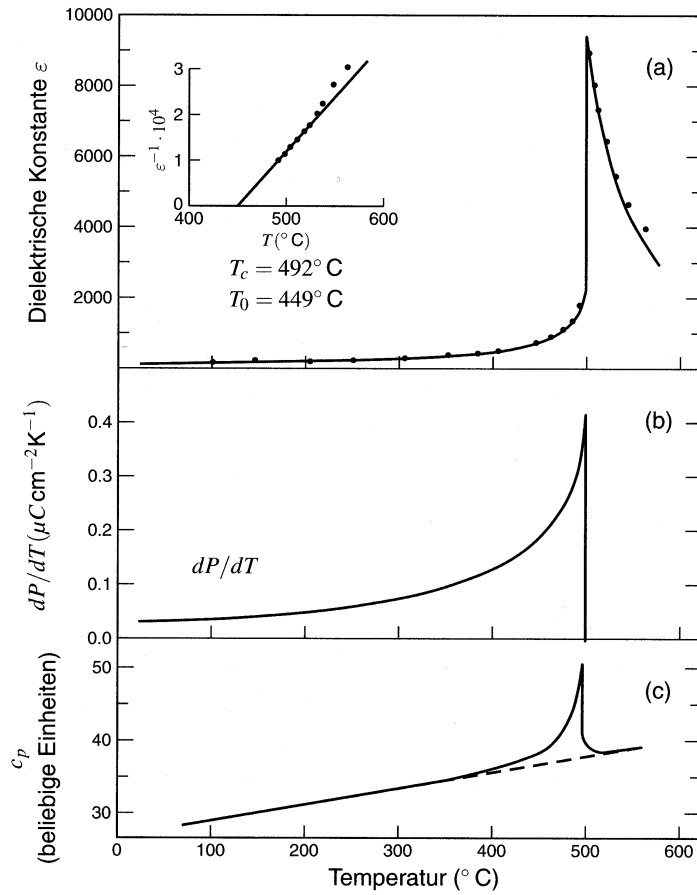


Abbildung 1.35: Dielektrizitätskonstante  $\epsilon = \chi_e + 1$ , die Änderung  $dP/dT$  der Polarisation mit der Temperatur, sowie die spezifische Wärme bei konstantem Druck für  $\text{PbTiO}_3$  (aus: Ch. Kittel, Festkörperphysik 12. Auflage, Abb. 13.9).

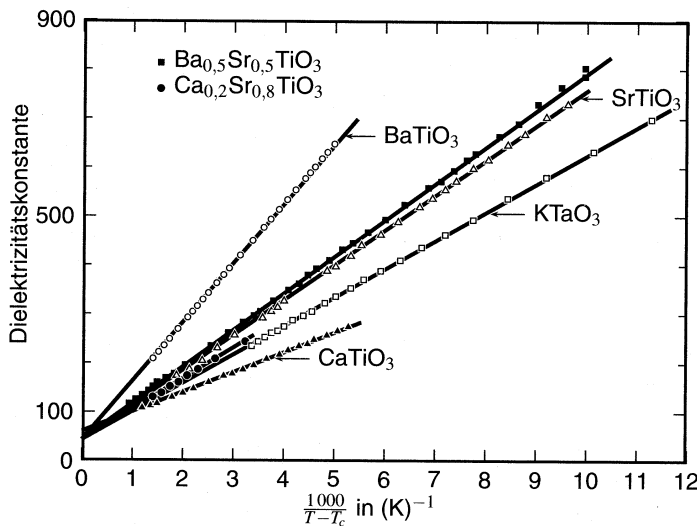


Abbildung 1.36: Reziproke Dielektrizitätskonstante gegen  $1000/(T - T_c)$  für verschiedene Ferroelektrite (aus: Ch. Kittel, Festkörperphysik 12. Auflage, Abb. 13.12).

flächenladungen auf der Probe.

Für  $\text{BaTiO}_3$  werden hierbei bei Zimmertemperatur "Sättigungspolarisationen" (d. h. alle Dipole ausgerichtet)  $\vec{P}$  um  $0.3 \text{ C/m}^2$  erreicht. Verringert man das äußere Feld, so bleibt die Ausrichtung der Polarisation z. T. erhalten, man erhält nun auch für  $\vec{E} = 0$  eine nichtverschwindende Polarisation, die sog. **remanente Polarisation**. Erst bei Umpolen

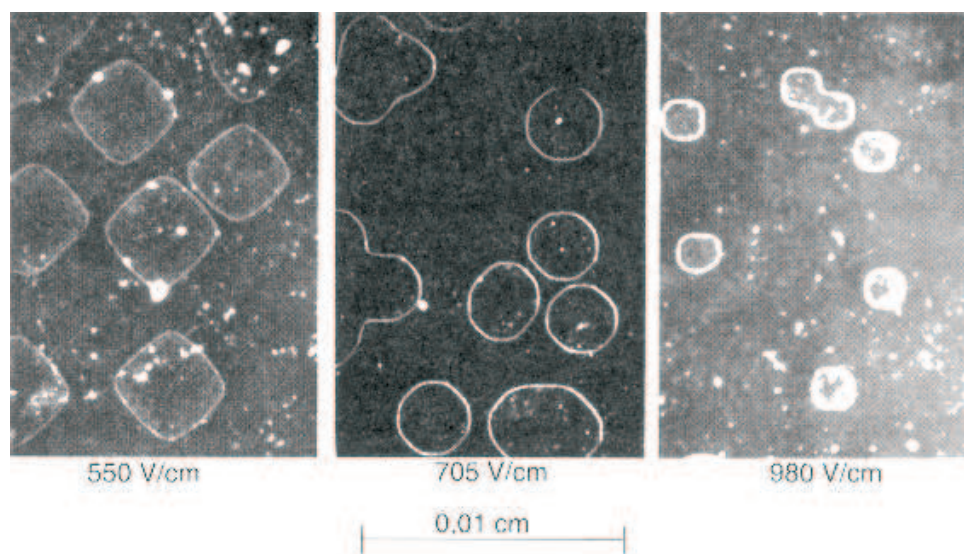


Abbildung 1.37: Domänengrenzen (geschlossene helle Linien) in einem  $\text{BaTiO}_3$ -Einkristall. Die Grenzen wurden durch Ätzen der Oberfläche mit einer schwachen Säure sichtbar gemacht. In einer Domäne weist die Polarisation in eine Richtung (aus: Ch. Kittel, Festkörperphysik 12. Auflage, Abb. 13.22).

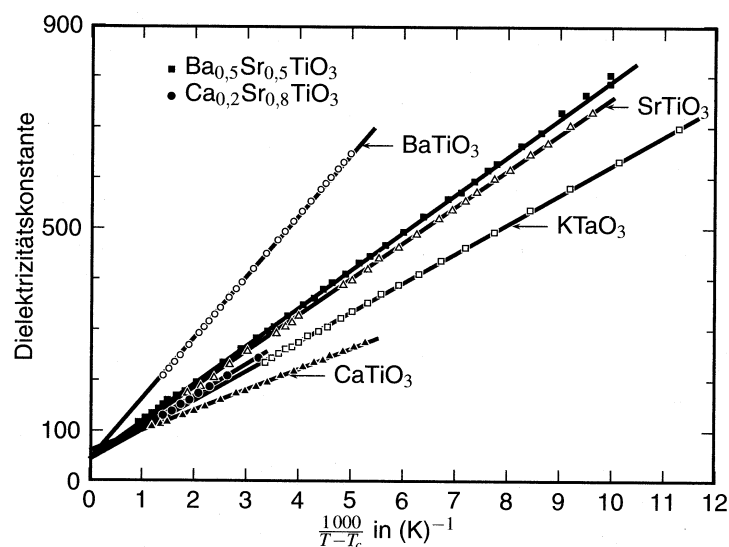


Abbildung 1.38: Makroskopisch polarisierter Ferroelektret. Ladungen im Inneren kompensieren sich, es erscheint eine sehr hohe Oberflächenladung

des äußeren Feldes kann  $\vec{P}$  bei der Koerzitivfeldstärke  $\vec{E}_k$  zum Verschwinden gebracht bzw. umgekehrt werden. Variiert man das Feld zwischen  $\pm \vec{E}$ , so wird insgesamt eine "Hystereseschleife" durchlaufen wie in Abb. 1.39 dargestellt.

Ganz ähnliche Eigenschaften lassen sich - bezogen auf magnetische Felder - bei Ferromagneten beobachten. Die Kräfte, die Ferromagnete aufeinander ausüben, sind Ihnen vermutlich wohlbekannt. Dagegen verhalten sich Ferroelektrete relativ unscheinbar, obwohl die Coulombkräfte zwischen den Ferroelektreten eigentlich sehr stark sein müssten. Der Grund liegt darin, dass die Oberflächenladung der Ferroelektreten sehr schnell durch entgegengesetzte Ladungen aus der Luft kompensiert wird, der Ferroelektret also faktisch



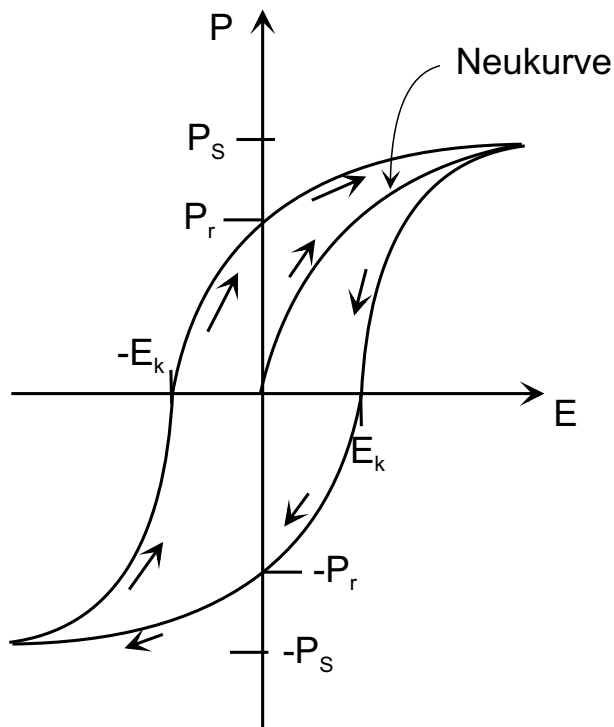


Abbildung 1.39: Schematische Darstellung der Hystereseschleife eines Ferroelektriten

neutral erscheint. Ändert man aber die Polarisation des Ferroelektriten um  $\Delta \vec{P}$ , etwa durch Änderung der Temperatur, so lässt sich die Änderung der Polarisationsladung sehr wohl beobachten.  $\vec{P}$  lässt sich ebenfalls durch Druck auf den Ferroelektriten ändern. Wir werden dies nachfolgend im Experiment demonstrieren.

#### 1.10.4 Versuche zur Aufladung und Polarisation von Isolatoren

- Wir beobachten zunächst, dass **Papierstücke** von einem geladenen Stab (Kunststoff bzw. Porzellan) angezogen werden. Das Papier wird polarisiert, die Papierstücke entfernen sich von ihrer Unterlage und "fliegen" zum Stab.
- Wenn wir eine **geladene Kugel** vor eine elektrisch neutrale **Paraffinplatte** bringen, so wird die Kugel von der Platte angezogen, wobei der Effekt aber deutlich geringer ist als beim analogen Experiment mit Leitern. Die Paraffinplatte wird im Feld der Kugel polarisiert (Verschiebungspolarisation), die Kugel wird angezogen.
- Wir erzeugen einen hohen elektrischen Feldgradienten über eine geladene metallische Spitze, die sich vor einer entgegengesetzt geladenen metallischen Platte befindet. Die Anordnung ist in einem Ölbad. Im Ölbad strömen **Luftblasen**. Das Öl wird polarisiert. Netto erscheinen auf der Blasenoberfläche Ladungen, die Blase verhält sich wie ein elektrischer Dipol, wobei die Polarität der Oberflächenladungen aber gerade anders herum ist als dies bei einem **Öltropfen** der Fall wäre (siehe auch: Abschnitt 1.10.5). Im äußeren Feldgradienten bewegt sich die Blase deshalb *gegen* in Richtung des Feldgradienten, also von der Spitze weg.

- Die relativ starke **Orientierungspolarisation von Wasser** demonstrieren wir an Hand eines Wasserstrahls, auf den wir einen Feldgradienten wirken lassen. Das Feld richtet die Wassermoleküle (teilweise) aus, diese werden in Richtung des Feldgradienten gezogen. Die Ablenkung des Wasserstrahls ist klar zu beobachten.
- Wir können jetzt die Wirkung elektrischer Felder auf die **Weizengriesskörner** im Ölbad qualitativ verstehen. Wir nehmen zunächst an, das elektrische Feld sei räumlich homogen und zeige in  $z$ -Richtung. Die Körner werden im elektrischen Feld polarisiert (Verschiebungspolarisation), erfahren aber durch das homogene Feld keine Kraftwirkung. Jetzt müssen wir die Kräfte zwischen den Körnern berücksichtigen. Körner, die kettenartig in  $z$ -Richtung angeordnet sind, ziehen sich an, vgl. Abb. 1.40. Die Kräfte zwischen benachbarten in  $x$ - oder  $y$ -Richtung parallelverschobener Ketten sind (insbesondere auf Grund der Aufladung der Enden) insgesamt leicht abstoßend. Dadurch erhält man dadurch eine Serie gleichverteilter paralleler Ketten, die parallel zur Feldrichtung orientiert sind (dass genau diese Anordnung der Körner die energetisch beste ist können wir hier allerdings nicht in Strenge beweisen). In inhomogenen Feldern werden zusätzliche Kräfte auf die Körner ausgeübt, so dass diese in Richtung des Feldgradienten wandern. Auch in diesem Fall führen die Wechselwirkungen zwischen den Körnern dazu, dass sich diese kettenartig entlang der Feldlinien anordnen. Die Feldlinien werden dadurch "abgebildet".

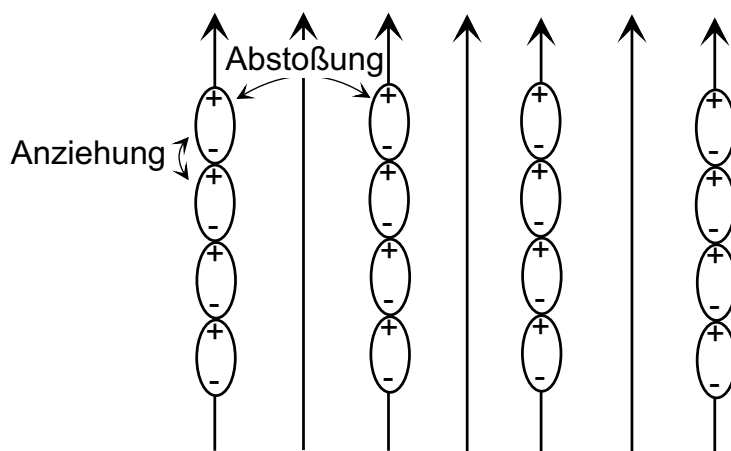


Abbildung 1.40: *Polarisation der Weizengriesskörner bei der Abbildung elektrischer Feldlinien.*

- Experimente mit **Ferroelektronen**: Wir haben einen Ferroelektronen ( $\text{BaTiO}_3$ ) zwischen zwei metallische Platten eingespannt, die mit einem Elektrometer verbunden sind. Dieses zeigt zunächst keinen Ausschlag an. Über die Platten kann eine Kraft auf den Ferroelektronen ausgeübt werden. Drücken wir auf den Ferroelektronen, so ändert sich der Atomabstand und damit auch das Dipolmoment und die Polarisation im Material. Hierdurch ändert sich die Oberflächenladung des Elektronen, in den Metallplatten werden durch Influenz elektrische Ladungen erzeugt, das Elektrometer schlägt aus. Mit diesem Effekt lassen sich auch Anzünder konstruieren: Man drückt auf einen Ferroelektronen. Die über zwei Spitzen auftretende Spannung wird so hoch, dass Funkenschlag auftritt.

Der Vorgang funktioniert auch umgekehrt: Durch Anlegen eines elektrischen Feldes ändert sich die Dicke  $l$  des Ferroelektronen. Quantitativ gilt (ohne Beweis):  $l \propto E^2$ .

Dieser Effekt wird ”**Elektrostriktion**” genannt. Man kann die Polarisation des Ferroelektriten auch durch eine Temperaturänderung verändern (”**pyroelektrischer Effekt**”, s. auch Abb. 1.35).

### 1.10.5 Wechselwirkende Dipole: Quantitative Betrachtungen

In Abschnitt 1.10.1 hatten wir (induzierte) Dipolmomente im äußeren Feld betrachtet, dabei aber angenommen, dass deren Dichte so gering ist, dass wir Wechselwirkungen zwischen den Dipolen vernachlässigen konnten. In diesem Abschnitt wollen wir den Beitrag mit berücksichtigen, den die Dipole zum gesamten elektrischen Feld in einer Probe liefern.

#### Vorbemerkungen:

##### Elliptische Körper im elektrischen Feld

An eine Probe (Dielektrikum) sei ein äußeres Feld  $\vec{E}_0$  angelegt. Das Dielektrikum wird hierdurch polarisiert, es entstehen effektiv Oberflächenladungen, die ihrerseits ein elektrisches Feld erzeugen, das dem äußeren Feld entgegenwirkt (vgl. Abb. 1.41).

Für das über einige Atome (z. B. einer Einheitszelle im Festkörper) gemittelte elektrische Feld in der Probe schreiben wir:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 \quad (1.60)$$

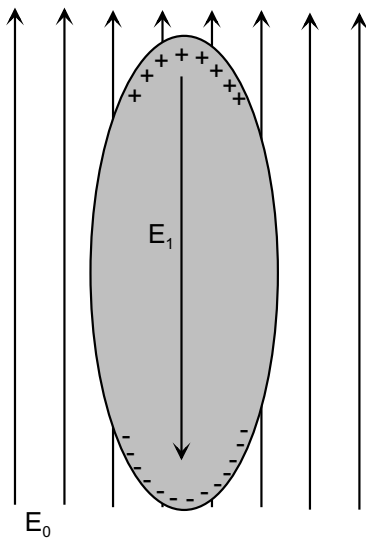


Abbildung 1.41: Dielektrikum im äußeren Feld.

$\vec{E}_1$  nennt man auch ”**Depolarisationsfeld**”. Es wird gerade durch die induzierten Oberflächenladungen hervorgerufen.

Es zeigt sich nun (ohne Beweis), dass für homogene **Ellipsoide** die durch das Feld  $\vec{E}_0$  erzeugte Polarisation  $\vec{P}$  bzw. das Feld  $\vec{E}_1$  im Probeninneren räumlich homogen ist. Wenn  $\vec{E}_0$  entlang einer der Hauptachsen des Ellipsoids angelegt ist, dann ist  $\vec{E}_1$  parallel zu dieser Achse  $i$  und es gilt:

$$E_{1,i} = -\frac{N_i p_i}{\varepsilon_0}. \quad (1.61)$$

Hierbei nummeriert "i" die Achsen. Die reellen Zahlen  $N_i$  sind die "Depolarisationsfaktoren" oder "Entelektrisierungsfaktoren". Es gilt:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1. \quad (1.62)$$

Die **Entelektrisierungsfaktoren für spezielle "Ellipsoide"** sind:

- Kugel:  $N = 1/3$  für alle Feldrichtungen
- dünne Platte, Feld senkrecht zur Platte:  $N = 1$
- dünne Platte, Feld parallel zur Platte:  $N = 0$
- langer Stab, Feld parallel zur Stabachse:  $N = 0$
- langer Stab, Feld senkrecht zur Stabachse:  $N = 1/2$ .

Abb. 1.63 zeigt  $N$  für ein Rotationsellipsoid für ein parallel zur Figurenachse angelegtes Feld. Für ein langgestrecktes Ellipsoid ( $c \gg a$ ) geht  $N$  gegen 1, für eine oblate Form ( $c \ll a$ ) geht  $N$  gegen 0.

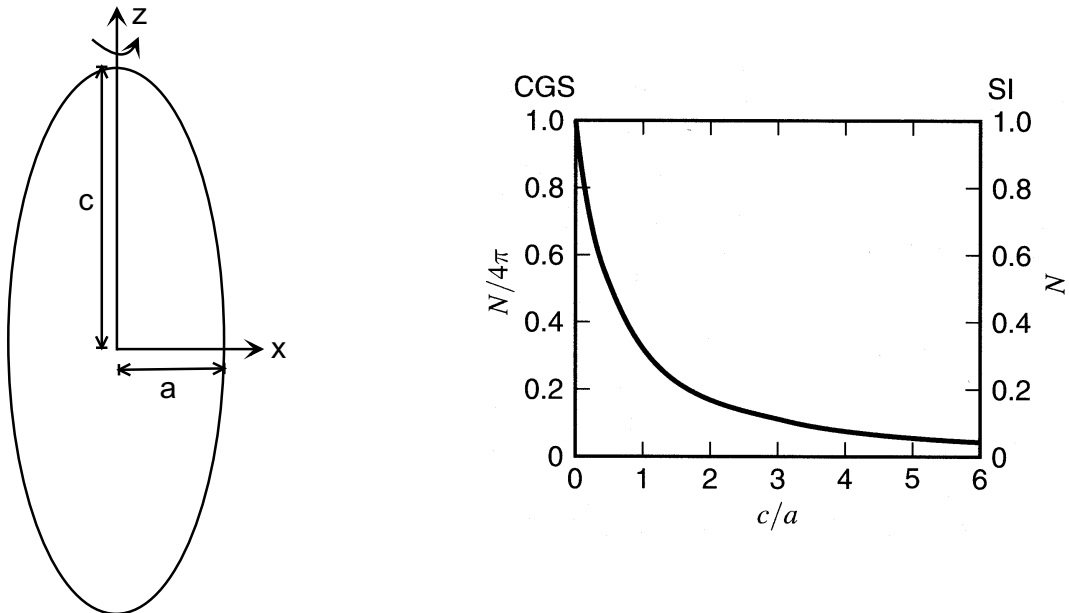


Abbildung 1.42: Entelektrisierungsfaktor für ein Rotationsellipsoid, parallel zur Figuren- achse angelegt. (Aus: Ch. Kittel, Festkörperphysik, Abb. 13. 5)

Für die Polarisation gilt nach (1.58):  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ . Am Eingang des Abschnitts hatten wir uns allerdings noch nicht zwischen  $\vec{E}_0$  und dem Feld im Medium unterschieden. Wir formulieren jetzt  $\vec{E}$  präziser als das *gemittelte* Feld im Medium (entsprechend hängt die atomare Polarisierbarkeit mit dem *lokalen* Feld zusammen) Wenn  $\vec{E}_0$  parallel zu einer der Hauptachsen angelegt ist, gilt also:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 \chi_e \left( \vec{E}_0 - \frac{N \vec{P}}{\epsilon_0} \right) \quad (1.63)$$

(Wir unterschlagen der Einfachheit halber den Index "i", der die Richtung der Hauptachse nummeriert). Aufgelöst nach  $\vec{P}$  ergibt dies:

$$\vec{P} = \frac{\chi_e \epsilon_0}{1 + N \chi_e} \vec{E}_0 = \chi_{\text{eff}} \vec{E}_0 \quad (1.64)$$

Die effektive Suszeptibilität  $\chi_{\text{eff}}$  hängt also von der Probenform ab, ebenso wie das Feld  $\vec{E}_1$ .

### Feld in einem Hohlraum

Wir betrachten jetzt ein Ellipsoid, in dem sich ein ebenfalls ellipsoider Hohlraum befindet, z. B. eine Hohlkugel oder eine Luftblase (vgl. Abb. 1.43).

Das Feld im Hohlraum schreiben wir als

$$\vec{E}_{\text{HR}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (1.65)$$

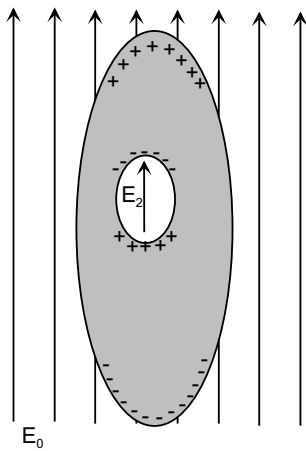


Abbildung 1.43: *Ellipsoid mit Hohlraum*

Zuzüglich zu den bereits eingeführten Feldern  $\vec{E}_0$  und  $\vec{E}_1$  wirkt das Feld  $\vec{E}_2$ , das auch "Lorentz-Feld" genannt wird. Es rührt von Ladungen, die auf der Oberfläche des Hohlraums induziert wurden. Genau wie auf der äußeren Oberfläche der Probe heben sich auch auf der Oberfläche des Hohlraums die induzierten Ladungen nicht auf, es entsteht netto eine Oberflächenladung auf dem Hohlraum. Für einen ellipsoiden Hohlraum ist  $\vec{E}_2$  bzw. die durch die Oberflächenladungen erzeugte Polarisation wiederum homogen. Wir nehmen weiter an, das elektrische Feld sei parallel zu einer Hauptachse des Hohlraums angelegt.  $\vec{E}_2$  ist dann antiparallel zu  $\vec{E}_1$  (bzw. parallel zu  $\vec{E}_0$ ) gerichtet. Für eine kugelförmige Blase gilt:  $\vec{E}_2 = 1/(3\epsilon_0)\vec{P}$ . Dies ist gerade das negative des Wertes  $\vec{E}_1$  für eine Vollkugel.

Das Feld in einer kugelförmigen Blase innerhalb einer kugelförmigen Probe ist also gleich  $\vec{E}_0$ . Die Blase selbst stellt einen Dipol dar, deren Dipolmoment allerdings genau in die entgegengesetzte Richtung zeigt wie das Dipolmoment eines kugelförmigen Tropfens im Feld  $\vec{E}_0$ . Die Ablenkung einer solchen Gasblase, die allerdings einem inhomogenen Feld ausgesetzt war, hatten wir ja experimentell (s. Abschnitt 1.10.4) beobachtet.

### Lokal induziertes Dipolmoment, Clausius-Mosotti-Beziehung

Wir fragen jetzt danach, welches Dipolmoment in einem ganz speziellen Atom innerhalb eines Festkörpers oder einer Flüssigkeit induziert wird. Alle Dipole zusammen erzeugen ein elektrisches Feld, das verschieden ist vom angelegten Feld  $\vec{E}_0$ . Dieses Feld berechnen wir mit folgender Idee:

- wir beschreiben die (ellipsoide) Probe fast überall über ein über eine Atompositionen gemittelttes Feld außer in der unmittelbaren Nachbarschaft des herausgegriffenen Atoms  $i$ . Wir betrachten dazu ein (einige Nanometer großes) Kugelvolumen um dieses Atom. Hier berücksichtigen wir die wahren, durch die dort induzierten elektrischen Dipole erzeugten Felder (vgl. Abb. 1.44).

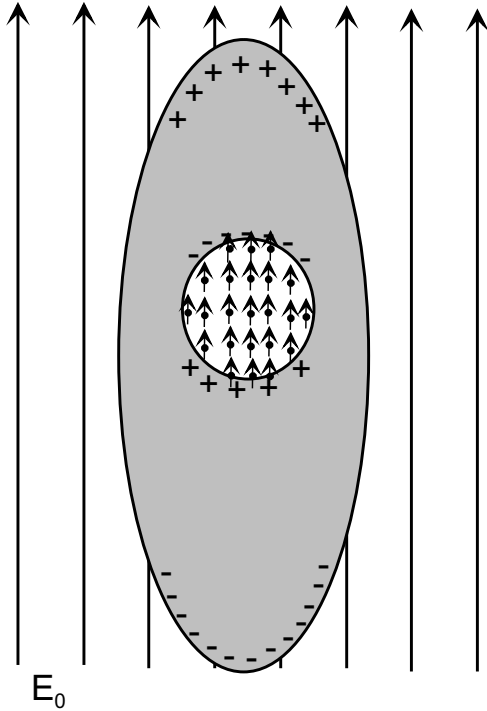


Abbildung 1.44: Zur Ableitung der Clausius-Mosotti-Beziehung: Aufteilung der Probe in einen homogenen Bereich und eine kleine Hohlkugel, in der die (atomaren) Dipole explizit berücksichtigt werden.

Wir schreiben damit das lokale Feld am Ort des Atoms  $i$ :

$$\vec{E}_{\text{lok}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \quad (1.66)$$

Zu den uns bereits bekannten Feldern  $\vec{E}_0$  bis  $\vec{E}_2$  kommt jetzt das Feld  $\vec{E}_3$  der Dipole innerhalb des Kugelvolumens. Im allgemeinen muss dieses Feld (z. B. per Computer) explizit berechnet werden. Es gibt aber einige Anordnungen, für die dieses Feld verschwindet. Hierzu gehören Dipole, die kubisch angeordnet sind (d. h. die Dipole befinden sich auf den Ecken aneinandergelagerter Würfel). Wir nehmen an, das äußere Feld bzw. die Dipole seien in  $z$ -Richtung orientiert. Das von diesen Dipolen erzeugte elektrische Feld ist:

$$E_z^{\text{Dipol}} = \frac{|\vec{d}|}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \vec{d}_k = \frac{|\vec{d}|}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{2z_k^2 - x_k^2 - y_k^2}{r_k^5}. \quad (1.67)$$

Nun sind auf Grund der kubischen Symmetrie und der Symmetrie des Kugelvolumens die  $x$ ,  $y$ , und  $z$ -Richtungen äquivalent, man erhält:

$$\sum_k \frac{z_k^2}{r_k^5} = \sum_i \frac{x_i^2}{r_k^5} = \sum_i \frac{y_i^2}{r_k^5}. \quad (1.68)$$

Damit verschwindet  $E_z^{\text{Dipol}} = E_3$ . Ähnliches gilt auch, wenn die Dipole statistisch verteilt sind. Man erhält also:

$$\vec{E}_{\text{lok}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} = \vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} \quad (\text{„Lorentz-Beziehung“}). \quad (1.69)$$

Das lokal am Atom  $i$  induzierte Dipolmoment ist:

$$\vec{d}_i = \alpha\vec{E}_{\text{lok}} = \alpha\left(\vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}\right). \quad (1.70)$$

Wir summieren jetzt über alle Atome (die wir der Einfachheit halber als gleichartig annehmen) und erhalten:

$$\frac{1}{V}\sum_{i=1}^M\vec{d}_i = \vec{P} = \frac{M}{V}\alpha\vec{E}_{\text{lok}} = n\alpha\vec{E}_{\text{lok}} = n\alpha\left(\vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}\right). \quad (1.71)$$

Mit  $\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}$  ergibt dies:

$$\varepsilon_0\chi_e = n\alpha\left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right) \quad (1.72)$$

oder:

$$\chi_e = \frac{n\alpha}{\varepsilon_0}\left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right) = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0}(3 + \chi_e) \quad (1.73)$$

oder:

$$\frac{\chi_e}{\chi_e + 3} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} \quad (\text{„Clausius-Mosotti-Beziehung“}) \quad (1.74a)$$

Wir können die Clausius-Mosotti-Beziehung mit  $\varepsilon = 1 + \chi_e$  auch ausdrücken als:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} \quad (\text{„Clausius-Mosotti-Beziehung“}) \quad (1.74b)$$

Die Clausius-Mosotti-Beziehung verknüpft also die makroskopische Größen  $\chi_e$  bzw.  $\varepsilon_e$  mit der atomaren Polarisierbarkeit  $\alpha$  auch im Fall "dichter" Medien (für den Fall, dass  $\vec{E}_3 = 0$ ). Im Grenzfall  $\chi_e \ll 1$  erhalten wir

$$\frac{\chi_e}{\chi_e + 3} \approx \frac{\chi_3}{3} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} \quad (1.75)$$

bzw.

$$\chi_e \approx \frac{n\alpha}{\varepsilon_0}, \quad (1.76)$$

was gleich der in 1.10.1 benutzten Beziehung für  $\chi_e$  ist.

### Ferroelektrite und Curie-Weiss Gesetz

Wir betrachten nochmals (1.71),  $\vec{P} = n\alpha\left(\vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}\right)$  und schreiben diese als:

$$\vec{P} = \left(1 - \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0}\right) = n\alpha\vec{E}. \quad (1.77)$$

Hieraus folgt:

$$\chi_e = \frac{P}{\varepsilon_0 E} = \frac{n\alpha}{\varepsilon_0} \frac{1}{1 - \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0}}. \quad (1.78)$$

Diese Suszeptibilität divergiert offensichtlich für  $n\alpha/(3\varepsilon_0) \rightarrow 1$ .

Ohne Wechselwirkung zwischen den Dipolen wäre nach (1.76)  $\chi_{e,0} = n\alpha/\varepsilon_0$ . Setzen wir hierfür ein Curie-Gesetz an, d. h.  $n\alpha/\varepsilon_0 = \text{const.}/T$ , so erhalten wir aus (1.78):

$$\chi_e = \frac{\text{const.}}{T} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\text{const.}}{3T}} = \frac{\text{const.}}{T - \text{const.}/3} = \frac{\text{const.}}{T - T_c} \quad (1.79)$$

Dies ist aber genau das **Curie-Weiß-Gesetz**, das wir bei der experimentellen Behandlung der Ferroelektrite kennengelernt habe.

Es sei hier nochmals angemerkt, dass  $\chi_e$  für  $T \rightarrow T_c$  (von hohen Temperaturen her) gegen unendlich geht. Ein beliebig kleines äußeres Feld genügt dann, ein große Polarisation zu erzeugen. Unterhalb von  $T_c$  ist überhaupt kein äußeres Feld mehr nötig.

### Andere Formen der Ladungsordnung

Diese ferroelektrische Ordnung ist ein Spezialfall einer ganzen Reihe unterschiedlicher Ordnungstypen. So existieren auch "**Antiferroelektrika**", in denen sich diese Dipole unterhalb der "**Néel-Temperatur**" antiparallel ausrichten. (Beispiele:  $\text{WO}_3$ ,  $\text{NaNbO}_3$ ). Für diese Materialien gilt für Temperaturen knapp oberhalb der Ordnungstemperatur  $T_N$  ("**Néel-Temperatur**"):

$$\chi_e = \frac{\text{const.}}{T + T_N}. \quad (1.80)$$

Man beachte das positive Vorzeichen im Nenner. Bei Antiferroelektriten verhält sich die Suszeptibilität oberhalb der Übergangstemperatur so, als würde sie bei  $-T_N$  gegen unendlich laufen.

Weitere Ordnungstypen sind abschließend in Abb. 1.45 gezeigt.



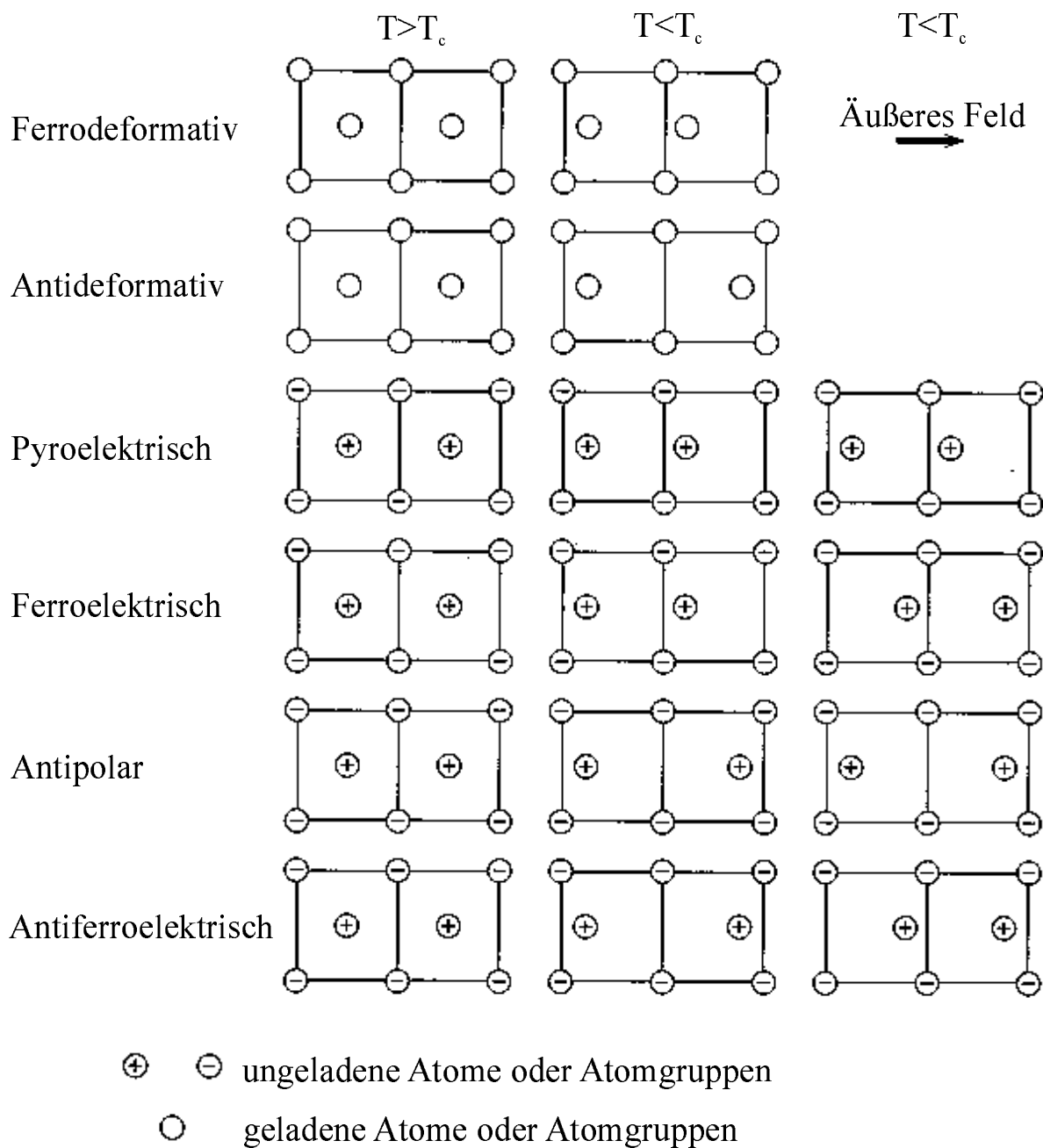


Abbildung 1.45: Verschiedene Typen struktureller Phasenübergänge (aus: Ch. Kittel, Festkörperphysik, 12. Auflage, Abb. 13.19).



## 1.11 Der Plattenkondensator

Unter einem Plattenkondensator verstehen wir eine Anordnung zweier paralleler metallischer Platten (Fläche  $A$ ), zwischen denen eine Potenzialdifferenz (Spannung)  $U$  angelegt ist (s. Abb. 1.46).

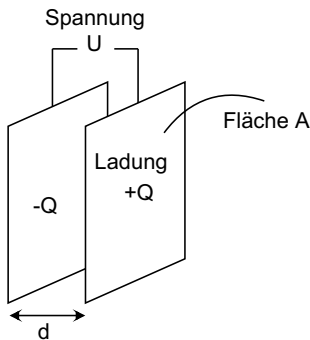


Abbildung 1.46: Schematische Darstellung eines Plattenkondensators

Bevor wir genauer auf den Plattenkondensator eingehen, wollen wir zunächst

### 1.11.1 Das elektrische Feld einer unendlich großen metallischen Platte

betrachten. Die Platte sei positiv geladen und wie in Abb. 1.47 in der  $(y, z)$ -Ebene orientiert. Das elektrische Feld außerhalb der Platte muss senkrecht auf den beiden Plattenoberflächen bei  $x = 0$  und  $x = d$  stehen, also dort parallel zur  $x$ -Richtung sein.

Auf Grund der Symmetrie des Problems wird die Ladung homogen über die Oberflächen der Platte verteilt sein und damit weder die Flächenladung  $\sigma$  (Ladung pro Flächeneinheit) noch das von diesen Ladungen erzeugte Feld von  $y$  und  $z$  abhängen.

Wir betrachten jetzt ein quaderförmiges Volumen (Abmessungen  $X, Y, Z$ ; der Quader sei in  $x$ -Richtung so gelegt, dass die Platte durch ihn hindurchläuft) und integrieren  $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0$  über dieses Volumen:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, d\vec{r} = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.81)$$

Die linke Seite ergibt mittels des Gaußschen Satzes:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, d\vec{r} = \int_F \vec{E} \, d\vec{f} = 2E_{x,0}YZ. \quad (1.82)$$

Das elektrische Feld durchdringt nur die beiden in der  $(y, z)$  Ebene liegenden Quaderseiten; jede der Seiten liefert einen Beitrag  $E_{x,0}YZ$ , wobei  $YZ$  die Fläche der entsprechenden Quaderseite ist und  $E_{x,0}$  der Wert des elektrischen Feldes am Ort der entsprechenden Fläche ist. Die Flächennormalen der beiden Quaderflächen stehen antiparallel zueinander (sie zeigen nach "außen", so dass sich die beiden Beiträge addieren).

Die rechte Seite von (1.81) ergibt  $\iiint_V \rho/\epsilon_0 = Q/\epsilon_0$ , wobei  $Q$  die im Quader eingeschlossene Gesamtladung ist. Damit erhalten wir:

$$E_{x,0} = \frac{Q}{2YZ\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.83)$$

Das Feld hängt nicht von  $x$  ab, ist also räumlich homogen und von den Plattenoberflächen weggerichtet.

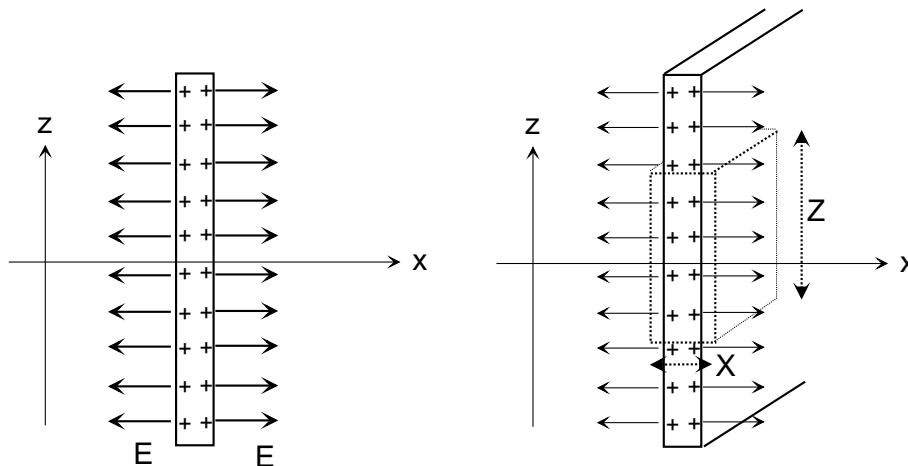


Abbildung 1.47: Feld einer unendlich großen metallischen Platte.

### 1.11.2 Das elektrische Feld im unendlich großen Plattenkondensator

Wir betrachten jetzt zwei parallele, unendlich große Platten im Abstand  $d$  (Die Platten sind wiederum in der  $(y, z)$ -Ebene unendlich ausgedehnt). Die Platten seien entgegengesetzt geladen (Flächenladungsdichten  $\pm\sigma$ ). Zwischen den Platten addiert sich das Feld der Platten zu:

$$E_x = 2 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.84)$$

Im Außenraum kompensieren sich die Beiträge durch die beiden Platten, das Gesamtfeld ist dort Null (s. Abb. 1.48).

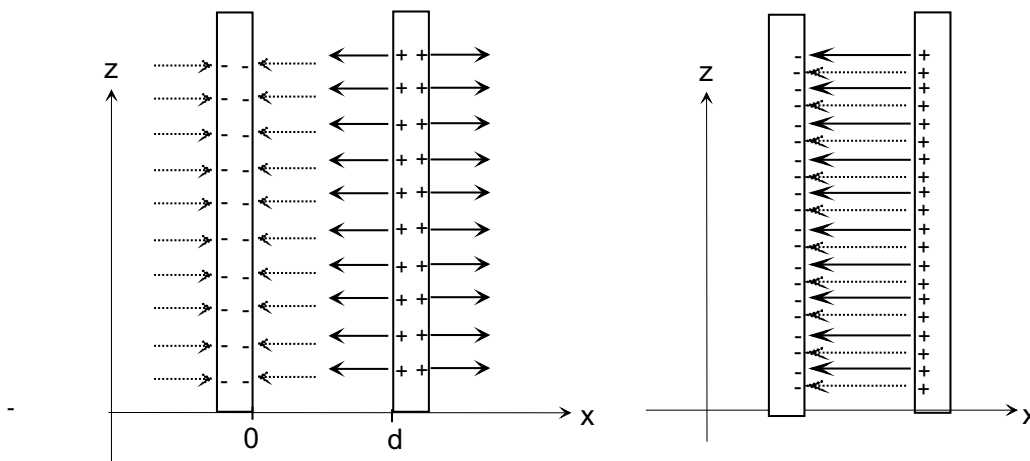


Abbildung 1.48: Elektrisches Feld im unendlich großen Plattenkondensator

### 1.11.3 Das elektrische Feld im endlich großen Plattenkondensator

Schließlich betrachten wir einen Plattenkondensator *endlicher* Größe. Am Rand jeder der beiden Platten wird das elektrische Feld auch Beiträge in  $y$ - und  $z$ -Richtung haben. Dadurch wird auch das Feld des Plattenkondensators am Rand inhomogen wie in Abb. 1.49 skizziert. Das Feld "leckt" gewissermaßen am Rand aus dem Kondensator heraus.

Die Abb. 1.11-5 zeigt experimentelle Feldlinien, wie sie mittels der Weizengrieskörner gewonnen wurden.

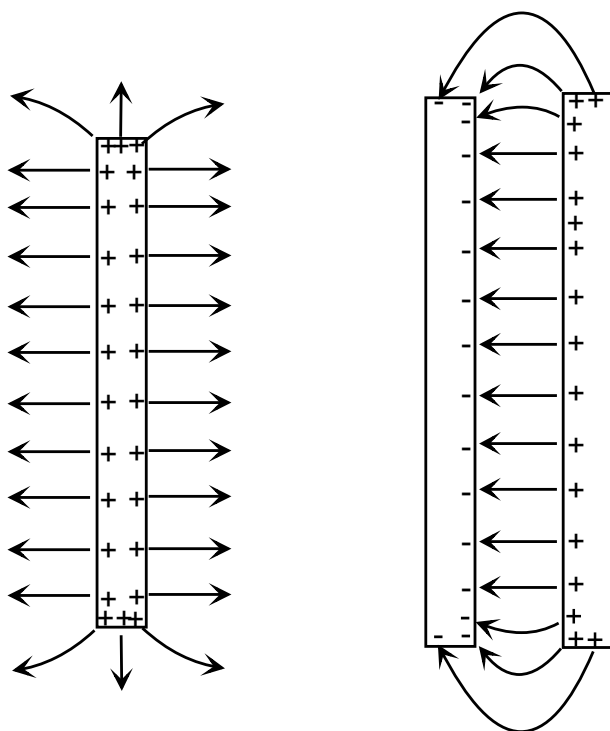


Abbildung 1.49: *Feld um eine endlich große Platte (links) und einen endlich großen Plattenkondensator (rechts) (Schemazeichnung)*

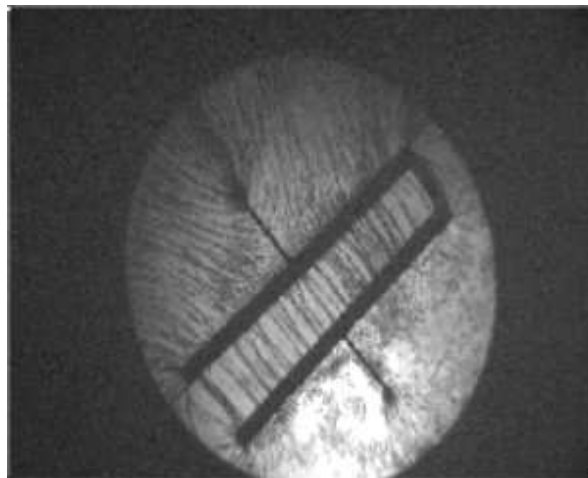
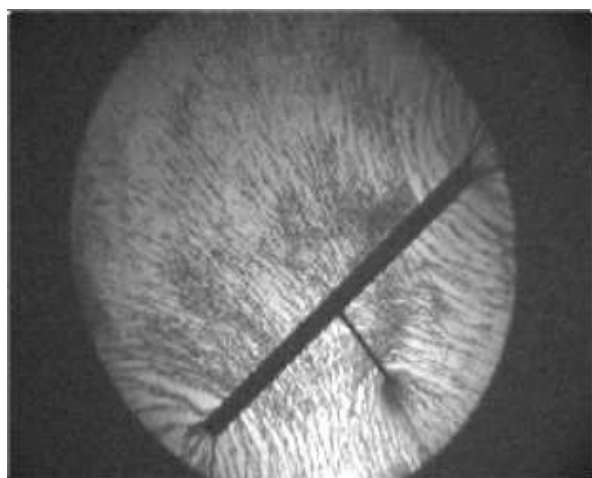


Abbildung 1.50: *Feld um eine endlich große Platte (links) und einen endlich großen Plattenkondensator (rechts) (Experiment)*

### 1.11.4 Das Potenzial im Plattenkondensator

Die negativ geladene Platte des Kondensators sei bei  $x = 0$ , die positive Platte bei  $x = d$ . Das elektrische Feld (wir vernachlässigen das Randfeld) ist dann  $\vec{E} = -(\sigma/\varepsilon_0)\hat{e}_x$ , mit  $\sigma > 0$ . Es gilt:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \quad \text{bzw.} \quad E_x = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{d\varphi}{dx}.$$

Die Integration liefert:

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x.$$

Speziell bei  $x = d$ , also am Ort der positiv geladenen Platte, gilt:

$$\varphi(d) - \varphi(0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d.$$

Der Spannungsabfall  $U$  zwischen den Platten ist gerade  $U = \varphi(d) - \varphi(0) = (\sigma/\varepsilon_0)d$ . Mit  $E = \sigma/\varepsilon_0$  können wir dies auch schreiben als:

$$U = E \cdot d \tag{1.85}$$

Im Außenraum ist das elektrische Feld null und damit  $\varphi = \text{const.}$ . Damit erhalten wir den in Abb. 1.51 skizzierten **Potenzialverlauf**.

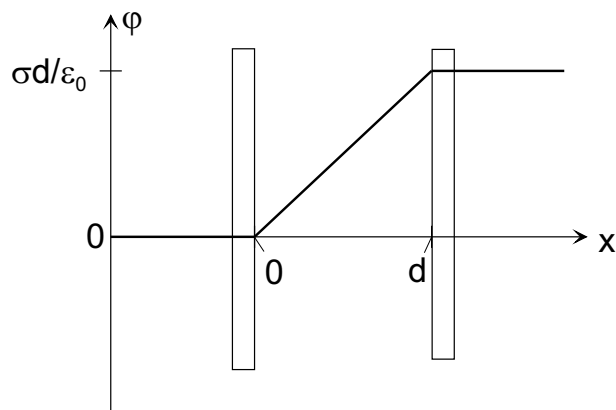


Abbildung 1.51: Potenzialverlauf im Kondensator

Die **Einheit der Spannung**  $U$  ist **Volt** (V). Mittels des Kondensators können wir jetzt eine genauere Vorstellung entwickeln was "1 Volt" bedeutet<sup>14</sup>.

Wir nehmen  $d = 1 \text{ m}$  und  $U = 1 \text{ V}$  an. Damit ist  $E = \sigma/\varepsilon_0 = 1 \text{ V/m}$ , was mit  $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C/m}^2\text{N}$  bedeutet, dass eine Flächenladungsdichte  $\sigma = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C/m}^2$  auf den Platten vorliegt. Dies entspricht  $5.5 \cdot 10^7$  Elementarladungen/ $\text{m}^2$  bzw. 1 Elementarladung pro  $1.8 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$  bzw. 1 Elementarladung pro  $1.8 \cdot 10^4 \mu\text{m}^2$ .

Analog hätten wir 1 V auch über das **Potenzial einer Punktladung** einführen können. Für eine Punktladung gilt:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}. \tag{1.86}$$

<sup>14</sup>Es sei hier aber angemerkt, dass im SI-System das Volt eine abgeleitete Größe ist. Die elektrische Basisgröße ist das Ampere als Einheit für den Strom. Wir werden hierauf später genauer eingehen.

Dieses Potenzial verschwindet unendlichen. Wir definieren  $U = \varphi(r) - \varphi(\infty) = \varphi(r)$ . Für  $Q = 1$  Coulomb erreichen wir  $U = 1$  V für  $r = 9 \cdot 10^9$  m. Alternativ erreichen wir für  $Q = e$  1 Volt für  $r = 1.44$  nm.

### 1.11.5 Experimente zum Potenzial

#### Potenzialwaage

Im ersten Versuch bestimmen wir die Kraft, die auf die positiv geladene Platte eines Plattenkondensators wirkt. Die positiv geladene Platte ist vertikal über der negativ geladenen angeordnet. Aus dieser Platte kann ein Teilstück ("Testplatte", Fläche  $A$ ) aus dem Zentrum herausgehoben werden. Die Anordnung (s. Abb. 1.52) ermöglicht es, Randeffekte zu minimieren: Im Bereich der Testplatte ist das Feld noch (nahezu) vollständig homogen, Randeffekte treten erst am Rand der äußeren Platte auf.

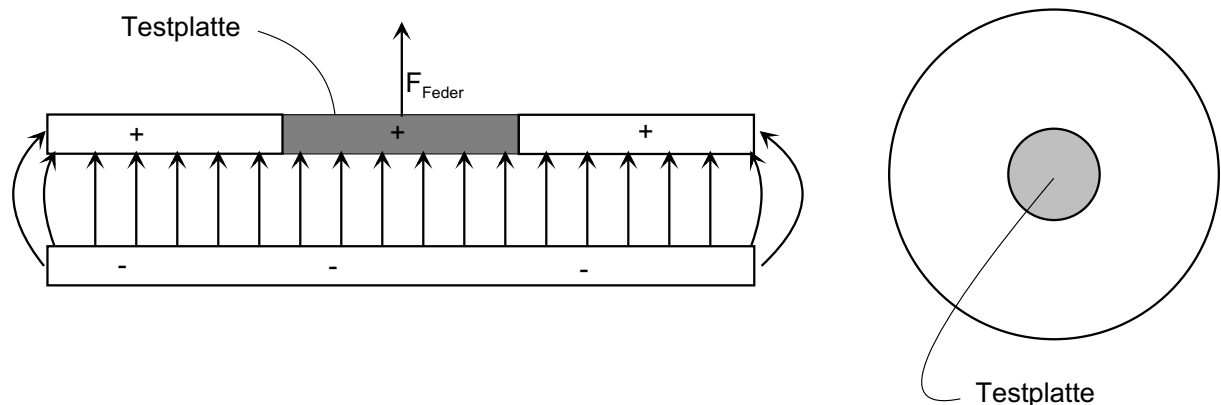


Abbildung 1.52: Oben: Schematischer Aufbau der Potenzialwaage, unten: Die Potenzialwaage

Im Kondensator gilt:  $E = U/d$ . Auf der Testplatte sei die Ladung  $Q$ . Diese Platte wird damit (zusätzlich zur Schwerkraft) mit der Kraft

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}QE\hat{e}_z \quad (1.87)$$

nach "unten", d. h. in Richtung  $-\hat{e}_z$  gezogen. Diese Kraft muss von der aufgebracht werden, um die Platte abzuheben.

Der Faktor  $1/2$  rührt in (1.87) daher, dass wir die Testplatte im Feld der anderen Kondensatorplatte betrachten müssen. Wir dürfen also nur den Beitrag (1.83) benutzen.

Für den Betrag der Kraft gilt:

$$F = QE = \frac{1}{2}(EA\varepsilon_0) \cdot E = \frac{1}{2}A\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}A\varepsilon_0 \left(\frac{U}{d}\right)^2. \quad (1.88)$$

Mit  $A = 44 \text{ cm}^2$ ,  $d = 1 \text{ cm}$ ,  $U = 5 \text{ kV}$  erwarten wir eine Kraft von  $4.86 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ , was recht genau dem Wert entspricht, den wir experimentell beobachten<sup>15</sup>.

### Ausmessen von Potenzialdifferenzen mit der Flammsonde

Eine Flammsonde besteht aus einer metallischen Spitze, die an einen isolierenden Schlauch angeschlossen ist. An der Spitze brennt eine kleine Flamme (s. Abb. 1.53). An der Spitze werden freie Ladungsträger erzeugt, so dass die Spitze schnell das Potenzial der Umgebung annimmt. Mann misst jetzt die Spannungsdifferenz zwischen der Spitze und einem Nullpunkt, der in der Regel das Erdpotenzial ist. Mit dieser Anordnung fahren wir das Potenzial im Kondensator ab und erkennen den linearen Anstieg von der (geerdeten) negativen Platte zur positiven Platte.

Wir messen zum Vergleich ebenfalls das Potenzial innerhalb und außerhalb eines Faradaykäfigs aus. Innerhalb ist  $U = \text{const}$ , außerhalb fällt  $U$  in etwa wie  $1/r$  ab.

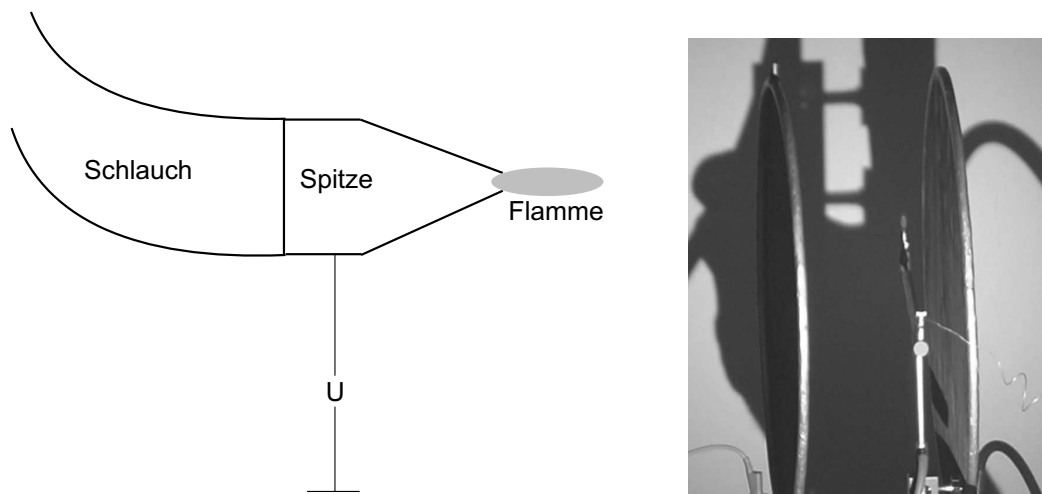


Abbildung 1.53: links: Schematischer Aufbau der Flammsonde, rechts: Flamme im Plattenkondensator

<sup>15</sup>Es sei angemerkt, dass wir im Prinzip diese Anordnung verwenden könnten, um die Einheit "1 Volt" auf eine Kraftmessung zurückzuführen. Allerdings wird das Volt heutzutage durch Quanteneffekte auf eine Frequenzmessung zurückgeführt. Wir werden darauf später noch kurz eingehen.



### 1.11.6 Die Kapazität des Plattenkondensators

Wie definieren die **Kapazität eines Plattenkondensators** als:

$$C = \frac{Q}{U} \quad (1.89)$$

Die **Einheit der Kapazität** ist **Farad [F]**.  $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$ .

Mit  $U = Ed = \sigma d/\varepsilon_0 = Qd/(A\varepsilon_0)$  erhalten wir:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad (1.90)$$

mit dem Abstand  $d$  zwischen den Kondensatorplatten und der Plattenfläche  $A$ .

Analog können wir auch die Kapazität anderer metallischer Objekte bestimmen. So erhalten wir für eine leitende Kugel mit Radius  $R$  aus der allgemeinen Beziehung  $U = \varphi(r) - \varphi(\infty) = Q/(4\pi\varepsilon_0 r)$  auf der Kugeloberfläche:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \quad (1.91)$$

Dies ist die **Kapazität einer leitenden Kugel** gegenüber dem Unendlichen (man beachte, dass dagegen die Kapazität des Plattenkondensators auf die negativ geladene Platte bezogen ist).

*Ganz allgemein könnten wir auch  $N$  metallische Körper betrachten. Der  $i$ -te Körper trage die Ladung  $Q_i$  und befinde sich (bezogen auf ein gemeinsames Erdpotenzial) auf dem Potenzial  $\varphi_i$ . Dann gilt für die Ladung auf Körper  $k$ :  $Q_k = \sum_{i=1}^N C_{ik}\varphi_k$  mit der **Kapazitätsmatrix**  $C_{ik}$ . Im allgemeinen muss man die  $C_{ik}$  numerisch berechnen, wofür aber geeignete numerische Routinen existieren.*

### 1.11.7 Energie des Plattenkondensators

Wir berechnen die Energie im Plattenkondensator auf mehrere äquivalente Weisen. Zunächst stellen wir uns vor, die Energie stecke im elektrischen Feld. Die Energiedichte  $w$  des elektrischen Feldes ist (s. Abschnitt 1.5):

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2. \quad (1.36)$$

Integration über das Volumen des Kondensators (wir vernachlässigen wiederum Randfelder) liefert:

$$W = w \cdot V = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot Ad \quad (1.92)$$

Hierbei ist  $A$  die Fläche der Kondensatorplatten,  $d$  der Abstand zwischen den Platten.

Wir können unter Benutzung von  $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/A\varepsilon_0$  und  $C = \varepsilon_0 A/d$  umschreiben:

$$W = \frac{1}{2} \left( \frac{Q}{A\varepsilon_0} \right)^2 Ad = \frac{1}{2} Q^2 \cdot \frac{d}{\varepsilon_0} A = \frac{Q^2}{2C}. \quad (1.93)$$

Benutzen wir weiter  $U = Ed$  und  $Q = CU$ , so erhalten wir

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2. \quad (1.94)$$

Welche der drei Ausdrücke in (1.94) für Berechnungen relevant ist, hängt davon ab, welche Größe ( $Q$  oder  $U$ ) im Experiment vorgegeben ist.

Wir können  $W$  auch dadurch berechnen, dass wir, ausgehend von ungeladenen Kondensatorplatten, Ladungen  $dq$  sukzessive von der linken zur rechten Kondensatorplatte transportieren. Nach einiger Zeit wird die eine Platte die Ladung  $-q$ , die andere die Ladung  $+q$  tragen. Die Energie, die nötig ist, um  $dq$  gegen diese Ladung zu transportieren, ist  $dW = U(q)dq$ . Integration liefert die gesamte Energie, die nötig ist, um die Platten auf die Ladungen  $\pm Q$  aufzuladen:

$$W = \int_0^Q U(q) dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}, \quad (1.95)$$

was mit (1.94) übereinstimmt. Die Energie, die aufgebracht werden musste, um den Kondensator zu laden, steckt als Energieinhalt im Kondensator.

Experimentell beobachten wir den umgekehrten Vorgang: Wir entladen einen Kondensator dadurch, dass eine metallische Kugel zwischen den Platten hin- und herpendelt. Nach Berührung mit z. B. der positiven Platte nimmt sie Ladung von dieser auf, wird abgestoßen, gibt diese Ladung an die negative Platte ab und pendelt (jetzt negativ geladen) zurück. Mit dieser Pendelbewegung könnte Arbeit verrichtet werden, die Energie des Kondensator also in mechanische Arbeit umgewandelt werden.

Wir können uns drittens vorstellen die Kondensatorplatten berühren sich anfänglich (d. h.  $d = 0$ ). Wir stellen uns vor, die Ladungen  $\pm Q$  werden (z. B. durch Influenz) auf die beiden Platten verteilt; anschließend ziehen wir die beiden Platten auf den Abstand  $d$  auseinander. Hierbei müssen wir die Arbeit:

$$W = \int_0^d F dx = \int_0^d QE dx = \int_0^d Q \cdot \frac{1}{2} \frac{Q}{A\epsilon_0} dx = \frac{1}{2} Q^2 \frac{1}{A\epsilon_0} \cdot d = \frac{Q^2}{2C} \quad (1.96)$$

verrichten, was wiederum mit (1.94) übereinstimmt.

Bei diesem "Ziehvorgang" nimmt die Kapazität  $C$  mit wachsendem  $d$  ab.

Wenn wir  $Q$  konstant halten, so bedeutet dies, dass  $U = Q/C$  proportional zu  $d$  zunimmt. Die Energie  $W$  wächst entsprechend (1.96) proportional zu  $d$ .

Wir hätten auch die Spannung  $U$  vorgeben können. Dann gilt mit  $Q = CU \propto 1/d$ , dass die Ladung auf den Kondensatorplatten während des Auseinanderziehens abnimmt. Ebenso fällt  $W = CU^2/2$  proportional zu  $1/d$ .

Im Experiment demonstrieren wir das Anwachsen von  $U$  für  $Q = \text{const.}$  Wir messen dabei  $U$  durch ein am Rand des Plattenkondensators angebrachtes Elektrometer<sup>16</sup>. Der Ausschlag des Elektrometers vergrößert sich beim Auseinanderziehen.

<sup>16</sup>Das Elektrometer misst primär die Ladungen (bzw. die Coulomb-Kraft zwischen den Ladungen), die sich auf dem Elektrometer befinden. Das Elektrometer ist elektrisch leitend mit der positiv geladenen Kondensatorplatte verbunden, befindet sich also auf deren Potenzial. Die andere Platte ist geerdet,

### 1.11.8 Parallel- und Reihenschaltungen von Kondensatoren

Wir betrachten zwei parallelgeschaltete Kondensatoren (Kapazitäten  $C_1$  und  $C_2$ ), deren obere bzw. untere Platten elektrisch leitend miteinander verbunden sind. Die beiden Kondensatoren sind mit einer Spannungsquelle  $U$  verbunden.

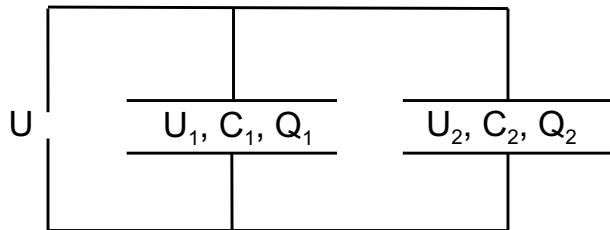


Abbildung 1.54: Zwei parallelgeschaltete Kondensatoren

Die beiden oberen bzw. unteren Platten befinden sich auf jeweils gleichem Potenzial. Damit liegt an beiden Kondensatoren die Spannung  $U$  an. Für die Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  auf den Platten der Kondensatoren 1 und 2 gilt also:

$$Q_1 = C_1 U \quad (1.97a)$$

$$Q_2 = C_2 U \quad (1.97b)$$

Die Gesamtladung auf beiden Platten ist:

$$Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)U = C_{\text{ges}}U \quad (1.98)$$

Die beiden parallelgeschalteten Kondensatoren entsprechen also einem einzigen Kondensator mit der Kapazität

$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 \quad (1.99)$$

Völlig analog erhalten wir für  $N$  parallelgeschaltete Kondensatoren:

$$C_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N C_i \quad (1.100)$$

Für **parallelgeschaltete Kondensatoren** müssen wir also die **Kapazitäten addieren**, um die Gesamtkapazität der Anordnung zu erhalten.

Wir betrachten jetzt zwei in Reihe geschaltete Kondensatoren (s. Abb. 1.55). Die untere Platte des Kondensators 1 ist elektrisch leitend mit der oberen Platte des Kondensators 2 verbunden. Diese Platten liegen daher auf gleichem Potenzial. Entsprechend müssen diese Platten die entgegengesetzt gleiche Ladung tragen.

---

befindet sich (wie der Rest des Hörsaals) auf Erdpotenzial. Die Ladung  $Q^*$  auf dem Elektrometer hängt damit via  $Q^* = C_{\text{eff}}U$  von der Spannung über den Kondensatorplatten ab, wobei  $C_{\text{eff}}$  sich aus Beiträgen sowohl von der geerdeten Kondensatorplatte als auch vom "Rest der Welt" zusammensetzt. Der letztere Anteil dominiert, so dass sich  $Q^*$  praktisch nicht ändert, wenn wir die Kondensatorplatten auseinanderziehen. Der Elektrometereauschlag ist damit also proportional zu  $U$ . Wir demonstrieren dies auch dadurch, dass wir  $U$  mittels einer Spannungsquelle vorgeben. Der Elektrometereauschlag bleibt dann konstant.

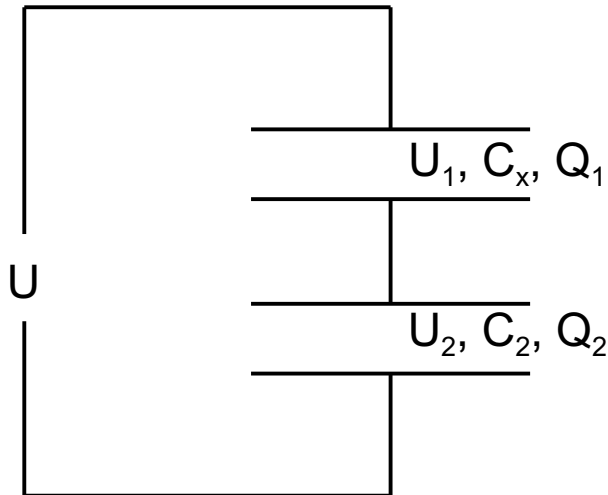


Abbildung 1.55: Zwei in Reihe geschaltete Kondensatoren

Für die beiden Kondensatoren gilt damit:

$$Q_1 = Q_2 = Q. \quad (1.101)$$

Ferner addieren sich die Spannungsabfälle über den Kondensatoren zur anliegenden Spannung  $U$ :

$$U_1 = U_2 = U. \quad (1.102)$$

Andernfalls würde die obere Platte des Kondensators 1 bzw. die untere Platte des Kondensators 2 nicht auf dem Potenzial der jeweiligen Anschlüsse an die Spannungsquelle liegen.

Hieraus folgt:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \cdot \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{C_{\text{ges}}}. \quad (1.103)$$

Es gilt also:

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (1.104)$$

Analog finden wir für  $N$  in Reihe geschaltete Kondensatoren:

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}. \quad (1.105)$$

Wir müssen die Kapazitäten von **in Reihe geschalteten Kondensatoren** also **reziprok addieren**, um (das Inverse) der Gesamtkapazität der Anordnung zu erhalten.

Mit den Beziehungen (1.100) und (1.105) können wir auch die Gesamtkapazität allgemeiner Verschaltungen von Kondensatoren berechnen. Beispielsweise finden wir für die Kapazität zweier parallelgeschalteter Kondensatoren  $C_1$  und  $C_2$ , die ihrerseits in Reihe zu einer Kapazität  $C_3$  angeordnet sind:  $C_{\text{ges}} = C_3 + C_{\parallel}$ , mit  $1/C_{\parallel} = 1/C_1 + 1/C_2$  bzw.  $C_{\parallel} = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$ .

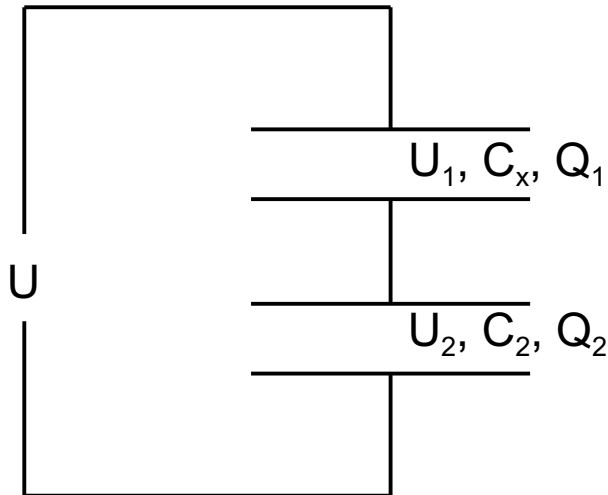


Abbildung 1.56: Anordnung zur Kapazitätsmessung

Um Kapazitäten zu messen, können wir z. B. die in Abb. 1.56 gezeigte Anordnung verwenden. Hierbei muss eine der Kapazitäten (z. B.  $C_2$ ) bekannt sein.

Für die in Reihe geschalteten Kondensatoren gilt  $Q_1 = Q_2$  und  $U = U_1 + U_2$ .

Hieraus folgt:

$$C_1 = C_2 \frac{U_2}{U - U_2}. \quad (1.106)$$

Bei bekanntem  $U$  und  $U_2$  können wir  $C_1$  berechnen.

Weitere Methoden zur Kapazitätsbestimmung, die Wechselspannungen verwenden, werden wir etwas später kennenlernen.

### 1.11.9 Freie Ladungen im Kondensator

Man kann elektrische Ladungen in den Kondensator bringen und diese dort beeinflussen.

- In einem ersten Demonstrationsversuch laden wir einen metallischen Ball an der positiven Platte auf. Er wird auf die negativ geladene Platte hin beschleunigt und fliegt dort durch ein Loch aus dem Kondensatorinneren heraus.
- Wir stellen eine **Kerze** ins Innere des Kondensators. Sobald wir eine Spannung anlegen, wird die Kerzenflamme auseinandergezogen. In der Kerze werden freie Ladungen (Elektronen und positive Ionen) erzeugt, die auf die positive bzw. negative Platte hin beschleunigt werden und die Flamme verformen. (s. Abb. 1.57)
- Eine etwas ernsthaftere Anwendung besteht darin, einen **Strahl freier Elektronen parallel zu den Kondensatorplatten** in den Kondensator einzuschießen. Die Elektronen werden im Feld je nach Polarität der angelegten Spannung auf eine der beiden Platten hin beschleunigt (Bewegungsgleichung:  $m\ddot{\vec{x}} = e\vec{E}$ ). Der Strahl wird also beim Durchlaufen des Kondensators in der Ebene parallel zur Feldrichtung

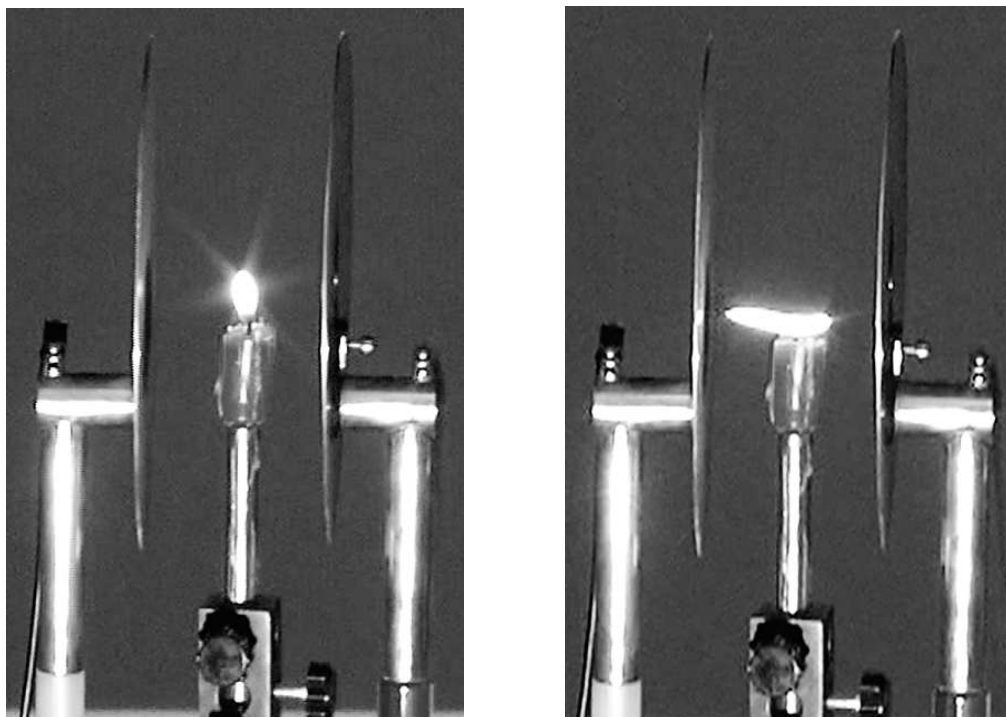


Abbildung 1.57: Kerze im Kondensator

abgelenkt. Man nützt dies aus, um einen Elektronenstrahl etwa beim Oszilloskop oder auch beim Fernseher durch "Ablenkkondensatoren" über den Bildschirm zu steuern. Man benötigt zwei Kondensatoren mit Feldern in  $y$ - und  $z$ -Richtung, um einen ursprünglich in  $x$ -Richtung laufenden Strahl über einen in der  $(y, z)$ -Ebene angebrachten Bildschirm über den gesamten Schirm zu bewegen.

- **Öltröpfchenversuch:** R. A. Millikan brachte 1910 sehr kleine geladene Öltröpfchen in das Feld eines Kondensators, deren Platten parallel zum Erdboden orientiert waren. Die Ladung der Tröpfchen betrug ein geringes Vielfaches der Elementarladung  $e$ . Bei geeigneter Feldstärke kompensieren sich die Coulombkraft und die Gewichtskraft auf das Tröpfchen:

$$m \cdot g = q \cdot E. \quad (1.107)$$

Noch unbekannt ist die Masse der Tröpfchen. Es gilt:

$$m = \rho_{\text{Öl}} \frac{4\pi}{3} r^3, \quad (1.108)$$

wobei  $\rho_{\text{Öl}}$  die bekannte Dichte des Öls und  $r$  der Radius der kugelförmigen Tröpfchen ist. Der Radius lässt sich dadurch bestimmen, dass man die Tröpfchen bei abgeschaltetem elektrischem Feld fallen lässt. Nach einer kurzen Beschleunigungsstrecke nimmt die Geschwindigkeit  $v$  der Tröpfchen, die experimentell bestimmt werden kann, einen konstanten Wert an, der durch die Balance von Schwerkraft und geschwindigkeitsabhängiger Reibungskraft (der Stokes'schen Reibungskraft) gegeben ist:

$$F_{\text{Reibung}} = 6\pi\eta r v = \rho_{\text{Öl}} \frac{4\pi}{3} r^3 g = mg \quad (1.109)$$

Aus (1.109) und (1.107) lässt sich  $q$  bestimmen. Millikan fand, dass  $q$  in Einheiten von  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  auftritt und entdeckte damit die Elementarladung. Für diese und andere Entdeckungen erhielt Millikan 1923 den Nobelpreis.

### 1.11.10 Kondensator mit Dielektrikum

Wir legen zunächst an einen leeren Kondensator die Spannung  $U$  an, entfernen dann die Spannungsquelle und messen die Ladung  $Q = Q_0$  auf den Platten dadurch, dass wir die Ladung abfließen lassen. Wenn wir jetzt ein Dielektrikum (Paraffin) in den Kondensator schieben, diesen dann wiederum auf  $U$  aufladen und dann wiederum die Ladung  $Q = Q_1$  messen, so finden wir, dass  $Q_1$  mehr als das doppelte von  $Q_0$  betrug. Wir definieren:

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{C_1 U}{C_0 U} = \frac{C_1}{C_0} = \varepsilon. \quad (1.110)$$

Hierbei ist für Paraffin  $\varepsilon \approx 2$ . Wir bringen in einem zweiten Versuch den leeren Kondensator feste Ladungen  $\pm Q$  auf die Kondensatorplatten und schieben dann bei  $Q = \text{const.}$  die Paraffinplatte bzw. eine Glasplatte ein. Die Spannung über dem Kondensator (wir messen diese wiederum über ein Elektrometer) sinkt beim Einschieben der Platten auf den Wert  $U_1$  ab und kehrt beim Herausziehen der Platte wieder näherungsweise auf ihren alten Wert zurück. Quantitativ erhalten wir:

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{C_1}{C_0} = \varepsilon. \quad (1.111)$$

Wie hängt nun das Feld im Kondensator mit der im Abschnitt 1.10 diskutierten Polarisation bzw.  $\varepsilon$  mit  $\chi$  zusammen?

Für das Feld im mit dem Dielektrikum gefüllten Kondensator gilt nach Abschnitt 1.10:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 \quad (1.60)$$

$$E_{1,i} = -\frac{N_i p_i}{\varepsilon_0} \quad (1.61)$$

Der Entelektrisierungsfaktor ist für die betrachtete Geometrie (Platte, Feld senkrecht zur Plattenebene)  $N = 1$ . Wir erhalten also:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = \vec{E}_0 - \chi_e \vec{E} \quad (1.112)$$

und hieraus:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1 + \chi_1} \quad (1.113)$$

bzw:

$$\frac{E_0}{E} = \frac{U_0}{U_1} = 1 + \chi_e = \varepsilon. \quad (1.114)$$

Die in (1.111) definierte Konstante  $\varepsilon$  ist also gleich der Dielektrizitätskonstanten, die wir bereits in Abschnitt 1.10 benannt hatten.

Für die Kapazität eines Kondensators mit Dielektrikum gilt also:

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{A}{d}. \quad (1.115)$$

Durch messen von  $C$  lässt sich also sehr bequem  $\varepsilon$  bestimmen. Einige Zahlenwerte sind nachfolgend aufgelistet.

Material	$\varepsilon$
Luft	1.006
Paraffin	2..2.3
Quarzglas	3.7
Alkohol	26
Glyzerin	56
H <sub>2</sub> O (300 K)	81
BaTiO <sub>3</sub> (300 K)	>1000

Tabelle 1.1: Dielektrizitätskonstanten verschiedener Materialien

Im Experiment vergleichen wir einen leeren Kondensator (Plattenfläche 135 cm<sup>2</sup>, Plattenabstand 1 cm) mit einem mit BaTiO<sub>3</sub> gefüllten Kondensator (Plattenfläche 1.1 cm<sup>2</sup>, Plattenabstand 2 mm). Ohne Füllung wäre die Kapazität dieses Kondensators einen Faktor 24 kleiner als die des ersten Kondensators. Mit BaTiO<sub>3</sub> ist dessen Kapazität einen Faktor 100 größer, wie wir durch Messung der von den Kondensatoren abfließenden Ladungen bestätigen;  $\varepsilon$  betrug also ca. 2500.

Ferroelektrite wie BaTiO<sub>3</sub> erlauben also den Bau kleiner Kondensatoren hoher Kapazität. Mit Dielektrika gefüllte Kondensatoren erlauben oft auch sehr hohe Feldstärken, bevor diese zerstört werden ("Durchbruchfeldstärken").

Feroelektrika werden zur Zeit sehr intensiv untersucht. Sie werden absehbar eine immer größere Rolle etwa im Bereich der Mikroelektronik (Transistoren, Speicherelemente) spielen.



## 1.12 Makroskopische Elektrostatik

### 1.12.1 Polarisation, dielektrische Verschiebung

In den vorangegangenen Abschnitten hatten wir die beiden Grundgleichungen der Elektrostatik

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

kennengelernt. Diese Gleichungen helfen uns aber zunächst nur, wenn wir die Ladungsdichte  $\rho$  vollständig kennen. In diese Ladungsdichte  $\rho$  muß auch die Verteilung der atomaren Ladungen aufgenommen werden, wenn wir z.B. das elektrische Feld einer makroskopischen Ladungsverteilung in einem Medium berechnen wollen. Zwar mag dieses Medium zunächst einmal elektrisch neutral sein, es gibt gleich viel positive wie negative Ladungen. Wird aber durch die makroskopischen Ladungen ein elektrisches Feld erzeugt, so werden sich auch die Ladungsverteilungen auf atomarem Niveau nach diesem makroskopischen Feld ausrichten. Die Atome werden polarisiert (siehe Figur 1.58): Die eventuell vorhandenen Dipolmomente richten sich nach dem makroskopischen elektrischen Feld aus oder werden erst durch dieses Feld induziert. Ziel der folgenden Überlegungen ist es, die Effekte dieser Polarisation des Mediums auf das resultierende elektrische Feld zu bestimmen.

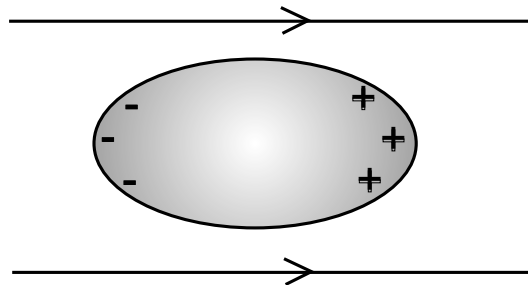


Abbildung 1.58: *Polarisation der elektrischen Ladungsverteilung eines Atoms durch eine elektrische Feld*

Betrachten wir zunächst den Beitrag der Ladungsverteilung eines Moleküls  $j$ , lokalisiert an der Stelle  $\vec{r}_j$ , auf das elektrostatische Potential  $\phi$  an der Stelle  $\vec{r}$ . Der Vektor  $\vec{r}'$  bezeichne die Position einer Ladung im betrachteten Molekül relativ zum Zentrum des Moleküls  $\vec{r}_j$ . Damit berechnet sich der Beitrag der molekularen Ladungen zum Potential:

$$\phi_j(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho_j(\vec{r}')}{|\vec{r} - (\vec{r}_j + \vec{r}')|}. \quad (1.116)$$

Da die Abstände der einzelnen Ladungen des Moleküls von dessen Zentrum,  $|\vec{r}'|$  sehr viel kleiner sind als der typische makroskopische Abstand des Beobachterpunktes  $\vec{r}$  von der Position des Moleküls  $\vec{r}_j$ :  $|\vec{r}'| \ll |\vec{r} - \vec{r}_j|$  wird eine Taylor-Entwicklung des Integranden

um  $\vec{r}' = 0$  sehr rasch konvergieren:

$$\begin{aligned}\phi_j(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \cdot \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|} + \vec{r}' \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'_j} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla}_{\vec{r}'_j} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|} \underbrace{\int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \vec{r}'}_{\vec{d}_j} + \dots,\end{aligned}$$

wobei  $\vec{\nabla}_{\vec{r}'_j}$  der Gradientoperator ist, dessen Ableitungen auf den Vektor  $\vec{r}'_j$  bezogen sind.  $\vec{d}_j$  bezeichnet das Dipolmoment des Moleküls  $j$  (vergleiche den Abschnitt Multipolmomente). Nun können wir den Beitrag aller Moleküle  $j$  zum Gesamtpotential ausrechnen:

$$\phi_{\text{Gesamt}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \vec{\nabla}_{\vec{r}'_j} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_j|} \vec{d}_j + \dots$$

Vernachlässigen wir im folgenden die Beiträge höherer Ordnung in der Taylor-Entwicklung und ersetzen wir die Summation über die einzelnen Atome  $j$  durch eine Integration über die entsprechende Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}')$ , beziehungsweise die Dipoldichte beziehungsweise die entsprechende Polarisationsdichte  $\vec{P}(\vec{r}')$ , berechnet sich:

$$\phi_{\text{Gesamt}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.117)$$

Betrachten wir das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung etwas genauer in der kartesischen Darstellung, so können wir dieses Integral schreiben in der Form

$$\mathcal{I} = \int dx' dy' dz' \left[ P_x(\vec{r}') \frac{d}{dx'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + P_y(\vec{r}') \frac{d}{dy'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + P_z(\vec{r}') \frac{d}{dz'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]. \quad (1.118)$$

Dieses Integral besteht also aus 3 Summanden, von denen wir zunächst den ersten betrachten wollen. und dabei speziell die Integration über die Koordinate  $x'$ . Der Integrand dieses ersten Terms besteht aus einem Produkt der Faktoren  $P_x$  und der Ableitung der Funktion  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$  nach der Integrationsvariablen  $x'$ . Durch partielle Integration ergibt sich dafür

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' P_x \frac{d}{dx'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \underbrace{\left[ P_x \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{d}{dx'} P_x \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.\end{aligned}$$

Wie bereits in dieser Gleichung angedeutet verschwindet der Beitrag von den Integrationsgrenzen, da für  $x' = \pm\infty$  der Integrand null wird. Natürlich gilt diese Gleichung auch noch, wenn wir über  $y'$  und  $z'$  integrieren. Ähnliche partielle Integrationen kann man auch für den zweiten und dritten Summanden in (1.118) durchführen, so dass sich insgesamt ergibt

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= - \int dx' dy' dz' \left[ \frac{d}{dx'} P_x(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{d}{dy'} P_y(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{d}{dz'} P_z(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\ &= - \int d^3\vec{r}' \left[ \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}') \right] \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.\end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis wieder in den Ausdruck (1.117) ein, so ergibt sich für das Potenzial

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}') - \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.119)$$

Dies ist das Potenzial einer Ladungsverteilung

$$\tilde{\rho}(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') - \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}').$$

Die effektive Ladungsdichte  $\tilde{\rho}$  enthält also sowohl die Information über die Ladungsdichte als auch über die Effekte durch die Polarisation des Mediums. Diese effektive Ladungsdichte  $\tilde{\rho}$  ist die Quelle für das elektrische Feld  $\vec{E}$ . Wir können also schreiben:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\tilde{\rho}}{\epsilon_0} = \frac{(\rho - \operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}))}{\epsilon_0}$$

oder diese Gleichung auch umformen auf die Form

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (1.120)$$

Dabei haben wir ein neues Feld definiert

$$\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.121)$$

das man als **Dielektrische Verschiebung** oder aber auch als **Elektrische Flussdichte** bezeichnet. Dieses Feld  $\vec{D}$  ist so definiert, dass seine Quellen durch die ursprüngliche Ladungsdichte  $\rho$  gegeben sind. Diese elektrische Flussdichte entspricht also bis auf den Faktor  $\epsilon_0$  dem elektrischen Feld, das vorliegen würde, wenn kein polarisiertes Medium vorhanden wäre. Ist die Polarisation  $\vec{P}$  des Mediums aber von null verschieden, so erhalten wir, wie wir in der Diskussion der Polarisations-eigenschaften gesehen haben, in der Regel eine Polarisation, die proportional zur elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  ist

$$\vec{P} = \chi_{el} \epsilon_0 \vec{E},$$

mit der elektrischen Suszeptibilität,  $\chi_{el}$ , eine Materialkonstante, die charakteristisch für das Medium ist. Damit ergibt sich für die Dielektrische Verschiebung

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_{el}) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad (1.122)$$

wobei wir mit der **Dielektrizitätskonstanten**  $\epsilon = (1 + \chi_{el})$  eine zur Suszeptibilität alternative Materialkonstante für das Medium eingeführt haben.

Zur weiteren Veranschaulichung der Unterschiede zwischen dem elektrischen Feld und der Dielektrischen Verschiebung betrachten wir einen einfachen Plattenkondensator, wie er in Abb. 1.59 a) dargestellt ist. Die linke Platte ist positiv geladen, die rechte negativ, was durch die vier “+” beziehungsweise die vier “-” Zeichen dargestellt sein soll. Die positiven Ladungen sind Quellen des elektrischen Feldes, also Startpunkte von Feldlinien, die negativen sind Senken, also Endpunkte. Der Raum zwischen den Kondensatorplatten im Teilbild 1.59 a) sei leer, enthalte jeweils kein Medium, was polarisiert ist. In diesem Fall repräsentieren die Feldlinien das elektrische Feld  $\vec{E}$  oder aber auch die Dielektrische Verschiebung, die ja im Vakuum (wir ignorieren hier die Konstante  $\epsilon_0$ ) identisch sind.

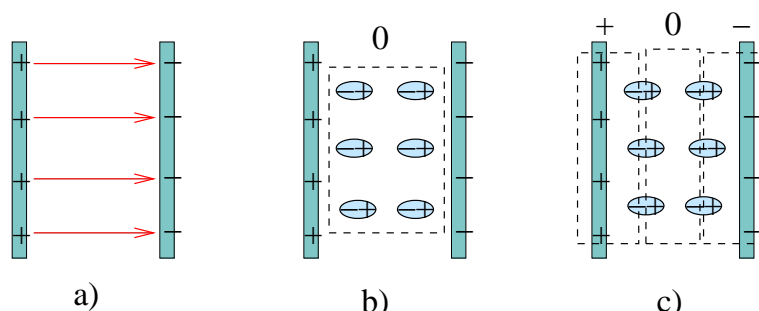


Abbildung 1.59: Plattenkondensator ohne (a)) und mit Dielektrikum (b) und c))

Im Teilbild 1.59 b) und c) betrachten wir den gleichen Kondensator mit gleich vielen Ladungen auf den Platten. In diesem Fall soll sich aber ein polarisiertes Medium zwischen den Platten befinden. Diese Polarisation sei durch die schematische Darstellung der Dipole charakterisiert. Die Gesamtladung des Dielektrikums zwischen den Platten ist identisch Null, so wie das auch durch die Aufsummation der Ladungen in dem mit der gestrichelten Linie umrandeten Rechteck des Teilbildes 1.59 b) zum Ausdruck kommt. Summieren wir aber die Ladungen so auf, wie das im Teilbild 1.59 c) dargestellt ist, so wird deutlich, dass unter Berücksichtigung der Polarisation die Zahl der Feldlinien des elektrischen Feldes von der linken zur rechten Platte reduziert wird. Bei konstanter Ladung wird das elektrische Feld im Kondensator durch ein polarisiertes Medium reduziert. Da die Ladungen ohne Polarisierungseffekte aber identisch sind, ist die Dielektrische Verschiebung  $\vec{D}$  mit ohne Dielektrikum die gleiche. Es gilt also

$$\vec{D}_{(a)} = \vec{D}_{(b)} = \varepsilon_0 \vec{E}_{(a)} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}_{(b)},$$

wobei  $\varepsilon$  die Dielektrizitätskonstante des Mediums in 1.59 b sein soll. Damit gilt

$$\frac{E_{(b)}}{E_{(a)}} = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{U_{(b)}}{U_{(a)}}.$$

In der zweiten Gleichung wurde benutzt, dass die elektrischen Felder als negativer Gradient des Potentials  $\phi$  berechnen, und die Spannung  $U$  ja gerade die Potentialdifferenz zwischen den Kondensatorplatten bezeichnet. Damit gilt aber auch für das Verhältnis der Kapazitäten des Kondensators mit Dielektrikum  $C_{(b)}$  und ohne Dielektrikum  $C_{(a)}$

$$\frac{C_{(b)}}{C_{(a)}} = \frac{Q}{U_{(b)}} \frac{U_{(a)}}{Q} = \varepsilon.$$

### 1.12.2 Grenzbedingungen der Elektrostatik

Betrachten wir zwei Medien mit den Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ . Wie verhält sich das  $\vec{E}$ -Feld an der Grenzfläche zwischen diesen beiden Medien?

Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass die Grenzfläche eine konstante Ladung pro Fläche  $\sigma$  besitzt. In Gedanken legen wir um die Grenzfläche eine „Schachtel“, deren Außenfläche parallel zur Grenzfläche die Größe  $\Delta F$  habe und deren andere Aussenflächen verschwindend klein sein sollen — es soll also eine „flache“ Schachtel sein (siehe Skizze in Figur

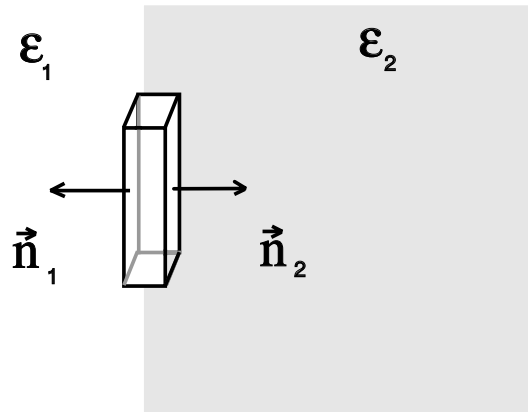


Abbildung 1.60: Skizze des Volumens zur Berechnung der Normalenkomponente des elektrischen Feldes an der Grenzfläche zwischen 2 Medien

1.60). Eine Integration über das Volumen der Schachtel kann mit Hilfe des Gauß'schen Satzes umgeschrieben werden

$$\begin{aligned}
 \int_V \operatorname{div} \vec{D} d^3\vec{r} &= \oint_{\partial(V)} \vec{D} d\vec{f} \\
 &= \Delta F \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2 + \Delta F \vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1 \\
 &= \Delta F (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_2.
 \end{aligned} \tag{1.123}$$

Dabei ist  $\hat{n}_i$  der Einheitsvektor der Flächennormalen für die beiden Flächen im Medium  $i$ , die parallel zur Grenzfläche liegen. Wir betrachten dabei den Fall, dass die Fläche  $\Delta F$  der Flächen, die parallel zu der Grenzfläche liegen, groß sind gegen die anderen Flächen der Schachtel. Andererseits können wir aber das Volumenintegral aus (1.123) aber auch berechnen durch Ausnutzen der Gleichung (1.120) Umformen liefert

$$\begin{aligned}
 \int_V \operatorname{div} \vec{D} d^3\vec{r} &= \int_V \rho d^3\vec{r} \\
 &= \sigma \Delta F.
 \end{aligned} \tag{1.124}$$

also gerade die gesamte Ladung im Volumen  $V$ . Ein Vergleich von (1.123) und (1.124) liefert

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_2 = \sigma.$$

Gibt es also auf der Grenzfläche keine freien Ladungen ( $\sigma = 0$ ), so ist

$$\vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2 = \vec{D}_1 \cdot \hat{n}_2. \tag{1.125}$$

Die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung ist also (unter der Voraussetzung von Ladungsfreiheit der Grenzfläche:  $\sigma = 0$ ) in beiden Medien gleich, während die Normalkomponente des  $\vec{E}$ -Feldes,  $E_{\perp}$  um den Betrag  $\varepsilon_1/\varepsilon_2$  „springt“:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_2 E_{2\perp} &= \varepsilon_1 E_{1\perp} \\
 \Rightarrow E_{2\perp} &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1\perp}.
 \end{aligned}$$

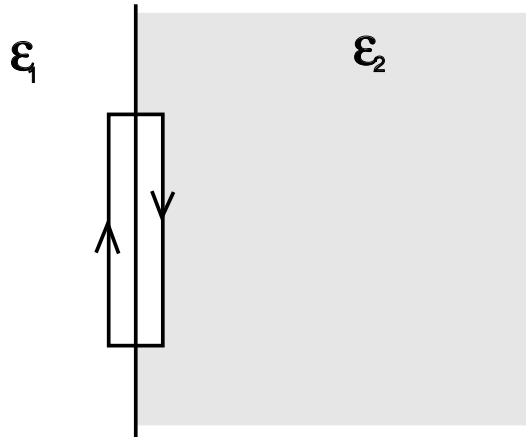


Abbildung 1.61: Skizze des Fläche zur Berechnung der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an der Grenzfläche zwischen 2 Medien

Wie verhalten sich die Tangentialkomponenten von  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$ ? — Wieder sollen zwei Medien mit unterschiedlichen Dielektrizitätskonstanten aneinanderstoßen, doch ist der Integrationsbereich diesmal kein Volumen, sondern eine „Schleife“ mit zwei langen und zwei sehr kurzen Seiten. Dabei sind die langen Seiten parallel zur Grenzfläche und die kurzen Seiten senkrecht dazu (siehe Figur 1.61). Integriert man  $\vec{E}$  entlang dieses geschlossenen Weges, so gilt

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \vec{E}_2 \cdot \hat{e}_{\parallel} \Delta l + E_1 \cdot (-\hat{e}_{\parallel}) \Delta l, \quad (1.126)$$

wobei  $\Delta l$  für die Länge des jeweiligen Wegstückes tangential zur Oberfläche steht und  $\hat{e}_{\parallel}$  ein Einheitsvektor tangential zur Grenzfläche ist (parallel zum Integrationsweg im Bereich des Mediums 2). Mit dem Stokeschen Satz können wir aber auch ausrechnen

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \int_F \text{rot } \vec{E} d\vec{f} = 0 \quad (1.127)$$

wobei die letzte Gleichung aus der Tatsache folgt, dass das elektrische Feld der Elektrostatik wirbelfrei ist als  $\text{rot } \vec{E} = 0$ . Aus dem Vergleich zwischen (1.126) und (1.127) folgt

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \Delta \hat{e}_{\parallel} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{2\parallel} = \vec{E}_{1\parallel} \quad (1.128)$$

Die Tangentialkomponente von  $\vec{E}$  bleibt also beim Übergang von Medium 1 zu Medium 2 gleich. Daraus ergibt sich, dass sich der Betrag der tangentialen Komponente der dielektrischen Verschiebung um den Betrag  $\varepsilon_1/\varepsilon_2$  verändert.

### 1.12.3 Energieinhalt des elektrischen Feldes im Medium

Zur Berechnung des Energieinhaltes eines elektrischen Feldes im Medium betrachten wir die Ladungsverteilung berechnen wir analog zur Energie des elektrischen Feldes im Vaku-

um (siehe Abschnitt Grundgleichungen des elektrostatischen Feldes)

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \cdot \phi(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \phi(\vec{r}) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \vec{D} \cdot \vec{E} \end{aligned} \tag{1.129}$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile wurde die Grundgleichung (1.120) benutzt. Zum Übergang von der zweiten zur vierten Zeile wird eine partielle Integration analog zur Diskussion im Anschluss an (1.118) durchgeführt und beim Übergang zur fünften Zeile die Berechnung des elektrischen Feldes aus dem Gradienten des Potentials. Natürlich erhalten wir im Grenfall, dass das Medium nicht polarisiert wird (also  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ ), wieder das Ergebnis aus dem Abschnitt Grundgleichungen des elektrostatischen Feldes im Vakuum.





# Kapitel 2

## Stromfluss durch Leiter; elektrischer Widerstand

### 2.1 Allgemeines

Wir betrachten ein metallisches Drahtstück, der insgesamt elektrisch neutral ist. Wenn wir jetzt eine Potenzialdifferenz an den Draht anlegen, so beschleunigt das resultierende Feld die Elektronen im Metall. Hierbei können die Elektronen - Im Gegensatz zu den in Abschnitt 1.10 behandelten *zusätzlich* auf ein Metall aufgebrachten Ladungen - im allgemeinen homogen über den Drahtquerschnitt fließen (die elektronische Ladungsdichte wird ja lokal durch die positive Ladungsdichte der Elektronen kompensiert).

Wir definieren als elektrischen Strom  $I$  die pro Zeiteinheit durch eine Querschnittsfläche  $A$  des Drahtes (vgl. Abb. 2.1) fließende Ladung:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (2.1)$$

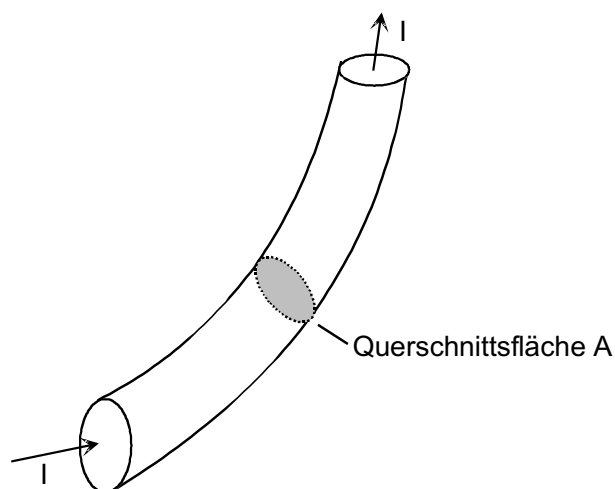


Abbildung 2.1: Strom durch ein metallisches Drahtstück

Die **Einheit des Stroms** ist **Ampere**;  $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$ .

Als **Stromdichte** definieren wir:

$$j = \frac{I}{A}, \quad (2.2a)$$

was wir auch vektoriell als

$$\vec{j} = \frac{I}{A} \vec{n} \quad (2.2b)$$

schreiben können. Hierbei ist  $\vec{n}$  der Normalenvektor auf der Fläche  $A$ .

Wir suchen nun einen Zusammenhang zwischen  $\vec{j}$  und der Dichte  $n$  der Elektronen.

Nehmen wir an, die Elektronen bewegen sich mit einer mittleren Geschwindigkeit  $v_D$  ("Driftgeschwindigkeit") entlang des Drahtes. In der Zeit  $dt$  "schiebt" sich damit das Volumen  $A dx = Av dt$  durch die Querschnittsfläche  $A$  (vgl. Abb. 2.2). In diesem Volumen befinden sich  $N = nA$  Elektronen, so dass  $dN = nAv_D dt$  Elektronen in der Zeit  $dt$  durch  $A$  transportiert werden.

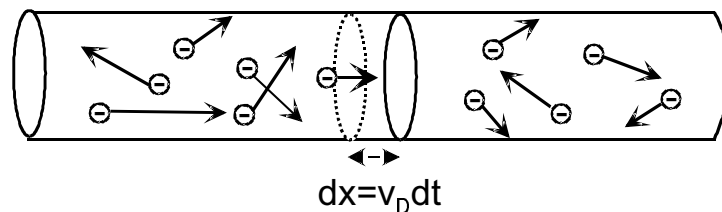


Abbildung 2.2: Zum Zusammenhang zwischen Stromdichte, mittlerer Elektronengeschwindigkeit und Elektronendichte.

Damit erhalten wir für den Strom:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{(-e) \cdot dN}{dt} = -eAv_D n. \quad (2.3)$$

Hierbei ist  $(-e)$  die Ladung eines Elektrons. Etwas allgemeiner können wir  $(-e)$  durch eine (beliebige) Ladung  $q$  pro Teilchen ersetzen:

$$I = qAv_D n. \quad (2.4)$$

Für die **Stromdichte** erhalten wir:

$$j = qnv_D \quad (2.5a)$$

bzw. vektoriell:

$$\vec{j} = qn\vec{v}_D. \quad (2.5b)$$

Man beachte dabei, dass  $\vec{j}$  für positive Ladungen ( $q > 0$ ) parallel zum *Teilchenstrom* gerichtet ist, ansonsten antiparallel.

Die treibende Kraft<sup>1</sup> auf die Teilchen ist  $\vec{F} = q\vec{E}$  (bzw.  $F = -eE$  für  $q = -e$  und Bewegung parallel zum Draht). Falls sich die Elektronen ohne Stoß bzw. Energieverlust

<sup>1</sup>Man kann sich auch andere Kräfte denken, die zu einem Elektronenstrom führen. So führt ein Gradient in der Elektronendichte  $n(x)$  zu einem Diffusionsstrom (vgl. Physik I). Wir wollen hierauf aber nicht weiter eingehen.

bewegen könnten, so ergäbe die Newtonsche Bewegungsgleichung (wir nehmen an, das elektrische Feld ist parallel zur  $x$ -Richtung):

$$m\ddot{x} = qE \quad (2.6)$$

mit der Lösung:

$$v(t) = v(0) + \frac{q}{m}Et. \quad (2.7)$$

Die Elektronengeschwindigkeit und damit auch die Stromdichte  $j = qnv = j_0 + q^2nEt/m$  wächst in diesem Fall unbeschränkt linear mit der Zeit an. Dies klingt wenig realistisch, ist aber z. B. in einem Supraleiter möglich, solange der Stromdichte unterhalb eines kritischen Wertes  $j_c$  bleibt. In einem "normalen" Metall geben die Elektronen aber sehr schnell durch einen Stoß ihre Energie ab. Klassisch würde man vermuten, dass die Elektronen vorwiegend an den Ionen des Gitters stoßen. Nach den Gesetzen der Quantenmechanik zeigt sich aber, dass keine solche Stöße stattfinden, wenn die Ionen auf einem perfekten Kristallgitter angeordnet sind.

**Stoßprozesse** treten aber zwischen den Elektronen und den *schwingenden* Gitterionen auf. Nach den Gesetzen der Quantenmechanik könnten diese Gitterschwingungen als Teilchen, die sog. "Phononen" aufgefasst werden. Stöße können zudem zwischen den Elektronen selbst oder zwischen Elektronen und Verunreinigungen stattfinden.

Als Resultat dieser Stöße erfahren die Elektronen letztlich eine geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft  $F_r$ , die entgegen der Bewegungsrichtung wirkt. Oft ist  $F_r$  proportional zu  $v$ . Mit  $F_r = -const. \cdot v$  erhält man:

$$m\ddot{x} = qE - const. \cdot v \quad (2.8)$$

Nach einer anfänglichen Beschleunigungsphase ist  $\ddot{x} = 0$  und

$$qE = const. \cdot v_D \quad (2.9)$$

bzw.:

$$v_D = \frac{q}{const.}E \equiv \beta E. \quad (2.10)$$

Die Größe  $\beta$  wird auch "**Beweglichkeit**" genannt. Sie hat die Dimension  $[m^2/Vs]$ .

Wir wollen jetzt genauer betrachten, wie  $\beta$  bzw. die Stromdichte  $j$  mit den Stoßprozessen in Zusammenhang stehen.

Die mittlere Flugzeit eines Elektrons zwischen zwei Stößen sei  $\tau$ . Nach einem Stoß hat das Elektron keine Vorzugsgeschwindigkeit mehr in Richtung des elektrischen Feldes, die Beschleunigung beginnt aufs neue. Die Impulsänderung des Elektrons zwischen zwei Stößen ist:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t = q\vec{E}\Delta t = q\vec{E}\tau. \quad (2.11)$$

Hieraus ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit in Richtung des elektrischen Feldes:

$$\vec{v}_D = \frac{\Delta\vec{p}}{m} = \frac{q}{m}\tau\vec{E} \quad (2.12)$$

Mit  $\beta = \tau \cdot q/m$  folgt hieraus:

$$\vec{j} = qn\vec{v}_D = n\frac{q^2}{m}\tau\vec{E} \equiv \sigma\vec{E} \quad (2.13)$$

mit der **elektrischen Leitfähigkeit**

$$\sigma = n\frac{q^2}{m}\tau = q\beta n. \quad (2.14)$$

Man bezeichnet auch das reziproke der elektrischen Leitfähigkeit als **spezifischen Widerstand**:

$$\rho = \sigma^{-1}. \quad (2.15)$$

Es gilt also:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} = \vec{E}/\rho. \quad (2.16)$$

Wir integrieren  $\vec{j}$  über den Leiterquerschnitt und erhalten damit für den Strom durch den Leiter:

$$I = \sigma \cdot A \cdot E \quad (2.17)$$

Die Feldstärke  $E$  sei entlang des Leiters konstant und  $U$  die Potenzialdifferenz auf einem Leiterstück der Länge  $l$  (s. Abb. 2.3).

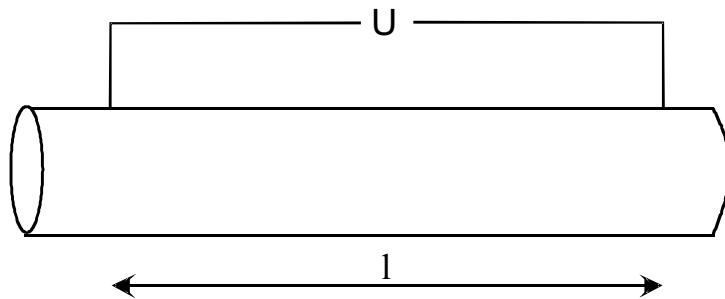


Abbildung 2.3: Leiterstück, an dem eine Spannung  $U$  anliegt.

Dann gilt:  $E = U/l$  bzw.:  $I = U \cdot \sigma A/l$ .

Aufgelöst nach  $U$  ergibt sich.

$$U = \frac{\rho l}{A} I \equiv RI. \quad (2.18)$$

Hierbei ist

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (2.19)$$

der **elektrische Widerstand**. Dessen **Einheit** ist **Ohm** ( $\Omega$ ). Das Reziproke des Widerstands wird auch als **Leitwert**  $G$  bezeichnet:  $G = R^{-1}$ . Die **Einheit** des Leitwerts ist **Siemens** ( $S$ ). Die Beziehung  $U = RI$  (bzw.  $\vec{E} = \rho\vec{j}$ ) ist das **Ohmsche Gesetz**, dementsprechend Strom und Spannung (bzw. Stromdichte und elektrische Feldstärke) proportional zueinander sind.

Metall	$\rho$ [ $\mu\Omega\text{cm}$ ]
Kupfer	1.7
Gold	2.2
Blei	21.0
Eisen	9.8
Konstantan <sup>2</sup>	50
Bogenlampekohle	8000

Tabelle 2.1: Spezifische Widerstände einiger Metalle bei 300 K

In Tabelle 2.1 sind spezifische Widerstände einiger Metalle bei 300 K aufgelistet. Typischerweise liegt  $\rho$  für reine Metalle im Bereich einiger  $\mu\Omega\text{cm}$ . Für die Legierung Konstantan liegt  $\rho$  bei  $50 \mu\Omega\text{cm}$ . Wir haben ebenfalls den spezifischen Widerstand von Kohle aufgenommen, wie er in Kohlebogenlampen verwendet wird. er liegt bei ca.  $8 \mu\Omega\text{cm}$ , also deutlich über dem Wert reiner Metalle.

*Zahlenbeispiele:* Für  $\rho = 1 \mu\Omega\text{cm}$  findet man gemäß (2.19) bei einer Querschnittsfläche  $A = 1 \text{mm}^2$  und einer Drahtlänge von  $1 \text{m}$  einen Widerstand von  $1.7 \cdot 10^{-2} \Omega$ . Für die Stoßzeit  $\tau$  finden wir mit  $\rho = m/nq^2\tau$  und  $\rho = 1 \mu\Omega\text{cm}$ ,  $n = 10^{23} \text{cm}^{-3}$ ,  $q = e$  und  $m = m_e = 9 \cdot 10^{-31} \text{kg}$  (Masse eines freien Elektrons) einen typischen Wert von ca.  $4 \cdot 10^{-14} \text{s}$ . Für die Driftgeschwindigkeit  $v_D$  finden wir für eine Stromdichte von  $1 \text{A/mm}^2$  und den obigen Werten für  $q$  und  $n$  mit  $j = qnv_D$  einen Wert von ca.  $6 \cdot 10^{-5} \text{m/s}$ , was erstaunlich gering ist<sup>3</sup>.

### Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands von Metallen

Kühlt man Metalle ab, so sinkt im allgemeinen deren Widerstand. Für den spezifischen Widerstand gilt:  $\rho = (m/(nq^2))\tau^{-1}$ . Während die Elektronendichte  $n$  weitgehend temperaturunabhängig ist ändert sich dagegen die mittlere Stoßzeit  $\tau$  bzw. die "Streureate"  $\tau^{-1}$  stark mit  $T$ . Wir wollen hierbei drei Prozesse berücksichtigen: Streuung zwischen Elektronen und Gitterschwingungen (Phononen), Streuung zwischen Elektronen und Streuung mit Verunreinigungen. Alle Prozesse tragen zur gesamten **Streureate**  $\tau^{-1}$  bei, wobei sich die Raten der einzelnen Prozesse addieren:

$$\tau^{-1} = \tau_{\text{ep}}^{-1} + \tau_{\text{ee}}^{-1} + \tau_{\text{ev}}^{-1}. \quad (2.20)$$

Hierbei bezeichnet  $\tau_{\text{ep}}^{-1}$  die Steurrate für **Stöße zwischen Elektronen und Phononen**,  $\tau_{\text{ee}}^{-1}$  die Streureate bei **Elektron-Elektron-Stößen** und  $\tau_{\text{ev}}^{-1}$  die Streureate für **Stöße mit Verunreinigungen**.

Bei hohen Temperaturen (genauer:  $T > \text{einige K}$ ) geben die Elektronen ihre Energie überwiegend an die Gitterschwingungen (Phononen) ab (d. h.  $\tau^{-1} \approx \tau_{\text{ep}}^{-1}$ ). Deren Zahl ist bei nicht allzu tiefen Temperaturen proportional zu  $T$ . Entsprechend wird auch die Streureate  $\tau_{\text{ep}}^{-1}$  und damit  $\rho$  bzw.  $R$  proportional zu  $T$ . Für tiefe Temperaturen hin "sterben" die Phononen schnell aus, man findet Streuraten, die proportional zu  $T^3$  bis  $T^5$  abnehmen.

<sup>2</sup>Konstantan besteht aus 54% Cu, 45% Ni und 1% Mn

<sup>3</sup>Im Vergleich dazu beträgt die Geschwindigkeit der schnellsten Elektronen im Metall ("Fermi-Geschwindigkeit"  $v_F$ ) ca. 1% der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit.

Wenn das Material nicht sehr rein ist, ist die Streuung mit Verunreinigungen stark. Diese ist nahezu temperaturunabhängig. Der Widerstand läuft entsprechend zu tiefen Temperaturen hin gegen einen Grenzwert, den "Restwiderstand", der von  $\tau_{ev}^{-1}$  bestimmt wird. Wie groß der Restwiderstand ist bzw. unterhalb welcher Temperatur der Widerstand gegen den Restwiderstand läuft ist abhängig vom Material. Bei Legierungen wie Konstantan ist  $R$  bereits unterhalb Zimmertemperatur praktisch konstant. Bei sehr reinem Kupfer kann  $R$  bis auf weniger als  $10^{-5}$  des 300 K-Wertes absinken<sup>4</sup> und erst unterhalb einiger K gegen seinen Restwert gehen. Erst bei so reinen Materialien wird bei tiefen Temperaturen der Einfluss der Elektron-Elektron Streuung spürbar. Die Streurrate  $\tau_{ee}^{-1}$  ist proportional zu  $T^2$ , spielt aber entsprechend dem oben Gesagten für "handelsübliche" Metalle im allgemeinen keine sehr große Rolle.

In Abb. 2.4. sind die Temperaturabhängigkeiten für reine bzw. verunreinigte Metalle schematisch dargestellt. Experimentell beobachten wir die entsprechenden Temperaturabhängigkeiten für Kupfer- bzw. Konstantandraht.

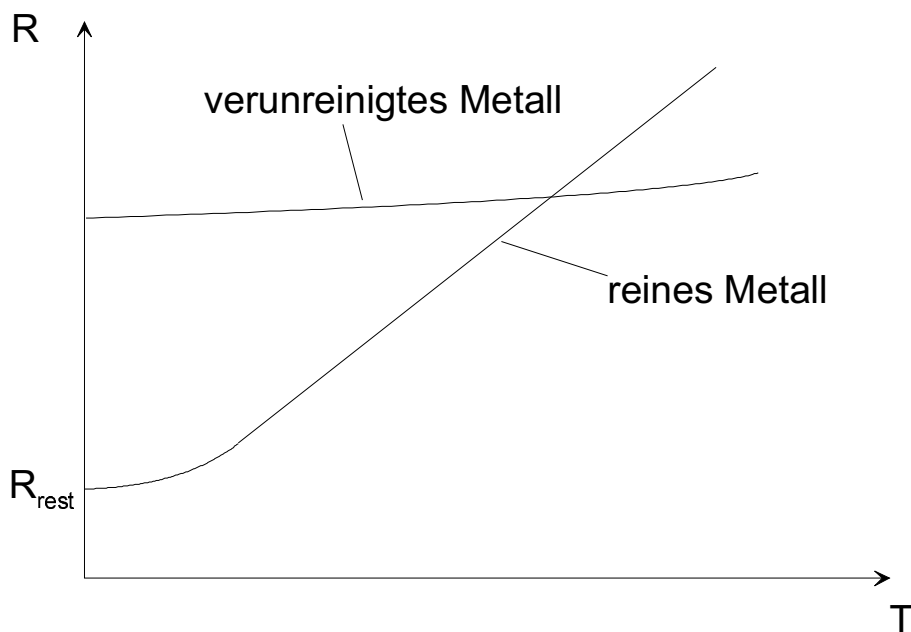
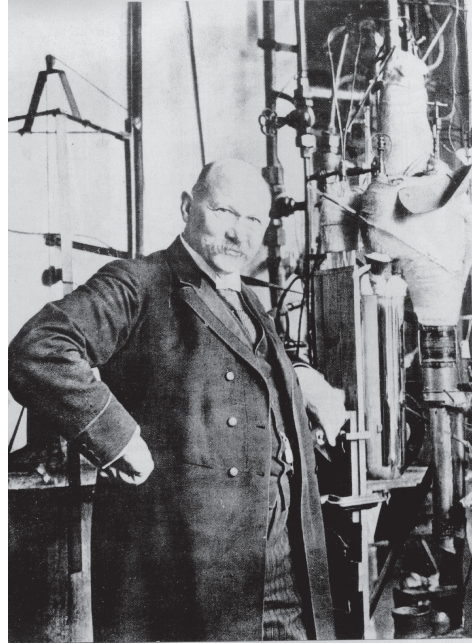
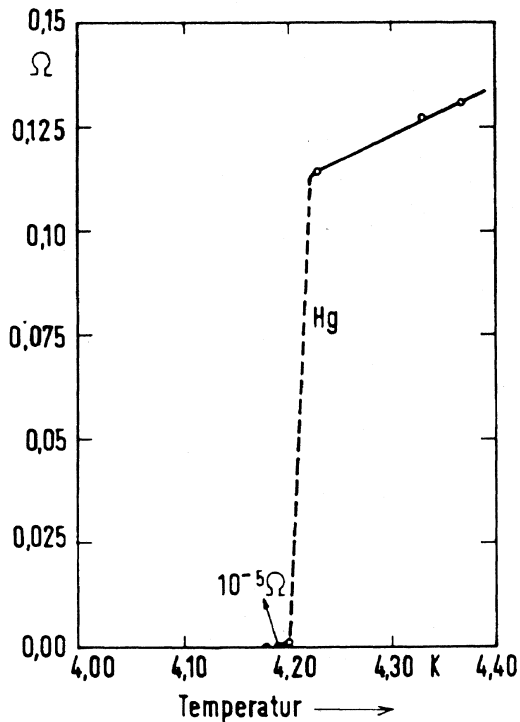


Abbildung 2.4: Temperaturabhängigkeit des Widerstands von Metallen. Der spezifische Widerstand eines verunreinigten Metalls ist i. allg. deutlich höher als der eines reinen Metalls. Der Restwiderstand  $R_{\text{rest}}$  ist vom Grad der Verunreinigung einer Probe abhängig.

Besonders erwähnenswert sind an dieser Stelle **Supraleiter**, zu denen zahlreiche Elemente des Periodensystems (z. B: Hg, Pb, Nb) und viele Legierungen gehören. Oberhalb einer "kritischen Temperatur"  $T_c$  zeigen diese Materialien einen "normalen" ohmschen Widerstand. Bei  $T_c$  sinkt  $R$  dramatisch und verschwindet kurz unterhalb  $T_c$ . Die Supraleitung wurde 1908 an Hg entdeckt ( $T_c \approx 4.2$  K, s. Abb. 2.5). Heute kennt man Supraleiter (spezielle Kupferoxidverbindungen), deren kritische Temperatur bei 120 K und darüber liegen kann.

### Im Leiter dissipierte Leistung

<sup>4</sup>Die schnellsten Elektronen können sich dann einige cm stoßfrei bewegen



"Mercury has passed into a new state, which on account of its extraordinary electrical properties may be called the superconducting state" (H. Kamerlingh Onnes, 1913)

Abbildung 2.5: Supraleitung an Hg: Der elektrische Widerstand verschwindet unterhalb von 4.2 K. Linkes Bild: aus W. Buckel/R. Kleiner, Supraleitung; Rechtes Bild: H. Kamerlingh-Onnes, aus: Spektrum der Wissenschaften

Ein stromdurchflossenes (Normal)metall erhitzt sich, wie wir von der Glühbirne oder der Kochplatte her wissen. Diese Eigenschaft wollen wir im Folgenden quantitativ betrachten.

Die Arbeit, um  $N$  Ladungen  $q$  gegen eine Reibungskraft  $F_r = qE$  eine Strecke  $dx$  zu transportieren, ist:

$$dW = F_r dx = NqE dx. \quad (2.21)$$

Hieraus erhalten wir die aufzuwendende Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} = F_r \frac{dx}{dt} = Fv = NqEv_D. \quad (2.22)$$

Mit  $v_D = j/qn$  ergibt sich:

$$P = NqE \frac{j}{qn} = N \frac{Ej}{n} = E \cdot j \cdot V. \quad (2.23)$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt  $n = N/V$  benutzt.

Für die **Leistungsdichte**  $P/V$  erhalten wir also:

$$\frac{P}{V} = E \cdot j \quad (2.24)$$

(bzw. vektoriell:  $P/V = \vec{E} \cdot \vec{j}$ ). Diese Leistung wird im Leiter dissipiert.

An einem Leiterstück der Länge  $l$  liege die Spannung  $U$  an; das elektrische Feld sei homogen im Leiter. Für die **Gesamtleistung** können wir dann weiter schreiben:

$$P = \frac{U}{l} \cdot \frac{I}{A} \cdot V = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}. \quad (2.25)$$

Die beiden letzten Gleichungen gelten, falls das Ohmsche Gesetz erfüllt ist. Die Einheit der Leistung ist Watt (W) und wird wegen  $P = UI$  manchmal auch als VA angegeben. Wenn wir den Strom vorgeben ist mit  $P = I^2R$  die dissipierte Leistung umso größer, je größer der Widerstand des Materials ist. Wir demonstrieren dies dadurch, dass wir einen Strom von 55 A durch alternierende, gleich große Drahtstücke aus Cu und Fe schicken (Länge: 3 cm, Querschnittsfläche:  $0.07 \text{ cm}^2$ ). In den Cu-Stücken werden je ca. 120 W dissipiert, in den Eisenstücken über 700 W.

Abschließend sei in diesem Abschnitt angemerkt, dass keineswegs nur Metalle elektrisch leitfähig sind. Daneben existieren im Bereich der Festkörper z. B. "**Halbmetalle**" (z. B. Kohlenstoff) mit einer relativ geringen Konzentration freier Elektronen und "**Halbleiter**", in denen die Konzentration freier Ladungsträger zu tiefen Temperaturen hin exponentiell abnimmt. Auch die schon behandelten **Isolatoren** besitzen eine endliche, wengleich geringe Leitfähigkeit ( $\sigma \ll 10^{-3} (\Omega\text{cm})^{-1}$  bei Zimmertemperatur), die zu hohen Temperaturen hin exponentiell anwächst (Wir demonstrieren dies am Beispiel eines Keramikstabs, der im erhitzten Zustand durchaus Strom tragen kann).



## 2.2 Einfache Schaltungen mit Ohmschen Widerständen; Kirchhoffsche Regeln

Netzwerke aus Widerständen (aber auch anderen Bauelementen) können sehr gut mittels den Kirchhoffschen Regeln analysiert werden, die wir im folgenden herleiten wollen.

Die erste Regel geht von der Ladungserhaltung aus. Ganz allgemein könnten wir ein Volumen  $V$  betrachten. Die Ladungserhaltung besagt dann, dass die Summe der aus dem Volumen herausfließenden Ströme ist gleich der zeitlichen Abnahme der Ladung im Volumeninneren ist. Bezogen auf ein kleines Volumenelement  $dV$  (z. B. ein Würfel mit Kantenlängen  $dx$ ,  $dy$ , und  $dz$ ) ergibt sich:

$$\operatorname{div} \vec{j} = \dot{\rho}. \quad (2.26)$$

Diese Gleichung war im Theorieteil bereits allgemein hergeleitet worden.

Im *stationären* Fall ist  $\dot{\rho} = 0$  und damit  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ . Die Summe der in ein Volumenelement hineinfließenden Ströme muss auch wieder herausfließen. Bezogen auf Drähte, die in einem "Knoten" verbunden sind (vgl. Abb. 2.6), heisst dies, dass die Summe der Ströme, die über die Drähte in den Knoten hineinfließen, über andere Drähte wieder aus diesem Knoten herausfließen müssen:

$$\sum_{i=1}^{N_1} I_i^{\text{ein}} = \sum_{i=1}^{N_2} I_i^{\text{aus}}. \quad (2.27)$$

Hierbei sollen  $N_1$  Drähte den Strom in den Knoten hineinführen und  $N_2$  Drähte wieder heraus. Rechnet man die hineinfließenden Ströme positiv, die herausfließenden negativ, so können wir auch schreiben:

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0. \quad (2.28)$$

Dies ist die **1. Kirchhoffsche Regel** ("Knotenregel"). In (2.27) führen  $N$  Drähte ( $N = N_1 + N_2$ ) zu dem Knoten. Der  $i$ -te Draht führt den Strom  $I_i$ .

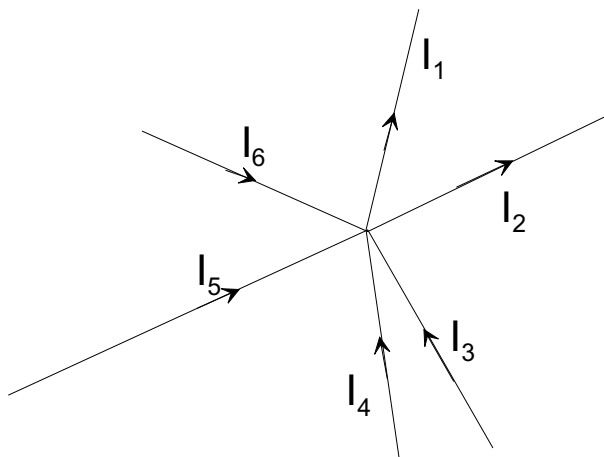


Abbildung 2.6: Zur 1. Kirchhoffschen Regel: Knoten, in den  $N$  Drähte führen.

Wir betrachten jetzt zwei Knoten, von denen aus Drähte geschlossene Schleifen bilden (Abb. 2.7).

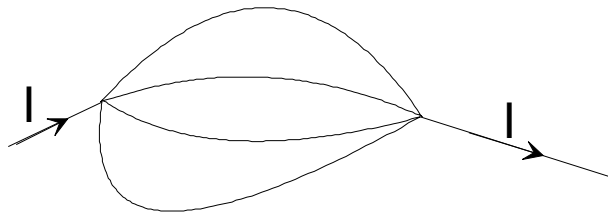


Abbildung 2.7: Zur 2. Kirchhoffschen Regel: Schleifen zwischen zwei Knoten.

Wenn wir uns von irgendeinem Punkt aus um die Schleife herumbewegen, müssen wir am Startpunkt wieder das Ausgangspotenzial erreicht haben. Damit muss die Summe über alle Spannungsabfälle gleich Null sein:

$$\sum_{i=1}^N U_i = 0. \quad (2.29)$$

Dies ist die **2. Kirchhoffsche Regel** ("Maschenregel"). In (2.29) stellen wir uns vor, dass die Schleife in  $N$  Segmente aufgeteilt ist. Über dem  $i$ -ten Segment hat der Spannungsabfall den Wert  $U_i$  (s. Abb. 2.8). Hierbei müssen wir noch beachten, dass wir die Potenziale in "Bewegungsrichtung" angeben.

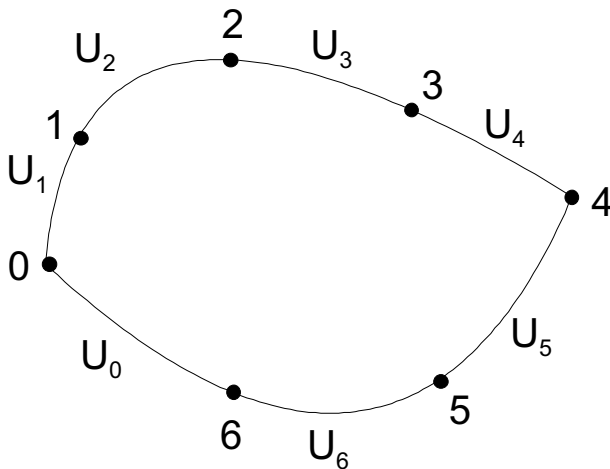


Abbildung 2.8: Schleife mit  $N$  Segmenten.

Wir wollen jetzt mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln einige spezielle Fälle untersuchen:

### 2.2.1 Ideale Spannungsquelle

Wir unterscheiden im Experiment üblicherweise zwischen vorgegebenen Spannungen (Spannungsquellen) und sich (z. B. an einem Widerstand) einstellenden Spannungen. Im Folgenden wollen wir uns näher ansehen, wie wir hierbei insbesondere die Vorzeichen der Spannungen zu werten haben. Betrachten wir zunächst eine sehr einfache Schleife, die aus einer Spannungsquelle besteht, an die ein Widerstand  $R$  angeschlossen ist (Abb. 2.9).

Die Spannungsquelle hält die Spannung  $U_{EMK}$  aufrecht. Man bezeichnet diese Spannung aus historischen Gründen auch als "**elektromotorische Kraft (EMK)**" oder als "**eingeprengte Spannung**". Der "+"-Pol ist dabei positiv. Schließt man den Widerstand  $R$

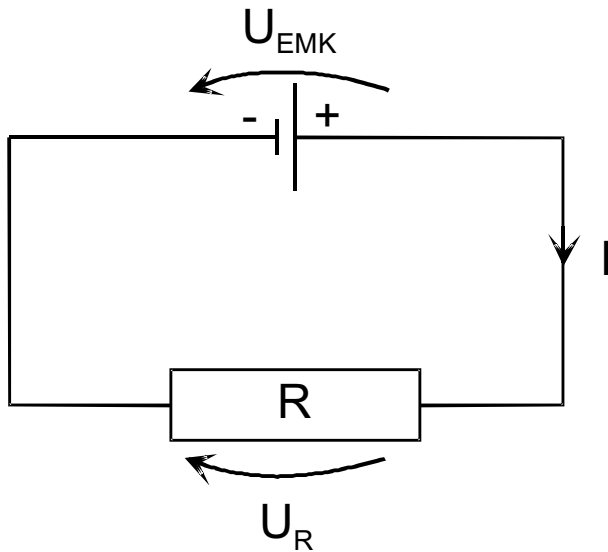


Abbildung 2.9: Ideale Spannungsquelle mit angeschlossenem Widerstand. Die Pfeile an den Spannungen zeigen in Richtung abnehmenden Potentials.

an, so fließt der Strom  $I$  von ”+” nach ”-”. Für die Summe der Spannungen  $U_R$  (= Spannungsabfall über dem Widerstand) und  $U_{EMK}$  gilt:  $U_R + U_{EMK} = 0$ , wobei wir die beiden Spannungen gemäß Abb. 2.9 im Uhrzeigersinn zählen. Gemäß dem Ohmschen Gesetz ist dann  $I = U_R/R = -U_{EMK}/R$ . Der Strom fließt im Uhrzeigersinn<sup>5</sup>.

Meist sagen wir, am Widerstand sei die Spannung  $U$  angelegt bzw. trete sie Spannung  $U$  auf. Konkret meinen wir damit die Spannung  $U_R$ , die für den obigen Fall entgegengesetzt gleich der Spannung  $U_{EMK}$  ist.

Für den Fall, dass  $N_1$  ”Verbraucher” und  $N_2$  Spannungsquellen seriell in die Schleife integriert sind, erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{N_1} U_i + \sum_{i=1}^{N_2} U_{EMK,i} = 0. \quad (2.30)$$

Häufig wird die Maschenregel in dieser Form angegeben.

## 2.2.2 Reale Spannungsquelle

In Spannungsquellen fließt in der Regel bei Stromentnahme ebenfalls ein Strom, der sich oft durch das Ohmsche Gesetz nähern lässt. Die Spannungsquelle erhält dadurch einen endlichen ”**Innenwiderstand**”  $R_i$  (bei der idealen Spannungsquelle war dieser Null). Hierdurch wird die Spannung am Ausgang der Spannungsquelle (die ”**Klemmspannung**”  $U_K$ ) verschieden von  $U_{EMK}$ . Wir können die reale Spannungsquelle oft als eine Reihenanordnung einer idealen Quelle ohne Innenwiderstand und einen seriell auftretenden Widerstand beschreiben, wie in Abb. 2.11 skizziert

Die Spannung  $U_{R_i}$  wirkt  $U_{EMK}$  entgegen. An den Klemmen liegt daher die Spannung

$$U_K = U_{EMK} - R_i I \quad (2.31)$$

<sup>5</sup>Man beachte, dass, wenn wir uns den Stromfluss auch über die Spannungsquelle geschlossen vorstellen, der Strom in der Quelle ”bergauf” fließt.

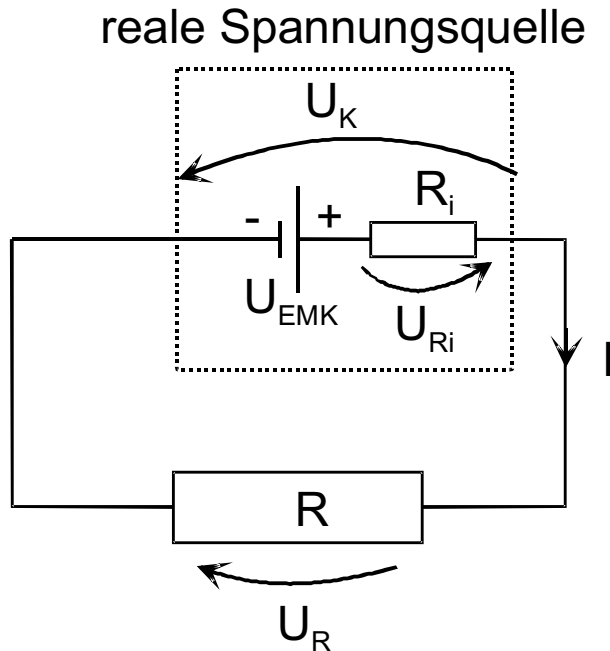


Abbildung 2.10: Reale Spannungsquelle mit Innenwiderstand  $R_i$ . Die Pfeile an den Spannungen zeigen in Richtung abnehmenden Potentials.

an, die dem Verbraucher (d. h. dem Widerstand  $R$ ) zur Verfügung steht. Offensichtlich sollte eine gute **Spannungsquelle** möglichst **niederohmig** sein, also einen kleinen Innenwiderstand besitzen.

### 2.2.3 Reihenschaltung von Widerständen

Es seien zunächst zwei Widerstände wie in Abb. 2.11 in Reihe angeordnet. Wir nehmen an, die Anordnung werde durch eine ideale Spannungsquelle versorgt.

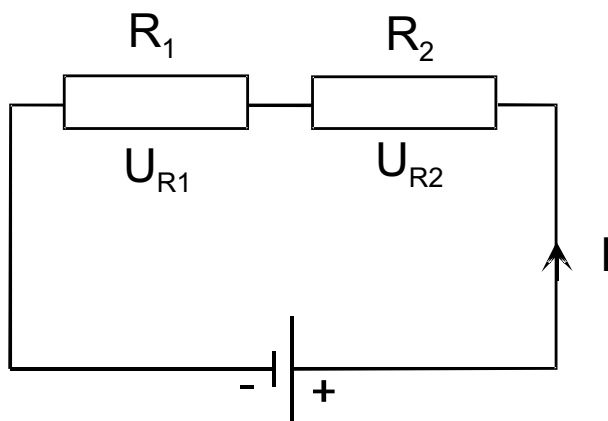


Abbildung 2.11: Zwei Widerstände in Reihe

Der gesamte Spannungsabfall  $U_{ges} = -U_{EMK}$  über den Widerständen ist dann entsprechend der Knoten- und Maschenregeln:

$$U_{ges} = U_{R1} + U_{R2} = R_1 I_1 + R_2 I_1 = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I \quad (2.32)$$

Hieraus folgt:

$$I = \frac{U_{ges}}{R_1 + R_2}. \quad (2.33)$$

Die beiden Widerstände in Serie verhalten sich wie ein Widerstand mit  $R_{\text{ges}} = R_1 + R_2$ ; die **Widerstände** sind also zu **addieren**. Analog finden wir für  $N$  Widerstände in Serie:

$$R_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N R_i. \quad (2.34)$$

Man beachte weiter, dass sich Serienschaltungen von zwei (oder auch mehr) Widerständen als **Spannungsteiler** verhalten. Es gilt:

$$\frac{U_{R_1}}{U_{R_2}} = \frac{R_1 I}{R_2 I} = \frac{R_1}{R_2} \quad (2.35)$$

und weiter:

$$\frac{U_1}{U_{\text{ges}}} = \frac{U_1}{U_1 + U_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{R_{\text{ges}}}. \quad (2.36)$$

Die Spannung  $U_1$  ist also nur ein Bruchteil  $R_1/R_{\text{ges}}$  der Gesamtspannung.

*Im Experiment prüfen wir Spannungen, Ströme und Widerstände für eine Reihenschaltung von zwei 100 W und einem 200 W Widerstand.*

## 2.2.4 Parallelschaltung von Widerständen

Wir betrachten die in Abb. 2.12 dargestellte Parallelschaltung von zwei Widerständen.

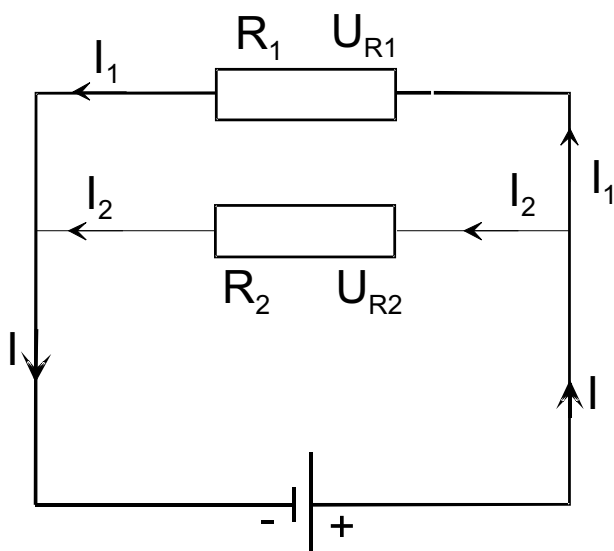


Abbildung 2.12: Parallelschaltung von zwei Widerständen

Entsprechend der Maschenregel ist  $U_{\text{ges}} = U_1 = U_2$ . Die Knotenregel besagt:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U_{R_1}}{R_1} + \frac{U_{R_2}}{R_2} = U_{\text{ges}} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{U_{\text{ges}}}{R_{\text{ges}}}. \quad (2.37)$$

Die parallelen Widerstände verhalten sich also wie ein Widerstand mit

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (2.38)$$

Wir müssen also die **reziproken Widerstände** (d. h. die **Leitwerte**) **addieren**. Für  $N$  parallelgeschaltete Widerstände gilt entsprechend:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}. \quad (2.39)$$

Eine Anordnung von zwei (oder mehr) parallelen Widerständen kann als Stromteiler verwendet werden. Es gilt:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_{ges} R_1}{U_{ges} R_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (2.40)$$

bzw:

$$\frac{I_1}{I} = \frac{U_{ges}/R_1}{U_{ges}/R_{ges}} = \frac{R_{ges}}{R_1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.41)$$

Der Strom  $I$  teilt sich also im umgekehrten Verhältnis wie die Widerstände auf; der Gesamtstrom wird entsprechend (2.41) geteilt.

## 2.2.5 Stromquellen

Eine Spannungsquelle sollte eine Spannung  $U$  unabhängig von der "Last" (d. h. den angeschlossenen Widerständen) anbieten. Sie hat daher wie oben besprochen idealerweise den Innenwiderstand Null. Dagegen sollte eine Stromquelle einen festen Stromwert unabhängig von der Last anbieten. Man kann dies dadurch erreichen, dass man eine Spannungsquelle mit einem sehr hohen Vorwiderstand versieht (s. Abb. 2.13).

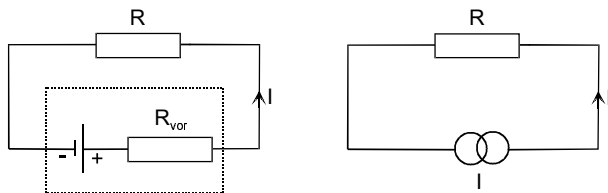


Abbildung 2.13: Realisierung einer Stromquelle

Es gilt dann  $I = -U_{EMK}/(R_{vor} + R) \approx -U_{EMK}/R_{vor}$ . Hierbei sollte  $R_{vor}$  so groß wie möglich (insbesondere  $R_{vor} \gg R$ ) sein. **Stromquellen** sind also **hochohmig**. Man realisiert Stromquellen oft durch spezielle Halbleiterschaltungen. Diese Quellen haben Innenwiderstände von 100 M $\Omega$  bis einige G $\Omega$ .

## 2.2.6 Amperemeter

Strommessgeräte<sup>6</sup> nutzen oft die Kraftwirkung von Strömen aus, die wir in Abschnitt 2.3 genauer behandeln werden. Hier wollen wir nur darauf eingehen, dass **Amperemeter niederohmig** sein sollten. Sie werden wir in Abb. 2.14 dargestellt direkt in den Stromkreis integriert und sollten den Stromfluss nicht verringern, also selbst einen vernachlässigbar kleinen Widerstand besitzen.

<sup>6</sup>Dies gilt für Messung von Gleichströmen (d. h. zeitunabhängigen Strömen). Auf die Messung von Wechselströmen werden wir gesondert eingehen.

### 2.2.7 Voltmeter

Als Voltmeter lassen sich beispielsweise Amperemeter benutzen. Hierbei wird mittels eines Stromteilers (vgl. Abschnitt 2.2.4) ein kleiner Anteil des Stroms abgezweigt und dann gemessen. **Voltmeter** sollten möglichst **hochohmig** sein, so dass sich der Stromfluss im eigentlichen Kreis nicht ändert. Gute Voltmeter basieren auf Halbleiterschaltungen, die ihrerseits die zu messende Spannung aufteilen und einen geeigneten Ausgang (z. B. digitales Anzeigedisplay) ansteuern.

### 2.2.8 Leistungsmesser

Leistungsmesser machen sich beispielsweise die Erwärmung eines stromdurchflossenen Drahtes zunutze (gemäß  $P = UI$  wird im Draht Leistung dissipiert; diese Leistung ist proportional zur Temperaturerhöhung  $\Delta T$  des Drahtes). Man kann  $\Delta T$  direkt messen oder indirekte Eigenschaften wie die Längenausdehnung des Drahtes bei Erwärmung ausnutzen.

### 2.2.9 Widerstandsmessung: Vierpunktmethode

Oft muss der Widerstand von Proben gemessen werden, die einerseits sehr niederohmig sind und an die andererseits nur schlecht Drähte angebracht werden können. Speziell sind die Kontaktstellen oft hochohmig und ändern sich evtl. sogar als Funktion der Zeit (oder anderen Größen wie der Temperatur etc). Man benötigt daher eine Methode, die diese Widerstände nicht mitmisst.

Die prinzipielle Anordnung ist in Abb. 2.14 skizziert. Man bringt an der Probe vier Kontakte an. Die äußeren dienen der Stromzufuhr, die Inneren dienen der Spannungsmessung. Es wird dabei nur der Spannungsabfall zwischen den inneren Kontakten bestimmt.

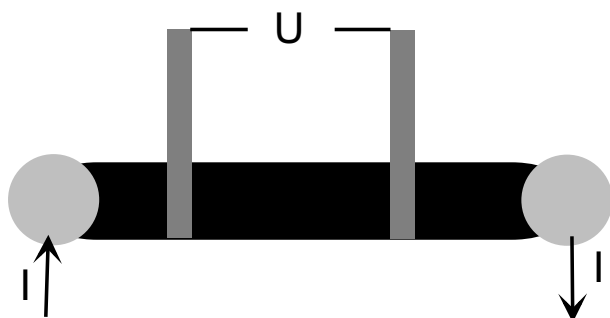


Abbildung 2.14: Widerstandsbestimmung nach der Vierpunktmethode

Die Abb. 2.35 zeigt ein Ersatzschaltbild der Anordnung. Die Probe wird mittels einer Stromquelle mit einem konstanten Strom versorgt. Neben dem Probenwiderstand existieren im Stromkreis eine Reihe parasitärer Widerstände: die Kontaktwiderstände  $R_{\text{kontakt}}$ , sowie der Widerstand der Zuleitungen. An all diesen Widerständen fallen Spannungen ab. Die Spannungsmessung erfolgt über den oberen Kreis. Auch in diesem Kreis befinden sich die parasitären Widerstände der Kontaktierung bzw. der Zuleitungen. Das Voltmeter selbst ist aber sehr hochohmig (s. Abschnitt 2.2.7), so dass in diesem Kreis praktisch kein Strom fließt. Somit treten an den parasitären Widerständen auch keine Spannungsabfälle

auf, das Voltmeter misst nur den Spannungsabfall über  $R_{\text{probe}}$ . Durch die Anordnung sich also  $R_{\text{probe}}$  unabhängig von den parasitären Widerständen bestimmen.

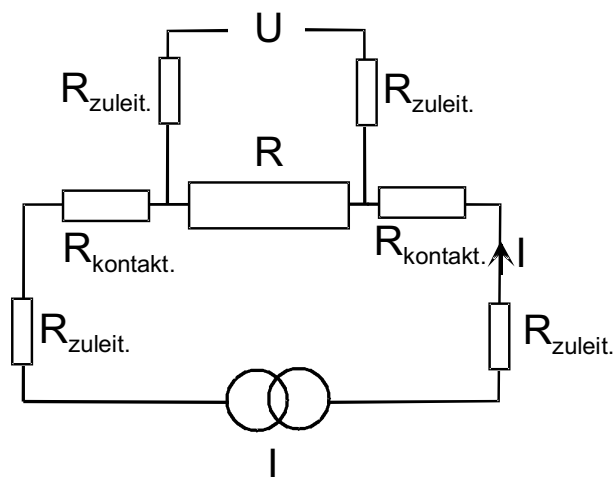


Abbildung 2.15: Widerstandsbestimmung nach der Vierpunktmethode: Ersatzschaltbild

### 2.2.10 Widerstandsmessung: Wheatstone-Brückenschaltung

Die Wheatstone-Brückenschaltung ist in Abb. 2.16 dargestellt.

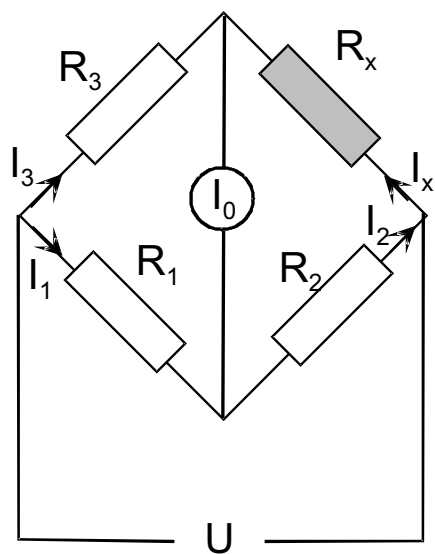


Abbildung 2.16: Wheatstone'sche Brückenschaltung

Ziel ist die Bestimmung des Widerstands  $R_x$  bei bekannten Widerständen  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ . Das Verhältnis der Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  wird dabei so eingestellt, dass durch das Amperemeter kein Strom fließt. Dadurch ist die Widerstandsbestimmung auf eine "Null-Strom-Messung" zurückgeführt. Man kann ein sehr empfindliches Amperemeter einsetzen und damit  $R_x$  extrem genau bestimmen.

Im einzelnen gilt in der Schaltung für den Fall, dass der Strom  $I_0$  durch das Amperemeter gerade Null ist (Anwendung Maschen- und Knotenregel):

$$I_3 = I_x \quad (\text{Knotenregel}) \quad (2.42a)$$

$$I_1 = I_2 \quad (\text{Knotenregel}) \quad (2.42b)$$



$$I_3 R_3 = I_1 R_1 \quad (\text{Maschenregel, linkes Dreieck}) \quad (2.43a)$$

$$I_x R_x = I_2 R_2 \quad (\text{Maschenregel, rechtes Dreieck}) \quad (2.43b)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_2}{R_1} \quad (2.44)$$

bzw.:

$$R_x = R_3 \cdot \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.45)$$

Real gibt man  $R_3$  als festen Widerstand vor und legt  $R_1$  und  $R_2$  als einen Schiebewiderstand aus wie in Abb. 2.17 skizziert. Teilt man die Länge des Schiebewiderstands im Verhältnis  $l_1/l_2$ , so verhalten sich die Teilwiderstände  $R_1$  und  $R_2$  wie dieses Verhältnis und man erhält:

$$R_x = R_3 \cdot \frac{l_2}{l_1}. \quad (2.46)$$

Man verschiebt bei der Messung die Kontaktierung am Schiebewiderstand und gleicht dadurch die Brücke ab, bis  $I_0 = 0$  wird. Entsprechend (2.46) hat man  $R_x$  bestimmt (Wir zeigen das entsprechende Experiment für  $R_x = 220 \Omega$  und  $R_2 = 100 \Omega$ ).

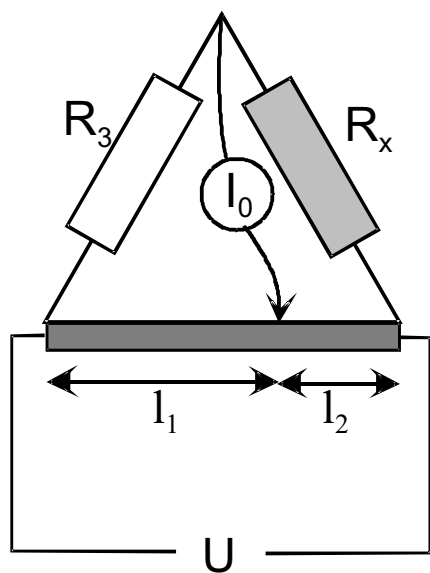


Abbildung 2.17: Wheatstonesche Brückenschaltung: Realisierung mittels Schiebewiderstand



## 2.3 Spannungsquellen

In diesem Abschnitt wollen wir näher besprechen, welche Arten von Spannungsquellen real verwendet werden können.

### 2.3.1 Kondensatoren

Eine erste, naheliegende Variante ist die Verwendung eines geladenen Kondensators. Allerdings muss hier darauf hingewiesen werden, dass ein Kondensator keine "richtige" Spannungsquelle darstellt. Wegen  $Q = CU$  fällt die Spannung im Verlauf der Zeit, wenn sich der Kondensator entlädt.

Wir demonstrieren den Entladevorgang (sowie die Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren) dadurch, dass wir Kondensatoren mit einer Glühlampe verbinden. Die Lampe glüht anfangs stark und geht dann langsam aus.

Wir können den Zeitverlauf von  $U$ ,  $Q$  und  $I$  mittels der uns bereits bekannten Beziehungen leicht analysieren. Betrachten wir zunächst Abb. 2.18.

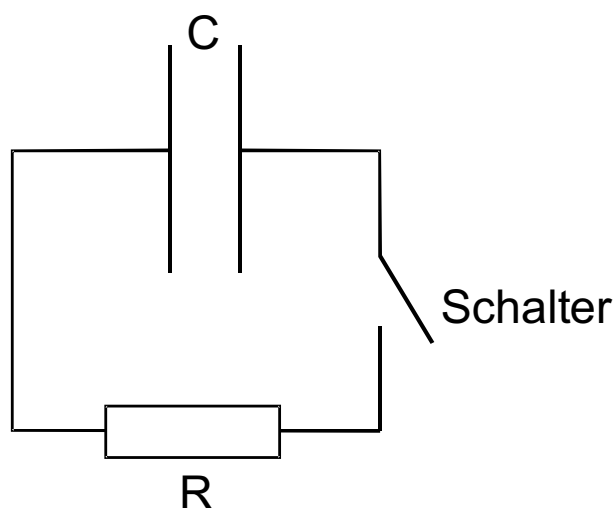


Abbildung 2.18: Entladen eines Kondensators

Der Stromkreis besteht aus einem Kondensator (Kapazität  $C$ ), einem Verbraucher (Widerstand  $R$ ) und einem Schalter. Bei offenem Schalter fließt kein Strom im Stromkreis. Die EMK des Kondensators (Spannung  $U_c$ ) wird durch einen entgegengesetzt gleichen Spannungsabfall über dem Schalter kompensiert. Schließen wir den Schalter, so fließt ein Strom  $I$ , der sich im Verlauf der Zeit ändert. Wir erhalten jetzt einen Spannungsabfall  $U_R$  am Widerstand. Es gilt:

$$U_c + U_R = 0 \quad (2.47)$$

Hieraus folgt mit  $U_c = Q/C$  und  $U_R = RI$ :

$$\frac{Q}{C} + RI = 0. \quad (2.48)$$

Wir differenzieren nach der Zeit und erhalten mit  $\dot{Q} = I$ :

$$I + RC\dot{I} = 0 \quad (2.49)$$

Diese Differenzialgleichung wird gelöst durch:

$$I(t) = I(0) \cdot e^{-t/RC}. \quad (2.50)$$

Der Strom fällt also exponentiell von einem Anfangswert  $I(0)$  aus ab, mit einer charakteristischen Zeitkonstanten  $RC$ . Für<sup>7</sup>  $C = 1 \text{ F}$  und  $R = 1 \text{ k}\Omega$  beträgt dann  $RC$  immerhin 1000s. Den Anfangstrom können wir dabei (Kirchhoffsche Gesetze benutzen!) durch  $I(0) = U_c(0)/R$  ausdrücken.

Die Ladung des Kondensators können wir aus (2.50) via durch Integration bestimmen. Wir erhalten:

$$Q(t) = Q(0) \cdot e^{-t/RC}. \quad (2.51)$$

Hierbei ist  $Q(0) = CU(0)$ . Schließlich erhalten wir mittels  $U = Q/C$  den zeitlichen Spannungsverlauf am Kondensator:

$$U_c(t) = U_c(0) \cdot e^{-t/RC}. \quad (2.52)$$

Völlig analog zu (2.47) bis (2.49) können wir auch das Aufladen eines Kondensators berechnen, wenn wir an den ungeladenen Kondensator schlagartig eine Spannung  $U_0$  anlegen. Wir erhalten:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/RC} \quad (2.53)$$

$$Q(t) = CU_0 \cdot (e^{-t/RC} - 1) \quad (2.54)$$

$$U_c(t) = U_0 \cdot (e^{-t/RC} - 1) \quad (2.55)$$

Hierbei nehmen wir an, dass der Ohmsche Widerstand des Ladekreises gerade  $R$  ist.

*Wir demonstrieren den Entlade- bzw. Aufladevorgang eines Kondensators dadurch, dass wir eine Rechteckspannung  $U$  an den Kondensator anlegen. Der Kondensator folgt jeweils verzögert (s. Abb. 2.19; aufgetragen sind der Strom auf den Kondensator sowie die angelegte Rechteckspannung). Wenn wir dagegen den Kondensator durch einen Widerstand ersetzen, finden wir, dass der Strom der Rechteckspannung ohne Verzögerung folgt.*

### 2.3.2 Galvanische Elemente

Eine bessere Form von Spannungsquellen sind Galvanische Elemente.

Hierbei tauchen zwei Metalle in einen "Elektrolyten", d. h. eine Flüssigkeit, in der Ionen gelöst sind.

*Wir beobachten zunächst den zeitlichen Spannungsverlauf zwischen einer Zinkelektrode und einer Kupferelektrode, die beide in eine verdünnte  $\text{H}_2\text{SO}_4$ -Säure tauchen. Vor dem Eintauchen ist  $U = 0$ . Nach dem Eintauchen baut sich eine Spannung auf (Cu-Elektrode: positiv), die etwas über 1 V sättigt.*

Wenn ein Metall (z. B. Zn) in den Elektrolyten taucht, so gehen einige Metallionen ( $\text{Zn}^{2+}$ ) in Lösung. Die Zn-Elektrode wird dabei selbst negativ geladen. Um die Elektrode bildet

<sup>7</sup>Man verwendet  $C = 1 \text{ F}$  z. B. an Fahrrädern; die Kondensatoren werden während des Fahrens aufgeladen.

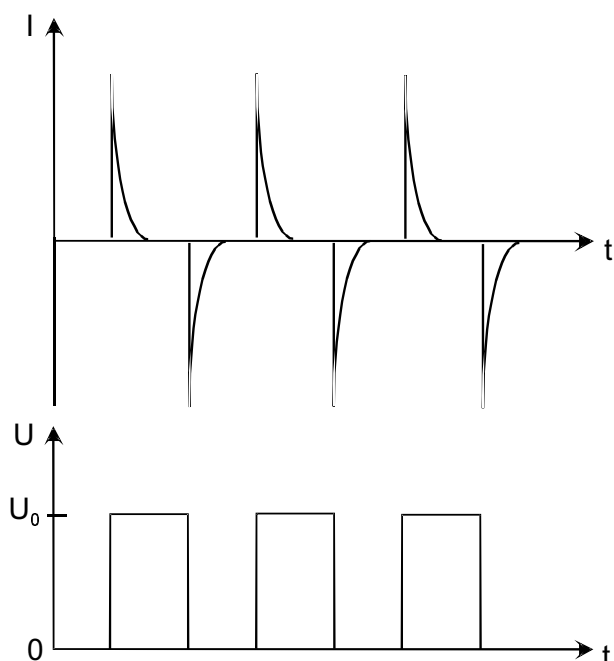


Abbildung 2.19: Reaktion eines Kondensators auf eine Rechteckspannung. Oben: Strom auf den Kondensator; unten: angelegte Rechteckspannung. Beim Entladen bzw. Beladen des Kondensators fließt der Strom in entgegengesetzte Richtung.

sich eine positiv geladene Zone aus  $\text{Zn}^{2+}$ -Ionen. Nach einer gewissen Zeit können keine weiteren Ionen mehr gegen diese positive Raumladung austreten, die Aufladung der Zn-Elektrode geht gegen einen Sättigungswert.

Dieser Sättigungswert ist abhängig vom Elektrodenmaterial, sowie von der Ionenkonzentration im Elektrolyten. Man kann nun die Aufladung eines gegebenen Elektrodenmaterials als eine **”Spannungsreihe”** angeben. Man bezieht dabei die Spannung auf das Potenzial einer Referenzelektrode, und zwar einer **”Wasserstoff-Elektrode”**. Hierbei handelt es sich um eine Platinelektrode, die von Wasserstoff umspült ist. Wir werden diesen Elektrodentyp etwas später noch kennenlernen. Als Ionenkonzentration im Elektrolyten wählt man eine Lösung mit 1 mol Ionen pro Liter. Tab. 2.2 gibt die Spannungsreihe für einige Elemente an.

Element	Spannung [V]
Lithium	-3.02
Zink	-0.762
Blei	-0.126
Kupfer	+0.345
Gold	+1.5

Tabelle 2.2: Spannungsreihe für einige Elemente

Für das Potenzial der Zn-Elektrode gegen die Cu-Elektrode erhält man für diese spezielle Ionenkonzentration:  $U = [0.345 - (-0.762)] \text{ V} \approx 1.1 \text{ V}$ .

Entnimmt man einem galvanischen Element Strom, so fließt im Elektrolyten ein Gegenstrom von Ionen zwischen den Elektroden. Als Konsequenz schlagen sich positiv geladene Metallionen am **”+”**-Pol (der Anode) nieder. Wenn diese Metallionen ein anderes Element

sind als das Material der Kathode, so ändert sich deren Zusammensetzung und damit auch die Spannung zwischen den Elektroden. Man spricht von einem "nicht-konstanten" galvanischen Element. Dagegen ändert sich die Zusammensetzung der Elektrodenoberfläche bei einem konstanten galvanischen Element nicht.

Ein Beispiel ist das "**Daniell-Element**": Man taucht eine Zn-Elektrode und eine Cu-Elektrode in ein  $\text{CuSO}_4$ -Bad. Zwischen den beiden Elektroden befindet sich eine poröse Tonwand, die für  $\text{Zn}^+$ -Ionen undurchlässig ist. An der Cu-Elektrode schlagen sich  $\text{Cu}^{2+}$ -Ionen nieder. Diese Elektrode wird damit im Verlauf der Zeit dicker, behält aber ihre Zusammensetzung. Von der Zn-Elektrode (der Kathode) lösen sich  $\text{Zn}^{2+}$ -Ionen, so dass diese im Verlauf der Zeit dünner wird. Zu dieser Elektrode wandern auch  $\text{SO}_4^{2-}$ -Ionen die sich dort aber nicht stabil anlagern.

Im wiederaufladbaren **Pb-Akkumulator** tauchen zwei zunächst gleiche Pb-Elektroden in  $\text{H}_2\text{SO}_4$  und überziehen sich schnell mit einer  $\text{PbSO}_4$ -Schicht. Man legt jetzt eine Spannung an die Elektroden an. An der Anode wandelt sich das  $\text{PbSO}_4$  in Pb zurück:



An der Kathode verwandelt sich  $\text{PbSO}_4$  in  $\text{PbO}_2$ :



Man erhält jetzt ein galvanisches Element zwischen Pb und  $\text{PbO}_2$  ("Sekundärelement"). Das Element liefert eine Spannung von 2.02 V unter Normalbedingungen ( $\text{PbO}_2$ : positiv). Beim Entladen laufen die Reaktionen (2.56) und (2.57) gerade umgekehrt ab, bis man auf beiden Seiten Pb-Elektroden mit einem  $\text{PbO}_2$ -Überzug zurückerhält.

Wir demonstrieren den Ionentransport in Elektrolyten anhand einiger Experimente:

- **Kupferabscheidung:** Man taucht zwei Ni-Elektroden in eine  $\text{CuSO}_4$ -Lösung und legt an die Elektroden eine Spannung an. Die  $\text{Cu}^{2+}$ -Ionen wandern zur Kathode, neutralisieren sich und bilden einen roten Überzug auf der Elektrode.



Abbildung 2.20: *Kupferabscheidung*

- **Ionenleitung in Salzlösungen:** Zwei Elektroden tauchen zunächst in destilliertes Wasser. An die Elektroden ist eine Spannungsquelle angeschlossen. Zunächst fließt kein nachweisbarer Strom. Löst man NaCl im Wasser, steigt dagegen der Strom stark an.

- **Innenwiderstand von Batterien:** Gemäß (2.31):  $U_K = U_{\text{EMK}} - R_i I$  erniedrigt sich die Spannung an einer Batterie bei Stromfluss. Bei offenem Stromkreis messen wir an den Klemmen  $U_{\text{EMK}}$ . Wir verbinden die Pole der Batterie mit einem Schiebewiderstand und stellen ihn so ein, dass  $I = 1 \text{ A}$  fließt. Die Klemmspannung erniedrigt sich. Wir können jetzt  $R_i$  bestimmen via:

$$R_i = \frac{U_{\text{EMK}} - U_K}{I} \quad (2.58)$$

Für die Batterie ergibt sich ein Wert von ca.  $0.5 \Omega$ , für einen Pb-Akkumulator, den wir ebenfalls messen, ein Wert von ca.  $0.2 \Omega$ .

- **Strom-Spannungs-Charakteristik von elektrolytischen Zellen:** In der Anordnung tauchen zwei Pt-Elektroden in  $\text{H}_2\text{SO}_4$ . Wir legen eine Spannung  $U$  an die Elektroden und messen den Stromfluss. Hierbei finden wir, dass bis  $U = U_z \approx 1.2 \text{ V}$  ("Zersetzungsspannung") zunächst ein geringer Strom fließt, der nach kurzer Zeit praktisch auf Null zurückgeht. Erst für höhere Spannungen wächst  $I$  ungefähr linear an, d. h. wir erhalten

$$I \approx \frac{U - U_z}{R} \quad (2.59)$$

Diese  $U(I)$ -Charakteristik ist in Abb. 2.21 schematisch dargestellt.

Bei kleinen Spannungen scheidet sich an einer Pt-Elektrode Wasserstoff ab (= "**Wasserstoffelektrode**"), an der anderen Sauerstoff. Man hat dadurch ein galvanisches Element zwischen  $\text{H}_2$  und  $\text{O}_2$  erzeugt, das mit  $U_z$  der äußeren Spannung entgegenwirkt. Erst bei Spannungen  $U > U_z$  fließt ein nennenswerter Strom. Der Effekt wird auch "Galvanische Polarisation" genannt.

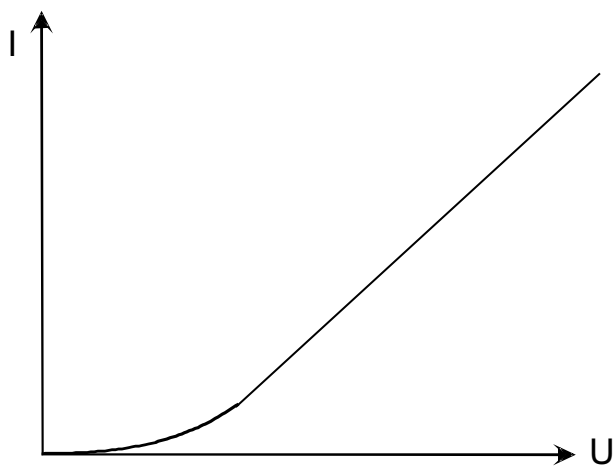


Abbildung 2.21: Strom Spannungs-Charakteristik von zwei in  $\text{H}_2\text{SO}_4$  tauchenden Pt-Elektroden.





## 2.4 Moderne Messverfahren zur Bestimmung von Ampere, Volt und Ohm

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir kurz die Verfahren erwähnen, durch die heute die Einheiten Ampere, Volt und Ohm bestimmt werden. In allen Fällen werden Quanteneffekte verwendet.

Strom ist definiert als Ladung pro Zeiteinheit. Man kann mikroelektronische Schaltungen realisieren, in denen einzelne Elektronen in regelmäßigem zeitlichen Abstand durch die Schaltung treten (**S**ingle **E**lektron **T**unneling). Für den Strom können wir dann schreiben:

$$I = -ef \quad (2.60)$$

Hierbei ist  $f$  die Frequenz, mit der die Elektronen durch die Schaltung "tropfen". Sie kann sehr leicht bestimmt werden. Man hat dann bei Kenntnis von  $e$  die Strommessung auf eine Frequenzmessung zurückgeführt.

Analog lässt sich die **Spannungsmessung** auf eine Frequenzmessung zurückführen. Der benutzte Effekt ist der "**J**osephson**e**ffekt", der in Supraleitern auftritt und mit der Interferenz kohärenter Materiewellen (aufgebaut aus Paaren von Elektronen) zu tun hat. Es ergibt sich die Beziehung:

$$U = \frac{h}{2e}f, \quad (2.61)$$

wobei  $h$  das Plancksche Wirkungsquantum und  $e$  die Elementarladung ist. Man verwendet Schaltungen aus sehr vielen Josephsonkontakten, um "Spannungsstandards" zu realisieren. Hierbei werden Mikrowellen bei Frequenzen  $f$  von einigen 10 GHz eingestrahlt und die Spannung  $U$  bestimmt. Die Größe  $2e/h$  wird auch als Josephsonkonstante bezeichnet. Sie wurde 1990 auf den Wert  $K_{J90} = 483.5979 \text{ GHz/mV}$  festgelegt. Damit hat man eine exakte Beziehung, die die Frequenz  $f$  und die Spannung  $U$  verknüpft.

Das Ohm schließlich kann durch den **Quanten-Hall-Effekt** auf Naturkonstanten zurückgeführt werden. Dieser Effekt tritt in Halbleitern auf und hat mit der Quantisierung von Elektronenbahnen im Magnetfeld zu tun. Hierbei tritt ein Widerstand in Einheiten  $R_q/n$  ( $n$ : ganze Zahl) auf.  $R_q$  hat den Wert

$$R_q = \frac{h}{e^2} \quad (2.62)$$

(Zahlenwert:  $25813 \Omega$ , wird nach dem Entdecker des Quanten-Hall-Effekts (Klaus von Klitzing) manchmal auch als "1 Klitzing" bezeichnet).



# Kapitel 3

## Magnetostatik

### 3.1 Einführende Versuche

Wir beginnen die Magnetostatik mit einigen einführenden Versuchen. Wenn wir - als für uns neues und noch unbekanntes Material - zwei "Stabmagnete" wie in Abb. 3.1 in verschiedenen Positionen gegeneinanderhalten, so könnten wir gemäß Kapitel 1 annehmen, wir würden zwei Ferroelektrete beobachten. Die Kraftwirkung (Abstandsabhängigkeit, Abhängigkeit von der Orientierung der Proben) wäre die gleiche.

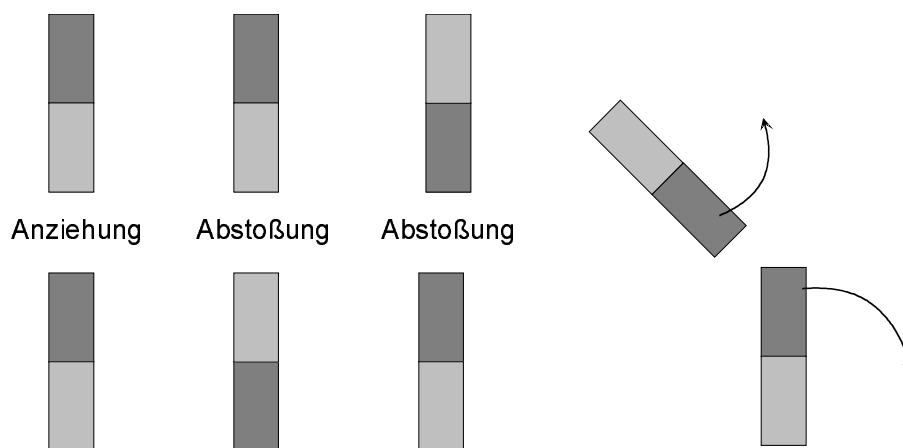


Abbildung 3.1: *Kraftwirkungen zwischen zwei Stabmagneten*

Allerdings wäre es etwas seltsam, dass die Kräfte zwischen den beiden Proben nicht mit der Zeit nachlassen (Neutralisation durch freie Ladungen aus der Luft). Daher liegt es nahe, die Kraft zwischen den neuen Proben und etwa einem durch Reibungselektrizität aufgeladenen Kunststoffstab zu untersuchen. Wir stellen fest, dass der geladene Kunststoffstab (abgesehen von schwachen Effekten auf Grund von Influenz) keine Kraft auf den Stabmagnet ausübt, wohl aber auf einen zweiten geladenen Kunststoffstab. Ganz offensichtlich beobachten wir zwischen den Stabmagneten eine neue Kraft, die nichts mit elektrostatischen Kräften zu tun hat.

Diese neue **magnetische Kraft** wirkt wie die Coulomb-Kraft zwischen räumlich voneinander getrennten Körpern (den Stabmagneten). Es liegt also nahe, in Analogie zum

elektrischen Feld **magnetische Feldlinien** einzuführen und diese abzubilden. Dies gelingt nicht mit Weizengries, sondern durch Eisenfeilspäne<sup>1</sup>.

Wir bestreuen einen auf einer Glasplatte liegenden Stabmagneten mit den Eisenfeilspänen. Die Anordnung wird durch Schlagen mit einem kleinen Hammer in Vibration versetzt. Nach kurzer Zeit ordnen sich die Eisenfeilspäne zu Linien an, die praktisch identisch zu den Feldlinien eines elektrischen Dipols aussehen (Abb. 3.2)

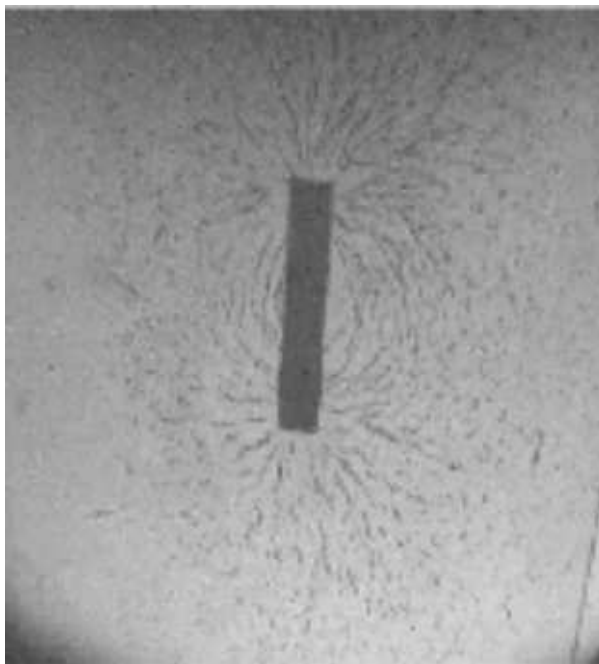


Abbildung 3.2: *Feldlinien um einen Stabmagneten (Dekoration mit Eisenfeilspänen).*

Wir bilden ebenfalls die Feldlinien zwischen zwei Stabmagneten ab, die so ausgerichtet sind, dass sie sich abstoßen bzw. anziehen (Abb. 3.3).

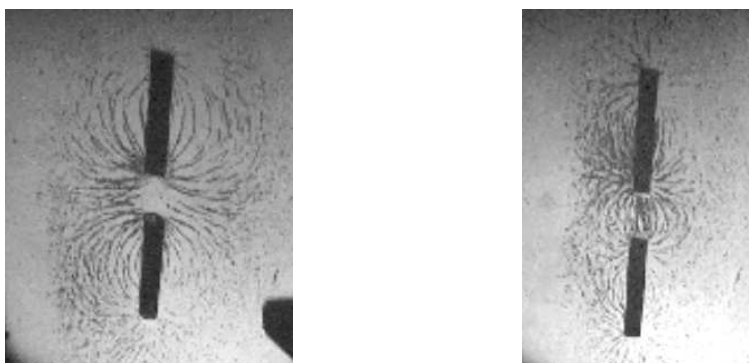


Abbildung 3.3: *Feldlinien zwischen zwei Stabmagneten (Dekoration mit Eisenfeilspänen).*

Wieder sehen die Feldlinien sehr ähnlich aus wie wir es für zwei parallel bzw. antiparallel

---

<sup>1</sup>Die genaue Wechselwirkung zwischen den Eisenfeilspänen und dem Stabmagneten werden wir etwas später beschreiben.

angeordnete elektrische Dipole erwarten würden. Die Stabmagneten stellen ganz offensichtlich **magnetische Dipole** dar.

Im Prinzip liegt es jetzt nahe, nach **magnetischen Monopolen** (d. h. magnetischen Punktladungen) zu suchen. Bis heute war die Suche nach solchen Monopolen jedoch erfolglos. **Es scheint sie nicht zu geben.** Damit wird auch verständlich, dass – im Gegensatz zu den Ferroelekturen – die Stabmagneten nicht nach kurzer Zeit neutralisiert werden.

Wir können den Feldlinien um die magnetischen Dipole eine Richtung geben. Dazu definieren wir ein Stabende als "Nord", das andere als "Süd" und sagen, das Feld verläuft von "Nord" nach "Süd".

Um jetzt weiterzukommen, sollten wir die Kraftwirkung zwischen Magneten und ganz unterschiedlichen Objekten untersuchen. Dabei werden wir über kurz oder lang auch ein "Schlüsselexperiment" durchführen, bei dem wir einen stromdurchflossenen Draht und einen Magneten gegeneinanderhalten. Wir beobachten zunächst eine Anordnung, bei der der Draht und der Magnet in einer Ebene angeordnet sind (Abb. 3.4). Nach Einschalten des Stroms stellt sich der Magnet senkrecht zum Draht.

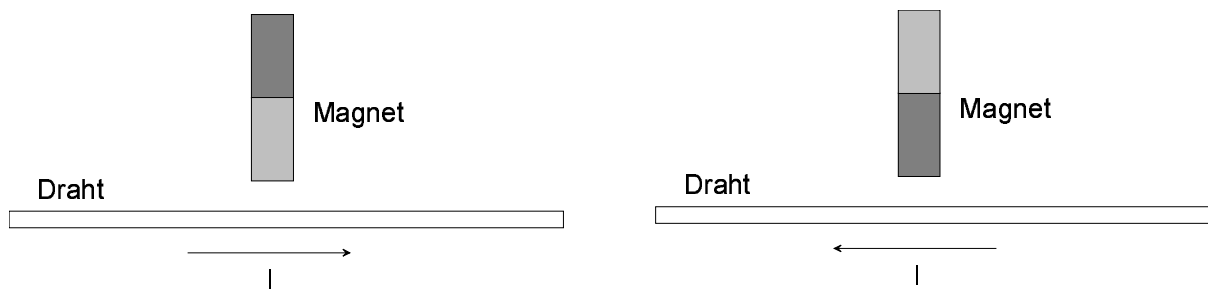


Abbildung 3.4: *Kraftwirkung zwischen einem Draht und einem Stabmagneten: Draht in einer Ebene mit dem Magneten. Der Magnet richtet sich senkrecht zur Drahtachse aus.*

Wir stellen jetzt den Draht senkrecht (Abb. 3.5). Die Magnetnadel richtet sich stets tangential zum Draht aus. Polen wir die Stromrichtung um, so dreht sich die Magnetnadel um  $180^\circ$ .

Wir bestreuen weiter die Drähte der Abb. 3.4 und 3.5 mit Eisenfeilspänen. Beim parallel zur Beobachtungsebene (Glasplatte) ausgerichteten Draht ist wenig zu erkennen; um den senkrecht zur Glasplatte stehen den Draht bilden sich dagegen **kreisförmige Feldlinien** aus (vgl. Abb. 3.6).

Die Orientierung der Stabmagneten bei Stromfluss ist jetzt leicht zu verstehen. Der Magnet orientiert sich parallel zu den Feldlinien um den Draht, also wie in den Abb. 3.4 und 3.4 angedeutet. Da sich der Stabmagnet bei Stromumkehr im Draht um  $180^\circ$  dreht, müssen wir annehmen, dass sich auch die Richtung des Feldes bei Stromumkehr umdreht.

Im nächsten Experiment beobachten wir qualitativ die **Kraftwirkung zwischen zwei stromdurchflossenen, parallel zueinander gespannten Drähten**. Wir stellen fest: Fließt der Strom in den Drähten in die gleiche Richtung, so ziehen sich die Drähte an, fließt der Strom in entgegengesetzte Richtung, so stoßen sich die Drähte ab.

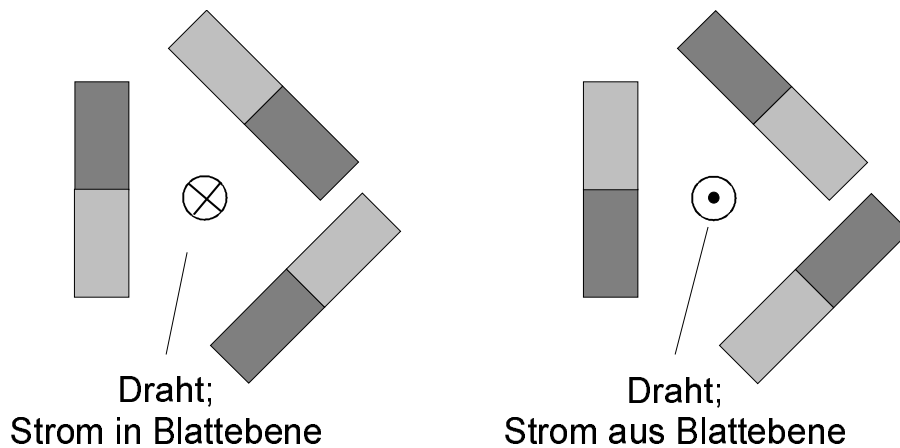


Abbildung 3.5: Kraftwirkung zwischen einem Draht und einem Stabmagneten (Magnet in drei verschiedenen Positionen): Draht senkrecht zum Magneten. Der Magnet richtet sich tangential zur Drahtachse aus.

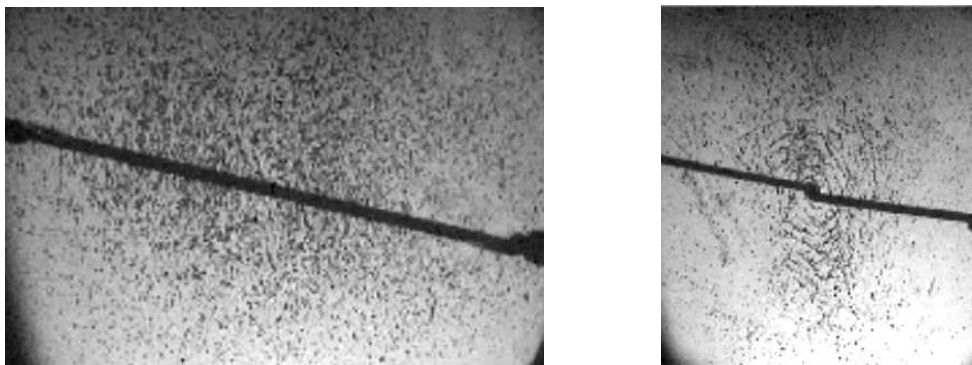


Abbildung 3.6: Feldlinien um einen stromdurchflossenen Draht. Links: Draht parallel zur Beobachtungsebene (Glasplatte) gespannt; Rechts: Draht senkrecht zur Glasplatte gespannt (Dekoration mit Eisenfeilspänen)

Wir untersuchen jetzt die **magnetische Kraft** quantitativ. Hierzu bringen wir zunächst einen Leiter zwischen die Pole eines Hufeisenmagneten wie in Abb. 3.7 skizziert. Die Feldlinien verlaufen zwischen den Polen mehr oder weniger homogen, wie in der Abbildung qualitativ eingezeichnet. Wir demonstrieren diesen Feldverlauf ebenfalls durch Dekoration mit Eisenfeilspänen (s. Abb. 3.8)

Wenn wir jetzt durch den Draht einen Strom  $I$  fließen lassen, so wird der Draht **senkrecht zum Feld des Magneten** und **senkrecht zum Strom** nach unten gezogen. Der Draht kann durch eine Federkraft wieder in die Ausgangsposition angehoben werden. Wir benötigen hierzu eine Kraft  $F_1$ . Verdoppeln (verdreifachen) wir den Strom, so verdoppelt (verdreifacht) sich diese Kraft. Ihr Betrag ist also proportional zum Strom. Bei Stromumkehr kehrt sich außerdem das Vorzeichen der Kraft um, sie wirkt jetzt "nach oben".

Hiermit haben wir bereits eine Reihe von Beobachtungen gemacht, die magnetische Kräfte charakterisieren:

- sie wirken zwischen "magnetischen" Materialien (Stabmagnete)

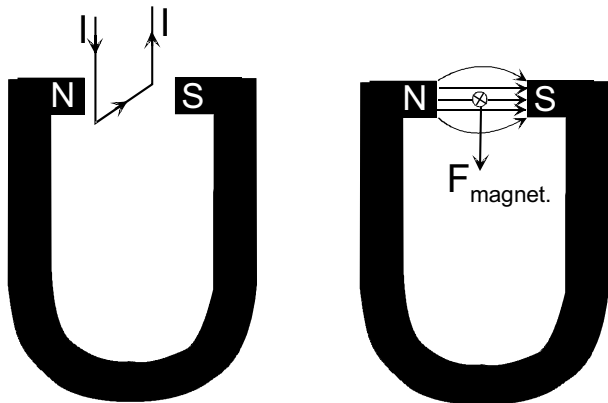


Abbildung 3.7: Kraftwirkung zwischen einem stromdurchflossenen Draht und einem Hufeisenmagnet. Oben: Geometrie; unten: Feldlinien und Kräfte

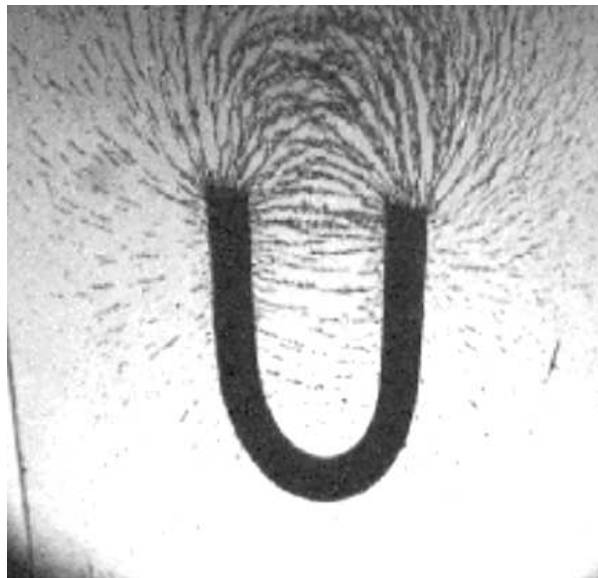


Abbildung 3.8: Feldverlauf zwischen den Polen eines Hufeisenmagneten: Dekoration mit Eisenfeilspänen

- es gibt keine magnetischen Monopole
- es existieren magnetische Kräfte zwischen den Stabmagneten und stromdurchflossenen Leitern, sowie zwischen stromdurchflossenen Leitern
- um stromdurchflossene Drähte baut sich ein Magnetfeld auf, das senkrecht zum Draht (bzw. zum Strom) orientiert ist.
- Ein Leiter erfährt in einem homogenen Magnetfeld eine Kraft, die senkrecht sowohl zur Feldrichtung als auch zur Stromrichtung ist. Ihr Betrag ist proportional zum Strom durch den Leiter.

Im nächsten Abschnitt werden wir nun auf der Basis der eben vorgestellten Beobachtungen zu einer mathematischen Formulierung der (statischen) Feldgleichungen und der Kraftgesetze gelangen.





## 3.2 Gesetze von Biot-Savart und Ampere

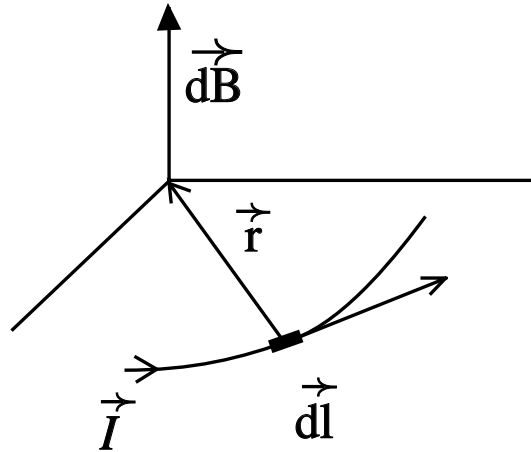


Abbildung 3.9: Beitrag eines stromdurchflossenen Leiterelementes  $d\vec{l}$  zur magnetischen Induktionsdichte im Koordinatenursprung

Aus den vorgeführten Experimenten können wir die folgenden Schlussfolgerungen ziehen:

- Es gibt offensichtlich ein Feld  $\vec{B}(\vec{r})$ , dessen Feldlinien durch Eisenspäne dargestellt werden. Diese Feldlinienbilder der Eisenspäne sehen ähnlich aus, wie die des elektrischen Feldes, die wir durch sich polarisierenden Weizengries dargestellt haben. Es ist aber offensichtlich ein anderes Feld. Diese Feld  $\vec{B}(\vec{r})$  nennen wir **Magnetische Induktion** oder auch **Magnetische Flussdichte**.
- Stromdurchflossene Leiter verursachen Feldlinien der Magnetischen Induktion. Die Feldlinien bilden Kreise um den Leiter in der Ebene senkrecht zum stromdurchflossenen Leiter
- In einem Feld Magnetischer Flussdichte wirken Kräfte auf stromdurchflossene Leiter

In der Elektrostatik sind die elektrischen Ladungen Ursache des Feldes aber auch Anknüpfungspunkt für die elektrischen Kräfte. Für die Magnetische Induktion übernehmen Ströme diese Funktion: sie sind sowohl Ursache des Feldes als auch Objekt der Kräfte, die mit der Magnetischen Induktion verknüpft sind. Wie wir im folgenden sehen werden, sind aber die genauen Zusammenhänge z.B. zwischen den Ursachen und den Feldern in der Magnetostatik und der Elektrostatik etwas unterschiedlich.

Das Gesetz von Biot-Savart gibt an, welchen Beitrag  $d\vec{B}$  ein infinitesimales Stück  $dl$  einer Leiterschleife, durch die ein Strom  $I$  fließt, zur magnetischen Flußdichte  $\vec{B}$  an einer bestimmten Position liefert (siehe auch Abbildung 3.9):

$$d\vec{B} = k I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (3.1)$$

Dabei steht  $d\vec{l}$  für den betrachteten infinitesimalen Teil des stromdurchflossenen Leiters. Die Richtung dieses infinitesimalen Vektors  $d\vec{l}$  ist durch den Tangentialvektor an

die Leiterschleife, der in Richtung des Stromes  $I$  zeigt, gegeben. Ausserdem steht in diesem Biot-Savart'schen Gesetz  $\vec{r}$  für den Verbindungsvektor vom Leiterstück  $d\vec{l}$  zum Punkt, an dem wir die magnetische Induktionsdichte berechnen wollen, und  $r$  ist der Betrag dieses Vektors. Die Konstante  $k$  werden wir im Folgenden durch

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

ersetzen und auf die Definition von  $\mu_0$  etwas später eingehen. Das Biot-Savart'sche Gesetz beinhaltet also Information sowohl über die Stärke als auch über die Richtung des vom Stromelement  $I d\vec{l}$  erzeugten Magnetfeldes:

$$\begin{aligned} |d\vec{B}| &\sim I, dl, \frac{1}{r^2} \\ \text{Richtung von } d\vec{B} &\sim d\vec{l} \times \vec{r}. \end{aligned}$$

Die Richtung von  $d\vec{B}$  steht also senkrecht auf der von  $d\vec{l}$  und dem Abstandsvektor  $\vec{r}$  aufgespannten Ebene („rechte-Hand-Regel“). Das Biot-Savart'sche Gesetz hat eine grundlegende Bedeutung, da es den Zusammenhang zwischen Strömen und den von diesen Strömen erzeugten Magnetfeldern angibt.

Um diesen Zusammenhang zu verdeutlichen, wollen wir zunächst das Biot-Savart'sche Gesetz in einem Beispiel anwenden. Gegeben sei ein unendlich langer Draht, durch den ein Strom  $I$  fließt. Mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes soll nun die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  im Abstand  $R$  von diesem Draht berechnet werden. Wir definieren unser Koordinatensystem so, dass der Draht entlang der  $z$ -Achse liegt und der Punkt, an dem wir die magnetische Induktionsdichte berechnen wollen in der  $x - y$  Ebene liegt, also die kartesische Komponente  $z = 0$  besitzt. Da der Draht unendlich lang ist, müssen die Beiträge der Stromelemente  $I d\vec{l} = I \hat{e}_z dz$ , die sich am Ort  $\vec{r}$  befinden, summiert werden durch eine Integration über die  $z$ -Achse:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int d\vec{B} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{R \hat{e}_z \times \hat{e}_R}{\sqrt{z^2 + R^2}^3} \\ &= \hat{e}_\perp \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}^3} \\ &= \hat{e}_\perp \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \frac{2}{R^2}. \end{aligned}$$

$\hat{e}_\perp$  ist dabei der Einheitsvektor, der senkrecht zur  $z$ -Achse und zur Verbindungslinie vom Leiter (Koordinatenursprung) zum Punkt, an dem wir  $\vec{B}$  berechnen wollen, steht. Dieses Ergebnis werden wir im Abschnitt über die Differenzialgleichung der Magnetostatik noch auf eine etwas elegantere Art gewinnen.

Der Begriff Magnetostatik scheint einen Widerspruch in sich selbst zu enthalten. Wir haben bereits diskutiert, dass Magnetfelder durch Ströme, also bewegte Ladungen, erzeugt werden. Was beinhaltet also die Einschränkung Magnetostatik?

Unter „Magnetostatik“ sollen im folgenden solche Magnetfelder verstanden werden, die durch *stationäre Ströme* verursacht sind. Betrachten wir zur Definition eines stationären

Stromes ein Volumen  $V$ , durch das ein Strom  $\vec{j}$  fließt. Damit es im Volumen keine "Stauungen" gibt, d.h. damit es in  $V$  keine Ladungsänderungen gibt, soll der durch die Oberfläche einfließende Strom gleich dem ausfließenden sein. Für die Oberfläche von  $V$  gilt also:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial(V)} \vec{j} d\vec{f} &= 0 \\ &= \int_V \operatorname{div} \vec{j} d^3\vec{r}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Zeile durch Anwenden des Gaußschen Satzes gewonnen wurde. Da diese Forderung für alle Volumina  $V$  erfüllt sein soll muss also für die Ströme der Magnetostatik gelten:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} = 0.} \quad (3.2)$$

Ein Strom durch einzelne bewegte Ladungsträger ist damit zunächst einmal nicht stationär. In entsprechend kurzen Zeitintervallen bewegen sich einzelne Ladungsträger in bestimmte Volumina hinein ohne, dass andere sich hinausbewegen. Betrachtet man die Phänomene aber gemittelt über eine entsprechende Zeitperiode kann es auch für die Bewegung einzelner Ladungsträger, also auch im mikroskopischen Bereich stationäre Ströme geben, die (3.2) erfüllen.

Welche *Kräfte* werden durch die magnetische Induktion auf stromdurchflossene Leiter erzeugt? Wieder betrachten wir eine Stromschleife, durch die der Strom  $I_1$  fließt. Sie soll sich in einem Magnetfeld  $\vec{B}$  befinden. Experimentell findet man, dass der infinitesimale Anteil der Kraft,  $d\vec{F}$ , auf ein infinitesimales Leiterlement  $d\vec{l}$  der Schleife gegeben ist durch:

$$d\vec{F} = I_1 d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (3.3)$$

wobei  $\vec{B}$  für die magnetische Induktionsdichte am Ort des infinitesimalen Leiterelementes steht. Diese Beziehung bezeichnet man als das erste Amperesche Gesetz. Auch dieses Gesetz beinhaltet eine Aussage über die Stärke und die Richtung der Kraft auf das Leiterelement:

$$\begin{aligned} |d\vec{F}| &\sim I_1, |d\vec{l}|, |\vec{B}| \\ d\vec{F} &\sim d\vec{l} \times \vec{B}. \end{aligned}$$

Die Kraft, die auf die gesamte Stromschleife ausgeübt wird, erhält man durch Aufintegrieren der einzelnen Beiträge der Stromelemente:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B} \\ &= \int \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) d^3\vec{r}. \end{aligned}$$

In dem zweiten Teil dieser Gleichung steht  $\vec{j}(\vec{r})$  für die Stromdichte der Stromverteilung am Ort  $\vec{r}$ .

Wie gross ist die Kraft auf *eine* mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegte Ladung  $q$ ? Ersetzt man im ersten Ampereschen Gesetz das Produkt

$$I_1 d\vec{l} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} = dq \frac{d\vec{l}}{dt} = dq \vec{v}$$

und integriert die Ladungselemente  $dq$  zur Gesamtladung  $q$ , erhält man

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (3.4)$$

Dies ist die **Lorentz-Kraft** auf ein mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegtes Teilchen der Ladung  $q$ . Man erkennt, dass durch das Kreuzprodukt nur Geschwindigkeiten, die eine Komponente senkrecht zum Magnetfeld haben, einen Beitrag zur Lorentz-Kraft leisten.

Bevor nun die Eigenschaften dieser magnetischen Kräfte auf bewegte Ladungen oder Ströme diskutiert werden, wollen wir die Einheiten bestimmen, in denen die magnetische Induktionsdichte  $\vec{B}$  definiert ist. Dazu betrachten wir den Ausdruck (3.4) und stellen fest, dass die magnetische Induktionsdichte als Quotient aus einer Kraft dividiert durch Ladung mal Geschwindigkeit gegeben ist. Bezeichnen wir die Maßeinheit der Kraft mit  $N$  für Newton, der Ladung mit  $C$  für Coulomb und der Geschwindigkeit mit  $m/s$  für Meter pro Sekunde, so liefert diese Dimensionsbetrachtung für die Maßeinheit der magnetischen Induktion

$$[B] = \frac{N s}{C m} = \frac{W s^2}{C m^2} = \frac{V A s}{A m^2} = \frac{V s}{m^2} = \text{Tesla}. \quad (3.5)$$

Bei dieser Umrechnung haben wir benutzt, dass die Energie  $1 Nm = 1 Ws$  ist und ein Watt ( $W$ ) auch durch Volt ( $V$ ) mal Ampere ( $A$ ) gegeben ist. Ausserdem ist der Strom von 1 Ampere gleich dem Fluss von 1  $C$  pro Sekunde. Die Maßeinheit für die magnetische Induktionsdichte ist also das Produkt Volt mal Sekunde dividiert durch Meter zum Quadrat gegeben, eine Einheit, die den Namen **Tesla** trägt. Zur Veranschaulichung dieser Grösse sei darauf hingewiesen, dass das Magnetfeld der Erde am Äquator einer magnetischen Induktionsdichte von  $3.7 \cdot 10^{-5}$  Tesla entspricht. Ein Magnetfeld von 1 Tesla ist also schon recht gross, kann aber im Labor gut realisiert werden.

Schon aus dieser Dimensionsbetrachtung können wir ersehen, dass durch die Definition der magnetischen Induktionsdichte keine unabhängigen Messgrössen auftreten. Das Tesla ist durch bereits bekannte Maßgrößen definiert. Deshalb kann auch die Proportionalitätskonstante  $k$ , beziehungsweise  $\mu_0$  im Biot-Savart'schen Gesetz (3.1) keine weitere Naturkonstante sein. Man definiert deshalb im SI System

$$\mu_0 := 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{V s}{A m}, \quad (3.6)$$

und benutzt die Konstante  $\epsilon_0$ , um die elektrischen Größen Coulomb  $C$  oder Ampere  $A$  mit den mechanischen Einheiten in Verbindung zu bringen.

Schickt man elektrisch geladene Teilchen in ein Magnetfeld, so wirkt auf sie die Lorentz-Kraft (3.4), die stets senkrecht auf ihrer Bewegungsrichtung steht. Aus der klassischen Mechanik ist bekannt, dass Körper, bei denen stets eine Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt, auf Kreisbahnen gezwungen werden. Im stationären Fall ist die Zentrifugalkraft dieser Kreisbewegung der geladenen Teilchen dann gleich der Lorentz-Kraft. Daraus erhält man den Radius  $R$  dieser Kreisbahn:

$$q v_{\perp} B = \frac{m v_{\perp}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{m v_{\perp}}{q B}. \quad (3.7)$$

Dabei bezeichnet  $v_{\perp}$  die Komponente der Geschwindigkeit des geladenen Teilchens, die senkrecht zur magnetischen Induktionsdichte  $\vec{B}$  steht. Die Komponente von  $\vec{v}$ , die parallel

zu  $\vec{B}$  steht,  $v_{\parallel}$ , hat ja keinen Einfluss auf die Lorentzkraft. Die geladenen Teilchen bewegen sich also insgesamt mit dieser Geschwindigkeit  $v_{\parallel}$  parallel zu den Magnetfeldlinien. Wegen der Lorentzkraft wird diese Bewegungskomponente überlagert durch die Bewegung auf der kreisförmigen Bahn um die Magnetfeldlinien herum. Wirkt also neben der Kraft des Magnetfeldes keine weitere Kraft auf das geladene Teilchen, so bewegt es sich insgesamt auf eine schrauben- oder spiralförmigen Bahn entlang den Magnetfeldlinien.

Im folgenden sollen drei Anwendungsbeispiele für die Bewegung von geladenen Teilchen im Magnetfeld betrachtet werden.

1. Das **Magnetspektrometer**: Schickt man einen Ionenstrom unbekannter Zusammensetzung in ein homogenes Magnetfeld, so werden die Ionen auf Kreisbahnen abgelenkt. Gemäß (3.7) ist der Radius dieser Kreisbahn  $R \sim (mv_{\perp})/q$ . Es ergibt sich also eine Aufspaltung der Bahnen nach dem Quotienten Impuls/Ladung der Ionen. Auf diese Weise kann man verschiedene Ionensorten in den Reaktionen der Kern- und Teilchenphysik voneinander unterscheiden.
2. Der **Fusionsreaktor**: Im Gegensatz zur Kernspaltung, bei der durch Spalten von schweren Atomkernen Energie gewonnen wird, kann man durch Fusion von zwei leichten Kernen (Deuterium ( $^2\text{H}$ ) plus Tritium ( $^3\text{H}$ ) fusionieren zu einem Alphateilchen ( $^4\text{He}$ ) plus einem Neutron) ebenfalls Energie gewinnen. Dieser Vorgang und ähnliche Reaktionen laufen im Innern der Sonne ab. Damit solche Fusionsprozesse stattfinden, müssen die Reaktionspartner bei grossem Druck und Temperatur zusammengebracht werden. Nur so kann die langreichweitige Coulombabstoßung der Wasserstoffkerne überwunden werden, so dass diese so nahe zusammenkommen, dass die kurzreichweitige starke Wechselwirkung eine Fusion ermöglicht. In der Sonne sorgt die Gravitation für den hohen Druck und die Temperatur wird durch die Fusionsreaktion selbst hoch gehalten. Bei den hohen Temperaturen sind die Wasserstoffatome ionisiert und liegen als *Plasma* von freien Elektronen und Atomkernen vor.

Nun würde jede andere Materie, die mit dem Plasma in Berührung gebracht wird, augenblicklich verdampfen. Das Plasma kann also nicht in einem „Gefäß“ aufbewahrt werden. Man hält das Plasma deshalb z.B. in einem Magnetfeld „gefangen“: In einem Tokamak wird durch spezielle Spulen ein ringförmiges Magnetfeld erzeugt, in dem die ionisierten Plasmateilchen auf Spiralbahnen um die Feldlinien des Magnetfeldes kreisen und wegen der ringförmigen Anordnung in diesem Ring bleiben. Auf diese Weise lassen sich Wechselwirkungen mit der Wand weitgehend ausschalten.

3. Magnetische „**Wände**“ oder „**Spiegel**“: Mit einem Magnetfeld, das zu einer Grenzlinie hin kontinuierlich stärker wird, lassen sich geladene Teilchen zur „Umkehr“ bewegen. Wegen (3.7) wird der Radius der Kreisbahn mit zunehmenden Magnetfeld, also je näher das Teilchen an die Grenzfläche gelangt kleiner. So werden Teilchenbahnen, die weit weg von der Grenzfläche bei kleinem  $B$  nur eine leichte Krümmung zeigen, in der Nähe der Grenzfläche um 180 Grad umgelenkt.

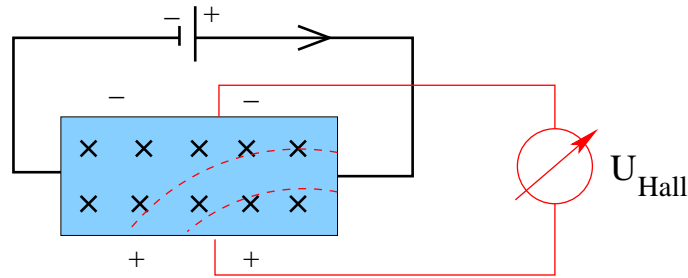


Abbildung 3.10: Schematischer Aufbau zur Messung der Hall-Spannung

### Hall Effekt

Die Wirkungsweise der Lorentz-Kraft spielt auch beim sogenannten **Hall-Effekt** eine entscheidende Rolle. Der Aufbau zur Messung des Hall-Effektes ist schematisch in Abb. 3.10 dargestellt. Die Stromquelle im oberen Teil der Abbildung sorgt für einen Strom von Ladungsträgern in dem Leiterstück, das ausgeht im unteren Teil des Bildes dargestellt ist. Dieses Leiterstück befindet sich in einem Magnetfeld  $\vec{B}$ , das senkrecht zur Zeichenebene steht. Diese Induktionsdichte ist durch die “x” Zeichen dargestellt, was andeuten soll, dass  $\vec{B}$  in die Zeichenebene hineinweist. Diese magnetische Induktion wirkt über die Lorentz-Kraft auf die Ladungsträger und lenkt sie nach unten ab (gestrichelte Bahnen). Daraus ergibt sich ein Überschuss an positiven Ladungen am unteren Rand des Leiters im Vergleich zum oberen. Diese Ladungstrennung erzeugt ein elektrisches Feld  $\vec{E}_H$ . Das System ist im Gleichgewicht, wenn die Effekte der Lorentz-Kraft durch die aus  $\vec{E}_H$  resultierende elektrische Kraft kompensiert werden. In diesem Fall gilt für eine Ladung  $q$

$$q E_H = q v B = \frac{q v n \Delta f}{n \Delta f} B \quad (3.8)$$

Im zweiten Teil der Gleichung wurden Zähler und Nenner mit dem Produkt aus der Ladungsträgerdichte  $n$  und der Querschnittsfläche des Leiters  $\Delta f$  multipliziert. Die Stärke des elektrischen Feldes kann man leicht bestimmen, in dem man die Hall-Spannung  $U_{\text{Hall}}$  wie in Abb. 3.10 dargestellt misst und daraus mit  $E_H = U_{\text{Hall}}/h$  ( $h$  ist die vertikale Ausdehnung des Leiterstückes bestimmt). Mit dem Ausdruck für den Strom  $I = qv\Delta f$  ergibt sich aus (3.8)

$$E_H = \frac{1}{q n} \frac{I}{\Delta f} B. \quad (3.9)$$

Man kann also durch Messung der Hall-Spannung  $U_{\text{Hall}}$  bei bekannter Induktionsdichte  $B$  die Ladungsträgerdichte eines Materials bestimmen. Ist diese Ladungsträgerdichte  $n$  bekannt, so kann (3.9) auch benutzt werden die Stärke der magnetischen Induktionsdichte  $\vec{B}$  zu bestimmen.

### 3.2.1 Experimente zur Lorentzkraft

**Fadenstrahlrohr:** Wir erzeugen einen Strahl von Elektronen mittels einer Glühkathode. Diese besteht aus einer Glühwendel, die auf hohe Temperaturen gebracht wird. Einige Elektronen haben hierbei eine so hohe kinetische Energie, dass sie die Kathode gegen die

”Austrittsarbeit”  $W$  verlassen. Typischerweise beträgt  $W$  ein bis einige eV. Die Elektronen werden durch eine angelegte Spannung  $U$  von der Kathode ”weggesaugt” und auf eine Energie  $eU$  beschleunigt. Für die Stromdichte gilt (ohne Beweis):

$$j = \text{const.} \cdot T^2 \cdot e^{-W/k_B T} \quad \text{Richardson-Gleichung} \quad (3.10)$$

Der Elektronenstrahl durchläuft anschließend ein räumlich (fast) konstantes Magnetfeld und wird durch die Lorentzkraft auf eine Kreisbahn gekrümmt. Ihr Radius ist  $R = mv_{\perp}/eB$ . Wir können  $v_{\perp}$  noch durch die Beschleunigungsspannung  $U$  ausdrücken. Die Elektronen erhalten eine kinetische Energie  $mv_{\perp}^2/2 = eU$  bzw:  $v_{\perp} = \sqrt{2eU/m}$ . Hieraus erhalten wir:  $R = m\sqrt{2eU/m}/(eB) = \sqrt{m/e} \cdot \sqrt{2U}/B$ .

**Hallsonde:** Die Hallsonde besteht aus einem wenige mm<sup>2</sup> großen Chip, auf dem ein halbleitender InSb-Film aufgebracht ist (vgl. Abb. 3.11). In Halbleitern ist die Elektronendichte  $n$  um mehrere Größenordnungen niedriger als in Metallen, so dass die Hallkonstante  $R_H = 1/nq$  wesentlich größer ist.

Auch ohne  $B$ -Feld messen die Spannungsabgriffe eine Spannung, die proportional zum Strom durch die Probe ist. Dies ist ein parasitärer Effekt, der dadurch entsteht, dass die Kontakte nicht exakt in transversaler Richtung angebracht sind. Man misst dadurch entsprechend dem Ohmschen Gesetz eine kleine Längskomponente der Spannung, die aber bei festem Strom  $I$  lediglich den Nullpunkt der Messung verschiebt und kompensiert werden kann.

Wir bringen jetzt die Sonde ins Magnetfeld. Die Querspannung wächst stark an und wechselt bei Umpolung des Magnetfelds ihr Vorzeichen bzgl. des oben diskutierten Nullpunkts. Hallsonden werden häufig als Magnetfeldsensoren für Felder im Bereich mT bis einige T eingesetzt. Man kann diese Sonden stark miniaturisieren und ganze Felder (”Arrays”) aus vielen Sensoren auf der Oberfläche einer zu untersuchenden Probe anbringen.

Umgekehrt wird der Halleffekt eingesetzt, um die Hallkonstante  $R_H$  und damit insbesondere das Vorzeichen der Ladungsträger zu bestimmen. Beispielsweise bei Halbleitern der Ladungstransport durch ”Löcher” erfolgen. Dies sind in Analogie zu Gasblasen im Wasser fehlende Elektronen. Alle übrigen Elektronen bewegen sich so, als würde der Strom durch Ladungsträger mit positiver Ladung getragen.

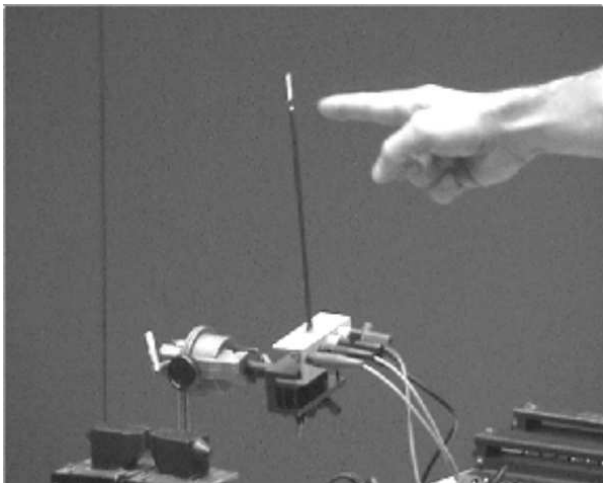


Abbildung 3.11: *Hallsonde*





### 3.3 Die Differenzialgleichungen der Magnetostatik

Ähnlich den Feldgleichungen des elektrostatischen Feldes soll nun das Vektorfeld der magnetischen Induktionsdichte der Magnetostatik durch seine Quellen ( $\text{div} \vec{B}$ ) und Wirbel ( $\text{rot} \vec{B}$ ) charakterisiert werden. Im vorigen Abschnitt haben wir das **Biot–Savartsche Gesetz** behandelt:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

für den Beitrag eines Elementes  $d\vec{l}$  (an der Position  $\vec{r}'$ ) einer Leiterschleife, durch die ein Strom  $I$  fließt, zur magnetischen Induktionsdichte  $\vec{B}$  an der Stelle  $\vec{r}$  (s. Abb. 3.12).

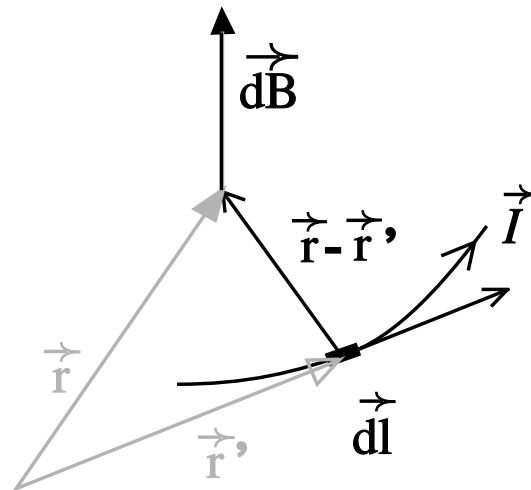


Abbildung 3.12: vom Stromelement  $I d\vec{l}$  erzeugtes Feld  $d\vec{B}$

Integration über alle Stromelemente  $I d\vec{l}$  ergibt dann das gesamte Magnetfeld  $\vec{B}$  (erzeugt durch den Strom  $I$  in einer Leiterschleife, bzw. die Stromdichte  $\vec{j}$ ) an der Stelle  $\vec{r}$ :

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \vec{j}(\vec{r}') d^3 r' \\ &= \vec{\nabla} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}') d^3 r' \end{aligned}$$

letzteres gilt, da  $\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$  (siehe (1.33)), die Ableitungen in  $\vec{\nabla}$  beziehen sich hier auf die Koordinaten von  $\vec{r}$ , nicht von  $\vec{r}'$  so dass  $\vec{\nabla}$  vor das Integral gezogen werden kann) gilt. Damit haben wir gezeigt, dass

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}), \quad (3.11)$$

mit dem **Vektorpotenzial**

$$\vec{A}(\vec{r}) := \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}') d^3 r' \quad (3.12)$$

Daraus können wir nun direkt die Grundgleichungen der Magnetostatik für die Quellen und die Wirbel, d.h. die Divergenz und die Rotation von  $\vec{B}$  herleiten:

Für die Divergenz gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x(\vec{r}) \\ A_y(\vec{r}) \\ A_z(\vec{r}) \end{pmatrix} \right] \\ &= \partial_x [\partial_y A_z - \partial_z A_y] + \partial_y [\partial_z A_x - \partial_x A_z] + \partial_z [\partial_x A_y - \partial_y A_x] \\ &= 0; \end{aligned}$$

wobei wir mit  $\partial_x, \partial_y, \partial_z$  die partiellen Ableitungen nach den kartesischen Koordinaten des Ortsvektors  $\vec{r}$  und mit  $A_x, A_y$  und  $A_z$  die kartesischen Komponenten des Vektorfeldes  $\vec{A}$  bezeichnet haben. Zusammengefasst ergibt sich also:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0} \quad (3.13)$$

Das bedeutet:

- Da die Divergenz für die Quellstärke steht, gibt es keine magnetischen Quellen oder Senken (Im Gegensatz zur Elektrostatik !)
- also gibt es auch keine Startpunkte (bzw. Endpunkte) für Magnetfeldlinien.
- Diese Differenzialgleichung für das Vektorfeld  $\vec{B}$  beinhaltet also, dass es in der Magnetostatik keine magnetischen Ladungen oder Monopole gibt, die den elektrischen Ladungen der Elektrostatik entsprechen.

Gleichung (3.13) ist die erste Differenzialgleichung der Magnetostatik. Sie entspricht der Gleichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$  in der Elektrostatik.

Für die Berechnung der Rotation wenden wir den Grassmannschen Entwicklungssatz

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (3.14)$$

auf die Vektoren  $\vec{\nabla}$  und  $\vec{A}$ . Im Gegensatz zu einfachen Vektoren muss allerdings in diesem Fall der Vektoroperatoren  $\vec{\nabla}$  auf die Reihenfolge der Faktoren geachtet werden; die partiellen Ableitungen in  $\vec{\nabla}$  wirken auf die rechts stehenden Komponenten von  $\vec{A}$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \\ &= \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \int \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'}_{a)} - \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'}_{b)} \end{aligned}$$

wobei  $\vec{\nabla}$  und  $\Delta$  an  $(\vec{r}')$  "vorbeigezogen" werden konnte, da  $\vec{j}(\vec{r}')$ , also unabhängig von  $\vec{r}$  ist. Ferner wurde in dem mit b) gekennzeichneten Term die Definition des Laplace-Operators benutzt. Betrachten wir nun die beiden Summanden a) und b) getrennt:

- mit  $\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$  ( $\vec{\nabla}'$  bezieht sich nun auf  $\vec{r}'!$ ) und der Produktregel ist

$$\begin{aligned} a) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \int \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left\{ \int \vec{\nabla}' \left( \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) d^3r' - \int \left( \vec{\nabla}' \vec{j}(\vec{r}') \right) \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \right\}. \end{aligned}$$

Das zweite Integral verschwindet, da  $\vec{\nabla}' \vec{j}(\vec{r}') = \text{div} \vec{j}(\vec{r}') = 0$  in der Magnetostatik (stationäre Ströme (3.2)). Setzt man im ersten Integral

$$\vec{x}(\vec{r}') := \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

so ist

$$a) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \int \text{div} \vec{x}(\vec{r}') d^3r' \stackrel{\text{Gauß}}{=} -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \oint_{S(V)} \vec{x}(\vec{r}') \cdot d\vec{f}' = 0$$

(der Integrand  $\vec{x}$  verschwindet an den „Grenzen des Universums“).

- Beachtet man im Summanden b)

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

(s.auch Gleichung (1.38)),

so folgt für die Rotation von  $\vec{B}$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})}. \quad (3.15)$$

Dies ist die zweite Differentialgleichung der Magnetostatik. Zum Vergleich: in der Elektrostatik gilt  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ .

Diese Differenzialgleichung (3.15) läßt sich auch integral darstellen: Integrieren wir dazu die magnetische Induktionsdichte entlang eines geschlossenen Weges, der den Rand einer Fläche  $F$  darstellt:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_F \text{rot} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} \stackrel{\text{Glg. 3.15}}{=} \mu_0 \oint_F \vec{j} \cdot d\vec{f}$$

Es gilt also das **Amperesche Durchflutungsgesetz**:

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I} \quad (3.16)$$

wobei  $I$  der gesamte Strom ist, der durch die Fläche, über deren Rand integriert wird, fließt. Man sieht also:

- $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \neq 0$ : es gibt geschlossene Feldlinien in der Magnetostatik (im Gegensatz zur Elektrostatik!). Aus der Diskussion der Quellen der magnetischen Induktionsdichte wissen wir ja, daß  $\vec{B}$ -Felder keine Anfangs- und Endpunkte besitzen. Das  $\vec{B}$ -Feld wird also ausschliesslich durch geschlossene Feldlinien dargestellt.
- Ströme erzeugen um sich herum die geschlossenen Feldlinien des  $\vec{B}$ -Feldes. Dabei ist nach dem Ampereschen Durchflutungsgesetz das Linienintegral der magnetischen Induktionsdichte über den Rand einer Fläche proportional zum Gesamtstrom, der durch diese Fläche fließt.

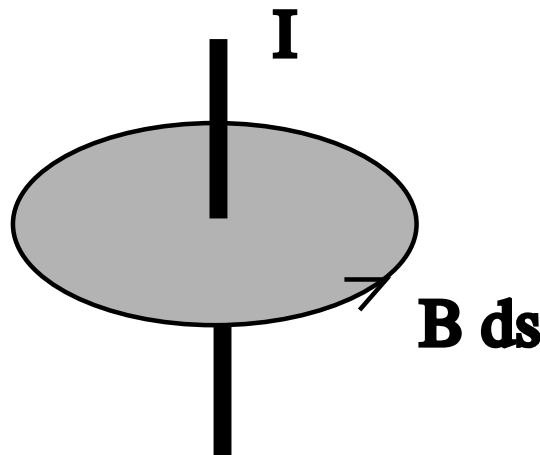


Abbildung 3.13: Zur Berechnung der magnetischen Induktionsdichte bei einer symmetrischen Stromverteilung

Das Amperesche Durchflutungsgesetz kann benutzt werden um in sehr einfacher Weise die magnetische Induktionsdichte für eine Stromverteilung zu berechnen, die rotations-symmetrisch um die Richtung des Stromes ist. Sei diese Richtung und das Zentrum dieser Stromverteilung gegeben durch die  $z$ -Achse unseres Koordinatensystems. Wir betrachten nun einen Kreis um diese  $z$ -Achse mit dem Zentrum bei  $x = y = 0$ , einer Flächennormalen parallel zu  $z$ -Achse und einem Radius  $R$  (siehe Abb. 2.4). Wegen der Symmetrie des Problems besitzt die magnetische Induktionsdichte auf diesem Kreis nur eine Komponente in Richtung der Tangente an diesem Kreis. Außerdem muß der Betrag dieser Azimutalkomponente von  $B$  für alle Punkte auf diesem Kreis gleich sein. Mit dem Ampereschen Durchflutungsgesetz (3.16) können wir also schreiben

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= 2\pi R B \\ &= \mu_0 \int \vec{j}(\vec{r}) d\vec{f} \\ &= \mu_0 I \end{aligned}$$

wobei  $I$  den Gesamtstrom durch die Kreisfläche bezeichnet. Aus dieser Gleichung können wir also direkt

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R} \quad (3.17)$$

bestimmen.

Als zweites Beispiel zur Berechnung von Magnetfeldern betrachten wir eine Spule aus einem stromdurchflossenen Leiter mit spiralförmigen Leiterschlaufen. Diese Spirale sei selbst wieder zu einem Ring gebogen. Wenn wir nun einen Schnitt durch diesen Ring geformt aus einer Spirale machen, ergibt sich die schematische Darstellung von Abb. 3.14. Die kleine Kreise mit dem Kreuz auf dem inneren Ring stehen für den Schnitt durch den stromführenden Leiter, bei denen der Strom in die Zeichenebene fließt, die kleinen Kreise mit dem Punkt im Zentrum repräsentieren die Schnitte durch den Leiter bei denen der Strom aus der Ebene in Richtung auf den Betrachter fließt. Betrachtet man nun einen Integrationsweg, so wie er in der Abbildung skizziert ist und integriert die magnetische Induktionsdichte entlang dieses Weges (in Richtung des Uhrzeigers), so würde eine magnetische Induktion, die parallel zu dieser Integrationsrichtung verläuft den Betrag

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi R B \quad (3.18)$$

wobei  $R$  für den Radius des Integrationskreises steht. Der Flächenvektor der mit diesem Integrationsweg durchlaufenen Fläche zeigt in die Darstellungsebene hinein, steht also parallel zu den Strömen im Innern des Rings. Deshalb ergibt auch das Integral über den in Abb. 3.14 dargestellten Weg mit Hilfe des Gauss'schen Satzes den Betrag

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{j}(\vec{r}) d\vec{f} = \mu_0 n I, \quad (3.19)$$

wobei  $n$  hier für die Zahl Durchstoßpunkte im Innern, also der Zahl der Windungen der Spule steht. Aus (3.18) und (3.19) ergibt sich für die magnetische Induktionsdichte im Inneren der Spule

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi R}. \quad (3.20)$$

Betrachten wir nun einen Integrationsweg der kreisförmig um die Spule liegt, so dass auch die äußeren Leiterelemente in der Integrationsfläche liegen, so würde der gesamte elektrische Strom durch diese Fläche gleich Null sein: der Beitrag aus den stromführenden Elementen im Inneren des Ringes wird gerade durch die Beiträge im äußeren Ring, die ja antiparallel zum Flächenvektor in (3.19) stehen, kompensiert. In diesem Fall liefert die Kombination von Gl.(3.18) und (3.19) also den Wert Null für die magnetische Induktionsdichte. Das gleich gilt auch im Inneren der Spule (Integrationsweg innerhalb des inneren stromführenden Ringes).

### Gegenüberstellung der Elektro- und Magnetostatischen Grundgleichungen

	Elektrostatik	Magnetostatik
Quellen	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
Wirbel	$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
Potenzial	$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$	$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} (= \vec{\nabla} \times \vec{A})$
	$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{ \vec{r}-\vec{r}' } d^3r'$	$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{ \vec{r}-\vec{r}' } dV'$

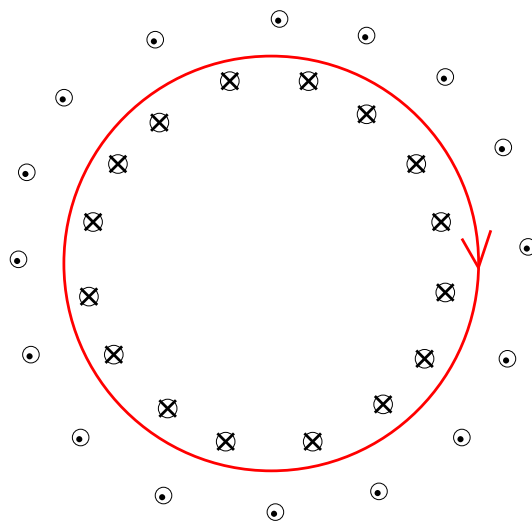


Abbildung 3.14: Zur Berechnung der magnetischen Induktionsdichte bei ringförmigen Spule

### 3.4 Das magnetische Feld einer lokalisierten Stromverteilung

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir gesehen, dass die Gleichung für das Vektorfeld der Magnetostatik  $\vec{A}$  (siehe Gl. (3.12))

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.21)$$

in der Struktur der Bestimmungsgleichung für das Potenzial  $\Phi(\vec{r})$  der Elektrostatik (siehe Abschnitt 1.7)

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

sehr ähnlich ist. Von der mathematischen Struktur her entspricht die Bestimmungsgleichung für jede kartesische Komponente von  $\vec{A}$  aus der entsprechenden kartesischen Komponente der Stromdichte  $\vec{j}$  der Bestimmungsgleichung für das elektrostatische Potential  $\Phi$  aus der Ladungsverteilung  $\rho$ .

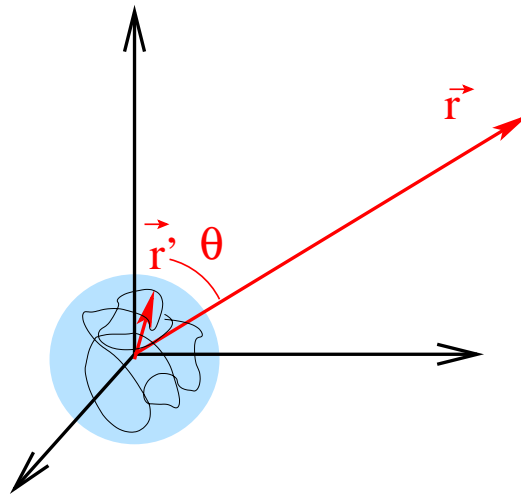


Abbildung 3.15: Beitrag einer lokalisierten Stromverteilung zum Vektorfeld  $\vec{A}(\vec{r})$ .

In diesem Paragraphen wollen wir nun das Magnetfeld einer Stromverteilung  $\vec{j}(\vec{r}')$ , die nur in der Nähe des Koordinatenursprungs von Null verschieden ist, betrachten. Dabei interessieren wir uns für das daraus resultierende Vektorfeld  $\vec{A}(\vec{r})$  an Positionen  $\vec{r}$ , die relativ weit weg vom Koordinatenursprung liegen, so wie es in der Abb. 3.15 dargestellt ist. Dies sollte also weitgehend dem Problem der lokalen Ladungsverteilung für die Berechnung des elektrischen Potentials entsprechen. Siehe den Abschnitt über die Multipolentwicklung des elektrischen Feldes, das durch eine lokalisierte Ladungsverteilung erzeugt wurde. Diese Situation ist deshalb von großem Interesse, da sie dem Fall eines Atoms entspricht, in welchem die Elektronen, die um den Atomkern im Koordinatenursprung “herumsausen”, für eine Stromverteilung sorgen, die auf einen Bereich mit Ausmaßen von einigen Angstrom lokalisiert ist.

Für die Berechnung der Multipolentwicklung in der Magnetostatik wollen wir uns in Erinnerung rufen, dass nach den Gleichungen (1.40) und (1.41) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta}} \\ &= \sum_{lm} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (3.22)$$

wobei hier  $r_{>} = r$  und  $r_{<} = r'$ .

Die Summe in (3.22) entsteht dabei durch die Entwicklung der Abhängigkeit des Ausdruckes von dem Cosinus des Winkels  $\vartheta$  zwischen den Vektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  nach dem Vollständigen Funktionensystemen der Legendre-Polynome. Wir wollen diese Entwicklung nun in die Gleichung für  $\vec{A}(\vec{r})$  (3.21) einsetzen und haben deshalb auch in den Bezeichnungen  $r_{<} = r'$ ,  $r_{>} = r$  zum Ausdruck gebracht, dass der Abstand des Beobachtungspunktes  $\vec{r}$  vom Koordinatenursprung deutlich größer ist als der Abstand der Punkte  $\vec{r}'$ , an denen die erzeugende Stromverteilung von Null verschieden ist. Wir können uns also in der Entwicklung (3.22) auf die Terme mit niedrigem  $l$  beschränken. Dadurch ergibt sich also

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2} \cos(\vartheta) + \frac{r'^2}{r^3} P_2(\cos \vartheta) + \dots \\ \implies A(\vec{r}) &= \frac{1}{rc} \int \vec{j}(\vec{r}') dr' + \frac{1}{cr} \int \vec{j}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}') d^3r' + \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

mit  $P_0 = 1$  und  $P_1(x) = x$  und  $r' \cos \vartheta = (\vec{r} \cdot \vec{r}')/r$ .

Bevor wir diese Entwicklung weiter analysieren, betrachten und beweisen wir die folgende **Behauptung**:

Seien  $f$  und  $g$  zwei von  $\vec{r}$  abhängige skalare Funktionen und bezeichne  $\vec{j}(\vec{r})$  eine lokalisierte Stromverteilung der Magnetostatik ( $\text{div} \vec{j} = 0$ ), so gilt:

$$\int \left( f(\vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}' g(\vec{r}') + g(\vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}' f(\vec{r}') \right) d^3r' \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.24)$$

**Beweis:**

Zu Beginn dieses Beweises betrachten wir folgenden Zusammenhang

$$\int \vec{\nabla}'(f \vec{j} g) d^3r' = \int \left( \vec{\nabla}'(f \vec{j}) \right) g d^3r' + \int f \vec{j} \vec{\nabla}' g d^3r',$$

der sich einfach durch Anwenden der Produktregel für den  $\vec{\nabla}'$  Operator im Integranden ergibt. Diese Beziehung können wir umschreiben in

$$\int f \vec{j} \vec{\nabla}' g d^3r' = \underbrace{\int \vec{\nabla}'(f \vec{j} g) d^3r'}_{\text{Term 1}} - \underbrace{\int \left( \vec{\nabla}'(f \vec{j}) \right) g d^3r'}_{\text{Term 2}} \quad (3.25)$$

Wir betrachten nun die beiden Terme 1 und 2 einzeln:



**Term 1:**

$$\int \operatorname{div}(f \vec{j} g) d^3 r \stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \oint_F f \vec{j} g d\vec{F} = 0$$

Das Oberflächenintegral auf der rechten Seite dieser Gleichung ergibt den Wert 0, da ja unsere Stromverteilung lokalisiert ist und der Strom  $\vec{j}$ , damit also auch das Produkt  $f \vec{j} g$  auf der Oberfläche identisch null ist.

Für den **2. Term** folgt mit der Produktregel

$$\text{Term 2} = \int (\vec{\nabla}' f) \vec{j} g d^3 r' + \int f (\vec{\nabla}' \vec{j}) g d^3 r'$$

Wegen der Forderung nach stationären Strömen in der Magnetostatik ist  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  und der 2. Summand in dieser Gleichung verschwindet. Setzen wir nun die Ergebnisse für Term 1 und Term 2 wieder in (3.25) ein, so ergibt sich

$$\int f \vec{j} \vec{\nabla}' g d^3 r' = - \int (\vec{\nabla}' f) \vec{j} g d^3 r'$$

und damit die Behauptung (3.24).

Als Anwendung dieses Ergebnisses der Gleichung (3.24) zwei Beispiele :

1. Sei  $f = 1$ ;  $g = x'$  ( die x-Komponente des Vektors  $\vec{r}'$ )  $\implies \vec{\nabla}' f = 0$ ;  $\vec{\nabla}' g = \hat{e}_x$ , der Einheitsvektor in Richtung der x-Achse.  
Einsetzen in (3.24) ergibt

$$\begin{aligned} \int \vec{j}(\vec{r}') \hat{e}_x d^3 r' &= 0 \\ &= \int j_x(\vec{r}') d^3 r'. \end{aligned}$$

Ganz analog verfährt man für die y- und z-Komponente! Also:

$$\int \vec{j}(\vec{r}') dx' dy' dz' = \vec{0} \quad (3.26)$$

Dies bedeutet also, daß das Volumenintegral über eine lokalisierte stationäre Stromverteilung verschwindet. Dies Ergebnis läßt sich auch intuitiv leicht nachvollziehen: Wäre das Integral von Null verschieden, so müßte sich die Stromverteilung ja in Richtung des Ergebnisvektors verlagern. Nach einer gewissen Zeit wäre die Stromverteilung also nicht mehr in der Nähe des Koordinatenursprungs lokalisiert. Dies widerspräche aber der Stationarität der Stromverteilung.

2. Sei  $f = x'_i$ ;  $g = x'_i$ ; wobei  $x'_i$  und  $x'_i$  beliebige kartesische Komponenten des Vektors  $\vec{r}'$  bezeichnen sollen. Mit (3.24) folgt

$$\int (x'_i \underbrace{\vec{j} \hat{e}_i}_{j_i} + x'_i \underbrace{\vec{j} \hat{e}_i}_{j_i}) d^3 r' = 0 \quad (3.27)$$

Damit können wir nun berechnen

$$\int x'_l j'_i d^3 r' \stackrel{\text{Gl. 3.27}}{=} \frac{1}{2} \left\{ \int x'_l j'_i d^3 r' - \int x'_i j_l d^3 r' \right\}$$

Multiplizieren wir nun diese Gleichung mit der kartesischen Komponente  $a_l$  eines beliebigen Vektors  $\vec{a}$  und summieren wir anschließend über diesen kartesischen Index  $l$ , erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_l a_l \int x'_l j'_i d^3 r' &= \sum_l \frac{1}{2} a_l \left\{ \int x'_l j'_i d^3 r' - \int x'_i j_l d^3 r' \right\} \\ &\stackrel{!}{=} -\frac{1}{2} \left[ \vec{a} \times \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3 r' \right]_{i.\text{Komponente}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Diese letzte Gleichung kann man leicht verifizieren, indem man z.B. die linke Seite für  $i = x$ -Komponente berechnet und auch im Vektorprodukt auf der rechten Seite die  $x$ -Komponente ausrechnet.

Benennen wir nun noch in (3.28) die Integrationsvariable  $\vec{r}'$  um in  $\vec{r}$ , so folgt sofort:

$$\int \vec{a} \vec{r}' j_x d^3 r' = \frac{1}{2} \int \left[ \vec{a} \times (\vec{r}' \times \vec{j}) \right]_x d^3 r' \quad (3.29)$$

Nun zurück zum  $\vec{A}(\vec{r})$  in der Entwicklung von (3.23)

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \cdot 0 - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int \vec{r} \vec{r}' j(\vec{r}') d^3 r' + \dots \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{2r^3} \vec{r} \times \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3 r' + \dots \end{aligned} \quad (3.30)$$

In der ersten Zeile haben wir ausgenutzt, dass das Volumenintegral über einen lokalisierten stationären Strom verschwindet (3.26), und in der 2. Zeile haben wir (3.29) angewandt. Die Näherung von Gl.(3.30) entspricht der Dipolnäherung für das Vektorpotenzial  $\vec{A}(\vec{r})$ . Gleichzeitig sehen wir, dass der Monopolbeitrag zum Vektorpotenzial verschwindet (siehe 1. Zeile von (3.30))

Wir definieren das **magnetische Dipolmoment**  $\vec{m}$  einer Stromverteilung

$$\vec{m} := \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3 r', \quad (3.31)$$

und bezeichnen den Integranden dieser Definition als magnetische Dipoldichte. Aus (3.30) sieht man, dass das Vektorfeld eines magnetischen Dipols, der sich am Koordinatenursprung befindet, gegeben ist durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \vec{m} \times \vec{r} \quad (3.32)$$

Zum Vergleich erinnern wir uns noch kurz an die Definition des elektrischen Dipolmomentes einer Ladungsverteilung

$$\vec{d} = \int \vec{r}' \varrho(\vec{r}') d^3 r'$$

und den Beitrag eines Dipols zum elektrostatischen Potenzial  $\Phi$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \quad (3.33)$$

Im nächsten Teil dieses Abschnittes wollen wir nun diese Begriffe und Zusammenhänge durch die Anwendungen in 2 Beispielen vertiefen:

### Beispiel 1: Kreisstrom

Ein Kreisstrom für einen Kreis mit dem Radius  $R$  in der  $x$ - $y$ -Ebene um den Koordinatenursprung ist mathematisch gegeben durch:

$$\vec{j}(\vec{r}') = I \frac{\delta(|\vec{r}'| - R)}{R} \delta(\cos \vartheta) \hat{e}_\varphi \quad (3.34)$$

Diese Darstellung mag zunächst etwas verwunderlich sein, wir wollen sie kurz erläutern:

1. Die Richtung des Stromvektors  $\vec{j}$  ist durch den Einheitsvektor  $\hat{e}_\varphi$  der Kugelkoordinaten, also in tangentialer Richtung an den Kreis in der  $x$ - $y$ -Ebene (und damit in Richtung des Stromflusses) gegeben.
2.  $\delta(|\vec{r}'| - R)\delta(\cos \vartheta)$  begrenzt den Strom auf die Kreisbahn.

Zur Bestätigung des Vorfaktors  $I/R$  berechnen wir nun den Gesamtstrom durch die  $y$ - $z$ -Fläche:

$$\int_{-1}^1 \int_0^\infty I \frac{\delta(r' - R)}{R} \delta(\cos \vartheta') r' dr' d \cos \vartheta' = I$$

Für den Kreisstrom (3.34) können wir nun mit der Definition (3.31) das magnetische Dipolmoment dieses Kreisstromes berechnen:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int I \frac{\delta(r' - R)}{R} \delta(\cos \vartheta') \hat{e}_{r'} \times \hat{e}_\varphi d^3 r'.$$

Damit haben wir sofort die Richtung des magnetischen Momentes: Für die Vektoren  $\vec{r}'$ , für die der Integrand nicht verschwindet (also in der  $x$ - $y$ -Ebene) steht  $\hat{e}_{r'} \times \hat{e}_\varphi$  und damit auch  $\vec{m}$  parallel zur  $z$ -Achse! Wie sieht der Wert von  $|\vec{m}|$  aus?

$$\vec{m} = \frac{1}{2R} \hat{e}_z \int I \delta(r' - R) \delta(\cos \vartheta') \underbrace{r'^2 dr' d \cos \vartheta' d\varphi}_{d^3 r' \text{ in Kugelk.}} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2R} \hat{e}_z 2\pi \int_0^\infty r'^2 I \delta(r' - R) dr' \\ &= \hat{e}_z \pi R^2 I = \vec{F} I \end{aligned} \quad (3.36)$$

Das Dipolmoment eines Ringstromes ergibt sich also als das Produkt aus dem Strom und der vom Stromkreis umschlossenen Fläche  $\vec{F}$ .

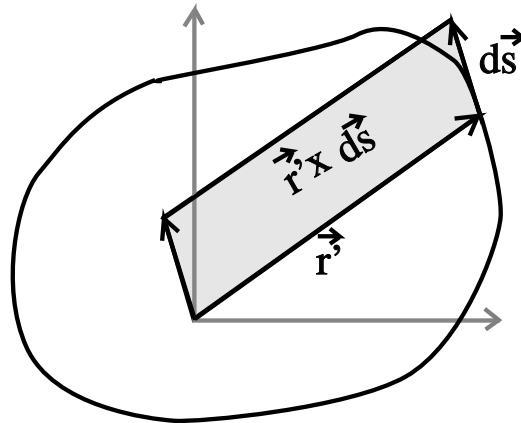


Abbildung 3.16: Zur Berechnung des magnetischen Dipolmomentes einer Stromschleife

Betrachten wir nun den Fall für ganz beliebige Leiterschleifen in der Ebene. In diesem Fall müssen wir über die geschlossene Kurve der Leiterschleife integrieren und das magnetische Moment für den Fall, daß die Leiterschleife von einem Strom  $I$  durchflossen wird, ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\vec{m} &= \frac{1}{2} I \oint_{\tau} \vec{r}' \times d\vec{s} \\ &= I \int_F d\vec{a} = I \vec{F}\end{aligned}$$

Bei dem Übergang zur 2. Zeile dieser Gleichung haben wir ausgenutzt, daß das Vektorprodukt aus  $\vec{r}'$  und dem Linienelement  $d\vec{s}$  gerade die doppelte Fläche ergibt, die bei Änderung des Integrationsvektors auf dem Rand vom Vektor  $\vec{r}'$  überstrichen wird (siehe Abbildung 3.16). Also gilt auch im allgemeinen Fall, daß das magnetische Moment eines Stromes  $I$  durch eine Leiterschleife gerade gegeben ist als das Produkt aus Fläche mal Strom.

### Beispiel 2: Strom aus Punktladungen

Betrachten wir nun einen Strom, der durch Punktladungen  $q_i$  mit Massen  $M_i$  an Positionen  $\vec{r}_i$  mit Geschwindigkeiten  $v_i$  gegeben ist. Die Stromdichte ergibt sich dann zu

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Setzt man diese Stromdichte in die Definition des magnetischen Momentes (3.31) ein, so

ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{m} &= \frac{1}{2} \sum_i q_i \int \vec{r} \times \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) d^3r \\ &= \frac{1}{2} \sum_i q_i \frac{M_i}{M_i} \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_i q_i \frac{1}{M_i} \vec{l}_i;\end{aligned}$$

wobei  $M_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \vec{l}_i$ , der Drehimpuls der Punktladung ist!

$$\vec{m} = \sum \frac{q_i \vec{l}_i}{2 M_i}$$

In der Atomphysik steht  $q_i$  dann für die  $e^-$ , die Elementarladung des Elektrons, das den Atomkern umkreist. Besitzt dieses umlaufende Elektron den Drehimpuls  $l_i$ , so ergibt sich ein Beitrag zum magnetischen Moment des Atoms:

$$\begin{aligned}\vec{m}_{e^-} &= \frac{e^- \vec{l}_i}{2 M_{e^-}} \\ |\vec{m}_{e^-}| &= \frac{e^-}{2 c M_{e^-}} \hbar \sqrt{l(l+1)} := \mu_B * \sqrt{l(l+1)}\end{aligned}$$

$\mu_B$  ist das sogenannte Bohrsche Magneton und für den Betrag des Drehimpulses haben wir den quantenmechanischen Wert  $\hbar \sqrt{l(l+1)}$  eingesetzt, wobei die Werte  $l$  für den Drehimpuls entsprechend den Orbitalen die Werte  $0, 1, 2, \dots$  annehmen kann.



### 3.5 Kraft auf magnetische Dipole in einem äusseren Magnetfeld

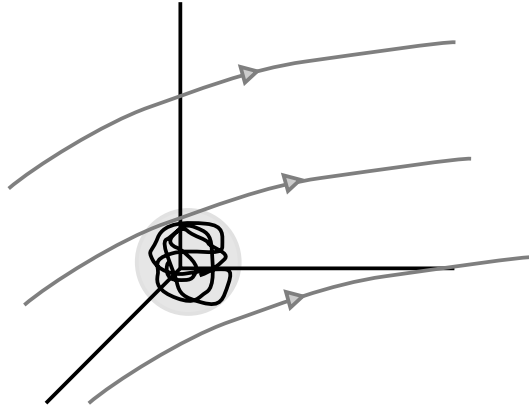


Abbildung 3.17: lokalisierte Stromverteilung im äusseren Magnetfeld

Es soll nun diskutiert werden, was für Kräfte und Drehmomente auf eine lokalisierte Stromverteilung  $\vec{j}(\vec{r})$  in einem äusseren Magnetfeld  $\vec{B}$  wirken. Dabei soll die Stromverteilung in einem engen Bereich um den Koordinatenursprung lokalisiert sein und die Ströme, die die magnetische Induktionsdichte  $\vec{B}$  erzeugen sollen weit weg sein von der lokalisierten Stromverteilung, auf die die Kraft ausgeübt wird (siehe Abb. 3.17). Demzufolge ändert sich  $\vec{B}$  im Bereich der Stromverteilung nur wenig und wir können die magnetische Induktionsdichte für den Bereich, in dem die Stromdichte  $\vec{j}$  von Null verschieden ist, in eine Taylorreihe entwickeln. Für die kartesische Komponente  $B_k$  (der Index  $k$  steht für  $x$ ,  $y$  oder  $z$ ) der magnetischen Induktionsdichte schreiben wir die Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned} B_k(\vec{r}) &= B_k(\vec{0}) + \sum_{l=1}^3 \frac{d}{dx_l} B_k|_{\vec{r}=\vec{0}} x_l + \dots \\ &= \vec{B}(\vec{0}) + \underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{\nabla})}_{b)} \vec{B}(\vec{0}) + \dots \end{aligned} \quad (3.37)$$

In der ersten Zeile betrachten wir Ableitungen nach der kartesischen Koordinaten  $x_l$ , wobei  $x_1$  für  $x$ ,  $x_2$  für  $y$  und  $x_3$  für  $z$  steht. Nach dem ersten Ampereschen Gesetz gilt für die Kraft  $\vec{F}$  eines Magnetfeldes auf eine Stromverteilung (3.3):

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int d\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B} = \int \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) d^3r \\ &= \int \left[ \vec{j}(\vec{r}) \times \left( \underbrace{\vec{B}(\vec{0})}_a + \underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{0})}_b + \dots \right) \right] d^3r \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dabei haben wir in der 2. Zeile dieser Gleichung die Taylorentwicklung (3.37) für die magnetische Induktionsdichte eingefügt. Betrachte die Terme a) und b) in (3.38) getrennt:

$$\text{a) } \vec{F}_a = \int \left[ \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{0}) \right] d^3r = -\vec{B}(\vec{0}) \times \int \vec{j}(\vec{r}) d^3r = \vec{0}$$

da das Volumenintegral über  $\vec{j}(\vec{r})$  für lokale Stromverteilungen verschwindet (siehe (3.26)).

$$\text{b) } \vec{F}_b = \int \left[ \vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{0}) \right] dV$$

läßt sich mit Hilfe der folgenden Nebenrechnungen auswerten:

**N.R.(1):** Da die Ströme, die das Magnetfeld  $\vec{B}$  verursachen weit weg sind vom Koordinatenursprung (siehe Voraussetzung, die wir zu Beginn dieses Abschnittes diskutiert haben), gilt in der Nähe des Koordinatenursprunges  $\text{rot} \vec{B} = 0$ . Damit ist auch

$$\vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{0}.$$

Mit dem Grassmannschen Entwicklungssatz (s. Glg. 3.14) ist also auch

$$\begin{aligned} \left[ \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})} - (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \right] \Big|_{\vec{x}=\vec{0}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})} &= (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \end{aligned}$$

Dabei bedeutet die Unterklammerung an, daß sich die Ableitungen im Nabla Operator nur auf die betreffende Größe, also hier  $\vec{B}$  bezieht.

Also ist

$$\vec{F}_b = \int \left[ \vec{j}(\vec{r}) \times \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})} \right] d^3r.$$

Das läßt sich nun mit der folgenden Nebenrechnung weiter vereinfachen:

**N.R.(2):** Für die x-Komponente von  $\vec{F}_b$  gilt

$$\begin{aligned} [\vec{F}_b]_x &= \left[ \int \left\{ \vec{j}(\vec{r}) \times \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{r})} \right\} d^3r \right]_x \\ &= \int \left\{ j_y \underbrace{\partial_z(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\partial_z(\vec{B} \cdot \vec{r})} - j_z \underbrace{\partial_y(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\partial_y(\vec{B} \cdot \vec{r})} \right\} d^3r \\ &= - \left[ \int \left\{ \underbrace{\partial_y(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\partial_y(\vec{B} \cdot \vec{r})} j_z \right\} d^3r - \int \left\{ \underbrace{\partial_z(\vec{B} \cdot \vec{r})}_{\partial_z(\vec{B} \cdot \vec{r})} j_y \right\} d^3r \right], \end{aligned}$$

wobei  $\partial_z$  als Abkürzung für die Ableitung  $d/dz$  stehen soll. Die vorstehende Gleichung gilt für die y- und z-Komponente entsprechend.

Mit der Definition des Kreuzprodukts erhält man dann  $\vec{F}_b(\vec{r})$  zu

$$\vec{F}_b(\vec{r}) = - \underbrace{\vec{\nabla} \times \int (\vec{B} \cdot \vec{r}) \vec{j}(\vec{r}) d^3r}_{\vec{\nabla} \times \int (\vec{B} \cdot \vec{r}) \vec{j}(\vec{r}) d^3r}.$$



Mit der Vektoridentität (3.29)

$$\int (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{j}(\vec{r}) d^3r = -\frac{1}{2} \vec{a} \times \int (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) d^3r$$

und der Definition des magnetischen Momentes  $\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3r'$  ist dann schließlich

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}} \times \int (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) d^3r = \vec{\nabla} \times \left( \vec{B}(\vec{x}) \times \vec{m} \right) \Big|_{\vec{x}=\vec{0}}$$

$$\boxed{\vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{m})}$$

Mit dem Grassmannschen Entwicklungssatz (s. Glg. 3.14) gilt

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{m} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

(letzteres, da  $\text{div} \vec{B}$  verschwindet). Da für stationäre, nahezu konstante  $\vec{B}$ -Felder (d.h. keine Wirbel)  $\text{rot} \vec{B} = 0$  ( $\Rightarrow \partial_i B_l = \partial_l B_i$ ) gilt und  $\vec{m}$  eine Konstante ist, gilt

$$\begin{aligned} (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) B_l &= \sum_{i=1}^3 m_i \partial_i B_l = \sum_{i=1}^3 m_i \partial_l B_i = \left[ \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}) \right]_l \\ \Rightarrow \vec{F} &= \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}). \end{aligned}$$

$\vec{F}$  läßt sich also in der Form

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U} \quad \text{mit} \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

als negativer Gradient eines Potentials  $U$  schreiben. Genau so ist aber ein konservatives Kraftfeld definiert. Seine potenzielle Energie lautet somit

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}. \quad (3.39)$$

Die Energie eines magnetischen Momentes  $\vec{m}$  ist also minimal, wenn  $\vec{m}$  parallel zur magnetischen Induktionsdichte ausgerichtet ist. Auf diesem Prinzip beruht der klassische Magnetnadelkompass: Das magnetische Moment der Magnetnadel richtet sich parallel zum Magnetfeld aus und minimiert so seine potenzielle Energie.

Im allgemeinen sind  $\vec{B}$  und  $\vec{m}$  nicht parallel. Auf die Stromverteilung, die durch das magnetische Dipolmoment  $\vec{m}$  beschrieben wird, wirkt also ein **Drehmoment**  $\vec{D}$ , welches im Folgenden berechnet werden soll: Allgemein gilt

$$\vec{D} = \int \vec{r}' \times d\vec{F}(\vec{r}')$$

wo  $d\vec{F}(\vec{r}')$  die Kraft auf ein Volumenelement bei  $\vec{r}'$  ist. Mit dem Ampereschen Gesetz (3.3) und dem Grassmannschen Entwicklungssatz (s. Glg. 3.14) ist dann

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \int \vec{r}' \times \left[ \vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}') \right] d^3r' \\ &= \int \left[ \vec{r}' \cdot \vec{B}(\vec{r}') \right] \vec{j}(\vec{r}') d^3r' - \int \left[ \vec{r}' \vec{j} \cdot (\vec{r}') \right] \vec{B}(\vec{r}') d^3r'. \end{aligned}$$

Betrachte zuerst den zweiten Summanden: Mit der Produktregel gilt

$$\vec{\nabla} \left( r^2 \vec{j} \right) = \left( \vec{\nabla} r^2 \right) \vec{j} + r^2 \vec{\nabla} \vec{j} = 2\vec{r} \cdot \vec{j}$$

(beachte:  $\text{div} \vec{j} = 0$  in der Magnetostatik). Betrachtet man die Taylorentwicklung von  $\vec{B}(\vec{r}')$  (3.37) nur bis zur ersten Ordnung (also  $\vec{B}(\vec{r}') = \vec{B}(\vec{0})$ ), dann erhält man für den zweiten Summanden mit dem Gaußschen Satz:

$$\begin{aligned} - \int \left[ \vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') \right] \vec{B}(\vec{r}') d^3 r' &= -\frac{1}{2} \vec{B}(\vec{0}) \int \vec{\nabla} \left( r^2 \vec{j} \right) d^3 r' \\ &= -\frac{1}{2} \vec{B}(\vec{0}) \oint r^2 \vec{j}(\vec{r}') d\vec{f}' = 0 \end{aligned}$$

(letzteres, da  $\vec{j}(\vec{r}')$  an der „Oberfläche des  $\mathcal{R}^3$ “ verschwindet). Damit gilt für  $\vec{N}$  (mit der Vektoridentität 3.29):

$$\vec{D} = \int \left( \vec{B}(\vec{0}) \cdot \vec{r}' \right) \vec{j}(\vec{r}') d^3 r' = -\vec{B}(\vec{0}) \times \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3 r'.$$

Mit der Definition des Magnetischen Moments  $\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j} d^3 r$  Ist dann also

$$\boxed{\vec{D} = \vec{m} \times \vec{B}(\vec{0})}. \quad (3.40)$$

### 3.6 Magnetische Kräfte und Drehmoment: Versuche

**Barlow-Rad:** Das Barlow-Rad ist eine axial gelagerte Scheibe, die sich frei drehen kann. Nahe der Achse wird Strom eingespeist, nahe der äußeren Umrandung wieder entnommen. Parallel zur Drehachse ist ein Magnetfeld  $B$  angelegt. Auch die transportierten Ladungen wirkt die Lorentzkraft, so dass die Elektronen in azimuthaler Richtung ausweichen und dabei das Rad "mitnehmen". Das Rad dreht sich.

**Drehspulinstrumente:** Zwischen den Polen eines Hufeisenmagneten ist eine drehbare Spule angebracht (s. Abb. 3.18). Eine Spiralfeder hält die Spule in der Nulllage, in der die Spulenachse senkrecht zum Feld steht. Wird die Spule bestromt, so versucht das resultierende Drehmoment gegen das Drehmoment der Spiralfeder, die Spule parallel zum Feld zu stellen. Im Gleichgewicht sind beide Drehmomente entgegengesetzt gleich, der Auslenkwinkel und damit der Zeigerausschlag ist proportional zum Stromfluss durch die Spule.

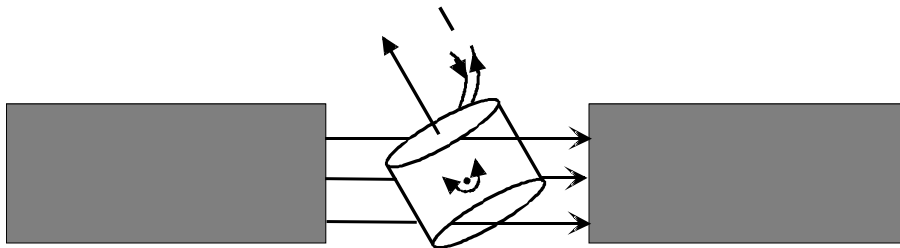


Abbildung 3.18: Prinzip des Drehspulamperemeters

**Gleichstrommotor:** Würde auf das obige Drehspulinstrument kein rückstellendes Moment wirken, so würde sich die Spulenachse parallel zum  $B$ -Feld stellen. Könnte man jetzt den Strom durch die Spule umpolen, so würde sich die Spule um  $180^\circ$  drehen. Genau dies erreicht man durch einen Polwender (s. Abb. 3.19). Hierdurch dreht sich die Spule permanent weiter, sie agiert als Motor.

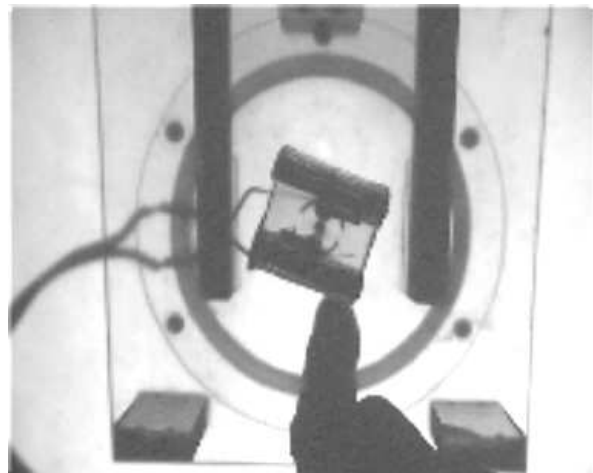
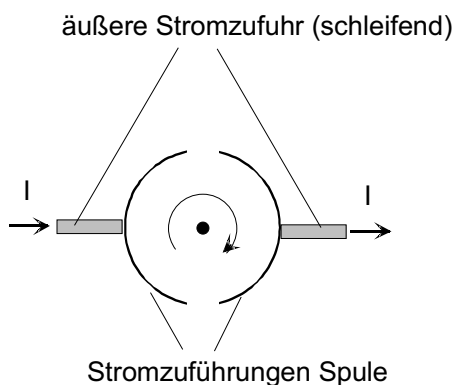


Abbildung 3.19: Umpolen des Spulenstroms beim Gleichstrommotor

**Erdmagnetfeld und Kompass:** Das Erdmagnetfeld entspricht annähernd einem Dipolfeld, wobei allerdings starke lokale Störungen auftreten. Das Dipolfeld wird durch um

den äußeren Erdkern fließende Ströme verursacht, die lokalen Störungen z. B. durch magnetisierte (z. B. Fe-haltige) Bodenschichten<sup>2</sup>. Der "Nordpol" einer Kompassnadel richtet sich in etwa<sup>3</sup> zum geographischen Nordpol hin aus, der damit physikalisch gesehen einen Südpol darstellt. Der magnetische Pol liegt etwas abseits des geographischen Pols (in Nordwestgrönland bzw. im Adelle-Land in der Antarktis).

Am magnetischen Pol treten die Feldlinien senkrecht aus dem Erdboden aus ("Inklinationswinkel" zur Horizontalen:  $90^\circ$ ), am Äquator parallel. Am Pol beträgt<sup>4</sup>  $B \approx 0.62 \text{ G}$ , am Äquator die Hälfte dieses Wertes. Bei einem Breitengrad von  $48^\circ$  treten die Feldlinien unter einem Inklinationswinkel von ca.  $65^\circ$  aus; der Betrag des Feldes ist ca.  $0.5 \text{ G}$ .

Wir demonstrieren den Inklinationswinkel durch die "Buserole", einer in der Vertikalen beweglichen Magnetnadel. Den Betrag des Erdfeldes im Hörsaal ermitteln wir mittels verschiedener Magnetfeldsonden (einer Hallsonde, sowie einer "Förstersonde", engl. "flux-gate"<sup>5</sup>).

---

<sup>2</sup>Bereits ab 20–30 km Tiefe wird der Erdmantel aber so heiß, dass Fe unmagnetisch wird.

<sup>3</sup>Durch die lokalen Störfelder weist die Magnetnadel in Europa zufällig relativ genau nach Norden.

<sup>4</sup>1 Gauss [G] =  $10^{-4}$  Tesla [T].

<sup>5</sup>Das flux-gate nutzt die Feldabhängigkeit der Magnetisierung eines ferromagnetischen Materials zur Feldmessung im Bereich  $\mu\text{T}$  bis einige 10 mT

### 3.7 Das magnetische Feld in Materie

Wie wir in den vorangegangenen Kapiteln bereits gesehen haben, wird die magnetische Induktionsdichte  $\vec{B}$  durch ein Vektorpotenzial  $\vec{A}$  charakterisiert, das aus der Stromverteilung berechnet werden kann nach:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'.$$

In dieser Bestimmungsgleichung gehen wir davon aus, dass die Stromverteilung  $\vec{j}$  vollständig bekannt ist. Bei der Untersuchung der magnetischen Phänomene in Materie werden wir aber normalerweise die mikroskopischen Ströme, das sind die Ströme auf atomarem Niveau durch die Bewegung der Elektronen um die Atomkerne, nicht explizit kennen. Deshalb erhalten wir zu dem Vektorpotenzial, das von den makroskopischen Strömen generiert wird, einen Beitrag durch diese mikroskopischen Ströme. Dadurch ergibt sich ein Vektorpotenzial der Form

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' + \vec{A}_{mikro}.$$

Der Anteil der atomaren Ströme, das “mikroskopische” Potential  $\vec{A}_{mikro}$  ergibt sich als Summe der Beiträge der einzelnen Moleküle oder Atome

$$\begin{aligned} \vec{A}_{mikro} &= \sum_{\text{Molekül } i} \vec{A}_i \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{\vec{m}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}, \end{aligned}$$

wobei  $\vec{m}_i$  das magnetische Moment des Moleküls  $i$  und  $\vec{r}_i$  dessen Position bezeichnet, so dass sich nach Gl. (3.32) der obige Ausdruck ergibt. Da der Abstand zwischen dem Beobachtungspunkt  $\vec{r}$  und der Position  $\vec{r}_i$  im Allgemeinen im Vergleich zu den atomaren Abmessungen, auf die die Ströme eines Moleküls lokalisiert sind, sehr groß sein wird, reicht es aus, dass wir bei der Multipolentwicklung dieser mikroskopischen Strombeiträge nur den Dipolanteil berücksichtigen. Die magnetischen Multipolmomente höherer Ordnung können vernachlässigt werden. Ersetzt man diese Summe über die vielen Moleküle durch ein Integral über die magnetische Dipoldichte  $\vec{M}(\vec{r}')$ , die also das lokal gemittelte magnetische Moment der Atome pro Volumeneinheit darstellt, so erhält man insgesamt für das Vektorpotenzial

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile haben wir ausgenutzt, dass mit dem Gradientenoperator  $\vec{\nabla}'$  der auf die Koordinaten des Vektors  $\vec{r}'$  wirkt

$$\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

gilt, eine Beziehung, die man leicht durch explizites Nachrechnen überprüfen kann. Hier und im folgenden bezeichnen wir mit  $\vec{M}$  die magnetische Dipoldichte bzw. *Magnetisierung*.

Zur Vereinfachung dieses Ausdrucks führen wir eine Nebenrechnung durch und zeigen zunächst einmal:

$$\int \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' = 0. \quad (3.42)$$

Zum Beweis dieser Vektorgleichung betrachten wir die  $x$ -Komponente:

$$\begin{aligned} \left[ \int \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \right]_x &= \int \frac{\partial}{\partial y'} \frac{M_z}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' dz' - \int \frac{\partial}{\partial z'} \frac{M_y}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' dz' \\ &= \int \frac{M_z}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{y'=-\infty}^{+\infty} dx' dz' - \int \frac{M_y}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{z'=-\infty}^{+\infty} dx' dy' \\ &= 0 \quad \text{da } \frac{M}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ für } \vec{r}' \rightarrow \infty \text{ verschwindet.} \end{aligned}$$

Wenden wir nun die Produktregel für den  $\vec{\nabla}'$  Operator in (3.42) so erhalten wir

$$0 = \int (\vec{\nabla}' \times \vec{M}) \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' + \int \left( \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{M} d^3\vec{r}'$$

Somit läßt sich der Potenzialanteil, der in (3.41) aus den mikroskopischen Strömen resultiert, darstellen als:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M}(\vec{r}') \times \left( \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3\vec{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int (\vec{\nabla}' \times \vec{M}) \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'.$$

Das Gesamtpotenzial  $\vec{A}$  in (3.41) erhält so die Form

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') + \text{rot } \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'} \quad (3.43)$$

Die mikroskopischen Ströme werden also durch  $\vec{j}_{\text{mikro}} = \text{rot } \vec{M}$  dargestellt.

Wir können also nun die Wirbel der magnetischen Induktionsdichte  $\vec{B}$  ausrechnen mit Hilfe von Gl. (3.15) wenn wir für den Strom die gesamte Stromdichte

$$\vec{j}_{\text{gesamt}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{mikro}} = \vec{j} + \text{rot } \vec{M}$$

einsetzen:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \text{rot } \vec{M})$$

Stellt man diese Gleichung um, so erhält man

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{j} =: \text{rot } \vec{H}. \quad (3.44)$$

Durch diese Gleichung haben wir also eine **magnetische Feldstärke**  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$  definiert, so dass die Wirbel dieser magnetischen Feldstärke,  $\text{rot } \vec{H}$  ausschliesslich durch die makroskopische Stromdichte  $\vec{j}$  gegeben ist. Im Vakuum gilt  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , da ohne Materie keine Magnetisierung existiert:  $\vec{M} = 0$ . Es zeigt sich, dass bei den meisten Materialien, die magnetische Dipoldichte  $\vec{M}$  proportional zur magnetischen Feldstärke ist:  $\vec{M} = \chi_M \cdot \vec{H}$ . Der Proportionalitätsfaktor  $\chi_M$  (Chi) wird als magnetische Suszeptibilität bezeichnet und ist eine Materialkonstante. Damit ergibt sich:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_M)}_{=: \mu} \vec{H}. \quad (3.45)$$

Zur Vereinfachung wird der Proportionalitätsfaktor zwischen  $\vec{B}$  und  $\mu_0 \vec{H}$  als *Permeabilität*  $\mu$  bezeichnet.

### 3.7.1 Das Verhalten von $\vec{B}$ und $\vec{H}$ an Grenzflächen

Wie bereits in der Elektrostatik, so wollen wir auch in diesem Abschnitt das Verhalten der Felder an Grenzflächen zwischen 2 Medien diskutieren. Wir betrachten also das Verhalten von Magnetfeldern bei dem Übergang von einem Medium I, charakterisiert durch die Permeabilität  $\mu_1$ , zu einem Medium II mit  $\mu_2$ . Wir werden dazu jetzt zeigen, dass

1. Bei einem Übergang von einem Material zu einem anderen ändert sich die Komponente der magnetischen Induktionsdichte  $\vec{B}$ , die senkrecht zur Grenzfläche steht (also parallel zur Flächennormalen  $\hat{n}$ ), nicht.
2. Fließt in der Grenzfläche kein elektrischer Strom, so bleibt bei einem solchen Übergang auch die Tangentialkomponente des Magnetfeldes  $\vec{H}$ , also die Komponente parallel zur Grenzfläche, erhalten

Zum Beweis der Behauptung 1 betrachten wir ein Volumen auf der Grenzfläche zwischen den 2 Medien, das einer flachen Schachtel gleicht, bei der alle Grenzflächen klein sind mit Ausnahme der beiden Flächen parallel zur Grenzfläche, die die Größe  $\Delta F$  haben sollen. Da die magnetische Induktionsdichte quelfrei ist (siehe Gl. (3.13))

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

ergibt natürlich auch das Integral von  $\text{div} \vec{B}$  integriert über das Volumen  $V$  dieser Schachtel den Wert 0. Durch Anwendung des Gaußschen Satzes erhalten wir also

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_O \vec{B} d\vec{f} \\ &= (\vec{B}_{II} \cdot \vec{n} - \vec{B}_I \cdot \vec{n}) \Delta F \end{aligned}$$

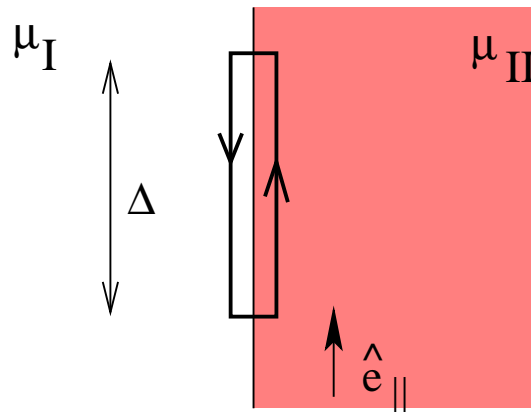


Abbildung 3.20: Zur Berechnung des Verhaltens von  $\vec{H}$  an einer Grenzfläche

Bei dem Übergang zur letzten Zeile haben wir ausgenutzt, dass nur die beiden Randflächen der Schachtel parallel zur Grenzfläche zum Integral über die Oberfläche beitragen (die anderen 4 Flächen sind verschwindend klein, da die Ausdehnung der Schachtel in Richtung senkrecht zur Grenzfläche infinitesimal klein sein soll), diese Flächen die Größe  $\Delta F$  besitzen und der Vektor des Oberflächenelementes jeweils nach außen zeigt, also im Fall der Grenzfläche im Medium II parallel zur Flächennormale  $\hat{n}$ , im Fall der Grenzfläche im Medium I antiparallel zu  $\hat{n}$ . Daraus ergibt sich also das behauptete Grenzverhalten für die magnetische Induktionsdichte

$$\vec{B}_{II} \cdot \vec{n} = \vec{B}_I \cdot \vec{n} \quad (3.46)$$

Zum Beweis der oben aufgeführten Behauptung 2 über das Grenzverhalten starten wir von der Grundgleichung der Magnetostatik im Medium (3.44)

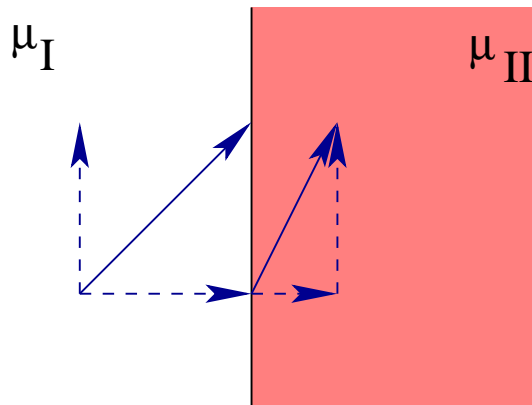
$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$$

Nach unserer Voraussetzung soll die Stromdichte  $\vec{j}$  an der Grenzfläche verschwinden, so dass ein Integral von  $\text{rot} \vec{H}$  über eine Fläche der Form in Figur 3.20 ebenfalls den Wert 0 ergeben muss

$$\begin{aligned} 0 &= \int_F (\text{rot} \vec{H}) \cdot d\vec{f} \\ &\stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} \\ &= (\vec{H}_{II} - \vec{H}_I) \cdot \hat{e}_{\parallel} \Delta \end{aligned}$$

Bei dem Übergang von der ersten zur zweiten Zeile haben wir den Stokeschen Integralsatz angewandt. Der Übergang zur dritten Zeile ergibt sich aus der Geometrie des betrachteten Rechtecks: Die Seiten senkrecht zur Grenzfläche sind infinitesimal und tragen nicht bei, die Seiten parallel haben jeweils die Länge  $\Delta$  und werden bei der Integration parallel (im Medium II) beziehungsweise antiparallel (im Medium I) zum Einheitsvektor  $\hat{e}_{\parallel}$ ,



Abbildung 3.21: Verhalten von  $\vec{H}$  an einer Grenzfläche,  $\mu_{II} = 2\mu_I$ 

der parallel zur Grenzfläche orientiert ist, durchlaufen. Damit ergibt sich also auch die 2. Behauptung für das Verhalten an Grenzflächen:

$$\vec{H}_{II} \cdot \hat{e}_{\parallel} = \vec{H}_I \cdot \hat{e}_{\parallel} \quad (3.47)$$

beziehungsweise für die magnetische Induktionsdichte

$$\frac{1}{\mu_0\mu_{II}} \vec{B}_{II} \cdot \hat{e}_{\parallel} = \frac{1}{\mu_0\mu_I} \vec{B}_I \cdot \hat{e}_{\parallel}.$$

Um dieses Ergebnis zu verdeutlichen betrachten wir das Verhalten eines Magnetfeldes  $\vec{H}$  an einer solchen Grenzfläche zwischen zwei Medien mit Permeabilität  $\mu_I$  bzw.  $\mu_{II}$ . Wie in der Abb. 3.21 dargestellt zerlegen wir dazu den Vektor des Magnetfeldes im Bereich des Mediums I,  $H_I$  in seine Komponenten parallel und senkrecht zur Grenzfläche. Wegen (3.47) ändert sich die Komponente parallel zur Grenzfläche bei dem Übergang  $I \rightarrow II$  nicht. Für die Komponente von  $\vec{H}$ , die senkrecht zur Grenzfläche steht, gilt wegen (3.46)

$$\mu_0\mu_I H_I = \mu_0\mu_{II} H_{II} \quad \text{bzw.} \quad H_{II} = \frac{\mu_I}{\mu_{II}} H_I.$$

Damit steht der Vektor  $\vec{H}_{II}$  im Allgemeinen nicht mehr parallel zu  $\vec{H}_I$ . Entsprechendes gilt für die magnetische Induktionsdichte  $\vec{B}$ .



## 3.8 Magnetische Dipole in der Natur

Wir führen in diesem Kapitel einige Eigenschaften magnetischer Dipole in Analogie zu den in Abschnitt 1.10 behandelten elektrischen Dipolen ein. Magnetische Dipole verhalten sich in vielerlei Hinsicht sehr ähnlich zu elektrischen Dipolen, wie wir im Folgenden sehen werden.

### 3.8.1 Einige Grundbegriffe

Das magnetische Dipolmoment ist nach Gleichung (3.31), Abschnitt 3.4 als

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3r' \quad (3.48a)$$

definiert und ergab sich für eine Leiterschleife zu  $\vec{m} = I\vec{F}$ . Hierbei ist  $\vec{F}$  die vom Strom umschlossene Fläche. Die Einheit von  $m$  ist  $\text{Am}^2$ . Für Stabmagnete wird manchmal das magnetische Moment auch über die "Polstärke"  $P$  definiert, die an die Stelle der elektrischen Ladung beim elektrischen Dipol tritt:

$$\vec{m} = P \cdot \vec{r}. \quad (3.48b)$$

Hierbei ist  $\vec{r}$  der Verbindungsvektor vom "Südpol" zum "Nordpol".

Man definiert die Magnetisierung als:

$$\vec{M} = \frac{1}{\text{Vol.}} \sum_{i=1}^N \vec{m}_i \quad (3.49)$$

Die Magnetisierung hat die Einheit A/m.

Bei vielen Materialien ist die Magnetisierung proportional zur angelegten Feldstärke  $\vec{H}$  (dies gilt für nicht allzu große Felder). Man definiert die magnetische Suszeptibilität durch:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (3.50)$$

Die magnetische Suszeptibilität ist wie die elektrische Suszeptibilität dimensionslos. Da  $\vec{M}$  proportional zur Dipoldichte und damit zur Teilchendichte ist, wird  $\chi_m$  oft auf ein Mol Teilchen bezogen und dann als molare Suszeptibilität bezeichnet (Einheit:  $\text{mol}^{-1}$ ). Teilweise wird  $\chi_m$  auch auf die Masse einer Probe bezogen, man erhält die Massensuszeptibilität (Einheit:  $\text{kg}^{-1}$ ). Weiter sei angemerkt, dass wie im elektrischen Fall  $\vec{H}$  und  $\vec{M}$  nicht notwendig parallel zueinander sind. Falls dies nicht der Fall ist, wird  $\chi_m$  zu einem Tensor.

### 3.8.2 Induzierte Dipole, Diamagnetismus

Ähnlich wie im elektrischen Fall gibt es eine Reihe von Substanzen, deren Bausteine bei Abwesenheit äußerer Magnetfelder völlig unmagnetisch sind. Bringt man diese Materialien in ein magnetisches Feld, so wird eine Magnetisierung erzeugt, die dem angelegten Feld

entgegengerichtet ist. Die magnetische Suszeptibilität dieser "diamagnetischen Materialien" ist also negativ. Wir demonstrieren den Diamagnetismus am Beispiel einer Wismut (Bi)-Probe, sowie einer Kohlenstoff-Probe. Die Proben werden entgegen dem Feldgradienten vom Permanentmagneten abgestoßen. Der Effekt, der weitgehend temperaturunabhängig ist, ist allerdings recht schwach.

Einige Werte für cm diamagnetischer Substanzen sind in Tab. 3.1 aufgelistet:

Material	$\chi_m$
Bi	$1.4 \cdot 10^{-5}$
H <sub>2</sub> O	$-0.72 \cdot 10^{-6}$
N <sub>2</sub> (Normalbedingungen)	$-3 \cdot 10^{-10}$

Tabelle 3.1: *Magnetische Suszeptibilität diamagnetischer Substanzen*

Zur genaueren Erklärung des Diamagnetismus müssen wir auf das nächste Kapitel (Induktionsvorgänge) verweisen.

Einen Extremfall des Diamagnetismus findet man bei Supraleitern. Hier kann  $\chi_m = -1$  werden, was bedeutet, dass die Flussdichte in diesen Proben verschwindet. Man spricht vom "Idealen Diamagnetismus" oder vom "Meißner-Zustand".

Man unterscheidet zwei Typen von Supraleitern. Das Innere von Typ-I-Supraleitern ist für Felder unterhalb eines "kritischen Magnetfelds"  $B_c$  bis auf eine wenige nm dicke Außenschicht vollständig feldfrei. Für  $B > B_c$  verschwindet der supraleitende Zustand, die Probe wird normalleitend.  $B_c$  ist temperaturabhängig und geht bei der Übergangstemperatur  $T_c$  gegen Null. Einige Beispiele sind in Tab. 3.2 aufgelistet.

Material	$T_c$ [K]	$B_c(0)$ [G]
Hg	4.2	400
Pb	7.2	800
Bb	9.2	2000

Tabelle 3.2: *Kritische Temperatur und kritisches Magnetfeld bei  $T = 0$  für einige Typ-I Supraleiter*

Auch bei Typ-II-Supraleitern ist für Felder unterhalb eines "unteren kritischen Feldes"  $B_{c1}$  der ideale Diamagnetismus realisiert. Für  $B_{c1} < B < B_{c2}$  ( $B_{c2}$ : "oberes kritisches Feld") ist die magnetische Flussdichte im Supraleiter verschieden von Null. In dieser "Shubnikov-Phase" durchdringt das Magnetfeld den Supraleiter in Form von Bündeln von Feldlinien. Der Durchmesser der Bündel beträgt wenige nm. Der magnetische Fluss  $\phi = \int \vec{B} d\vec{f}$  jedes Bündels hat den Wert  $\Phi_0 = h/2e \approx 2.07 \cdot 10^{-15} \text{ Tm}^2$ , man spricht deshalb von "Flussquanten". Für  $B > B_{c2}$  verschwindet schließlich die Supraleitung.

In Tab. 3.3 sind einige Zahlenwerte aufgelistet.

### 3.8.3 Permanente Dipole; Paramagnetismus

Wenn wir Mangannitrat ( $\text{MnNO}_3$ ) in einen Feldgradienten bringen, so finden wir, dass das Material vom Magneten angezogen wird. Die magnetische Suszeptibilität ist positiv.

Material	$T_c$ [K]	$B_{c1}$ [G]	$B_{c2}$ [T]
Nb <sub>3</sub> Sn	18	750	24
YBa <sub>2</sub> Cu <sub>3</sub> O <sub>7</sub>	90	100	bis 100*
MgB <sub>2</sub>	40	250-500	bis 20*

\*Abhängig von der Orientierung der Kristallstruktur

Tabelle 3.3: Kritische Temperatur und kritisches Magnetfeld bei  $T = 0$  für einige Typ-I Supraleiter

MnNO<sub>3</sub> wie auch viele andere Materialien haben ein permanentes magnetisches Dipolmoment. Ohne äußeres Feld sind die Dipole ungeordnet; sie werden im äußeren Feld ganz in Analogie zum elektrischen Fall im Wechselspiel mit der thermischen Bewegung teilweise ausgerichtet.

Analog zum elektrischen Fall findet man für die Suszeptibilität dieser "paramagnetischen Materialien":

$$\chi_m \approx \frac{1}{3} \mu_0 n \frac{m^2}{k_B T} = \frac{\text{const.}}{T} \quad (\text{"Curie-Gesetz"}) \quad (3.51)$$

Hierbei ist  $n$  die Dichte der magnetischen Dipole.

(Zum Vergleich: die elektrische Suszeptibilität paraelektrischer Materialien war:  $\chi_e \approx 1/(3\varepsilon_0) \cdot n \cdot d^2/(k_B T)$ ).

Die magnetischen Suszeptibilitäten einiger paramagnetischer Materialien sind in Tab. 3.4 angegeben. Typischerweise liegt  $\chi_m$  im Bereich  $10^{-4} \dots 10^{-7}$

Material	$\chi_m$
Pt (300 K)	$1.9 \cdot 10^{-5}$
O <sub>2</sub> , flüssig	$3.6 \cdot 10^{-4}$
O <sub>2</sub> , Normalbed.	$1.4 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 3.4: Magnetischen Suszeptibilitäten einiger paramagnetischer Materialien bei Zimmertemperatur

### 3.8.4 Ferromagnetismus

In Materialien wie Fe, Co oder Ni ordnen sich die (permanenten) magnetischen Momente unterhalb der "Curie-Temperatur"  $T_c$  über gewisse Abstände parallel zueinander aus. Für Temperaturen oberhalb  $T_c$  gilt:

$$\chi_m = \frac{\text{const}}{T - T_c} \quad (\text{"Curie-Weiß-Gesetz"}) \quad (3.52)$$

Auch dieses Verhalten ist analog zum ferroelektrischen Fall.

Kühlt man eine ferromagnetische Probe ohne angelegtes Feld durch  $T_c$ , so entstehen in der Probe ferromagnetische Domänen (auch: "Weißsche Bezirke"), deren Magnetisierung in unterschiedliche Richtungen zeigt. Die Gesamtmagnetisierung ist Null. Bei anlegen eines

Feldes wachsen die Domänen, deren Magnetisierung in Feldrichtung zeigt. Z. T. ändert sich die Magnetisierung ruckartig ("Umklappen" Weißscher Bezirke). Diese sprunghafte Änderung von  $\vec{M}$  kann elektronisch abgegriffen werden und über einen Lautsprecher regelrecht hörbar gemacht werden ("Barkhausen-Effekt"; man hört ein prasselndes Geräusch). Die Abb. 3.22 zeigt die Domänenstruktur am Beispiel eines Nickelplättchens. Die Domänen (genauer: Domänengrenzen = "Bloch-Wände") wurden durch Bestreuen ("Dekoration") mit magnetischem Pulver sichtbar gemacht. Die ebenfalls eingezeichnete Ausrichtung der Domänen wurde durch ihr Wachstumsverhalten bei Anlegen eines Magnetfeldes bestimmt.

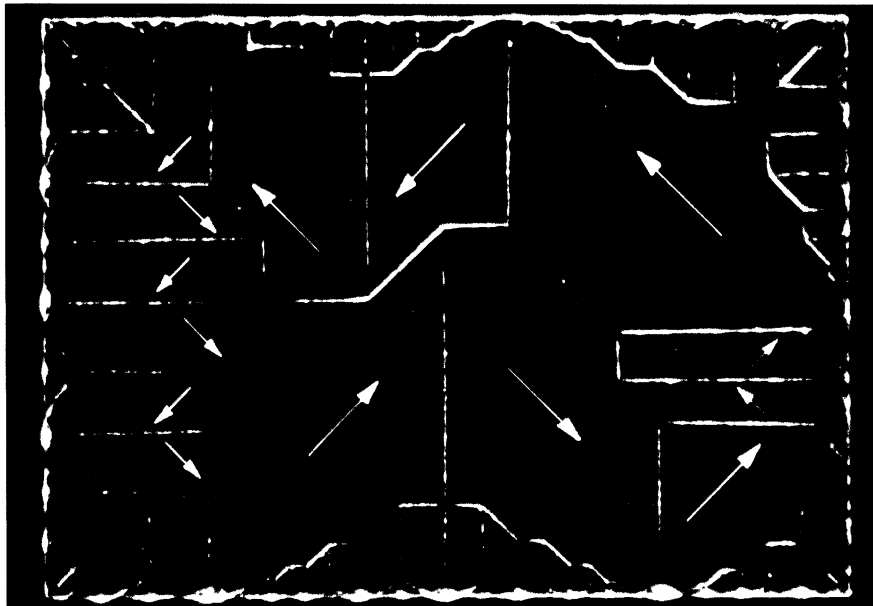


Abbildung 3.22: Ferromagnetische Domänen auf der Oberfläche eines einkristallinen Nickelplättchens. Abbildung durch Pulverdekoration (aus: Ch. Kittel, Festkörperphysik, 12. Auflage, Abb. 15.27)

Wir können die Ausbildung bzw. das Wachstumsverhalten von Domänenstrukturen ebenfalls an Hand eines Modells nachvollziehen<sup>6</sup>. Das Modell besteht aus sehr vielen, in einer Ebene drehbar angeordneter Stabmagnete (Kompassnadeln). Für  $H = 0$  liegen sehr verschieden orientierte Domänen vor; bei Anlegen eines Feldes wachsen die "günstig" orientierten Domänen

Trägt man für einen Ferromagneten die Magnetisierung gegen das angelegte H-Feld auf, so erhält man eine Hysteresekurve wie in Abb. 3.23 dargestellt.

Im Experiment beobachten wir die Hystereseschleife (ohne Neukurve) für Ni-Fe

Typische Sättigungsmagnetisierungen  $\mu_0 M$  betragen:

<sup>6</sup>Es sei hier allerdings angemerkt, dass die Wechselwirkung, die zur ferromagnetischen Ordnung führt, nicht die magnetische Wechselwirkung zwischen Dipolen ist. Statt dessen liegt die "Austauschwechselwirkung" vor, die erst im Rahmen der Quantenmechanik genauer erklärt werden kann. In Kürze sei gesagt, dass bei der Austauschwechselwirkung die Coulombkraft zusammen mit den Welleneigenschaften der Teilchen betrachtet werden muss.

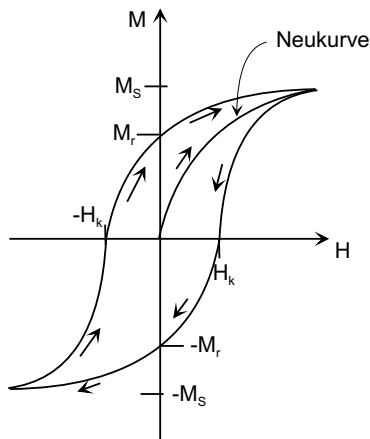


Abbildung 3.23: Schematische Darstellung der Hystereseschleife eines Ferromagneten.  $M_s$ : Sättigungsmagnetisierung;  $M_r$ : Remanente Magnetisierung;  $H_k$ : Koerzitivfeldstärke

Fe: 1700 G

Co: 1400 G

Ni: 487 G

Für spezielle Legierungen wie NdFeB werden für die remanente Magnetisierung  $\mu_0 M_r$  sogar Werte um 1 T erreicht. Aus diesem Material werden die heute stärksten Permanentmagnete hergestellt.

Umgekehrt versucht man bei "weichmagnetischen Materialien" die remanente Magnetisierung so klein wie möglich zu halten. Im Idealfall ist  $M_r$  fast null und man hat einen (nahezu) eindeutigen Zusammenhang  $M(H)$ , mit  $M \approx \chi_m H$  für kleine Felder. Für spezielle Materialien ("Mumetall") erreicht man für  $\chi_m$  Werte von einigen  $10^4$ .

Diese weichmagnetischen Materialien verhalten sich ähnlich wie Paramagnete, allerdings mit einer viel größeren Suszeptibilität.

Mit weichmagnetischen Materialien werden beispielsweise magnetische Abschirmungen hergestellt. Das  $B$ -Feld im Inneren der Probe wird gegenüber dem angelegten Feld erheblich verstärkt. Im Außenraum sind die durch die Magnetisierung erzeugten Feldlinien dem angelegten Feld entgegengerichtet, dieses wird abgeschwächt<sup>7</sup>. Legt man an einen Ring aus weichmagnetischen Material mit hoher Suszeptibilität ein Magnetfeld an, so verlaufen die Feldlinien praktisch vollständig im Innern des Zylinders; dessen Innenraum ist nahezu feldfrei. Wir demonstrieren dies durch Dekoration mit Eisenfeilspänen (s. Abb. 3.8.5)

In typischen Laborexperimenten verwendet man ineinandergeschachtelte Zylinder etwa aus Mumetall. Man erreicht damit eine Abschwächung des Erdfeldes um 5-6 Größenordnungen. Für spezielle klinische Anwendungen (z. B. Hirnmagnetismus; Größenordnung der Signale: unter  $10^{-12}$ – $10^{-15}$  T) werden sogar ganze Räume mit Vielfachschichten aus weichmagnetischem Material und zusätzlich elektrisch gut leitendem Material für die elektrische Abschirmung ausgekleidet ("magnetische Abschirmkammern").

### 3.8.5 Weitere Anmerkungen

Es gibt eine ganze Reihe weiterer Effekte, die völlig analog zum elektrischen Fall sind. Wir geben einige Beispiele an:

<sup>7</sup>Für eine unendlich große Platte springt  $B_{\parallel}$  um einen Faktor  $\mu_a/\mu_i$ , wie in Abschnitt 3.7 gezeigt.

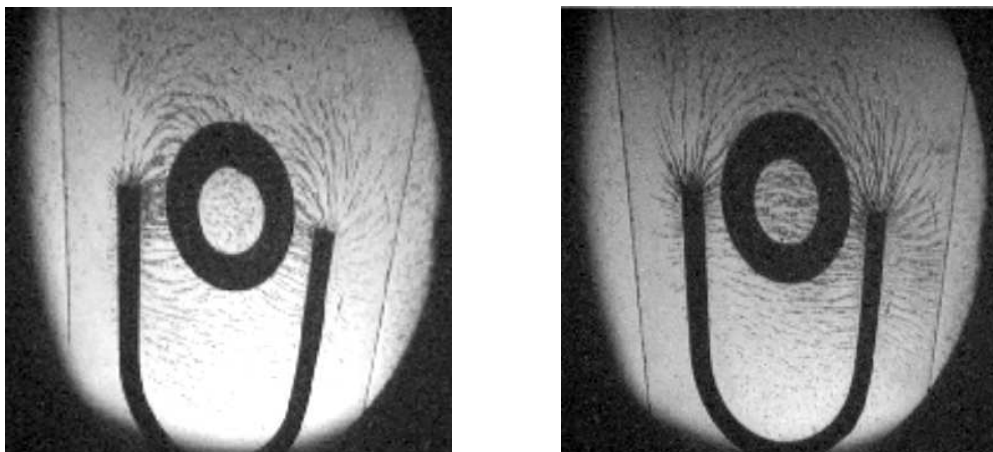


Abbildung 3.24: Weicheisenring (links) und unmagnetischer Messingring (rechts) im Feld eines Hufeisenmagneten. Das Innere des Weicheisenrings ist nahezu feldfrei, während die Feldlinien den Messingring ungehindert durchdringen.

### Spontane Ordnungen

Neben Ferromagnetismus sind insbesondere Antiferromagnetismus und Ferrimagnetismus häufig vorkommende Ordnungstypen. Beim Antiferromagnetismus stehen benachbarte magnetische Momente antiparallel. Für die Suszeptibilität knapp oberhalb der Übergangstemperatur (Néel-Temperatur  $T_N$ ) gilt:

$$\chi_m = \frac{\text{const.}}{t + T_N}. \quad (3.53)$$

Beispiele für antiferromagnetische Substanzen sind in Tab. 3.5 angegeben.

Material	$T_N$ [K]
MnO	116
FeO	198
NiO	525
Cr	308

Tabelle 3.5: Übergangstemperaturen antiferromagnetischer Materialien

Beim Ferrimagnetismus sind benachbarte Magnetische Momente ebenfalls antiparallel angeordnet. Allerdings sind die Magnetisierungen der "nach oben" bzw. "nach unten" zeigenden Untergitter verschieden, so dass netto eine endliche makroskopische Magnetisierung vorliegt. Antiferromagnetische Materialien (Bsp: Ferrit =  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  oder Magnetit =  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) weisen eine qualitativ ähnliche Hysteresekurve auf wie Ferromagnete, allerdings mit einer sehr kleinen Hystereseschleife. Ferrit ist außerdem im Gegensatz zu Fe, Co und Ni nichtleitend. Ferrit wird auf Grund dieser Eigenschaften oft zum Bau von Transformatoren verwendet, wie wir in Kap. 5 genauer sehen werden.



### Magnetisierung elliptischer Proben; Entmagnetisierungsfaktoren

Wenn an ein Ellipsoid ein homogenes Magnetfeld angelegt wird, so ist analog zum elektrischen Fall die Magnetisierung in der Probe homogen. Das Feld sei entlang einer Hauptachse  $x$  angelegt. Es gilt dann:

$$H_x^{\text{innen}} = H_x^{\text{ausen}} - N_x M_x \quad (3.54)$$

wobei  $N_x$  der "Entmagnetisierungsfaktor" bzgl. der Hauptachse  $x$  ist. Er hat den gleichen Zahlenwert wie der in Abschnitt 1.10 diskutierte Entelektrisierungsfaktor.

Ganz analog zum elektrischen Fall (Gl. 1.64, Abschnitt 1.10) erhält man:

$$M = \frac{\chi}{1 + N\chi} H \quad (3.55)$$

### Steighöhenmethode zur Bestimmung von $\chi_m$

Wie im elektrischen Fall wird eine paramagnetische Flüssigkeit in das Innere einer Spule gezogen (vgl. Abb. 3.25). Analog zum elektrischen Fall (vgl. Übungsaufgabe) erhält man eine Steighöhe  $h = 1/(2\rho g)\mu_0\chi_m H^2$ . Bei bekannter Dichte  $\rho$  lässt sich hieraus  $\chi_m$  bestimmen.

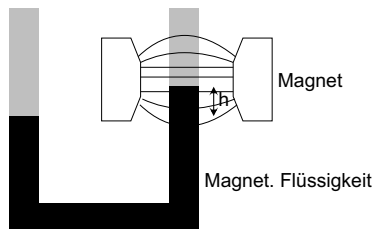


Abbildung 3.25:  
Steighöhenmethode zur Bestimmung von  $\chi_m$

*Ein ähnlicher (allerdings deutlich stärkerer) Effekt wird beobachtet, wenn man einen Weicheisenstab unter der Bohrung einer Feldspule anbringt. Schaltet man den Strom durch die Spule ein, wird der Stab in die Spule gezogen und schwingt dort für einige Zeit auf- und ab.*



# Kapitel 4

## Maxwell-Gleichungen

### 4.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir die Phänomene der Elektrostatik und Magnetostatik weitgehend unabhängig voneinander behandelt. Dabei haben wir gesehen, daß Ladungen zu elektrischen Feldern führen, während Ströme die Ursache von Magnetfeldern sind. Wenn wir nun in diesem Kapitel die Diskussion auf Ladungsverteilungen, die zeitabhängig sind, und Ströme, die nicht stationär sind, erweitern wollen, so ist klar, dass die Änderungen der Ladungsdichte über die Kontinuitätsgleichung mit der Stromdichte verknüpft ist. Daraus folgt aber auch, dass elektrische und magnetische Felder nicht unabhängig voneinander betrachtet werden können.

Zunächst wollen wir uns in diesem Abschnitt der Frage widmen, wie Magnetfelder elektrische Phänomene induzieren können. Das Biot-Savart'sche Gesetz (3.15) beschreibt, wie elektrische Ströme Wirbel einer magnetischen Induktionsdichte  $\vec{B}$  hervorrufen. Der Physiker Michael Faraday befaßte sich um 1830 mit der Frage, ob umgekehrt mit Hilfe von Magnetfeldern auch elektrische Ströme erzeugt werden können. Seine Experimente zur Erzeugung von Strömen in zeitlich veränderlichen Magnetfeldern führten zu dem Faraday'schen Induktionsgesetz, daß wir zunächst einmal an dem in Figur 4.1 skizzierten Beispiel diskutieren wollen.

Wir betrachten eine Leiterschleife, die sich in einem homogenen Magnetfeld befindet, dessen Feldlinien senkrecht zu der Zeichenebene und zwar in die Ebene hinein zeigen sollen. Dieses Feld sei auf einen Raumbereich begrenzt. In der Figur ist dies dadurch gekennzeichnet, dass nur in einem Bereich Feldlinien von  $\vec{B}$  durch  $x$  Zeichen dargestellt sind.

Zieht man nun die Leiterschleife mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  senkrecht zum Magnetfeld aus diesem heraus, so stellt man fest, dass während dieser Bewegung eine Spannung  $U$  induziert wird, die dann zu einem Strom in dem Leiter führt. Um nun dieses Gesetz zu formulieren, definieren wir den von der Leiterschleife umschlossenen *magnetischen Fluss*  $\varphi$ :

$$\varphi := \int_F \vec{B} d\vec{f}. \quad (4.1)$$

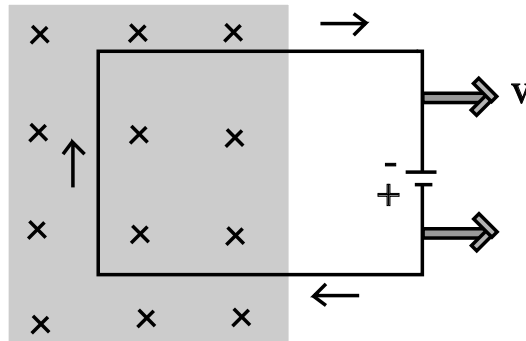


Abbildung 4.1: Beispiel zur Diskussion des Faraday'schen Induktionsgesetzes

Zu integrieren ist dabei über eine Fläche  $F$ , deren Rand die Leiterschleife bildet. Die Orientierung des Randes und die Richtung des Flächenvektors sind dabei über die "Rechte-Hand Regel" miteinander verknüpft. Dies bedeutet: Halten wir unsere rechte Hand so, dass die Finger parallel zum Rand zeigen und zwar in Richtung der Orientierung des Randes, d.h.: in die Richtung in die wir bei einer Integration über den Rand integrieren wollen, so zeigt der ausgestreckte Daumen in die Richtung der Flächennormalen.

Dieser Fluss hängt nicht von der Form der Fläche, sondern nur von deren Berandung ab, wie folgende Überlegung zeigt: Betrachten wir zwei Flächen, die einen gemeinsamen Rand haben, ansonsten aber unterschiedlich sind. Die Abbildung 4.2 zeigt einen Querschnitt durch eine solche Anordnung mit einem gemeinsamen Rand und den Flächen mit den Flächennormalen  $\vec{F}_1$  und  $\vec{F}_2$ . Betrachten wir nun den magnetischen Fluß durch die Fläche  $F_1$

$$\int_{F_1} \vec{B} d\vec{f} = \int_{F_1} \vec{B} d\vec{f} - \int_{F_2} \vec{B} d\vec{f} + \int_{F_2} \vec{B} d\vec{f} = \oint_{F_1 \cup F_2} \vec{B} d\vec{f} + \int_{F_2} \vec{B} d\vec{f} = \int_V \underbrace{\operatorname{div} \vec{B}}_{=0} dV + \int_{F_2} \vec{B} d\vec{f}.$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile haben wir ausgenutzt, dass das Integral über die Fläche  $F_1$  minus dem Integral über die Fläche  $F_2$ , beziehungsweise dem Integral über  $F_2$  mit umgekehrter Flächennormale, insgesamt ein Integral über die Oberfläche des Volumens

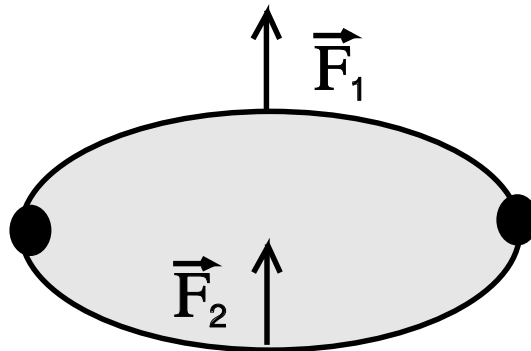


Abbildung 4.2: Zwei Flächen mit gleichem Rand (Punkte links und rechts)

$V$  gibt, das von diesen beiden Flächen umschlossen ist. Die Anwendung des Gaußschen Satzes auf dieses Oberflächenintegral liefert die dritte Zeile. Da die Divergenz des  $\vec{B}$ -Feldes verschwindet, ist die Behauptung, dass der Wert des magnetischen Flusses nur vom Rand der Fläche abhängt, bewiesen.

Faraday fand nun heraus, dass eine zeitliche Änderung des magnetischen Flusses in der Leiterschleife einen elektrischen Strom induziert. Die Ursache für den Stromfluß ist ein längs der Leiterschleife bestehendes elektrisches Feld. Integriert man dieses elektrische Feld längs der Leiterschleife, erhält man die *Induktionsspannung*:

$$U_{ind} = \oint \vec{E} d\vec{s} = - \frac{d\varphi}{dt}. \quad (4.2)$$

Dies ist das Induktionsgesetz von Faraday. Es besagt, dass diese induzierte Spannung proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses ist.

Wir wollen uns nun im Folgenden durch die Diskussion des in Abbildung 4.1 skizzierten Beispiels davon überzeugen, dass dieses Faraday'sche Induktionsgesetz in diesem Fall mit der Wirkung der Lorentz-Kraft erklärt werden kann.

**Beweis:** Auf eine in der Leiterschleife befindlichen Ladung  $q$  wirkt durch die Geschwindigkeit, die durch die Bewegung des Leiters hervorgerufen wird, die Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}.$$

Mit Hilfe der Definition der elektrischen Feldstärke  $\vec{E} = \vec{F}/q$  wirkt diese Kraft wie ein  $\vec{E}$ -Feld, das für die Beschleunigung der Ladungsträger verantwortlich ist:

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}.$$

Integrieren wir nun diese Kraft oder das entsprechende  $E$ -Feld über die Leiterschleife, wie in der Abbildung dargestellt, so ergibt sich

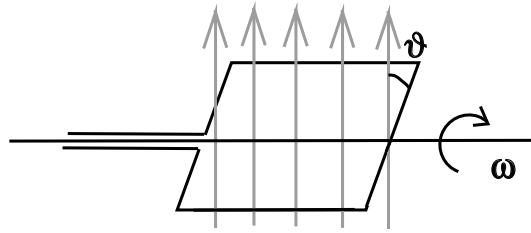
$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s}. \quad (4.3)$$

Durch die Bewegung der Leiterschleife über einen Zeitraum  $\Delta t$  ändert sich die vom Magnetfeld durchdrungene Fläche um

$$\begin{aligned} \Delta \vec{F} &= -\vec{s} \times (\vec{v} \Delta t) \\ &= - \int_{\text{linker Rand}} (d\vec{s} \times \vec{v}) \Delta t, \end{aligned}$$

wobei  $\vec{s}$  der Vektor ist mit der Länge des linken Randes und der Richtung parallel zur angedeuteten Integrationsrichtung. Deshalb können wir diese Fläche auch durch die Integration in der zweiten Zeile berechnen. Das negative Vorzeichen gibt an, dass die vom Magnetfeld durchdrungene Fläche kleiner wird. Die Flächennormale von  $\Delta \vec{F}$  steht parallel zum Magnetfeld (also in die Bildebene hinein). So ergibt sich

$$\vec{B} \cdot \Delta \vec{F} = - \int_{\text{linker Rand}} \vec{B} \cdot (d\vec{s} \times \vec{v}) \Delta t.$$

Abbildung 4.3: Generator: Leiterschleife im homogenen  $\vec{B}$  Feld

Dieses Produkt  $\vec{B} \cdot \Delta \vec{F}$  gibt gerade die Änderung des magnetischen Flusses  $\Delta \Phi$  in der Leiterschleife im Zeitintervall  $\Delta t$  an. Das Integral auf der rechten Seite können wir ohne Änderung des Wertes ergänzen zu einem Integral über die ganze Schleife: Im unteren und oberen Abschnitt stehen  $\vec{v}$  und  $d\vec{s}$  parallel, so dass  $\vec{v} \times d\vec{s} = 0$ , auf der rechten Seite des Rechtecks ist  $\vec{B} = 0$ . Wir erhalten also

$$\Delta \varphi = \vec{B} \cdot \Delta \vec{F} = - \int_{\text{gesamter Rand}} d\vec{s} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \Delta t.$$

Dabei haben wir die Vektorrelation  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$  benutzt. Daraus ergibt

$$\oint d\vec{s} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = - \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \Rightarrow - \frac{d\varphi}{dt}$$

Ein Vergleich mit (4.3) liefert

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = - \frac{d\varphi}{dt}.$$

Damit formulieren wir nun och einmal das Faradaysche Induktionsgesetz in der Form:

$$\boxed{\oint \vec{E} d\vec{s} = - \frac{d\Phi}{dt}.} \quad (4.4)$$

Als Beispiel zum Induktionsgesetz betrachten wir ein einfaches Modell eines *Generators* für elektrischen Strom: eine Leiterschleife, die sich in einem homogenen  $\vec{B}$ -Feld dreht (siehe Abb. 4.3).

Die Ebene der Leiterschleife bilde zum betrachteten Zeitpunkt mit dem  $\vec{B}$ -Feld den Winkel  $\vartheta$  und drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine Drehachse senkrecht zum Magnetfeld. Damit gilt also:  $\vartheta = \omega t$ . Für den magnetischen Fluß durch die Leiterschleife gilt

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \vec{B} \cdot d\vec{f} \\ &= \vec{B} \cdot \vec{F} \\ &= B \cdot F \cdot \cos \vartheta \\ &= B \cdot F \cdot \cos \omega t. \end{aligned}$$

Nach dem Induktionsgesetz beträgt dann die Induktionsspannung

$$\begin{aligned} U_{ind} &= \frac{d\varphi}{dt} \\ &= B \cdot F(-\sin \omega t) \omega \\ &= - \underbrace{\frac{BF\omega}{U_{max}}}_{c} \sin \omega t \end{aligned}$$

$U_{max}$  ist die maximale Induktionsspannung. Sie kann durch die Verwendung von mehr Windungen erhöht werden. Betrachten wir nun die vom Generator erzeugte elektrische Leistung  $P_{el}$ , die freigesetzt wird, wenn wir die Spannungsquelle, also unseren Generator über einen Widerstand  $R$  kurzschließen:

$$\begin{aligned} P_{el} &= U_{ind} \cdot I \\ &= \frac{U_{ind}^2}{R} \\ &= \frac{B^2 F^2 \omega^2}{R} \sin^2 \omega t. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Wie üblich bezeichnet  $I$  den Strom in dem Leiter,  $R$  den elektrischen Widerstand der Leiterschleife und bei dem Übergang von der ersten zur zweiten Zeile haben wir das Ohmsche Gesetz angewandt. Um diese elektrische Leistung bereitzustellen, muss mechanische Arbeit geleistet werden. Zur Berechnung der mechanischen Leistung betrachten wir das magnetische Moment der stromdurchflossenen Leiterschleife (3.36):

$$\begin{aligned} |\vec{m}| &= IF \\ &= \frac{U_{ind}}{R} F \\ &= \frac{BF^2\omega}{R} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Das Drehmoment, das nötig ist um die Leiterschleife und damit das zugehörige magnetische Moment im externen Magnetfeld zu drehen, ist gegeben durch (siehe (3.40))

$$\begin{aligned} |\vec{N}| &= |\vec{m} \times \vec{B}| \\ &= \left( \frac{B^2 F^2 \omega}{R} \sin \omega t \right) \sin \omega t \\ &= \frac{B^2 F^2 \omega}{R} \sin^2 \omega t. \end{aligned}$$

Entsprechend beträgt die mechanische Arbeit, die Leiterschleife um den infinitesimalen Winkel  $d\vartheta$  zu drehen,  $dw = |\vec{N}| d\vartheta$ . Daraus ergibt sich für die mechanische Leistung:

$$\begin{aligned} P_{mech} &= \frac{dw}{dt} \\ &= |\vec{N}| \frac{d\vartheta}{dt} \\ &= |\vec{N}| \omega \\ &= \frac{B^2 F^2 \omega^2}{R} \sin^2 \omega t. \end{aligned}$$

Der Vergleich mit der in (4.5) berechneten elektrischen Leistung zeigt:

$$P_{mech} = P_{el},$$

die mechanische Leistung oder Arbeit, die dem Generator zugeführt wird, wird vollständig (jedenfalls in diesem idealisierten Beispiel, bei dem wir Reibungskräfte vernachlässigen) in elektrische Leistung beziehungsweise Arbeit umgesetzt.



## 4.2 Versuche zum Faraday'schen Induktionsgesetz

Wir demonstrieren die Spannungserzeugung in einer Leiterschleife bei Änderung der vom Magnetfeld durchsetzten Fläche:

### 4.2.1 Veränderliche Fläche der Leiterschleife

Eine Seite einer Leiterschleife ist als beweglicher Bügel ausgelegt (Abb. 4.4). Bewegt man den Schieber mit Geschwindigkeit  $v$ , so wird entsprechend dem Gleichgewicht zwischen Lorentzkraft und elektrostatischer Kraft eine Spannung  $U = bcB_{\perp} = b \frac{dx}{dt} B_{\perp} = B \frac{dA}{dt}$  generiert.

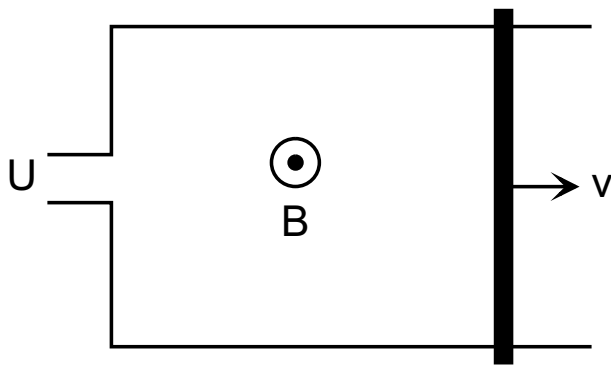


Abbildung 4.4: Zum Induktionsgesetz: Leiterschleife mit beweglichen Drahtbügel.

### 4.2.2 Rotierende Leiterschleife

In einem zweiten Versuch rotieren wir eine Leiterschleife im Magnetfeld (Abb. 4.5). Der magnetische Fluss durch die Schleife ändert sich entsprechend:  $\Phi = BA \cos \omega t$ . Die induzierte Spannung ist gegeben durch:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = AB\omega \sin \omega t.$$

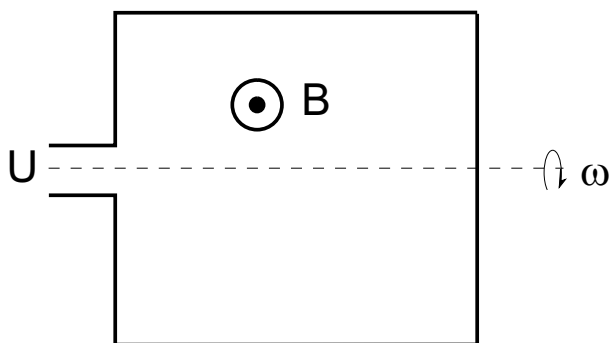


Abbildung 4.5: Rotierende Leiterschleife

Durch Rotation einer Leiterschleife (oder auch einer Spule) im Magnetfeld lassen sich also Wechselspannungen generieren.

### 4.2.3 Rotierende Spule im Erdfeld

Wir demonstrieren die Spannungsinduktion ebenfalls durch sehr schnelle Rotation einer Spule im Erdfeld. Diese Anordnung kann im Prinzip zu einer sehr genauen Magnetfeldmessung verwendet werden.

### 4.2.4 Spannungsinduktion in einer Leiterschleife: Zeitliche Änderung des Magnetfelds

Wenn wir in der in Abb. 4.4 vorgestellten Anordnung die Fläche der Leiterschleife konstant halten, aber das Magnetfeld ändern (d. h. abschalten oder einschalten), so wird ebenfalls eine Spannung induziert. **Dieser Fall kann nicht durch die bislang diskutierten Gleichungen der Magneto- bzw. Elektrostatik erklärt werden.**

### 4.2.5 Induktionsgesetz bei zeitlich veränderlichem Magnetfeld: Quantitative Analyse

Der Messaufbau ist in Abb. 4.6 gezeigt. Eine Feldspule wird mit einem zeitlich variablen Strom zwischen 0 und 5 A versorgt. Der Strom wird dabei innerhalb von 5 s linear von 0 auf 0.37 A erhöht und dann innerhalb 5 s wieder auf 0 erniedrigt. Die Feldspule erzeugt ein Magnetfeld von 9.42 G bei einem Strom von 1 A (d. h. "Spulenkonstante"  $dB/dI = 9.42 \text{ G/A}$ ). Die Querschnittsfläche der Feldspule beträgt  $A = 63.6 \text{ cm}^2$ .

Um die Feldspule ist eine "Induktionsspule" mit  $N_I = 1000$  Windungen angebracht (alternativ kann die Spannung über 250 bzw. 500 Windungen abgegriffen werden. Die Induktionsspule kann außerdem entlang der Achse der Feldspule verschoben werden. Sie befindet sich zunächst in Mitte der Feldspule.

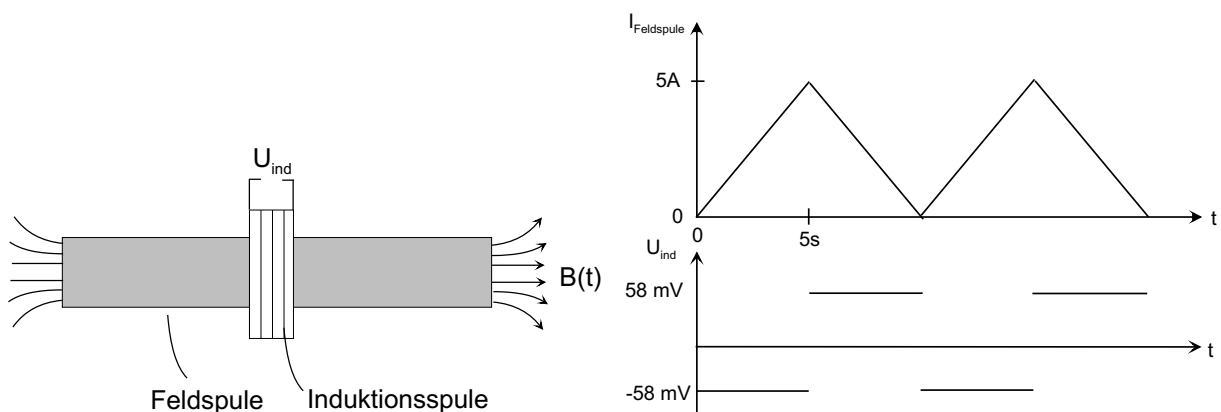


Abbildung 4.6: Feldspule und Induktionsspule zur quantitativen Analyse induzierter Spannungen

Für  $N_I = 1000$  misst man über der Induktionsspule unter obigen Bedingungen einen Spannungsabfall  $U_{\text{ind}} \approx \pm 58 \text{ mV}$ , wobei sich das Vorzeichen der Spannung je nach Vorzeichen von  $dI/dt$  einstellt. Für  $N_I = 500$  bzw. 250 sinkt der Spannungsabfall proportional zur Windungszahl ab.

Wenn wir unterstellen, dass  $U_{\text{ind}}$  proportional zur Änderung des magnetischen Flusses durch die Induktionsspule ist, dann sollte gelten:

$$U_{\text{ind}} \propto -N \frac{d\phi}{dt} = -N \cdot A \cdot \frac{dB}{dI} \frac{dI}{dt} \quad (4.6)$$

Der Faktor  $N$  erscheint, da der zeitlich veränderliche Fluss in jeder Windung der Induktionsspule eine Spannung induziert. Der Fluss durch jede Windung ist in etwa gleich dem Fluss  $BA$  durch die Feldspule, da das Außenfeld dieser Spule vernachlässigbar klein ist. Einsetzen der obigen Zahlenwerte ergibt für die rechte Seite der Gleichung (4.6) einen Zahlenwert von 58 mV, was recht genau mit der Beobachtung übereinstimmt. Die Proportionalitätskonstante ist also im Rahmen der Messgenauigkeit gleich 1, wir erhalten:

$$U_{\text{ind}} = -N \frac{d\phi}{dt} \quad (4.7)$$

Wenn wir die Induktionsspule zum Rand der Spule hin verfahren, fällt  $U_{\text{ind}}$  langsam ab, erreicht die Hälfte des Maximalwerts am Spulenrand und geht weit weg von der Spule auf Null zurück. Dies ist konsistent mit Gleichung (4.7). Man kann zeigen, dass das Feld einer langen Spule an ihrem Rand gerade die Hälfte des maximalen Feldwertes beträgt. Wenn wir  $dI/dt$  variieren, so ändert sich  $U_{\text{ind}}$  proportional zu  $dI/dt$ , was ebenfalls konsistent mit Gleichung (4.7) ist.

Wir müssen jetzt noch das Vorzeichen in (4.7) genauer analysieren. Das negative Vorzeichen in (4.7) führt dazu, dass bei *kurzgeschlossener Induktionsspule* in dieser ein magnetischer Fluss erzeugt wird, der der externen Flussänderung entgegenwirkt (**Lenzsche Regel**). Um dies zu demonstrieren, betrachten wir zunächst die in Abb. 4.7 dargestellte Spulenanordnung. Hier befinden sich Feldspule und Induktionsspule auf einer Achse. Die Induktionsspule ist auf Rollen beweglich angeordnet und zunächst kurzgeschlossen.

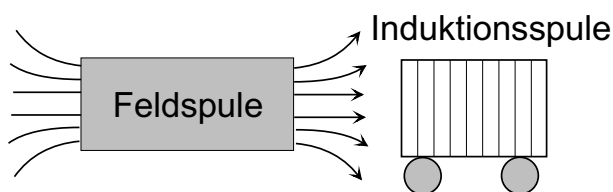


Abbildung 4.7: Zur Lenzschen Regel: Induktionsspule auf Rollen

Schaltet man die Feldspule ein, so rollt die Induktionsspule von der Feldspule weg. Beim Einschalten erhöht sich der magnetische Fluss durch die Induktionsspule. Diese baut daher ein zur Feldspule entgegengesetztes Feld auf. Der Gradient des Feldes durch die Feldspule ist dem von der Induktionsspule erzeugten magnetischen Moment entgegengerichtet, so dass sich die beiden Spulen abstoßen. Beim Abschalten der Feldspule wird die Induktionsspule dagegen angezogen. Der Feldgradient der Feldspule hat die gleiche Richtung wie zuvor (er verringert lediglich seinen Wert). Dagegen dreht sich das magnetische Moment der Induktionsspule um, so dass sich auch die Kraft zwischen den beiden Spulen umdreht. Wenn wir jetzt die Induktionsspule öffnen, so wird beim Ein- bzw. Ausschalten der Feldspule zwar eine Spannung induziert, jedoch kann kein Strom in der Induktionsspule fließen. Deren magnetisches Moment ist null, die Induktionsspule bewegt sich nicht.

In einem zweiten Versuch legen wir einen leitenden Ring auf eine Feldspule (Abb. 4.8). Schalten wir die Feldspule ein, so springt der Ring nach oben.

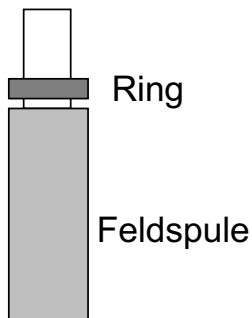


Abbildung 4.8: Zur Lenzschen Regel: Leitender Ring auf einer Feldspule

Die Abstoßung des Rings beim Einschalten der Feldspule ist wie im vorhergehenden Versuch eine Folge der Lenzschen Regel.

Was passiert, wenn wir den Ring bei eingeschaltetem Feld über die Feldspule bringen und absinken lassen?

Wenn der Ring absinkt, steigt der Fluss durch den Ring an, der Ring entwickelt ein magnetisches Moment, das dieser Änderung entgegengerichtet ist. Wäre der Widerstand des Rings Null, so würde sich in einer gewissen Höhe ein Gleichgewicht zwischen der nach oben zeigenden magnetischen Kraft und der nach unten zeigenden Gravitationskraft einstellen, der Ring würde schweben bzw. um eine Gleichgewichtslage herum oszillieren. Genau dies passiert in einem supraleitenden<sup>1</sup> Ring. In einem normalleitenden Ring klingen aber die Kreisströme langsam ab, das magnetische Moment des Rings wird geringer und der Ring sinkt ab.

Mit der Lenzschen Regel lässt sich nun auch der **Diamagnetismus** verstehen: In jedem Atom werden bei Annäherung an ein Feld (bzw. Einschalten des Feldes) Ringströme so angeworfen, dass das von den Strömen erzeugte Feld dem angelegten Feld entgegengerichtet ist. Auf eine quantitative Analyse wollen wir hier allerdings nicht eingehen.

Das Auftreten von Kreisströmen (Wirbelströmen) bei einer zeitlichen Änderung des Magnetfeldes wird bei der **Wirbelstrombremse** genutzt: Wir lassen ein metallisches Pendel durch den Spalt eines Elektromagneten (Hufeisenform) pendeln. Solange der Magnet ausgeschaltet ist, schwingt das Pendel mit geringer Dämpfung. Schalten wir den Magnetstrom ein, so hält das Pendel fast instantan an. Wenn sich das Pendel in den Spalt des Magneten hineinbewegt, so werden im Pendel starke Wirbelströme angeworfen. Diese Ströme dissipieren auf Grund des Ohmschen Gesetzes Energie, die "Reibung" des Pendels wird sehr groß, das Pendel kommt sehr rasch zur Ruhe.

<sup>1</sup>Der Spannungsabfall über einem supraleitenden Ring ist Null. Nach 4.5 folgt dann  $d\phi/dt = 0$ . Der Fluss durch einen supraleitenden Ring (bzw. auch durch einen massiven Supraleiter) bleibt konstant. Dieser Effekt ist eine Konsequenz des Induktionsgesetzes zusammen mit der Eigenschaft  $R = 0$  des Supraleiters. Allerdings geht der "ideale Diamagnetismus" darüber hinaus. Wenn an den Supraleiter oberhalb von  $T_c$  (d. h. bei  $R > 0$ ) ein Magnetfeld angelegt wird, so klingen die Kreisströme schnell ab, das Feld durchdringt den Supraleiter. Kühlt man jetzt den Supraleiter unter  $T_c$  so erwarten wir wegen  $\phi = const.$ , dass das Feld im Supraleiter bleibt. Dagegen ist die Beobachtung, dass auch bei diesem Prozess das Feld aus dem Supraleiter herausgedrängt wird. Diese Eigenschaft (wie auch die Eigenschaft  $R = 0$ ) lässt sich erst durch die Quantenmechanik erklären.

### 4.3 Wechselstromgeneratoren und Elektromotoren

Das Prinzip des Wechselstromgenerators hatten wir im Grunde bereits in Abschnitt 4.2 kennengelernt, als wir eine Spule im Feld drehten. Wenn wir die Spule an einen Verbraucher (Widerstand  $R$ ) anschließen, so fließt durch diesen ein Wechselstrom. Mechanische Arbeit (Drehen der Spule) wurde in elektrische Energie umgesetzt. Wir betrachten jetzt einige spezielle Anordnungen:

**Gleichrichtung:** Wenn wir die Spannungsabgriffe an der Spule nach einer Drehung von  $180^\circ$  durch einen Polwender umkehren (vgl: Gleichstrommotor, Abschnitt 3.6), so ist die erzeugte Spannung proportional zu  $|\sin \omega t|$ . Die Wechselspannung wurde "gleichgerichtet".

**Drehstromgenerator:** Wir drehen drei um je  $120^\circ$  versetzte Spulen im Magnetfeld (Abb. 4.9). Jede der Spulen liefert eine Wechselspannung, wobei die drei Spannungen phasenverschoben sind. Die drei Spulen werden mit  $R$ ,  $S$  und  $T$  bezeichnet. Es gilt dann:

$$U_R = U_0 \sin \omega t \quad (4.8a)$$

$$U_S = U_0 \sin(\omega t - 120^\circ) \quad (4.8b)$$

$$U_T = U_0 \sin(\omega t + 120^\circ) \quad (4.8c)$$

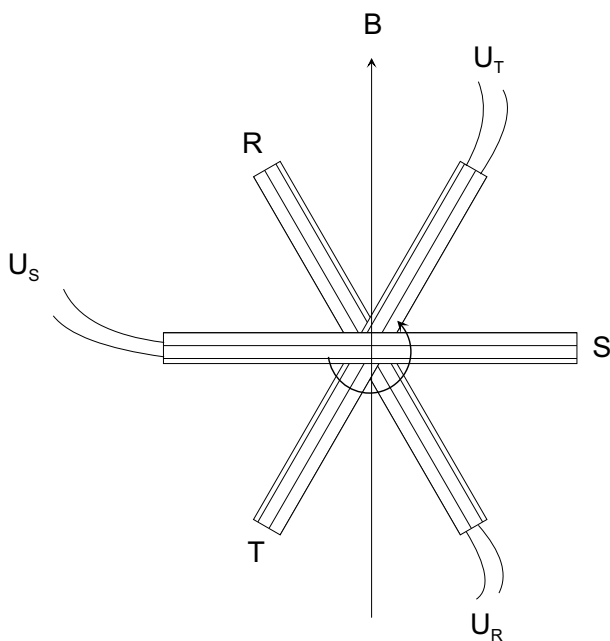


Abbildung 4.9: Erzeugung von Drehstrom

**Drehstrommotor:** Wir versorgen jetzt drei um je  $120^\circ$  zueinander verdrehte Spulen mit Drehstrom (Abb. 4.10).

Das Magnetfeld im Zentrum der Anordnung hat von Null verschiedene Komponenten  $B_x$  und  $B_y$ . Die  $z$ -Komponente ist 0. Für  $B_x$  erhalten wir:  $B_x = B_S(t) \cos 30^\circ - B_T(t) \cos 30^\circ$ , wobei  $B_S(t)$  und  $B_T(t)$  entsprechend (4.7), (4.8a) und (4.8b) phasenverschoben sinusförmig oszillieren,  $B_S(t) = B_0 \sin(\omega t - 120^\circ)$ ,  $B_T(t) = B_0 \sin(\omega t + 120^\circ)$ . Nach einfacher Rechnung ergibt sich:

$$B_x(t) = -\frac{3}{2} B_0 \cos \omega t \quad (4.9a)$$

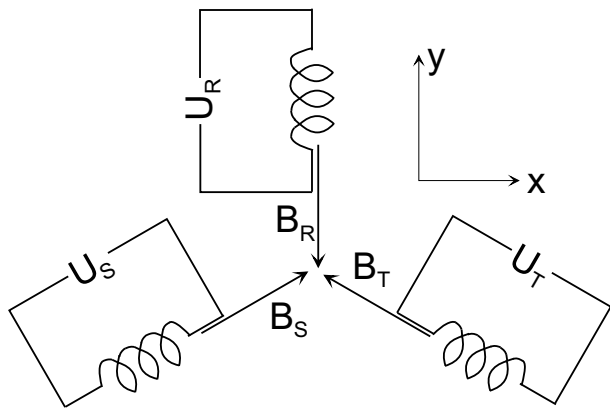


Abbildung 4.10: Prinzip des Drehstrommotors

und analog:

$$B_y(t) = -\frac{3}{2}B_0 \sin \omega t \quad (4.9b)$$

Der Betrag des von den drei Spulen erzeugten Feldes ist also zeitunabhängig, seine Richtung dreht sich mit der Kreisfrequenz  $\omega$ .

Bringen wir jetzt einen drehbar gelagerten permanenten magnetischen Dipol zwischen die Spulen, so wird sich dieser mit Frequenz  $\omega$  mit dem Magnetfeld mitdrehen. Dieser **”Synchronmotor”** kann jetzt mechanische Arbeit leisten<sup>2</sup>.

Wenn wir den Permanentmagneten durch einen unmagnetischen metallischen Ring aus Aluminum ersetzen, so wird sich auch dieser drehen auf Grund der im Ring angeworfenen Induktionsströme drehen. Allerdings muss die Kreisfrequenz des Rings langsamer als  $\omega$  sein: Würde sich der Ring mit  $\omega$  drehen, wäre  $d\phi/dt = 0$ , es würden keine Kreisströme induziert werden. Ein auf diesem Prinzip basierender Elektromotor heißt **”Asynchronmotor”**). Man kann den Al-Ring auch durch einen massiven Zylinder ersetzen; auch dieser wird durch die induzierten Wirbelströme in Bewegung gesetzt.

<sup>2</sup>Das Drehmoment, das auf den Dipol wirkt ist  $\vec{D} = \vec{m} \times \vec{B}$ . Die maximale Leistung, die der Rotor erzeugen kann, ist gegeben durch  $P = D\omega$ .

## 4.4 Maxwellscher Verschiebungsstrom, Potenziale

Zunächst wollen wir in diesem Abschnitt das Faradaysche Induktionsgesetz (4.4) in seine differenzielle Form “übersetzen”: Wir betrachten eine beliebige Fläche mit zugehörigem Rand. Für das Integral des elektrischen Feldes über diesen geschlossenen Rand der Fläche erhalten wir:

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} d\vec{s} &= \int_F (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{f} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{f}.\end{aligned}$$

Dabei wurde in der ersten Zeile der Satz von Stokes angewandt; beim Übergang zur zweiten Zeile wurde das Faraday’sche Induktionsgesetz (4.4) für diesen Fall vorausgesetzt. Da wir nun die Fläche  $F$  festhalten, wird die Änderung des magnetischen Flusses durch  $F$  ausschließlich durch die Änderung des Magnetfeldes bewirkt und wir erhalten:

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{f} = -\frac{1}{c} \int \left( \frac{d}{dt} \vec{B} \right) d\vec{f}.$$

Da die letzte Beziehung für alle Flächen gelten soll, folgt

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{B}.} \quad (4.10)$$

Damit haben wir die Gleichungen über die Quellen und Wirbel der elektrischen und magnetischen Felder und damit die eindeutigen Bestimmungsgleichungen für diese Vektorfelder  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  und  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  in der folgenden Form kennengelernt:

- Das Coulomb’sche Gesetz (1.6):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (4.11)$$

- Das Faraday’sche Induktionsgesetz (4.10):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{B} \quad (4.12)$$

- Das Fehlen magnetischer Monopole (3.13):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.13)$$

- Das Ampere’sche Durchflutungsgesetz (3.44)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad (4.14)$$

Wir können uns aber nun leicht davon überzeugen, dass das Ampere'sche Durchflutungsgesetz in dieser Form (4.14) nur für zeitunabhängig Probleme, eben der Magnetostatik gültig sein kann. Für ein beliebiges Vektorfeld  $\vec{A}$ , das zweimal stetig differenzierbar ist, gilt nämlich

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \partial_x \partial_y A_z - \partial_x \partial_z A_y + \partial_y \partial_z A_x - \partial_y \partial_x A_z + \partial_z \partial_x A_y - \partial_z \partial_y A_x = 0.$$

Wenn wir nun aber den Divergenz-Operator auf (4.14) anwenden erhalten wir:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (4.15)$$

eine Gleichung, die offensichtlich nur bei den stationären Strömen der Magnetostatik mit  $\text{div} \vec{j} = 0$  erfüllt wird. Dieser Fehler kann nun dadurch behoben werden, dass wir in (4.15) ersetzen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{d\rho}{dt} \quad (4.16)$$

Die Kontinuitätsgleichung (1.22) sorgt dann dafür, dass (4.15) stets erfüllt bleibt. Ausserdem erhalten wir im Grenzfall der stationären Probleme wieder die ursprüngliche Gleichung zurück. Schliesslich können wir nun noch die Ableitung der Ladungsdichte  $\rho$  nach der Zeit über das Coulombsche Gesetz umschreiben in

$$\frac{d\rho}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{d\vec{D}}{dt} \right).$$

Setzen wir diese Identität in (4.16) ein und nehmen die dort angedeutete Ersetzung in (4.15) vor so erhalten wir

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right).$$

Wenn wir nun also ausschließlich das Argument des Divergenz Operators  $\vec{\nabla} \cdot$  auf beiden Seiten dieser Gleichung vergleichen erhalten wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \left( \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right), \quad (4.17)$$

die Wirbel im Magnetfeld  $\vec{H}$  werden also durch die Stromdichte  $\vec{j}$  plus dem sogenannten *Maxwellschen Verschiebungsstrom*

$$\vec{j}_{\text{MV}} = \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (4.18)$$

erzeugt. Die Bedeutung dieses Maxwellschen Verschiebungsstroms können wir uns am Beispiel der Entladung eines Kondensators verdeutlichen (siehe Abb. 4.11). Ein Kondensator soll entsprechend der linken Skizze in dieser Abbildung mit elektrischen Ladungen "geladen" sein. Zwischen den beiden Platten besteht also ein elektrisches Feld bzw. eine dielektrische Verschiebung  $\vec{D}$ . Wird der Stromkreis, der die beiden Kondensatorplatten verbindet geschlossen, so fließt ein Strom, der natürlich zu einem entsprechenden Magnetfeld (Wirbel um den Leiter) führt. Im Dielektrikum zwischen den beiden Kondensatorplatten fließt kein Strom. Dort ändert sich aber das  $\vec{D}$  Feld, (es geht zurück auf 0), was



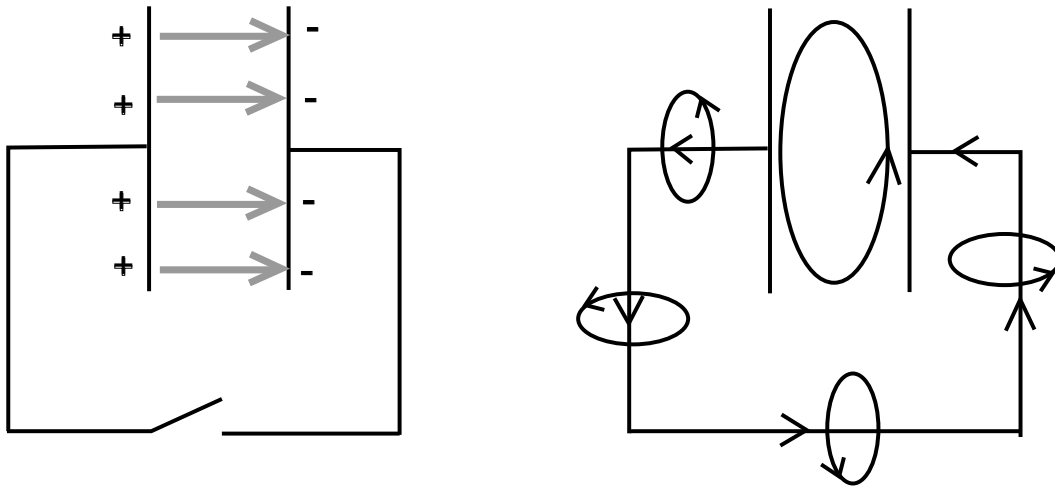


Abbildung 4.11: Maxwell'scher Verschiebungsstrom beim Entladen eines Kondensators

also zum Maxwell'schen Verschiebungsstrom (4.18), beziehungsweise ebenfalls zu einem entsprechende  $\vec{H}$  Feld auch in diesem Bereich führt.

Damit können wir die Maxwell'schen Gleichungen zusammenfassen und sie in folgender Form darstellen:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4.19)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{d\vec{B}}{dt} = 0 \quad (4.20)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (4.21)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{d\vec{D}}{dt} = \vec{j}. \quad (4.22)$$

Die ersten zwei dieser vier Gleichungen bezeichnet man als die homogenen Gleichungen, da in diesen beiden Gleichungen nur die elektromagnetischen Felder  $\vec{B}$  und  $\vec{E}$  bzw. auch  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  vorkommen. Die dritte und vierte Gleichung sind die inhomogenen Maxwell-Gleichungen, da in ihnen neben den elektromagnetischen Feldern auch die Ladungsdichte  $\rho$  und die Stromdichte  $\vec{j}$  vorkommen. Wir haben diese Gleichungen so geschrieben, dass diese Inhomogenitäten auf der rechten Seite auftauchen.

Wir wollen die Konsequenzen der Maxwellgleichungen zusammenfassen:

- Die positiven und negativen Ladungen im Raum sind die Quellen und Senken der dielektrischen Verschiebung  $\vec{D}$ .
- Es existieren *keine* magnetischen Monopole (Ladungen) und damit auch keine Quellen und Senken für die magnetische Induktionsdichte  $\vec{B}$ .
- Die Wirbel des  $\vec{E}$ -Feldes entstehen durch zeitlich veränderliche  $\vec{B}$ -Felder.
- Elektrische Ströme und zeitlich veränderlich  $\vec{D}$ -Felder erzeugen Wirbel des Magnetischen Feldes  $\vec{H}$ .

- Die Maxwellgleichungen sind 8 gekoppelte Differentialgleichungen (jeweils 3 Gleichungen verbergen sich hinter den Vektorgleichungen (4.20) und (4.22)) für die Bestimmung der elektrischen und magnetischen Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ , bzw.  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$ .
- Ist das Problem stationär, sind also die Ladungsverteilungen und Ströme zeitunabhängig, so werden die Gleichungen für die elektrischen und magnetischen Felder voneinander entkoppelt und reduzieren sich auf die Grundgleichungen der *Elektrostatik* und der *Magnetostatik*.

#### 4.4.1 Potenziale der Elektrodynamik

Die Maxwell-Gleichungen (4.19) - (4.22) bilden zusammen mit den Materialgleichungen  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$  und  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$  die Grundsäulen der Elektrodynamik. Aus den beiden homogenen Maxwell-Gleichungen können wir nun herleiten, dass sich die elektromagnetischen Felder aus Potenzialen  $\Phi$  und  $\vec{A}$  berechnen lassen. Aus der Tatsache, dass die magnetische Induktionsdichte  $\vec{B}$  quellfrei ist (4.19) folgt nämlich, dass sich  $\vec{B}$  als Rotation eines Vektorfeldes  $\vec{A}$  berechnen lässt

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (4.23)$$

Diese Beziehung aus der Magnetostatik (3.11) ist also auch im allgemeinen zeitabhängigen Fall gültig. Wenn wir nun diese Darstellung von  $\vec{B}$  in die andere homogene Maxwell-Gleichung (4.20) einsetzen erhalten wir

$$\text{rot} \vec{E} + \frac{d(\text{rot} \vec{A})}{dt} = \text{rot} \underbrace{\left( \vec{E} + \frac{d\vec{A}}{dt} \right)}_{:= \vec{X}} = 0.$$

Das im zweiten Teil dieser Gleichung definierte Vektorfeld  $\vec{X}$  ist also wirbelfrei und lässt sich als (negativer) Gradient eines Skalarfeldes  $\Phi$  darstellen

$$\begin{aligned} \vec{X} = -\text{grad} \Phi &= \vec{E} + \frac{d\vec{A}}{dt} \\ \vec{E} &= -\text{grad} \Phi - \frac{d\vec{A}}{dt} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Aus diesen Gleichungen (4.23) und (4.24), die wir ja aus den homogenen Maxwell-Gleichungen erhalten haben, sehen wir also, dass die elektromagnetischen Felder eindeutig aus den dem skalaren Potenzial  $\Phi$  und dem Vektorpotenzial  $\vec{A}$  bestimmt werden können. Dies führt zu einer signifikanten Reduktion der Information, die zur Festlegung der elektromagnetischen Felder erforderlich ist: Zur Darstellung der  $\vec{B}$  und  $\vec{E}$  Felder, muss man für jeden Raum - Zeitpunkt  $(\vec{r}, t)$  6 Größen angeben, die 3 kartesischen Komponenten von  $\vec{E}$  und die 3 kartesischen Komponenten von  $\vec{B}$ . Die Potenziale sind aber bereits durch 4 Werte für jeden Raum - Zeitpunkt definiert (einer für  $\Phi$  und 3 für  $\vec{A}$ ). Die elektromagnetischen Felder enthalten also redundante Information.

Während die homogenen Maxwell-Gleichungen (4.20) und (4.19) den Zusammenhang zwischen den elektromagnetischen Feldern und den Potenzialen  $\Phi$  und  $\vec{A}$  liefern, führen uns

die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (4.21) und (4.22) zu Bestimmungsgleichungen für diese elektromagnetischen Potenzialfelder. Betrachten wir dazu noch einmal (4.21)

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon \left( -\Delta \Phi - \frac{d}{dt} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) \\ &= \rho\end{aligned}\quad (4.25)$$

In der ersten Zeile haben wir  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$  ersetzt und angenommen, dass die Dielektrizitätskonstante ortsunabhängig ist. Beim Übergang zur zweiten Zeile wurde (4.24) angewandt. Die zweite inhomogene Maxwellgleichung (4.21) führt uns auf

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{d\vec{D}}{dt} &= \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d\vec{E}}{dt} \\ &= \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \varepsilon_0 \varepsilon \left\{ \vec{\nabla} \frac{d\Phi}{dt} + \frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} \right\} \\ &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}\end{aligned}\quad (4.26)$$

Bei dem Übergang von der ersten zur zweiten Zeile haben wir die Felder  $\vec{B}$  und  $\vec{E}$  durch die entsprechenden Potenziale (4.23) und (4.24) ersetzt. Den Term  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A})$  in dieser Gleichung können wir in Analogie zu der Vektorrelation

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

umformen zu

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

eingesetzt in (4.26) erhalten wir

$$-\frac{1}{\mu_0 \mu} \Delta \vec{A} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} + \vec{\nabla} \left[ \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d\Phi}{dt} \right] = \vec{j}\quad (4.27)$$

Die Gleichungen (4.25) und (4.27) sind 4 gekoppelte Differenzialgleichungen 2. Ordnung in den Ableitungen nach Ort und Zeit zur Bestimmung der Potenzialfelder  $\vec{A}$  und  $\Phi$ . Diese 4 Differenzialgleichungen zweiter Ordnung bestimmen die Lösungen aber natürlich nicht eindeutig. Auch eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung für eine gesuchte Funktion  $f(x)$  besitzt ja zwei linear unabhängige Lösungen. Wir werden uns auch jetzt sofort überzeugen, dass die physikalischen Observablen keine eindeutige Lösung für diese Potenzialfelder erwarten lassen. Beobachten können wir im Experiment nur die Kräfte, die in einem elektromagnetischen Feld auf Testladungen ausgeübt werden. Diese Kräfte werden aber durch die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  bestimmt. Nehmen wir einmal an, dass wir bereits einen Satz von Potenzialen  $\vec{A}$  und  $\Phi$  kennen, die uns über (4.23) und (4.24) die physikalisch beobachtbaren Felder liefern. Wir können dann einen anderen Satz von Potentialfeldern  $\vec{A}'$  und  $\Phi'$  definieren

$$\left. \begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda \\ \Phi' &= \Phi - \frac{d\Lambda}{dt}\end{aligned} \right\} \quad \text{Eichtransformation}$$

mit einem beliebigen skalaren *Eichfeld*  $\Lambda(\vec{r}, t)$ . Die über diese *Eichtransformation* bestimmten Potentiale  $\vec{A}'$  und  $\Phi'$  liefern das gleiche Ergebnis für  $\vec{B}$  und  $\vec{E}$  wie die ursprünglichen Potentiale. Dies können wir leicht verifizieren:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{A}' &= \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Lambda}_{=0} \\ &= \vec{B} \\ -\vec{\nabla} \Phi' - \frac{d\vec{A}'}{dt} &= -\vec{\nabla} \Phi + \vec{\nabla} \frac{d\Lambda}{dt} - \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{d}{dt} \vec{\nabla} \Lambda \\ &= -\vec{\nabla} \Phi - \frac{d\vec{A}}{dt} \\ &= \vec{E}\end{aligned}$$

Es liegt also nahe, die Eichung so geschickt zu wählen, dass die durchzuführenden Rechnungen möglichst einfach sind. Wir wollen hier zwei Eichbedingungen etwas näher diskutieren:

1. **Lorentz-Eichung** Wähle die Eichtransformation so, dass

$$\frac{1}{\mu\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d\Phi'}{dt} = 0 \quad (4.28)$$

Um zu ermitteln, wie das Eichfeld  $\Lambda$  aussehen muss, setzen wir die Eichtransformation (4.28) in diese Bedingung ein und erhalten:

$$\Delta \Lambda - \mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{d^2 \Lambda}{dt^2} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \mu\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{d\Phi}{dt}$$

Wir sehen also, dass es möglich ist zu einem vorgegebenen Satz von Potenzialfeldern  $\vec{A}$ ,  $\Phi$  durch Lösung dieser Gleichung ein Eichfeld  $\Lambda$  zu finden, sodass die aus der Umeichung resultierenden Potentiale die Bedingung der Lorentzeichung erfüllen. Da die Lösung für dieses  $\Lambda$  nicht eindeutig ist, sehen wir auch, dass selbst in der Lorentzeichung die Potentiale nicht eindeutig gegeben sind.

Durch die Lorentzeichung werden die Differentialgleichungen zur Bestimmung der Potentialfelder (4.25) und (4.27) vereinfacht. Fordern wir für die gesuchten Potenzial  $\vec{A}$  und  $\Phi$  die Lorentzeichung, so ist der Term in den Klammern  $\square$  in (4.27) gleich null. Außerdem können wir in (4.25)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  über die Bedingung der Lorentzeichung ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned}-\Delta \Phi + \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d^2}{dt^2} \Phi &= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho \\ -\Delta \vec{A} + \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d^2}{dt^2} \vec{A} &= \mu_0 \mu \vec{j}\end{aligned} \quad (4.29)$$

Die Gleichungen für  $\Phi$  und  $\vec{A}$  sind also entkoppelt und haben eine sehr symmetrische Gestalt, wie wir bei der Diskussion der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik noch sehen werden.

2. **Coulomb Eichung:** Im Fall der Coulomb Eichung fordert man

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (4.30)$$

Damit vereinfacht sich die Gleichung zur Bestimmung des skalaren Potentials  $\Phi$  (4.25) zur Poisson Gleichung der Elektrostatik (1.34)

$$\varepsilon_0 \varepsilon \Delta \Phi(\vec{r}, t) = -\rho(\vec{r}, t)$$

allerdings mit der Komplikation, dass  $\rho$  und damit auch  $\Phi$  zeitabhängig sein können. Die Lösungen dieser Gleichung ergeben sich (falls keine Randbedingungen vorliegen) genau so wie im Fall der Elektrostatik

$$\Phi(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (4.31)$$

müssen aber auch für jede Zeit  $t$  neu berechnet werden. Das Problem reduziert sich also im ersten Schritt auf das reine Coulomb Problem. Mit diesem Ergebnis kann man dann im zweiten Schritt die Gleichung (4.27) zur Bestimmung von  $\vec{A}$  lösen.

### Zusammenfassung:

- Aus den homogenen Maxwellgleichungen können wir herleiten, dass die elektromagnetischen Felder aus Potentialfelder, einem skalaren Feld  $\Phi$  und einem Vektorfeld  $\vec{A}$ , berechnen lassen.
- Diese Potenziale sind nicht eindeutig bestimmt. Bei einer Eichtransformation der Potentiale ändern sich die daraus berechneten  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  Felder nicht.
- Die Potenziale können durch Lösen von gekoppelten Differenzialgleichungen aus den Ladung- und Stromverteilungen berechnet werden.
- Durch Eichbedingungen können diese gekoppelten Differenzialgleichungen entkoppelt und vereinfacht werden



## 4.5 Energie der elektromagnetischen Felder

Bereits in der Elektrostatik haben wir gesehen, dass elektrische Felder einen Energieinhalt besitzen, nämlich die Energie die erforderlich ist diese Felder beziehungsweise die entsprechende Ladungsverteilung aufzubauen. Diese Feldenergie haben wir mit der potenziellen Energie der Ladungsverteilung identifiziert. In einem magnetischen Feld wirkt die Lorentz-Kraft auf eine bewegte Punktladung. Für diese Lorentz-Kraft, die ja von der Geschwindigkeit der Ladung abhängt gibt es kein Potenzial, aus dem die Kraft als Gradient des Potentials berechnet werden könnte. Die Lorentz-Kraft ist also im Sinne der Mechanik kein konservatives Kraftfeld. Wir müssen also in einem ersten Schritt untersuchen, was eine Änderung der kinetischen Energie von Punktladungen bewirken kann und wie diese Änderung der kinetischen Energie kompensiert wird durch eine andere Energieform, so dass die Gesamtenergie erhalten bleibt.

Dazu betrachten wir zunächst einmal die kinetische Energie  $\mathcal{T}$  einer Punktladung der Masse  $m$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und die Ableitung dieser kinetischen Energie nach der Zeit

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{T}}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{m}{2} \vec{v}^2 \\ &= m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \vec{v} \cdot \vec{F}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

In der letzten Zeile diese Gleichung haben wir die Newtonsche Bewegungsgleichung benutzt, nach der ja die Kraft  $\vec{F}$  durch die Ableitung des Impulses  $m\vec{v}$  nach der Zeit gegeben ist. Auf einer Punktladung  $q$  an der Position  $\vec{r}$  mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  wirken in einem elektromagnetischen Feld die Coulomb-Kraft und die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}) + q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (4.33)$$

Damit ergibt sich also aus (4.32)

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = q\vec{v} \cdot \vec{E} + \underbrace{q\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})}_{=0}. \quad (4.34)$$

Man sieht also, dass eine Änderung der kinetischen Energie, also ein wirklicher Energieübertrag, nur über das elektrische Feld  $\vec{E}$  erfolgt. Der Beitrag der Lorentz-Kraft zu dieser Änderung verschwindet, da ja die Lorentzkraft stets senkrecht zur Bewegungsrichtung  $\vec{v}$  wirkt. Die Kraft durch das magnetische Feld  $\vec{B}$  bewirkt also ausschließlich eine Änderung der Impulsrichtung der Ladung. Gehen wir nun von einer einzelnen Punktladung zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung über, so müssen wir bei dieser Betrachtung ersetzen:

$$\begin{array}{lll} q & \rightarrow & \rho \quad \text{Ladungsdichte} \\ q\vec{v} & \rightarrow & \vec{j} \quad \text{Stromdichte} \\ \mathcal{T} & \rightarrow & \tau \quad \text{Mechanische Energiedichte} \end{array}$$

Die Änderung der mechanischen Energiedichte berechnet sich also nach diesen Ersetzungen entsprechend (4.34) zu

$$\frac{d}{dt}\tau = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (4.35)$$

Wir wollen beschreiben, wie diese Änderung der mechanischen Energiedichte  $\tau$  kompensiert wird durch die Änderung der Energiedichte des elektromagnetischen Feldes. Deshalb ersetzen wir die Stromdichte  $\vec{j}$  in dieser Gleichung durch die Feldstärken und schreiben entsprechend der Maxwellschen Gleichung (4.22)

$$\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{d\vec{D}}{dt}.$$

Eingesetzt in (4.35) erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\tau = \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (4.36)$$

Zur Umformung des ersten Termes auf der rechten Seite dieser Gleichung betrachten wir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) &= \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})} \\ &= \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}), \end{aligned}$$

dabei haben wir in der ersten Zeile die Produktregel für die Differentialoperatoren im Divergenzoperator  $\vec{\nabla}$  angewandt, angedeutet durch die geschweiften Klammern, die anzeigen, dass diese Ableitungsoperatoren auf der rechten Seite der Gleichung nur auf das  $\vec{E}$ , beziehungsweise  $\vec{H}$  Feld wirken. Bei dem Übergang zur zweiten Zeile haben wir ausgenutzt, dass die Vektorrelationen

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$$

auch für den Nabla Operator gelten, wenn man beachtet, dass die Felder auf die der Differentialoperator wirkt, rechts von ihm stehen. Damit können wir also in (4.36) einsetzen

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tau &= \vec{H} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{=-\frac{d\vec{E}}{dt}} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{d\vec{D}}{dt} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \end{aligned}$$

In dieser Umwandlung haben wir die Maxwell-Gleichung (4.19) benutzt und angenommen, dass die Materialkonstanten  $\varepsilon$  und  $\mu$  zeitunabhängig sind, also z.B. gilt

$$\vec{E} \cdot \frac{d\vec{D}}{dt} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{d\vec{E}}{dt} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{1}{2} \frac{d(\vec{E} \cdot \vec{E})}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\vec{E} \cdot \vec{D})}{dt}$$



Insgesamt können wir also die Gleichung für die Energierhaltung (4.36) auf die Form bringen

$$\frac{d}{dt}\tau + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}\right) = -\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) . \quad (4.37)$$

Diese Gleichung kann man nun leicht interpretieren: Auf der linken Seite der Gleichung steht die zeitliche Änderung ( $\frac{d}{dt}$ ) der totalen Energiedichte. Diese Energiedichte besteht einerseits aus der kinetischen Energiedichte der Massenpunkte  $\tau$  plus der potenziellen Energiedichte beziehungsweise ausgedrückt als Feldenergiedichte der elektrischen und magnetischen Felder. Die Feldenergiedichte für elektrische Felder hatten wir ja bereits hergeleitet und der Beitrag  $1/2\vec{H} \cdot \vec{B}$  ist einfach die entsprechende Ergänzung für die Magnetfelder. Ist also die zeitliche Änderung der gesamten Energiedichte (also rechte Seite von (4.37)) von Null verschieden, so muss wegen der Energieerhaltung diese lokale Änderung der Energiedichte begleitet sein von einem entsprechenden Zu- oder Abfluss von Energie. Wir haben also wie bei der Erhaltung der Ladung, die dargestellt wird durch die Kontinuitätsgleichung, auch hier eine Kontinuitätsgleichung für die Energie zu erwarten. In der Tat stellt ja die Gleichung (4.37) gerade eine solche Kontinuitätsgleichung dar und wir sehen, dass der sogenannte

$$\text{Poyntingvektor} \quad \vec{S} := \vec{E} \times \vec{H} \quad (4.38)$$

die Funktion des Energieflusses übernimmt. Integrieren wir also (4.37) über ein bestimmtes Volumen  $V$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \left[ \tau + \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \right] d^3r &= - \int \operatorname{div} \vec{S} d^3r \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} - \oint_{O_V} \vec{S} \cdot \vec{d}\vec{f} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Die Änderung der gesamten Energie im Volumen  $V$ , mechanische plus Feldenergie, wird also begleitet durch einen entsprechenden Energiefluss  $\vec{S}$  durch die Oberfläche des Volumens.



# Kapitel 5

## Spulen und einfache elektronische Schaltungen

In diesem Abschnitt wollen wir mit den bisher eingeführten Bauelementen - Widerstände, Kondensatoren, Spulen einfache Schaltkreise realisieren und ihr Funktionsprinzip analysieren. Zuvor wollen wir jedoch einige allgemeine Eigenschaften von Spulen, sowie einige Methoden zur Erzeugung und Messung von Magnetfeldern ansprechen.

### 5.1 Allgemeines

#### 5.1.1 Induktivität einer Spule

Das Magnetfeld durch eine Spule (Windungszahl:  $N$ , Querschnittsfläche:  $F$ ) ist proportional zum Strom durch die Spule,  $B = \text{const.} \cdot N \cdot I$ . Der magnetische Fluss durch die Spule ist entsprechend gegeben durch:

$$\varphi = B \cdot F = \text{const.} \cdot N \cdot F \cdot I.$$

Wenn sich dieser Fluss zeitlich ändert, wird in jeder Windung der Spule die Spannung  $-d\varphi/dt$  induziert, in der gesamten Spule also die Spannung:

$$U_{\text{ind}} = -N\dot{\varphi} = -N^2 \cdot \text{const.} \cdot F \cdot \dot{I} = -L\dot{I}.$$

Hierbei haben wir die **Induktivität**  $L$  via

$$U_{\text{ind}} = -L \cdot \dot{I} \tag{5.1}$$

definiert.

Die **Einheit der Induktivität** ist **Henry** (H). Es gilt:  $1 \text{ H} = 1 \text{ Tm}^2/\text{A} = 1 \text{ Wb}/\text{A}$  (Wb: "Weber", Einheit des magnetischen Flusses).

Mit (2.1) können wir für den magnetischen Fluss durch die Spule schreiben:

$$\varphi = \frac{L}{N} I. \tag{5.2}$$

Für eine **lange Spule** (Querschnittsfläche  $F$ , Länge  $l$ ) gilt:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} \cdot I.$$

Hiermit erhalten wir:  $\varphi = \mu_0 NFI/l$  und

$$L = \mu_0 \frac{N^2 L}{l}. \quad (5.3)$$

Die Definition (2.1) kann leicht auf den Fall verallgemeinert werden, dass mehrere unabhängige Leiterschleifen vorliegen (wir nehmen der Einfachheit an, jede Schleife habe eine Windung). Durch die  $i$ -te Schleife soll der Strom  $I_i$  fließen. Das von dieser Schleife erzeugte Magnetfeld durchdringt z. T. auch die anderen Schleifen. Der magnetische Fluss  $\varphi_k$  durch die  $k$ -te Schleife setzt sich dann zusammen aus dem durch den Strom  $I_k$  von der Schleife selbst erzeugten Fluss und die Summe aller von den anderen Schleifen eingestreuten Flüsse, d. h.

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^N L_{ik} \varphi_i. \quad (5.4)$$

Die Koeffizienten  $L_{ik}$  ergeben die "Induktivitätsmatrix", deren Diagonalelemente  $L_{ii}$  man Selbstinduktivität und deren Außerdiagonalelemente  $L_{ik}$  ( $i \neq k$ ) man gegen(seitige) Induktivität nennt.

### 5.1.2 Energieinhalt einer Spule

Wir kehren zurück zum Fall einer einzigen Spule mit  $N$  Windungen und berechnen den Energieinhalt der Spule. Wir schließen hierzu die Spule an eine Batterie an, starten mit  $I = 0$  und erhöhen den Strom durch die Spule auf den Wert  $I$ . Hierbei wird die Spannung  $U_{\text{ind}} = -L\dot{I}$  in der Spule induziert, gegen die die "Beladung" stattfinden muss. Die von der Batterie aufzubringende Leistung ist zu jedem Zeitpunkt  $P = UI = -U_{\text{ind}} \cdot I$ . Für die Energie, die für den gesamten "Ladevorgang" aufgewendet werden muss, erhält man:

$$W = \int_0^T P dt = - \int_0^T U_{\text{ind}} I dt = \int_0^T LI \cdot I dt = \int_0^1 LI dt = \frac{1}{2} LI^2.$$

Diese Arbeit wurde in die Spule gesteckt. Deren **Energieinhalt** ist also:

$$W_{\text{spule}} = \frac{1}{2} LI^2. \quad (5.5a)$$

Mit (5.2) können wir auch schreiben:

$$W_{\text{spule}} = \frac{N^2 \varphi^2}{2L}. \quad (5.5b)$$

Wie hängt  $W_{\text{spule}}$  mit der Energie zusammen, die im Magnetfeld der Spule steckt? Wir nehmen an, das Feld der Spule sei räumlich homogen. Wir erhalten dann für die **Feldenergie**:

$$W_{\text{feld}} = \frac{1}{2} B \cdot H \cdot V_{\text{spule}}.$$

Mit den Ausdrücken  $B = \mu_0 NI/l$ ,  $H = NI/l$  und  $L = \mu_0 N^2 F/l$  ( $B$ - und  $H$ -Feld bzw. Induktivität der langen Spule, Länge  $l$ , Querschnittsfläche  $F$ ) erhalten wir mit  $V_{\text{Spule}} = Fl$ :

$$W_{\text{feld}} = \frac{1}{2} \left( \mu_0 \frac{NI}{l} \right) \frac{NI}{l} lF = \frac{1}{2} \left( \mu_0 N^2 \frac{F}{l} \right) I^2 = \frac{1}{2} LI^2,$$

was gleich dem Ausdruck (5.5a) ist. Die Energie der Spule steckt also im magnetischen Feld (das gleiche gilt auch für kurze Spulen bzw. räumlich inhomogene Felder). Ganz analog hatten wir beim Kondensator gesehen, dass dessen Energie im elektrischen Feld steckt.

Wir können auch leicht die Energie eines Systems von Leiterschleifen angeben. Für die in der  $i$ -ten Schleife induzierten Spannung erhält man  $U_{\text{ind},i} = -\sum_{k=1}^M L_{ik} \dot{I}_k$ . Wie im Fall der Spule integriert man die Leistung, die erforderlich ist, um die Schleifen zu "beladen" und erhält:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^M M L_{ik} I_i I_k \quad (5.6)$$

### 5.1.3 Spezielle Spulentypen

Bereits besprochen haben wir die "lange Spule" und die ringförmige Spule (**Toruspule**). Bei der "kurzen Spule" ist dagegen die Länge  $l$  deutlich geringer als der Radius  $r$  der Windungen. Eine weitere, in der Praxis wichtige Anordnung ist die **Helmholtz-Spule**. Sie besteht aus zwei kurzen Spulen (Windungszahl:  $N$ ), die wie in Abb. 5.1 gezeigt parallel zueinander im Abstand  $a$  angeordnet sind. Hierbei ist  $a$  gleich dem Radius der beiden Spulen. Wenn in den beiden Spulen der gleiche Strom  $I$  fließt, ist das Feld zwischen den beiden Spule nahezu homogen und entlang der Verbindungsachse zwischen den Spulen gerichtet. Genau zwischen den beiden Spulen erhält man:

$$B_x \approx 0.716 \mu_0 \frac{N}{r} I. \quad (5.7)$$

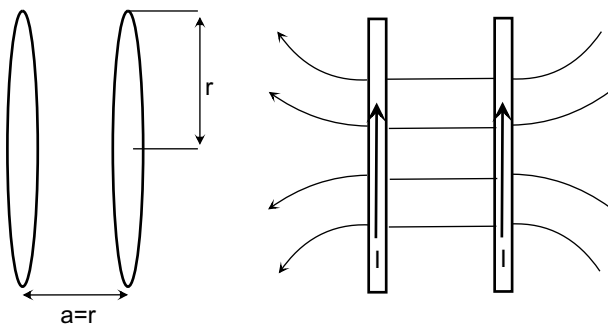
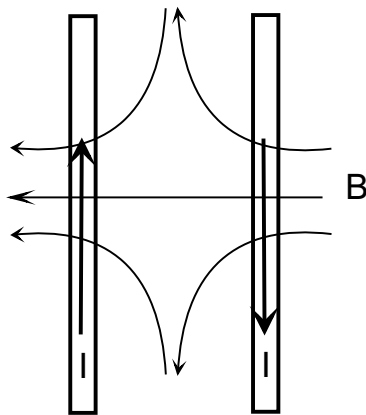


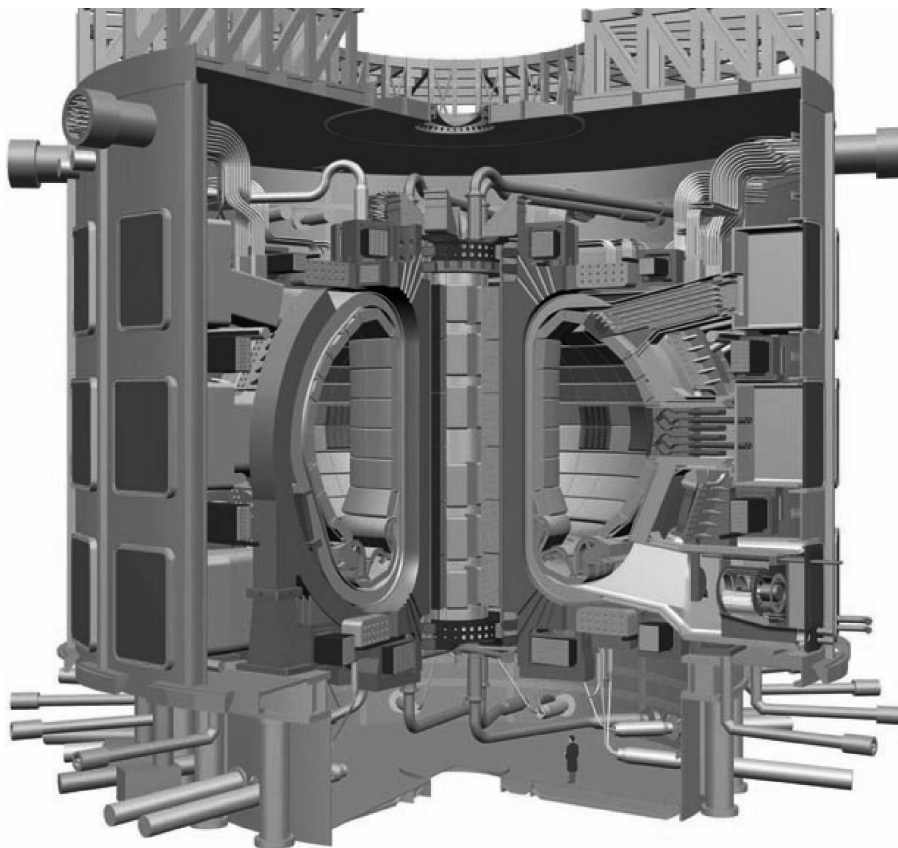
Abbildung 5.1: Helmholtz-Spule

Der Vorteil der Helmholtz-Spulen ist, dass sehr leicht von allen Seiten Gegenstände in das Magnetfeld eingebracht werden können. Wir hatten solche Spulen beispielsweise beim Fadenstrahlrohr verwendet.

Bestromt man die beiden Spulen dagegen mit entgegengesetzter Stromrichtung, so bekommt man ein Quadrupolfeld wie in Abb. 5.2 skizziert. In diesem Betriebsmodus spricht man von **Anti-Helmholtz-Spulen** oder manchmal auch von "Holtzhelm"-Spulen

Abbildung 5.2: *Anti-Helmholtz-Spule*

In vielen Bereichen der Physik hat man das Problem, das der Magnetfeldverlauf eine bestimmte Form haben sollte. Man arbeitet dann mit einer Vielzahl von Spulen, die magnetische Multipolmomente bis zu hohen Ordnungen realisieren. Als Beispiel zeigt Abb. 5.3 den geplanten Kernfusionsreaktors ITER. Im Reaktor befinden sich eine Reihe unterschiedlicher Spulen, die beispielsweise für den magnetischen Einschluss des toriodalen Fusionsplasmas oder für die Erzeugung eines Heizstroms im Plasma verantwortlich sind. Man beachte die Person unten im Vordergrund, die die gewaltigen Dimensionen des Systems anzeigt. Im Innern des Fusionsbereichs werden von den Magneten dabei Felder von ca. 12 T generiert werden. Man wickelt diese Magnete aus supraleitendem Draht.

Abbildung 5.3: *Schemazeichnung des geplanten Fusionsreaktors ITER.*

### 5.1.4 Spulen mit Kern

Bringt man in eine lange Spule einen Weicheisenkern (Permeabilität:  $\mu$ ) ein, so steigen das  $B$ -Feld, der magnetische Fluss und die Induktivität um den Faktor  $\mu$ . Bei speziellen Anordnungen ist nur ein Teil des Weicheisens von Spulendraht umgeben. Dies gilt z. B. für hufeisenförmige Magnete, bei denen der Luftspalt zwischen den Enden des Kerns genutzt wird, um Gegenstände in das Magnetfeld einzubringen, oder für Transformatoren, bei denen der "Kern" einen Ring bildet. Wir werden Transformatoren etwas später in diesem Kapitel genauer kennenlernen. An dieser Stelle sei gesagt, dass der Sinn des Kerns (neben der  $B$ -Feld-Verstärkung) vor allem darin besteht, den von der "Primärspule" erzeugten Fluss in die "Sekundärspule" einzukoppeln.

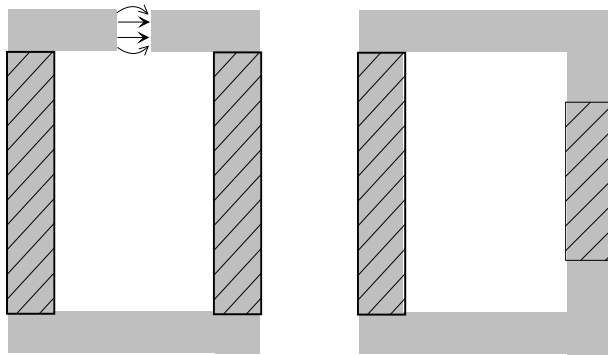


Abbildung 5.4: *Hufeisenmagnet mit Weicheisenkern (links) und Transformator (rechts)*

### 5.1.5 Erzeugung von Magnetfeldern

**Dauerbetrieb:** Mit Luftspulen aus normalleitendem Draht (Cu-Draht) lassen sich im Dauerbetrieb ohne besondere Kühlmaßnahmen maximale Magnetfelder von einigen 100 G erzeugen, bevor die Spule auf Grund der starken Dissipation im Leiter zerstört wird. Spezielle Magnete (Bitterspulen), bei denen jede Windung stark gekühlt wird, erreichen in Volumina von einigen  $\text{cm}^3$  Felder bis 30 T. Bei Verwendung von Kernen mit hoher Sättigungsmagnetisierung können in Anordnungen wie Abb. 5.4 Felder bis um 1 T erreicht werden. Hohe Felder, v. a. auch in großen Volumina können mit supraleitenden Drähten erzielt werden, da hier wegen  $R = 0$  praktisch<sup>1</sup> keine Energie dissipiert wird. Die Obergrenze des erreichbaren Feldes ist im wesentlichen durch das obere kritische Feld des verwendeten Supraleiters gegeben. Mit NbTi erreicht man Maximalfelder um 8 T, mit Nb<sub>3</sub>Sn von über 20 T. Nb<sub>3</sub>Sn ist allerdings schwer zu verarbeiten; man zieht deshalb, wann immer möglich, NbTi vor. In speziellen Hochfeldlaboratorien, aber auch bei Anwendungen wie der Kernspinresonanz, werden Hybridmagnete eingesetzt. Man benutzt eine (oder mehrere) äußere Spule(n) aus NbTi. In diese werden Nb<sub>3</sub>Sn-Spulen eingebracht, in diese schließlich normalleitende Bittermagnete. Man erreicht heute bis zu 45 T.

**Gepulste Felder:** Für wenige ms lassen sich mit speziellen (normalleitenden) Spulen Magnetfelder bis in den Bereich 60–80 T erzeugen. Nach jedem Puls muss allerdings einige Zeit verstreichen, bis der Magnet wieder abgekühlt ist. Noch höhere gepulste Felder

<sup>1</sup>Eine leichte Energiedissipation ergibt sich an den normalleitenden Stromzuführungen; auch treten Energieverluste auf, wenn sich das B-Feld zeitlich ändert.

von bis zu 200 T können dadurch erzeugt werden, dass extrem große Ströme für einige  $\mu\text{s}$  wenige oder sogar nur eine Windung durchfließen. Die hierbei auftretenden magnetischen Kräfte zerstören allerdings die Spule und meist auch die Probe, deren Eigenschaften im hohen Magnetfeld untersucht werden sollten. Noch "zerstörerischer" sind Implosionsmethoden, in denen ein leitfähiges Plasma in sehr kurzen Zeiten stark durch Sprengladungen zusammengedrückt wird. Man erreicht bis zu 2000 T. Das zugrunde liegende Prinzip ist wiederum das Induktionsgesetz bzw. die Lenzsche Regel. Man hat zunächst ein relativ großes vom Feld durchsetztes Volumen. Bei der Implosion bauen sich entsprechend der Lenzschen Regel Abschirmströme auf, die den Fluss durch einen gegebenen Querschnitt des Volumens konstant zu halten suchen. Verkleinert man die Querschnittsfläche, so vergrößert sich die Flussdichte.

Im Extremfall passiert dies auch bei der Implosion eines Sterns zu einem Neutronenstern. Hatte der Stern ursprünglich einen Durchmesser von  $10^6$  km und ein  $B$ -Feld von 1 G, der Neutronenstern schließlich einen Durchmesser von 10 km, so beträgt das  $B$ -Feld im Neutronenstern  $10^{10}$  G =  $10^6$ T!

### 5.1.6 Messung von Magnetfeldern

Bereits angesprochen haben wir **Hallsonden** und **flux gates**, sowie **Induktionsspulen**. Bei flux gates wird die Hysteresekurve eines permanentmagnetischen Materials ausgenutzt. Beim Übergang in die Sättigungsmagnetisierung ist  $M(H)$  stark nichtlinear. Man moduliert  $H$  periodisch mit einer Frequenz  $\omega$ . Wenn  $M(H)$  stark nichtlinear ist, erhält  $M(\omega)$  auch Frequenzkomponenten  $2\omega$ ,  $3\omega$  etc.<sup>2</sup>. Man detektiert  $M$  bei der Frequenz  $2\omega$  und verwendet spezielle Kompensationsmethoden so, dass das Ausgangssignal der Sonde proportional zum äußeren Magnetfeld wird. Man kann so Signale bis herab zu etwa 1 pT messen.

Bei bestimmten metallischen Verbindungen ist der elektrische Widerstand stark magnetfeldabhängig und kann zur Magnetometrie verwendet werden. Solche **magneto-resistiven Elemente (GMR-Sensoren**<sup>3</sup>) werden beispielsweise zum Auslesen von Festplatten eingesetzt.

Die größte Empfindlichkeit erreichen supraleitende Quanteninterferometer (SQUIDs = Superconducting Quantum Interference Device), auf deren Funktionsprinzip wir hier nicht eingehen können. Mit SQUIDs können Magnetfelder bis zu einigen 10–15 T aufgelöst werden, was beispielsweise ausreicht, um die durch Hirnströme außerhalb des Schädels erzeugten magnetischen Signale zu messen (Magnetoenzephalographie, MEG).

<sup>2</sup>Um dies zu erkennen, können wir  $M(H)$  Taylor-entwickeln:  $M(H) = M_0 + dM/dH(H - H_0) + 0.5 \cdot d^2M/dH^2(H - H_0)^2 + \dots$ . Setzt man  $H = H_{ac} \cos \omega t$  ein, so ergibt das quadratische Glied einen Term proportional zu  $\cos^2 \omega t = (1 + \cos 2\omega t)/2$ . Analog ergeben auch die höheren Glieder der Taylorreihe Beiträge zu höheren Harmonischen von  $\omega$ .

<sup>3</sup>GMR = "Giant Magnetoresistance"



## 5.2 Schaltungen mit Induktivitäten und anderen Bauelementen

### 5.2.1 Auf- und Entladen einer Spule

Als einfachsten Schaltkreis betrachten wir einen Stromkreis aus einer Spannungsquelle, einer Induktivität  $L$  und einem Widerstand  $R$  (Abb. 5.5). Die Quelle soll zunächst schlagartig von  $U = 0$  auf  $U = U_0$  geschaltet werden.

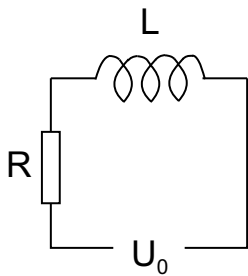


Abbildung 5.5: Auf- und Entladen einer Spule

Gemäß der Kirchhoffschen Maschenregel gilt:

$$U_0 = U_R + U_L \quad (5.8)$$

Wenn der Strom  $I$  durch den Kreis zu fließen beginnt, baut sich eine Induktionsspannung auf, die gegen die EMK der Spannungsquelle gerichtet ist. Der Strom muss gegen diese Spannung getrieben werden, wir erhalten  $U_L = -U_{\text{ind}} = L\dot{I}$ . Wir setzen weiter  $U_R = RI$  ein und erhalten:

$$U_0 = RI + L\dot{I} \quad (5.9a)$$

bzw:

$$\frac{U_0}{R} = I + \frac{L}{R}\dot{I} \quad (5.9b)$$

Wir setzen an:  $I = I_0 \exp(-Rt/L) + \text{const.}$  und erhalten:

$$\frac{U_0}{R} = I_0 e^{-Rt/L} + \text{const.} - I_0 e^{-Rt/L}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt:  $\text{const.} = U_0/R$ . Für  $t = 0$  soll  $I = 0$  sein, woraus  $I_0 = -U_0/R$  folgt.

Für  $I(t)$  ergibt sich also:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-Rt/L}). \quad (5.10)$$

Der Strom wächst mit einer charakteristischen Zeitkonstanten  $L/R$  exponentiell von 0 aus an und sättigt bei  $U_0/R$ . Wir schließen jetzt die Spannungsquelle kurz (d. h.  $U_0 = 0$ ). Zur Zeit  $t = 0$  fließe der Strom  $I_0$ . Der Strom  $I$  baut sich dann nach (5.9b), mit  $U_0 = 0$ , ab, wobei gilt:

$$I(t) = I_0 e^{Rt/L}. \quad (5.11)$$

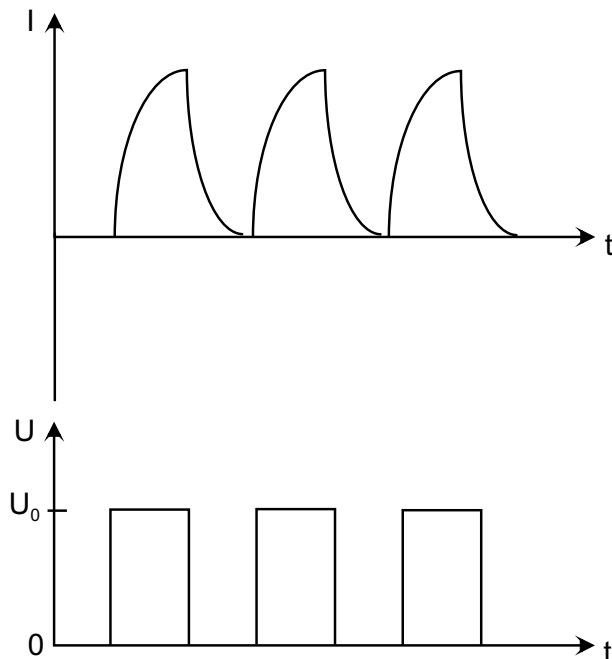


Abbildung 5.6: Zeitverlauf (schematisch) des Stroms durch die Spule der Schaltung 5.5 bei Anlegen einer Rechtecksspannung.

Wir demonstrieren dieses Verhalten durch Anlegen einer Rechtecksspannung  $U(t)$  wie in Abb. 5.6 schematisch dargestellt.

Wir können dieses Verhalten mit dem Be- und Entladevorgang eines Kondensators vergleichen (s. Abschnitt 2.3). Dort floss der größte Strom beim Ein- bzw. Ausschalten der Spannung und klang exponentiell mit der Zeitkonstanten  $RC$  ab.

Insbesondere der Entladevorgang sowohl der Spule als auch des Kondensators ist aus der Warte einer Energie- bzw. Leistungsbilanz interessant. Im Widerstand wird die Leistung  $U_R I$  verbraucht, wie wir ausführlich abgeleitet hatten. Die erforderliche Energie kann nur aus der Spule bzw. dem Kondensator kommen. Nach der Entladung ist die gesamte Energie der Spule bzw. des Kondensators verbraucht. Durch Integration  $W = \int_0^\infty U_R(t) I(t) dt$  können wir wiederum die Energie erhalten, die im Kondensator ( $W = CU_0^2/2$ ) bzw. der Spule ( $W = LI^2/2$ ) gespeichert war.

### 5.2.2 Spule unter Wechselstrom

Wir legen jetzt an die Enden einer Spule eine Wechselspannung  $U_0 \cos \omega t$  an (Abb. 5.7). Der ohmsche Widerstand des Stromkreises sei 0.

Die in der Spule induzierte Spannung ist der angelegten Wechselspannung entgegengerichtet, es gilt:

$$U_0 \cos \omega t = L \dot{I}. \quad (5.12)$$

Die Gleichung wird gelöst durch:

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t. \quad (5.13)$$

Strom und Spannung sind also um  $-90^\circ$  (bzw.  $-\pi/2$ ) "phasenverschoben", [ $\sin \omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$ ]. Das Verhältnis  $|I/U_0|$  nimmt proportional zu  $\omega^{-1}$  ab. Beide Eigenschaften demonstrieren wir experimentell.

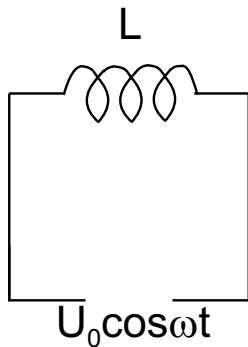


Abbildung 5.7: Spule mit angelegter Wechselspannung

### 5.2.3 Komplexe Widerstände

Spulen wie Kapazitäten unter Wechselstrom<sup>4</sup> können wir sehr elegant durch die Verwendung einer komplexen Schreibweise beschreiben. Wir ersetzen hierzu die angelegte Spannung  $U_0 \cos \omega t$  durch  $U_0 \cdot \exp(i\omega t)$ . Nachträglich können wir (falls nötig) zu einer reellen Schreibweise durch Bildung des Realteils zurückkehren.

Anstelle von (5.12) ergibt sich:

$$U_0 e^{i\omega t} = L \dot{I}. \quad (5.14)$$

Für  $I$  setzen wir an:

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \quad (5.15)$$

wobei wir auch komplexe Werte für  $I_0$  zulassen.

Einsetzen von (5.15) in (5.14) liefert:

$$U_0 e^{i\omega t} = i\omega L I_0 e^{i\omega t} \quad (5.16a)$$

bzw.

$$U = i\omega L \cdot I. \quad (5.16a)$$

Wir haben in diesem Fall wie beim ohmschen Gesetz einen linearen Zusammenhang zwischen  $U$  und  $I$  mit dem komplexen Widerstand ("Impedanz") der Spule  $i\omega L$ .

Es gilt also  $I_0 = U_0 / (i\omega L)$ , bzw.

$$I = \frac{U_0}{i\omega L} e^{i\omega t} = -\frac{iU_0}{\omega L} (\cos \omega t + i \sin \omega t) = \frac{U_0}{\omega L} (\sin \omega t + i \cos \omega t).$$

Der Realteil dieses Ausdrucks reproduziert gerade die Lösung (5.13), die wie durch Rechnung mit reellen Größen erhalten hatten.

Ganz analog können wir auch Kondensatoren einen komplexen Widerstand zuordnen. Legen wir an einen Kondensator eine Wechselspannung  $U_0 \exp(i\omega t)$  an, so erhalten wir mit  $Q = CU$ :

$$U_0 e^{i\omega t} = Q/C \quad (5.17)$$

<sup>4</sup>Wir nehmen hier einen kosinusförmigen Wechselstrom an. Andere periodische Anregungen lassen sich stets durch eine Fourierreihe darstellen.

bzw. durch Bildung der zeitlichen Ableitung:

$$i\omega U_0 e^{i\omega t} = I/C \quad (5.18)$$

Mit dem Ansatz  $I = I_0 \exp(i\omega t)$  erhalten wir:

$$U_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega C} I_0 e^{i\omega t} \quad (5.19a)$$

oder

$$U = \frac{1}{i\omega C} I \quad (5.19b)$$

Wir können also auch für Kondensatoren ein "ohmsches Gesetz" schreiben mit dem komplexen Widerstand  $1/i\omega C$ . Strom und Spannung sind um  $-90^\circ$  phasenverschoben; das Verhältnis  $|I/U_0|$  nimmt proportional zu  $\omega$  zu. Diese Eigenschaften demonstrieren wir im Experiment.

Für **ohmsche Widerstände** gilt natürlich auch in der komplexen Schreibweise  $U = RI$ .

Der enorme Vorteil der komplexen Schreibweise liegt darin, dass sich jetzt auch komplizierte Schaltungen aus Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten wie Schaltungen aus Widerständen allein behandeln lassen. Man erhält für den Gesamtwiderstand einer Anordnung einen komplexen Widerstand  $Z(\omega)$  bzw. einen Zusammenhang  $U = ZI$ . Hieraus lassen sich leicht einfache reelle Zusammenhänge etwa durch Betragsbildung oder Bildung von Realteil und Imaginärteil ableiten.

Wegen der Wichtigkeit komplexer Widerstände seien diese nochmals zusammengestellt.

Bauteil	komplexer Widerstand $Z$
Widerstand	$R$
Kapazität	$1/(i\omega C)$
Induktivität	$i\omega L$

Die **Einheit des komplexen Widerstands** ist in allen Fällen **Ohm**. Das Inverse des komplexen Widerstands wird auch als **komplexer Leitwert  $Y$**  oder als **Admittanz** bezeichnet:  $Y = Z^{-1}$ .

## 5.2.4 Leistung unter Wechselspannung

Die Beziehung  $P = UI$  können wir auch für Wechselspannungen verwenden.

Betrachten wir zunächst einen **ohmschen Widerstand**.

Es gilt:  $P = UI = U^2/R = U_0^2 \cos^2 \omega t / R$ .

Der zeitliche Mittelwert dieses Ausdrucks ist  $\langle P \rangle = 1/2 U_0^2 / R$ , also einen Faktor  $1/2$  weniger als bei Betrieb mit einer Gleichspannung  $U_0$ . Die gleiche effektive Leistung würde man für eine Gleichspannung  $U_{\text{eff}} = U_0 / \sqrt{2}$  (bzw. einen Gleichstrom  $(U_0/R) / \sqrt{2}$ ) erhalten:  $P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = U_{\text{eff}}^2 / R = I_{\text{eff}}^2 R$ . Man nennt deshalb  $U_{\text{eff}}$  und  $I_{\text{eff}}$  auch "**Effektivspannung**" bzw. "**Effektivstrom**".

Welche Leistung wird benötigt, um eine **Spule** anzutreiben?

Wir haben:

$$UI = \frac{U_0^2}{\omega L} \cos \omega t \cdot \sin \omega t = \frac{U_0^2}{\omega L} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\omega t.$$

Der zeitliche Mittelwert dieser Leistung ist Null; die Energie, die der Spule während des Aufladens zugeführt wurde, wird beim Entladen wieder frei. Die Leistung  $UI$ , die momentan benötigt wird, ist eine reine "Blindleistung".

Betrachten wir nun den allgemeineren Fall, dass  $U$  und  $I$  um den Wert  $\delta$  phasenverschoben oszillieren. Es sei  $U = U_0 \cos \omega t$  und  $I = I_0 \cos(\omega t + \delta)$ .

Für  $P$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} P &= U_0 I_0 \cos \omega t \cdot \cos(\omega t + \delta) \\ &= U_0 I_0 \cos \omega t \cdot [\cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta] \\ &= U_0 I_0 \cos \delta \cos^2 \omega t - U_0 I_0 \sin \delta \cdot \cos \omega t \cdot \sin \omega t \end{aligned}$$

Man nennt:  $P_W = U_0 I_0 \cos \delta$  "**Wirkleistung**" und  $P_B = U_0 I_0 \sin \delta$  "**Blindleistung**".

Der zeitliche Mittelwert von  $P$  ergibt  $P_W/2$ . Der Mittelwert von  $P_B$  ist null.

Als Spezialfälle können wir einen Kondensator bzw. eine Spule betrachten. In beiden Fällen ist die Wirkleistung gleich null, die Blindleistung ist  $\pm U_0 I_0$ . Hierbei ist "-" für den Kondensator gültig, "+" für die Spule.

Wir können  $P$  auch in komplexer Darstellung berechnen.

Zunächst schreiben wir:  $U = U_0 e^{i\omega t}$  und  $I = I_0 e^{i\delta} e^{i\omega t} = (I_0 \cos \delta + i \cdot I_0 \sin \delta) \cdot e^{i\omega t}$ .

Man bezeichnet  $I_0 \cos \delta$  als "**Wirkstrom**",  $I_0 \sin \delta$  als "**Blindstrom**".

Um auf einfache Weise in der komplexen Darstellung auf  $P_W$  und  $P_B$  zu kommen, berechnet man am leichtesten

$$\hat{P} = U \cdot I^* = U_0 e^{i\omega t} \cdot I_0 e^{-i\delta} e^{-i\omega t} = U_0 I_0 \cos \delta - i \cdot U_0 I_0 \sin \delta = P_W - iP_B.$$

Wir können hier mit  $U = ZI$  auch den komplexen Widerstand  $Z$  einführen:

$$\hat{P} = UI^* = Z \cdot I \cdot I^* = (Z_r + iZ_i) I_0^2$$

Hierbei haben wir mit  $Z_r$  bzw.  $Z_i$  Real- bzw. den Imaginärteil von  $Z$  berechnet. Man bezeichnet  $Z_r$  auch als **Wirkwiderstand** und  $Z_i$  als **Blindwiderstand**. Mit  $I = U/Z$  erhalten wir:

$$\hat{P} = U \cdot \frac{U^*}{Z^*} = U_0^2 \cdot \frac{1}{Z_r - iZ_i} = U_0^2 \frac{Z_r + iZ_i}{|Z|^2} = U_0^2 (Y_r + iY_i).$$

$Y_r$  bzw.  $Y_i$  sind der Real- bzw. Imaginärteil des komplexen Leitwerts.

### 5.2.5 Zweipole und Vierpole

Im einfachsten Fall hat ein Schaltkreis zwei Klemmen, zwischen denen die (komplexe) Spannung  $U$  anliegt und der Strom  $I$  fließt (Abb. 5.8(a)). Diese Anordnung wird als "Zweipol" bezeichnet. Wir können im Prinzip diesen Schaltkreis als eine "black box" betrachten. Solange der Schaltkreis nur aus Induktivitäten, Kapazitäten und Widerständen besteht, ist er mit  $U = ZI$  vollständig durch  $Z(\omega)$  charakterisiert.

Ein etwas komplizierterer Schaltkreis hat einen Eingang (Eingangsspannung  $U_e$ , Eingangsstrom  $I_e$ ) und einen Ausgang (Ausgangsspannung  $U_a$ , Ausgangsstrom  $I_a$ ), wie in Abb. 5.8(b) dargestellt. Dieser Kreis wird auch "Vierpol" genannt. Kennen wir den Zusammenhang zwischen Eingang und Ausgang, so haben wir den Schaltkreis charakterisiert, ohne dessen Aufbau im Detail zu kennen.

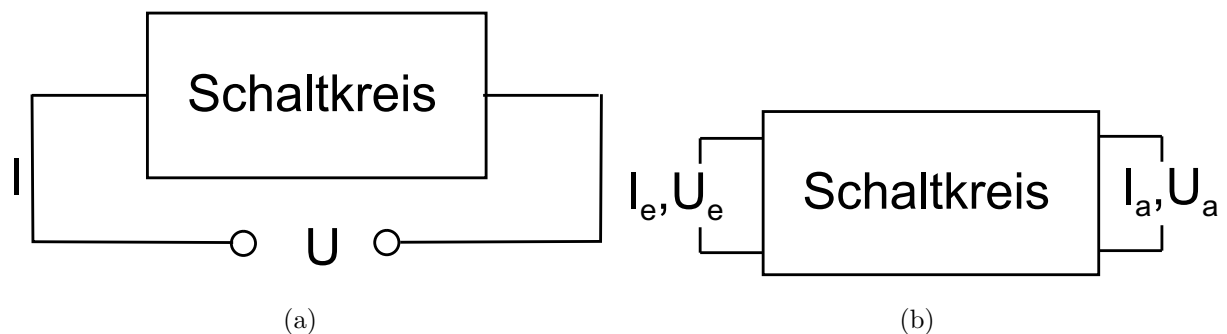


Abbildung 5.8: (a) Zweipol und (b) Vierpol

Wir können den Zusammenhang in Matrixschreibweise in der Form:

$$\begin{pmatrix} U_a \\ I_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_e \\ I_e \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

schreiben, mit der<sup>5</sup>  $2 \times 2$ -Matrix  $S$ . Wir können auch Vierpole miteinander kombinieren, so dass der Ausgang des einen den Eingang eines anderen bildet. Der kombinierte Schaltkreis lässt sich dann ebenfalls in der Form (5.20) darstellen, wobei die Matrix  $S$  des Gesamtkreises leicht nach den Regeln der Matrixmultiplikation zu berechnen ist.

Wir werden im folgenden einige einfache Beispiele analysieren, wobei wir annehmen, dass am Eingang eine Wechselspannung der Frequenz  $\omega$  anliegt. Dabei werden wir nur einige ausgewählte Übertragungsgrößen (z. B.  $S_{11} = U_a(U_e)$  berechnen).

### 5.2.6 Tiefpass

Der in Abb. 5.9. gezeichnete Schaltkreis besteht aus einem Widerstand  $R$  und einer Induktivität  $L$ , die in Reihe geschaltet sind. Die Ausgangsspannung wird über  $R$  abgegriffen.

<sup>5</sup>Falls  $N$  Eingangsgrößen und  $M$  Ausgangsgrößen vorliegen, müsste man  $S$  durch eine  $M \times N$ -Matrix ersetzen

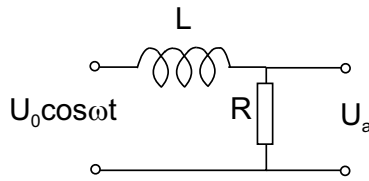


Abbildung 5.9: Tiefpass

Es gilt:  $U_e = U_L + U_R$ . Strom und Eingangsspannung hängen via  $U_e = ZI$ , mit  $Z = i\omega L + R$  zusammen (Reihenschaltung!). Die Ausgangsspannung ist:  $U_a = RI = RU_e/Z$ , woraus folgt:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R}{R + i\omega L}. \quad (5.21)$$

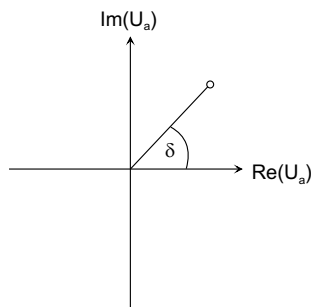
Für den Betrag  $|U_a/U_e|$  ergibt sich:

$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \left| \frac{R}{R + i\omega L} \right| = \frac{R}{\sqrt{(R + i\omega L)(R - i\omega L)}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (5.22)$$

Für  $\omega = 0$  ist  $|U_a/U_e| = R$ ; für  $\omega L \gg R$  ergibt sich  $|U_a/U_e| \approx R/(\omega L)$ , d. h.  $|U_a/U_e|$  geht proportional zu  $\omega$  gegen null. Die Schaltung lässt also nur tiefe Frequenzen passieren ("Tiefpass")<sup>6</sup>.

Wir haben die Eingangsspannung  $\propto \cos \omega t$  als reell gewählt. Die Ausgangsspannung ist demgegenüber um eine Phase  $\delta$  verschoben, d. h.  $U_a \propto \cos(\omega t + \delta)$ .

Abb. 5.10 stellt die Situation in einer komplexen Ebene dar, in der als  $x$ -Achse  $\text{Re}(U_e)$  und als  $y$ -Achse  $\text{Im}(U_a)$  aufgetragen ist.

Abbildung 5.10: Zur Bestimmung der Phasenverschiebung  $\delta$ .

Aus der Abbildung ergibt sich leicht:

$$\tan \delta = \frac{\text{Im}(U_a)}{\text{Re}(U_a)}. \quad (5.23)$$

Da wir  $U_e$  reell gewählt hatten, gilt mit (1.98) und

$$\frac{R}{R + i\omega L} = \frac{R^2}{R^2 + \omega^2 L^2} (R - i\omega L) \quad (5.24)$$

$$\tan \delta = \frac{-\omega L}{R}. \quad (5.25)$$

<sup>6</sup>Der hier vorgestellte Tiefpass ist noch nicht sehr effektiv. Ein idealer Tiefpass sollte ein Signal bis zu einer Frequenz  $\omega_g$  unabgeschwächt durchlassen, Signale höherer Frequenz dagegen überhaupt nicht. Man kann diesem Ideal mit komplizierteren Schaltungen als der hier vorgestellten aber recht nahe kommen.

Für  $\omega = 0$  ist  $\delta = 0$ , für  $\omega \rightarrow \infty$  geht  $\delta$  gegen  $\pi/2$  (bzw.  $90^\circ$ ). Der Wert  $\pi/4$  ( $45^\circ$ ) wird für  $\omega = R/L$  erreicht.

Die Abb. 1.56 zeigt  $|U_a/U_e|$  und  $\delta$  als Funktion von  $\omega$ . Wegen  $U_a = RI_e$  erhalten wir die gleiche Kurvenform auch für  $|I_e/U_e|$ . Diese Kurvenform, sowie die Frequenzabhängigkeit von  $\delta$  beobachten wir auch experimentell.

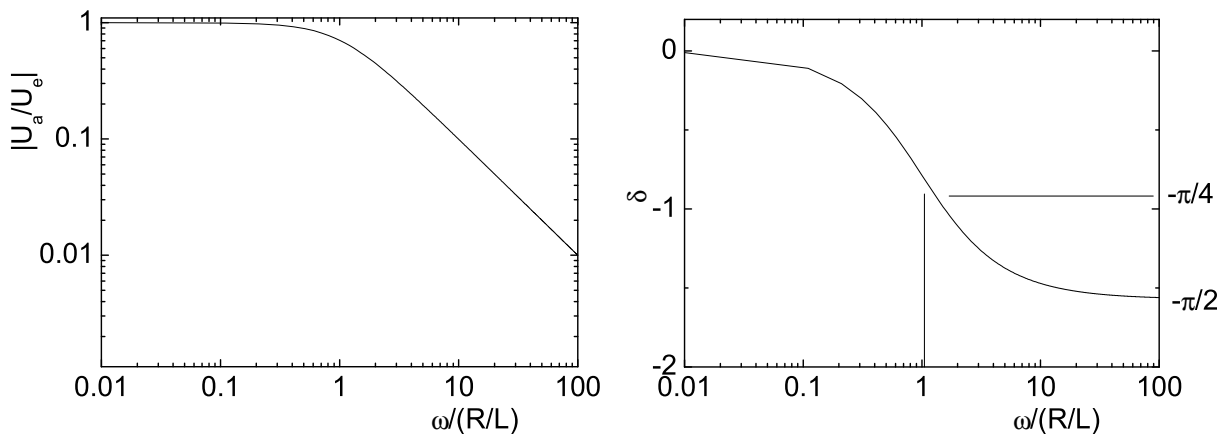


Abbildung 5.11: Übertragungsfunktion  $|U_a/U_e|$  und Phasenwinkel  $\delta$  als Funktion von  $\omega$  in logarithmischer Auftragung für die Schaltung der Abb. 5.9.

Welche Leistung wird in der Schaltung verbraucht? Die Eingangsspannung ist reell,  $U_e = U_0 \cos \omega t$ , der Strom durch die Schaltung hat einen cos- und einen sin-Anteil. (Realteil bzw. Imaginärteil des komplexen Stroms). Nur der cos-Anteil, d. h. der Realteil von  $I$  liefert einen Beitrag zur "Wirkleistung"  $P_W$ . Diese ergibt sich mit  $U = ZI$  als

$$P_W = U_0^2 \operatorname{Re}(1/Z) = U_0^2 \frac{Z_r}{Z_r^2 + Z_i^2}.$$

Der zeitliche Mittelwert von  $P_w$  ist

$$\langle P_w \rangle = \frac{1}{2} U_0^2 \frac{Z_r}{Z_r^2 + Z_i^2}.$$

Für unsere Schaltung ist  $Z = i\omega L + R$  und damit

$$P_W = U^2 \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Für die Blindleistung erhalten wir:  $P_B = U_0^2 \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$ . Für  $\omega \rightarrow \infty$  und  $\omega = 0$  verschwindet  $P_B$ . Die Funktion nimmt ihr Maximum von  $P_B = U_0^2/(2R)$  für  $\omega = R/L$  an.

### 5.2.7 Hochpass

Wir betrachten die Schaltung der Abb. 5.12, in der gegenüber Abb. 5.9  $L$  durch  $C$  ersetzt ist.



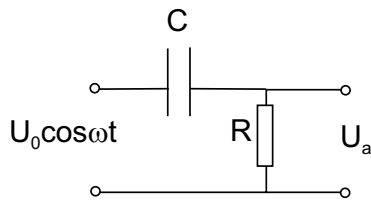


Abbildung 5.12: Hochpass

Für den komplexen Widerstand erhalten wir  $Z = 1/(i\omega C) + R$ , für  $U_a/U_e$  ergibt sich:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R}{R + 1/(i\omega C)}. \quad (5.26)$$

Hieraus folgt:

$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega^2 C^2)}}. \quad (5.27)$$

Der Ausdruck geht gegen Null für  $\omega \rightarrow 0$ ;  $|U_a/U_e| \rightarrow 1$  für  $\omega \rightarrow \infty$ . Der Schaltkreis lässt also bevorzugt hohe Frequenzen passieren. Für den Phasenwinkel finden wir

$$\tan \delta = \frac{1}{\omega RC}. \quad (5.28)$$

Für  $\omega \rightarrow 0$  ist  $\delta = \pi/2$ , für  $\omega \rightarrow \infty$  geht  $\delta$  gegen Null. Die Abb. 5.13 zeigt  $|U_a/U_e|$  und  $\delta$  als Funktion von  $\omega$ .

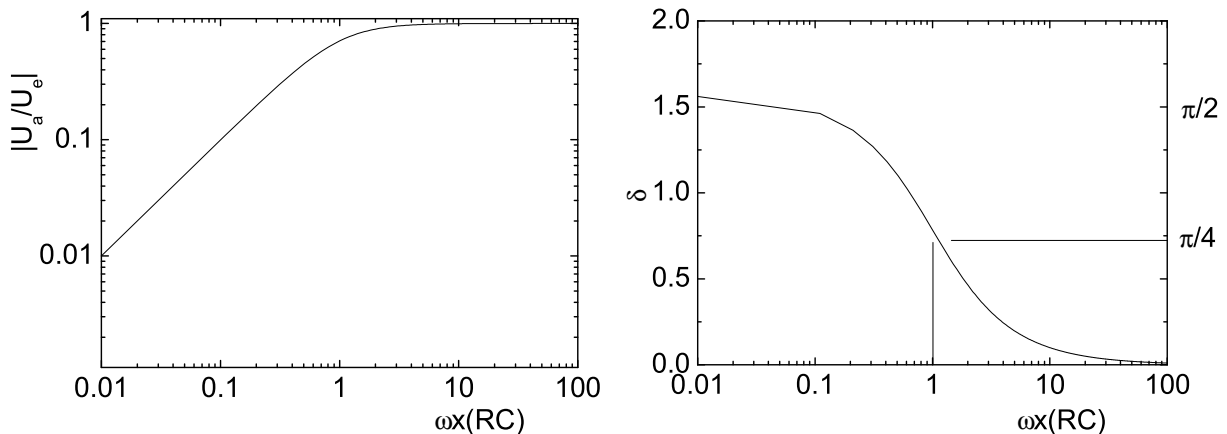


Abbildung 5.13: Übertragungsfunktion  $|U_a/U_e|$  und Phasenwinkel  $\delta$  als Funktion von  $\omega$  für die Schaltung der Abb. 5.9.

### 5.2.8 Serieller Schwingkreis

In der in Abb. 5.14 gezeigten Schaltung sind eine Induktivität  $L$  und eine Kapazität  $C$  in Reihe geschaltet.

Wir erhalten für den komplexen Widerstand:

$$Z = i\omega L + \frac{1}{i\omega C}. \quad (5.29)$$

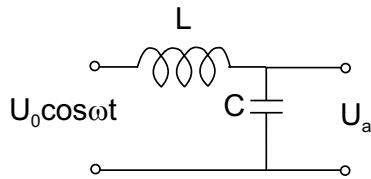


Abbildung 5.14: Serieller Schwingkreis

Damit ergibt sich:

$$\frac{U_c}{U_0} = \frac{1}{i\omega C} \cdot I = \frac{1}{i\omega C} \frac{1}{i(\omega L - 1/(\omega C))} = \frac{-1}{\omega^2 LC - 1} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC}. \quad (5.30)$$

Für  $\omega = 0$  ist  $U_c = U_0$ ; für  $\omega \rightarrow \infty$  geht  $U_c/U_0$  proportional zu  $1/\omega^2$  gegen null. Für  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  divergiert  $U_c/U_0$ . Hier kompensieren sich die komplexen Widerstände des Kondensators und der Spule, wir erhalten  $Z = 0$ .

Für den Phasenwinkel  $\delta$  ergibt sich der Wert 0 für  $\omega < 1/\sqrt{LC}$  (d. h.  $U_a$  und  $U_c$  in Phase), für  $\omega > 1/\sqrt{LC}$  ergibt sich  $\delta = \pi$  (d. h.  $U_a$  und  $U_c$  in Phase).

Abb. 5.15 zeigt die Funktion  $|U_c/U_0|$ , sowie den Phasenwinkel  $\delta$  als Funktion von  $\omega$ .

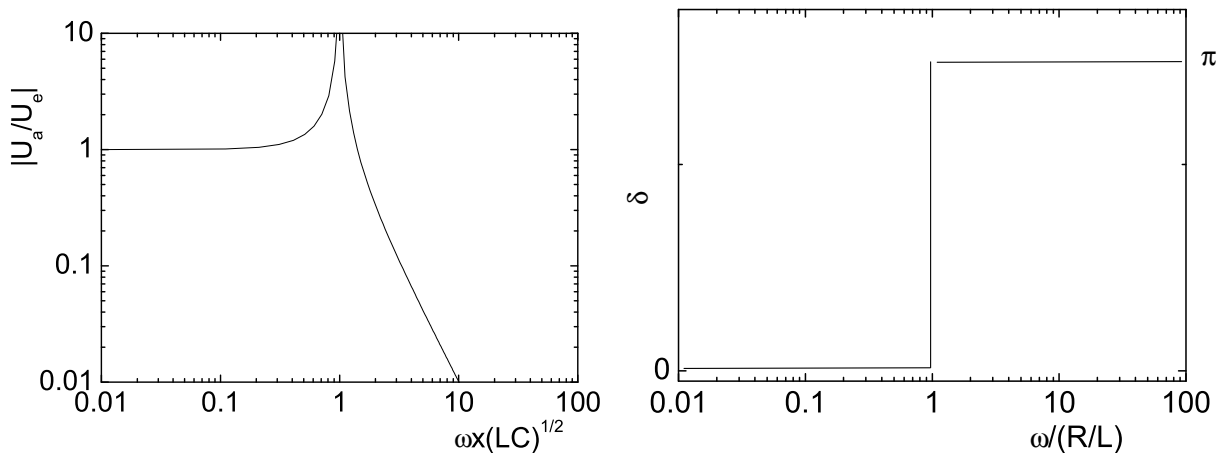


Abbildung 5.15: Übertragungsfunktion  $|U_a/U_e|$  und Phasenwinkel  $\delta$  als Funktion von  $\omega$  für die Schaltung der Abb. 5.14.

Wir berechnen noch Amplitude und Phasenlage des Stroms  $I$  durch den Schaltkreis. Mit  $U = ZI$  erhalten wir  $I/U = 1/Z = -i/(\omega L - 1/(\omega C)) = i\omega C/(1 - \omega^2 LC)$ .

Hieraus ergibt sich:

$$\left| \frac{I}{U} \right| = \frac{\omega C}{1 - \omega^2 LC} \quad (5.31)$$

(siehe Abb. 5.16). Das Verhältnis  $I/U$  ist immer imaginär und auf der positiven Achse für  $\omega < 1/\sqrt{LC}$ , sowie auf der negativen Halbachse für  $\omega > 1/\sqrt{LC}$ . Die Phasenlage  $\delta$  zwischen Strom und Spannung springt also bei von  $\pi/2$  nach  $-\pi/2$ .

Bevor wir die Vorgänge in diesem Schaltkreis genauer analysieren, wollen wir zunächst die Schaltung der Abb. 5.14 um einen Widerstand  $R$  erweitern (Abb. 5.17).

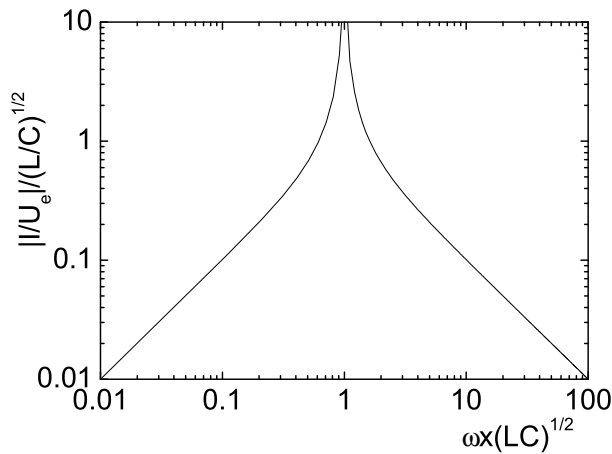
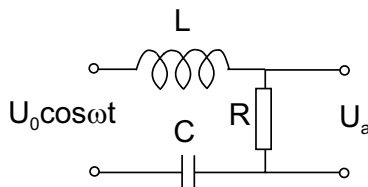
Abbildung 5.16: Verhältnis  $|I/U_0|$  im Schaltkreis der Abb. 5.14

Abbildung 5.17: Serienschwingkreis mit Dämpfung

Für den komplexen Widerstand erhalten wir:  $Z = R + i(\omega L - 1/\omega C)$ . Für  $|U_a/U_e|$  ergibt sich:

$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega RC)^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}}. \quad (5.32)$$

Für die Phasenlage  $\delta$  erhalten wir:

$$\tan \delta = \frac{-(\omega L - 1/\omega C)}{R} = \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC}. \quad (5.33)$$

$|U_a/U_e|$ , sowie  $\delta$  sind in Abb. 5.18 für verschiedene Werte von  $R$  (genauer: das Verhältnis  $R(C/L)^{1/2}$ ) aufgetragen. Bei  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  wird  $|U_a/U_e| = 1$  und  $\delta = 0$ . Die Anordnung wirkt als "Bandpass", die Frequenzen in der Nähe von  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  durchlässt. Für kleine Frequenzen geht  $\delta$  gegen  $\pi/2$ , für große gegen  $-\pi/2$ . Auch diese Schaltung überprüfen wir experimentell.

Wie können wir den Schaltkreis weiter analysieren?

Wir lagern hierzu anstelle einer Wechselspannung eine Rechteckspannung an. Wir beobachten, dass der Strom im Schaltkreis insbesondere nach Ausschalten der Spannung eine gedämpfte Schwingung ausführt.

Für  $U_a = 0$  haben wir den in Abb. 5.19 dargestellten Schaltkreis vorliegen.

Hier gilt:

$$U_L + U_C + U_R = 0 \quad (5.34)$$

bzw. mit  $U - R = RI$ ,  $U_c = Q/C$  und  $U_L = LI\dot{}$

$$LI\dot{ } + \frac{Q}{C} + RI = 0 \quad (5.35)$$

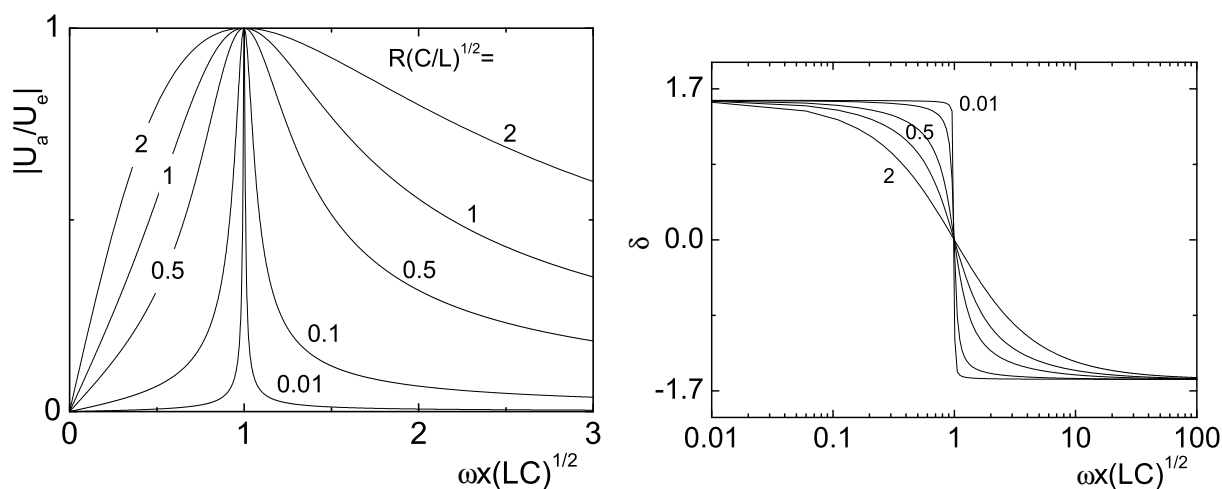


Abbildung 5.18: Übertragungsfunktion  $|U_a/U_e|$  und Phasenwinkel  $\delta$  als Funktion von  $\omega$  für die Schaltung der Abb. 5.14.

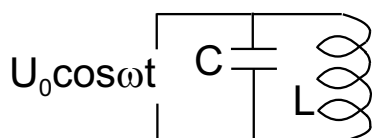


Abbildung 5.19: Kurzgeschlossener Schwingkreis

Differenzieren nach der Zeit liefert:

$$LC\ddot{I} + I + RC\dot{I} \quad (5.36)$$

Dies ist die Differentialgleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators. Mit dem Ansatz

$$I(t) = I_0 e^{-\lambda t} \quad (5.37)$$

finden wir:

$$\lambda^2 LC + 1 - \lambda RC = 0 \quad (5.38)$$

und hieraus die zwei Lösungen:

$$\lambda_{\pm} = \frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}} \quad (5.39)$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich als Linearkombination  $I(t) = I_{0,1} \exp(-\lambda_+ t) + I_{0,2} \exp(-\lambda_- t)$ , wobei die Koeffizienten durch geeignete Anfangsbedingungen festgelegt sind. Für  $(R/L)^2 > 4/LC$  (d. h.  $R > 2(L/C)^{1/2}$  bzw. "Gütefaktor"<sup>7</sup>  $Q := (L/C)^{1/2}/(2R) < 1$ ) ist der Ausdruck unter der Wurzel positiv und  $\lambda_{\pm}$  reell und größer (oder gleich) Null. Der Strom klingt ohne Oszillationen exponentiell ab. Für  $Q > 1$  ist  $\lambda_{\pm}$  komplex, man erhält eine gedämpfte Oszillation. Für  $Q = 1$  schließlich ist  $\lambda_+ = R/2L$  und  $\lambda_- = 0$ ; dies ist der aperiodische Grenzfall.

<sup>7</sup>Oft wird der Gütefaktor auch als  $Q = (L/C)^{1/2}/R$  definiert, was sich von der hier gebrauchten Definition um einen Faktor 2 unterscheidet.

Die Schaltung 5.17 bzw. 5.19 ist ein Schwingkreis mit der Eigenfrequenz (bei schwacher Dämpfung)  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . Die in Abb. 5.15 gezeigten Kurven sind die Resonanzkurven dieses Kreises.  $R$ ,  $L$  und  $C$  sind bei diesem Schwingkreis in Reihe geschaltet. Man spricht deshalb von seriellem Schwingkreis. Es gibt allerdings einen Unterschied zu dem in Physik I behandelten getriebenen Oszillator: Dort war die homogene Schwingungsgleichung durch die anregende Kraft zu ergänzen. In (5.36) müssen wir aber wegen der zeitlichen Differentiation von (5.35) die zeitliche Ableitung der anregenden Spannung schreiben, also  $-\omega U_0 \sin(\omega t)$ . Dies erklärt beispielsweise, warum  $|U_a|$  für  $\omega = 0$  verschwindet (im mechanischen Fall war die Amplitude des Oszillators bei kleinen Frequenzen proportional zur anregenden Amplitude)<sup>8</sup>.

Es ist ebenfalls instruktiv, für die Oszillationen im Schwingkreis eine **Energiebetrachtung** für den Fall verschwindender Dämpfung aufzustellen. Die Energie im Kondensator ist  $W_C = CU^2/2$ , die Energie in der Spule  $W_L = LI^2/2$ . Die Spannung im Kondensator ist gegenüber dem Strom um  $90^\circ$  phasenverschoben. Es gilt also:

$$W_C = \frac{1}{2}CU_0^2 \cos^2 \omega t \quad W_L = \frac{1}{2}LI_0^2 \sin^2 \omega t.$$

Die Energie im Kondensator ist maximal, wenn die Energie in der Spule minimal ist und umgekehrt. Für  $R = 0$  müssen die Spannungsabfälle über der Spule und dem Kondensator entgegengesetzt gleich sein. Hieraus folgt unmittelbar  $I_0 = \omega C$ . Mit  $\omega = 1/(LC)^{1/2}$  erhalten wir schließlich:

$$W_L = \frac{1}{2}L(\omega C)^2 U_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2}CU_0^2 \sin^2 \omega t$$

**Die Amplituden von  $W_c$  und  $W_L$  sind also gleich groß.** Hieraus ergibt sich für die Gesamtenergie :

$$W_c + W_L = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}LI_0^2$$

Die Energie "schaukelt" periodisch zwischen Spule und Kondensator hin- und her; die Summe aus beiden Energien ist konstant, wie wir aus dem allgemeinen Prinzip der Energieerhaltung auch hätten erwarten können. Für  $R > 0$  wird dagegen Energie im Widerstand dissipiert, der Widerstand erwärmt sich.

Im Experiment beobachten wir das Abklingen der Schwingungen des Kreises der Abb. 5.19 für verschiedene Dämpfungen (die Anregung des Kreises erfolgt durch eine Rechteckspannung). Wir bringen ebenfalls verschiedene Kerne in die Spule. Wenn wir einen Ferriten einbringen, so nimmt (bei kleinem Widerstand  $R$ ) die Periode der Oszillationen zu, was wir wegen der um den Faktor  $\mu$  vergrößerten Induktivität auch erwarten. Bringen wir dagegen Weicheisenkerne ein, so nimmt die *Dämpfung* der Oszillationen stark zu. Woher kommt dies? Zum einen ist Weicheisen leitfähig; der zeitlich variable Fluss in der Spule induziert daher Wirbelströme im Kern, die den Kreis dämpfen. Wir sehen allerdings

<sup>8</sup>Wenn wir uns dagegen wie in Abb. 5.14 für die über dem Kondensator abgegriffene Spannung  $U_c$  als Ausgangsgröße interessieren, so erhalten wir zunächst:  $U_e = U_R + U_L + U_C$ . Mit  $U_R = RI$ ,  $U_L = LI\dot{}$  und  $I = C\dot{U}_C$  erhalten wir:  $U_e = RC\dot{U}_C + LC\ddot{U}_C + U_C$ . Für die Spannung am Kondensator erhalten wir also eine Differenzialgleichung, die der für die Auslenkungsamplitude des getriebenen mechanischen Oszillators völlig äquivalent ist.

relativ wenig Unterschied im Abklingverhalten des Stroms, wenn wir einen Vollzylinder, einen Hohlzylinder oder einen geschlitzten Hohlzylinder einschieben.

Der wesentlich größere Dämpfungseffekt kommt durch die Hystereseschleife des Kerns zustande. Während einer Periode des Wechselstroms wird die Energie  $\oint \mu_0 \vec{M} d\vec{H}$  im Kern verbraucht. Die während eines Magnetisierungszyklus durchfahrene Fläche  $M(H)$  ergibt also gerade die Energie, die für die Ummagnetisierung nötig ist. Diese Fläche und damit der Energieverlust ist bei den Eisenkernen wesentlich größer als bei den Ferriten, weshalb Ferrite für Wechselstromanwendungen eindeutig vorteilhaft sind.

### 5.2.9 Paralleler Schwingkreis

Als Beispiel für eine Parallelschaltung komplexer Widerstände behandeln wir noch kurz den Kreis der Abb. 5.20 (Parallelschaltung aus  $L$  und  $C$ )

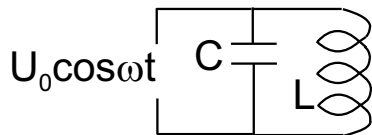


Abbildung 5.20: Parallelschwingkreis

Der komplexe Widerstand der Anordnung ist:

$$Z = \frac{1}{i\omega C + 1/(i\omega L)} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC} \quad (5.40)$$

$Z$  ist immer imaginär und wechselt bei  $\omega = 1/(\sqrt{LC})$  das Vorzeichen. Für  $|I_e/U_e|$  erhalten wir:

$$\left| \frac{I_e}{U_e} \right| = \frac{1}{|Z|} = \frac{|1 - \omega^2 LC|}{\omega L}. \quad (5.41)$$

Die Funktion ist in Abb. 5.21 dargestellt.

Der Ausdruck ist gleich Null für  $\omega = 1/(\sqrt{LC})$ ; Für  $\omega \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow \infty$  divergiert  $|I/U_e|$  (Hätten wir noch einen Widerstand  $R$  in Reihe mit der Spannungsquelle berücksichtigt, so hätten wir  $|I/U_e| \rightarrow R$  in diesen Grenzfällen erhalten).

Die Impedanz des Parallelschwingkreises wird bei der Resonanzfrequenz unendlich. Hier fließt kein Strom durch die Anordnung, die damit als "Bandsperre" wirkt.

### 5.2.10 Selbsterregender Schwingkreis

Wir haben bislang in diesem Abschnitt rein passive Bauelemente ( $R, L, C$ ) betrachtet, die durch eine "Spannungsquelle" angeregt wurde. Wie erzeugt man Wechselspannungen? Bei niedrigen Frequenzen (z. B. 50 Hz) konnten wir das Induktionsgesetz ausnutzen und beispielsweise eine Induktionsschleife im Magnetfeld drehen. Für Frequenzen im kHz- bis GHz - Bereich ist dies nicht praktikabel. Hier können aber Bauelemente wie Transistoren oder Trioden<sup>9</sup> verwendet werden. Auf deren genaueres Funktionsprinzip gehen wir

<sup>9</sup>Trioden (Röhrenverstärker) wurden früher sehr häufig benutzt, sind aber weitgehend von Transistoren ersetzt worden. Heute verwendet man Röhrenverstärker noch für die Verstärkung sehr hoher Leistungen.

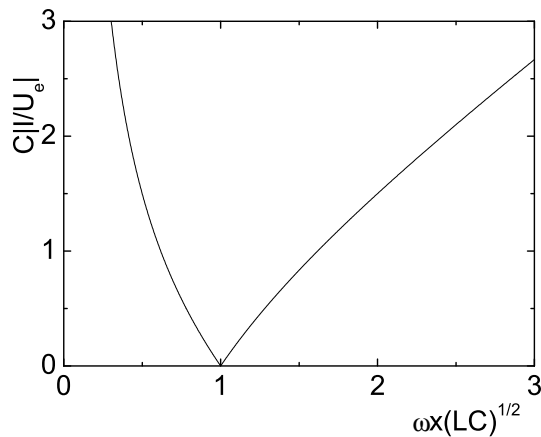


Abbildung 5.21: Übertragungsfunktion  $C|I/U_e|$  für die Schaltung der Abb. 5.20.

im nächsten Unterabschnitt genauer ein. Hier soll zunächst nur gesagt werden, dass diese Verstärker zwei Eingangsklemmen haben, die einen gegebenen Stromkreis schließen, sowie einen Ausgang, der die am Eingang anliegende Spannung verstärkt herausgibt. Das Prinzip ist in Abb. 5.22 an Hand des Schaltsymbols eines "bipolaren Transistors" gezeigt.

Die Eingänge sind mit E (Emitter) und C (Kollektor) bezeichnet. Der Ausgang ist B (Basis). Zwischen Emitter und Kollektor fließt der Strom  $I_{EC}$ . Er kann durch die Spannung  $U_B$  stark geändert werden, wobei nur ein geringer Strom  $I_B$  durch die Basis fließt. Man kann damit mit sehr geringer Leistung  $U_B I_B$  eine sehr große Leistungsänderung  $\Delta(U_{CE} I_{CE})$  erzielen<sup>10</sup>.

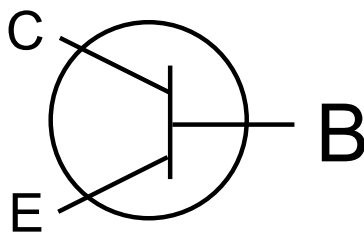


Abbildung 5.22: Schaltsymbol des bipolaren Transistors

Wir schließen nun die Eingänge E und C an den Parallelschwingkreis der Abb. 5.20 an. Zusätzlich bringen wir noch eine Gleichspannungsquelle  $U_0$  (Batterie) in Reihe mit dem Transistor in den Stromkreis ein. Betrachten wir den Transistor als Widerstand  $R_T$ , so besteht unsere Schaltung aus einer durch Reihenschaltung aus  $R_T$  und dem Schwingkreis, die durch die Spannung  $U_0$  versorgt wird. Durch die Schaltung fließt jetzt der (Gleich-)Strom  $I_{CE} = U/R_T$ . Jetzt bringen wir parallel zur Spule  $S_1$  (Induktivität  $L_1$ ) eine Spule  $S_2$  (Induktivität  $L_2$ ) an und verbinden diese mit E und B. Auch dieser Stromkreis muss eine Gleichspannungsquelle  $U'_0$  enthalten, die die Basis versorgt. Auch in diesem sekundären Stromkreis fließt jetzt ein gewisser (Gleich-)Strom  $I_{BE}$  (s. Abb. 5.23)

<sup>10</sup>Ein mechanisches Analog ist ein (leicht drehbarer) Wasserhahn. Er lässt sich mit geringem Aufwand auf- und zudrehen und steuert damit einen u. U. sehr großen Wasserfluss durch die Leitung, der seinerseits zur Energiegewinnung genutzt werden kann. Man kann beispielsweise einen Teil dieser Energie entnehmen, um wiederum den Wasserhahn auf- und zuzudrehen.

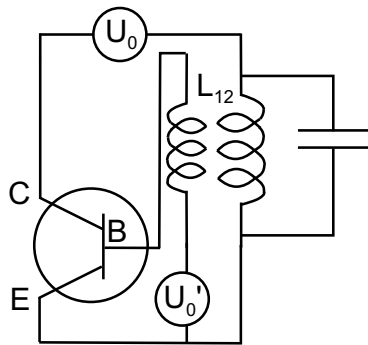


Abbildung 5.23: Selbsterregender Schwingkreis (Meißnersche Rückkopplungsschaltung).

Wären die beiden Stromkreise entkoppelt, würde nichts weiteres passieren. Zwischen den beiden Spulen sind aber induktiv über eine Gegeninduktivität  $L_{12}$  gekoppelt. Falls im ersten Stromkreis  $I_{BE}$  mit der Frequenz  $\omega$  oszilliert, so wird über  $L_{12}$  in  $S_2$  eine Wechselspannung induziert, die wiederum den Strom  $I_{BE}$  bzw.  $R_T$  moduliert. Der erste Kreis besteht jetzt aus einem Schwingkreis mit zeitlich moduliertem Widerstand  $R$ . Es zeigt sich nun, dass in einem derartigen Kreis Schwingungen, die ursprünglich mit einer nur kleinen Amplitude vorhanden waren, verstärkt werden. Das System schaukelt sich zu einem gewissen Sättigungswert auf und oszilliert "von selbst" mit einer Frequenz, die durch  $L_1$ ,  $L_2$  und  $C$  bestimmt ist ("**Parametrische Verstärkung**").

Dieser Vorgang ist Ihnen bereits aus der Physik I (bzw. sogar aus dem Kindesalter) wohlbekannt. Auch Pendeluhr pendeln von selbst, sobald sie angestoßen werden. Die Energie kommt dabei von einem ablaufenden Gewicht, die Rückkopplung wird durch die Unruh erzielt (vgl. Physik I). Aus Ihrer Kindheit kennen Sie die **Kinderschaukel** bzw. die Schiffschaukel. An den Umkehrpunkten der Schaukel sollte der Schwerpunkt des Kindes niedrig sein (das Kind kniet leicht), im Minimum hoch (das Kind steht aufrecht). Insgesamt "pumpt" das Kind bzw. sein Schwerpunkt mit  $2\omega$ . Die Energie, die für diese Pumpbewegung nötig ist, liefert Energie in die Schaukelbewegung<sup>11</sup>.

Mit selbsterregenden Schwingkreisen wie in Abb. 5.23 lassen sich sinnvoll Schwingungen mit Frequenzen von kHz bis wenige GHz erzeugen. Die Erzeugung von Schwingungen höherer Frequenz werden wir etwas später diskutieren.

### 5.2.11 Transistoren und andere verstärkende Bauelemente

Wir betrachten hier kurz das Funktionsprinzip von Transistoren<sup>12</sup> und Trioden.

Bei der **Triode** (s. Abb. 5.24) werden freie Elektronen durch Glühemission aus einer Kathode erzeugt und durch eine Spannung  $U_a$  zu der Anode hin beschleunigt. Zwischen Kathode und Anode befindet sich ein Gitter das bezüglich der Kathode auf einem Potenzial  $U_g$  liegt. Durch Variation von  $U_g$  wird der Elektronenstrom gesteuert.

Wie sieht bei festem  $U_a$  der Elektronenstrom als Funktion von  $U_g$  aus?

Für stark negative Werte von  $U_g$  nur wenige Elektronen (Boltzmann-Verteilung!) in der

<sup>11</sup>Wäre allerdings die Schaukel zu Beginn völlig ruhig gestanden, hätte das Kind beliebig zappeln können. Die Schaukel hätte sich nicht in Bewegung gesetzt.

<sup>12</sup>Das genaue Verständnis der Funktionsweise eines Transistors verlangt detaillierte Kenntnisse aus der Festkörperphysik. Wir können daher das Funktionsprinzip des Transistors nur kurz umreißen.



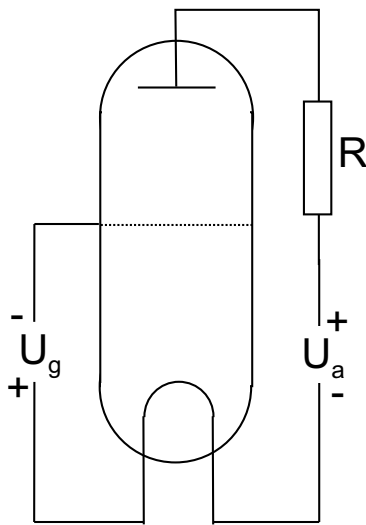


Abbildung 5.24: Triode.

Lage, die Gegenspannung  $U_g$  zu durchlaufen. Mit wachsendem  $U_a$  (d. h. fallendem  $|U_a|$ ) nimmt  $I$  zunächst exponentiell zu und sättigt schließlich für schwach negative oder positive Werte von  $U_a$  (fast alle Elektronen erreichen die Anode).

In einem gewissen Bereich ist der differentielle Leitwert  $dI/dU_g$  sehr groß. Eine kleine Änderung  $\Delta U_g$  bewirkt eine große Änderung  $\Delta I$ , die z. B. zu einer großen Änderung des Spannungsabfalls über dem in Abb. 5.24 eingezeichneten Widerstand  $R$  führt. Die Triode kann, bei geeignet gewählten Betriebsspannungen, Spannungsänderungen verstärken und z. B. zur Anregung von Schwingkreisen, wie im letzten Abschnitt diskutiert, verwendet werden.

Transistoren sind aus halbleitenden Materialien aufgebaut. Man unterscheidet bipolare Transistoren und Feldeffekt-Transistoren (FETs) (Abb. 5.25).

Die Konzentration freier Elektronen ist in reinen Halbleitern bei Zimmertemperatur sehr gering. Bringt man Fremdatome in das Material ein ("dotieren"), so können diese entweder Elektronen abgeben ("Donatoren") oder binden "Akzeptoren". Bei Dotierung mit Donatoren leiten diese überzähligen Elektronen den Strom ("n-Dotierung") bei Dotierung mit Akzeptoren verhalten sich die übriggebliebenen nichtgebundenen Elektronen so, als hätte der Akzeptor einen Ladungssträger mit positiver Ladung ("Loch") freigesetzt ("p-Dotierung"). Die "Löcher" sind analog zu Luftblasen im Wasser zu sehen.

Im bipolaren Transistor (Abb. 5.25(a)) bringt man zwischen zwei Elektroden einer Dotierung (z. B. "n") eine dünne Schicht der anderen Dotierung ein (nnp-Transistor bzw. pnp-Transistor). In der Zwischenschicht bilden sich Raumladungszonen aus, die insbesondere zu einer starken Verringerung der Ladungsträgerkonzentration führen ("Verarmungszone"). Nur sehr wenige Elektronen (nnp-Transistor) bzw. Löcher (pnp-Transistor) gelangen über diese Schicht. Durch Anlegen einer Spannung  $U_B$  an die Zwischenschicht verringert sich die Ausdehnung der Raumladungszone, der Strom  $I_{CE}$  wächst stark an. Man hat also wiederum die Möglichkeit, bei geeignet gewählten Vorspannungen eine große Änderung  $\Delta I_{CE}/\Delta U_B$  zu erreichen. Feldeffekttransistoren (vgl. Abb. 5.25(b)) werden auf der Oberfläche eines reinen Halbleiters realisiert. Zwei äußere Elektroden ("Source" und "Drain") befinden sich elektrisch leitfähig auf einem stark dotierten Untergrund. Zwischen den Elektroden befindet sich ein schwach dotierter, leitfähiger Kanal. Über dem Kanal befindet sich elektrisch isoliert eine weitere Elektrode ("Gate"). Legt man an das

Gate eine Spannung an, so ändert sich der Querschnitt des Kanals und damit die Leitfähigkeit zwischen Source und Drain. Durch die Gate-Spannung kann Der Strom  $I_{SD}$  zwischen Source und Drain gesteuert werden.

Feldeffekttransistoren auf der Basis von GaAs sind sehr schnell. Der Kanal kann in wenigen ps geschaltet werden, so dass Frequenzen bis zu etlichen GHz verarbeitet werden können.

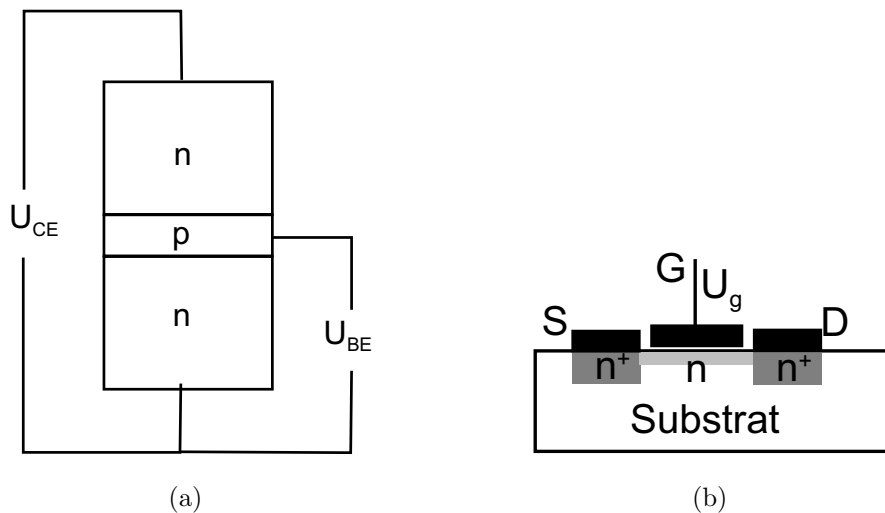


Abbildung 5.25: Bipolarer Transistor (a) und Feldeffekttransistor (b).

### 5.2.12 Transformatoren

Das letzte Bauelement, das wir hier betrachten wollen, ist der Transformator. Seine Aufgabe ist es, eine Wechselspannung mit Amplitude  $U_1$  auf eine Wechselspannung mit Amplitude  $U_2$  zu transformieren. Man setzt kleine Transformatoren in der Elektronik ein, sehr große Transformatoren, um die von den Kraftwerken erzeugte Hochspannung (380 kV bzw. 220 kV) schrittweise auf die in den Haushalten üblichen 220 V zu transformieren<sup>13</sup>. Abb. 5.26 zeigt nochmals den Aufbau des Transformators. Eingangsseitig liegt an der Primärspule (Windungszahl:  $N_1$ ) die Primärspannung  $U_e$  an. Für den in dieser Spule erzeugten magnetischen Fluss gilt:

$$U_1 = -N_1\dot{\phi}_1. \quad (5.42)$$

Dieser Fluss wird durch den Kern praktisch vollständig in die Sekundärspule übertragen, d. h.  $\varphi_s \approx \varphi_p$ .<sup>14</sup>

Die in der Sekundärspule induzierte Spannung ist  $U_a = -N_2\dot{\phi}_2$ .

Das Verhältnis Sekundärspannung zu Primärspannung ist also gleich  $N_2/N_1$ .

<sup>13</sup>In Umspannwerken werden 220 kV bzw. 380 kV zunächst auf 110 kV umgesetzt. Die regionale Verteilung erfolgt mit dieser Spannung, die dann anschließend auf 30 kV und dann regional auf haushaltsübliche Werte transformiert wird.

<sup>14</sup>Je nach Windungssinn der Sekundärspule muss  $\varphi_2$  evtl. auch negativ gezählt werden.

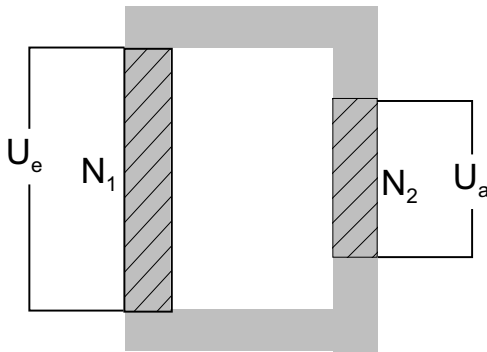


Abbildung 5.26: Transformator

Offensichtlich sollte der Kern des Transformators möglichst verlustfrei sein, d. h. die Hysterese  $M(H)$  sollte gering sein, ebenfalls die Leitfähigkeit des Materials. Man verwendet vorzugsweise Ferrit, das deshalb auch "Transformatorblech" genannt wird.

Bislang hatten wir einen unbelasteten Transformator mit offener Ausgangsseite betrachtet (d. h. der Strom im Ausgangskreis war  $I_2 = 0$ ).

Wir wollen jetzt den belasteten Transformator diskutieren und drücken dazu die Schaltung zunächst durch Induktivitäten und Gegeninduktivitäten aus.

Es gilt:

$$U_e = i\omega L_{11}I_1 + i\omega L_{12}I_2 \quad (5.43a)$$

$$U_a = i\omega L_{22}I_2 + i\omega L_{21}I_1 \quad (5.43b)$$

Hierbei haben wir angenommen, dass  $U_e$  eine Wechselspannung sei.  $L_{11}$  und  $L_{22}$  sind die Eigeninduktivitäten der Primär- bzw. Sekundärspule,  $L_{12}$  bzw.  $L_{21}$  die Gegeninduktivitäten. Wir können die Induktivitäten mit den Windungszahlen der beiden Spulen in Verbindung setzen, wenn wir nochmals den offenen Trafo betrachten:

Mit  $I_2 = 0$  erhalten wir:  $U_e = i\omega L_{11}I_1$  und  $U_a = i\omega L_{21}I_1$  und hieraus:  $U_a/U_e = L_{21}/L_{11}$ . Mit  $U_a/U_e = N_2/N_1$  ergibt sich:

$$L_{21} = L_{11} \frac{N_2}{N_1}. \quad (5.44a)$$

Ganz analog können wir  $I_1 = 0$  setzen (bzw. "Primär" und "Sekundär" vertauschen). Wir erhalten:

$$L_{21} = L_{22} \frac{N_1}{N_2}. \quad (5.44b)$$

Schließlich erhalten wir für das Verhältnis  $L_{21}/L_{12}$ :

$$\frac{L_{21}}{L_{12}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{L_{22}}{L_{11}}\right)^2.$$

Nun ist  $L_{22} = \text{const.} \cdot N_2^2$  und  $L_{11} = \text{const.} \cdot N_1^2$  und damit  $L_{22}/L_{11} = (N_2/N_1)^2$ . Hieraus folgt schließlich:

$$L_{21} = L_{12}. \quad (5.44c)$$

Wenn wir an die Sekundärspule einen Widerstand  $R$  anschließen, so gilt:

$$I_2 = \frac{U_a}{R}. \quad (5.45)$$

(5.45) zusammen mit (5.43a) und (5.43b) erlaubt, die Übertragungsfunktionen des Trafos (z. B.  $U_a/U_e$  oder  $I_1/U_e$ ), oder auch andere Größen wie Wirk- und Blindleistung zu bestimmen.

Zum Abschluss dieses Kapitels sei noch gesagt, dass es (relativ) leicht ist, die Übertragungsgröße eines vorgegebenen Schaltkreises zu berechnen. In der Praxis ist es eher üblich, dass ein noch unbekannter Schaltkreis eine gewünschte Funktion erfüllen muss. Dieses "inverse" Problem ist erheblich schwieriger und verlangt oft umfangreiche Kenntnisse in der Elektrotechnik.

# Kapitel 6

## Elektromagnetische Wellen

### 6.1 Lösung der Maxwellschen Gleichungen in einem Isolator

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Lösung der Maxwell Gleichungen in einem Isolator beschäftigen. Wir betrachten also ein Medium, in dem es keine freien Ladungen gibt (Ladungsdichte  $\rho = 0$ ) und auch keine elektrischen Ströme (Stromdichte  $\vec{j} = 0$ ). Damit nehmen also die Maxwell Gleichungen die Form

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 = \operatorname{div} \vec{E} \quad (6.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 = \operatorname{div} \vec{H} \quad (6.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{d\vec{B}}{dt} = 0 \quad (6.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{d\vec{D}}{dt} = 0 = \operatorname{rot} \vec{H} - \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (6.4)$$

an und werden ergänzt durch die Materialgleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (6.5)$$

Die jeweils zweite Gleichung in (6.1), (6.2) und (6.4) ergibt sich weil wir ein homogenes Medium betrachten wollen, in dem die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  und die Suszeptibilität  $\mu$  nicht vom Ort abhängen. Multiplizieren wir die Gleichung (6.4) mit der Suszeptibilität  $\mu_0 \mu$  und wenden ausserdem den Rotationsoperator an, so erhalten wir

$$\operatorname{rot} \left( \operatorname{rot} \vec{B} \right) - \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{d \operatorname{rot} \vec{E}}{dt} = 0.$$

Benutzen wir dann die Identität

$$\operatorname{rot} \left( \operatorname{rot} \vec{B} \right) = \operatorname{grad} \underbrace{(\operatorname{div} \vec{B})}_{=0 \text{ siehe 6.2}} - \Delta \vec{B}$$

und ersetzen  $\operatorname{rot} \vec{E}$  gemäß (6.3), so erhalten wir

$$\Delta \vec{B} - \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} = 0, \quad (6.6)$$

also partielle Differenzialgleichungen zweiter Ordnung in den Ortskoordinaten  $(x, y, z)$  sowie in der Zeit  $t$  für die drei kartesischen Komponenten der Magnetischen Induktionsdichte  $\vec{B}$ . In ganz analoger Weise können wir auch für das elektrische Feld  $\vec{E}$  verfahren. Wir wenden den Rotationsoperator auf die Maxwellgleichung (6.3) an und erhalten

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) + \frac{d\operatorname{rot}\vec{B}}{dt} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} + \mu\mu_0 \frac{d\operatorname{rot}\vec{H}}{dt} = 0$$

Wegen (6.1) ist  $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ . Ersetzen wir  $\operatorname{rot}\vec{H}$  gemäß (6.4), so erhalten wir

$$\Delta\vec{E} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{d^2\vec{E}}{dt^2} = 0. \quad (6.7)$$

Diese Differenzialgleichung für das elektrische Feld hat also die gleiche Struktur wie Gleichung (6.6) für das  $\vec{B}$ -Feld und wir wollen uns deshalb zunächst mit den mathematischen Eigenschaften der Lösungen der sogenannten *homogenen Wellengleichungen* vom Typ (6.6) und (6.7) beschäftigen.

Um die Eigenschaften der Lösungen der homogenen Wellengleichungen zu verdeutlichen, wollen wir die Gleichungen zunächst in zweifacher Hinsicht vereinfachen:

- An Stelle der vektorwertigen Funktionen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  in (6.7) bzw. (6.6) betrachten wir eine skalarwertige Funktion  $f$ .
- Außerdem nehmen wir an, dass diese Funktion nicht im 3-dimensionalen Raum, also als Funktion von  $\vec{r}$ , definiert ist, sondern nur von einer Raumkoordinate  $x$  abhängt:  $f(x, t)$ .

Damit vereinfacht sich also die Differenzialgleichung vom Typ (6.6) auf die Form

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 f}{dt^2} = 0. \quad (6.8)$$

Außerdem haben wir dabei

$$\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \rightarrow \frac{1}{c^2} \quad (6.9)$$

ersetzt. Diese Gleichung entspricht der Wellengleichung, die wir in der Mechanik behandelt haben. Damals haben wir gefunden, dass jede zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f$ , die nicht von den zwei unabhängigen Variablen  $x$  und  $t$  sondern nur von den Linearkombination

$$f(x, t) = f(u_{\pm}) \quad \text{mit} \quad u_{\pm}(x, t) = x \pm ct \quad (6.10)$$

eine Lösung liefert. In diesem Fall bezeichnet die Funktion  $f$  eine beliebige Struktur, die sich im Lauf der Zeit in Richtung  $x$  oder aber in Richtung  $-x$  mit der Geschwindigkeit  $c$  ausbreitet. Ein Spezialfall dieser Lösungen sind die ebenen Wellen in der Form

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \operatorname{Real} \{ A \exp(ik(x - \tilde{c}t)) \} \\ &= |A| \cos(kx - k\tilde{c}t + \varphi). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile haben wir benutzt, daß man die komplexe Amplitude  $A$  durch den Betrag  $|A|$  und eine Phase  $\varphi$  ( $A = |A|e^{i\varphi}$ ) darstellen kann. Die ebenen

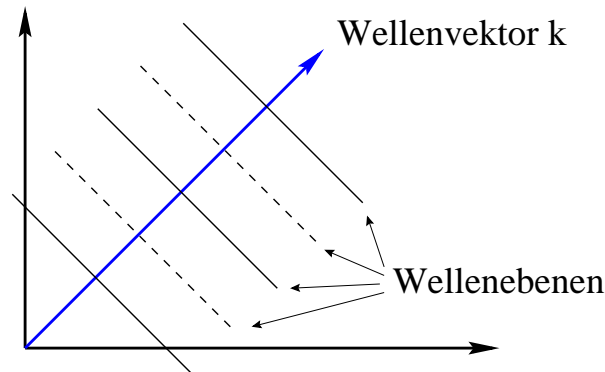


Abbildung 6.1: Darstellung einer ebenen Welle

Wellen sind von besonderem Interesse, da sie ein vollständiges Funktionensystem bilden, so dass man jede beliebige andere Funktion nach diesen ebenen Wellen mit verschiedenen Wellenzahlen  $k$  entwickeln kann.

Die ebenen Wellen in einer Dimension sind charakterisiert durch die **Wellenzahl**  $k$ , beziehungsweise die **Wellenlänge**  $\lambda$ . Diese Wellenlänge  $\lambda$  bezeichnet dabei den Abstand zweier Koordinaten  $x$ , für die sich die Cosinus Funktion in (6.11) periodisch wiederholt. Es gilt also:

$$k\lambda = 2\pi \quad \text{bzw.} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (6.12)$$

Die Funktion (6.11) ist also bei festgehaltenem Parameter Zeit eine periodische Funktion in  $x$  mit der Periodizitätslänge oder **Wellenlänge**  $\lambda$ . Bei festgehaltener Ortskoordinate ist (6.11) aber auch eine periodische Funktion in der Zeit. Für die Periodendauer  $T$  oder **Schwingungsdauer** gilt

$$kcT = 2\pi \quad \text{also} \quad T = \frac{2\pi}{kc} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (6.13)$$

mit der **Winkelgeschwindigkeit**

$$\omega = kc. \quad (6.14)$$

Ausserdem ist noch der Begriff **Frequenz** der Schwingung gebräuchlich, wobei die Frequenz durch

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad (6.15)$$

mit der Schwingungsdauer verbunden ist und in Einheiten von Hertz, das entspricht der Zahl der Schwingungen pro Sekunde angegeben wird.

Als nächstes betrachten wir nun die Lösung der Differentialgleichung vom Typ (6.7) für eine skalare Funktion  $f$ , die in 3 Raumdimensionen definiert ist

$$\Delta f(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 f}{dt^2} = 0. \quad (6.16)$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß auch in diesem Fall die ebenen Wellen

$$f(\vec{r}, t) = \text{Real} \left\{ A \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \right\}, \quad (6.17)$$

spezielle Lösungen sind. Diese Lösungen sind jetzt durch 3 Wellenzahlen,  $k_x$ ,  $k_y$  und  $k_z$ , beziehungsweise einen **Wellenvektor**  $\vec{k}$  definiert. Die Differentialgleichung wird genau dann gelöst, wenn (6.13) entsprechend der Zusammenhang

$$\omega = \pm c|\vec{k}| \quad (6.18)$$

gewährleistet ist. Als Funktion des Ortsvektors  $\vec{r}$  ist die Funktion  $f(\vec{r}, t)$  an allen Orten identisch, für die gilt  $\vec{r} \cdot \vec{k} = \text{const.}$  Die entsprechenden Gebiete, an denen also  $f(\vec{r}, t)$  z.B. einen Maximalwert annimmt sind Flächen senkrecht zu dem Wellenvektor  $\vec{k}$ , wie das auch in der Abb. 6.1 dargestellt ist. Als Funktion der Zeit bewegen sich dann diese Ebenen konstanter Funktionswerte in Richtung des Wellenvektors  $\vec{k}$ . Deshalb spricht man auch von "ebenen Wellen" mit der Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$ .

Nach dieser Vorbereitung kehren wir nun zu der Lösung der Differentialgleichungen (6.6) und (6.7) zurück. Aus dem vorhergehenden Abschnitt ist klar, dass z.B. die Differentialgleichung (6.7) für das elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  gelöst wird durch ebene Wellen für die 3 kartesischen Komponenten von  $\vec{E}$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{pmatrix} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (6.19)$$

wobei wieder (6.18) erfüllt sein muss. Die Differentialgleichung (6.7) hatten wir aus den Maxwellgleichungen für einen Isolator (6.1) - (6.4) hergeleitet. Wir untersuchen nun, ob die Maxwellgleichungen noch weitere Bedingungen an die elektromagnetischen Felder stellen. Dazu wenden wir (6.1) auf den Ansatz (6.19) an

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz} \\ &= (-k_x E_x^0 - k_y E_y^0 - k_z E_z^0) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nur dann für alle  $\vec{r}$  und Zeiten  $t$  erfüllt sein, wenn der Amplitudenvektor  $\vec{E}^0$  und damit auch der Vektor des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  in (6.19) stets senkrecht zum Ausbreitungsvektor  $\vec{k}$  steht:  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ .

In ganz entsprechender Weise können wir auch für die magnetische Induktionsdichte  $\vec{B}$  mit (6.2) zeigen, dass auch  $\vec{B}$  senkrecht zu dem Wellenvektor  $\vec{k}$  stehen muss. Deshalb bezeichnet man die elektromagnetischen Felder in einem Isolator, als **transversal polarisiert**. Im Gegensatz dazu steht der Feldvektor von longitudinal polarisierten Wellenfeldern parallel zum Wellenvektor  $\vec{k}$ .

Es gibt aber auch noch eine weitere Bedingung für die Polarisierung der elektromagnetischen Felder. Zur Herleitung dieser Bedingung wenden wir die Maxwellgleichung (6.3)



auf den Ansatz der ebenen Wellen für  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  an

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{pmatrix} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= \begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \\ ik_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{pmatrix} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= i\vec{k} \times \vec{E}^0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{d}{dt}\vec{B}^0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= -i\omega\vec{B}^0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \\ &= -i\omega\vec{B}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Somit erhält man

$$\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = i\vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t) - i\omega\vec{B}(\vec{r}, t)$$

Mit der Maxwellgleichung (6.3) ergibt sich also

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t)}. \quad (6.20)$$

Also steht  $\vec{B}$  immer senkrecht auf  $\vec{k}$  und  $\vec{E} : \vec{k}, \vec{E}$  und  $\vec{B}$  bilden ein rechtshändiges Dreibein.

Mit diesen Beziehungen können wir nun Energie und Impuls der elektromagnetischen Wellenfelder berechnen. Als erstes betrachten wir den Poynting Vektor  $\vec{S}$ . Nach (4.38) ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{S} &= (\vec{E} \times \vec{H}) \\ &= \frac{1}{\mu_0\mu} |\vec{E}| |\vec{B}| \hat{e}_k. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeilen wurde ausgenutzt, daß  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{k}$  ein Dreibein bilden (6.20). Der Poyntingvektor und damit die entsprechende Energieflussdichte weist also in Richtung des Wellen- oder Ausbreitungsvektors  $\vec{k}$ . Betrachten wir nun eine linear polarisierte Welle und benutzen ausserdem (6.20) so ergibt sich für den Betrag des Poyntingvektors

$$|\vec{S}| = \frac{|\vec{k}|}{\omega\mu\mu_0} E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Benutzt man nun (6.18) und den Zusammenhang zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  und den Materialkonstante  $\mu$  und  $\varepsilon$  aus (6.9) so ergibt sich

$$|\vec{S}| = c\varepsilon_0\varepsilon E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Hält man also die Position fest und berechnet den zeitlich gemittelten Energiefluß, so ergibt sich

$$\bar{S} = \frac{c}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 \quad (6.22)$$

Zum Vergleich können wir auch die zeitlich gemittelte Energiedichte der elektromagnetischen Felder berechnen. Nach (4.37) ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{1}{2} \left( \vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} E_0^2 + \frac{1}{2 \mu_0 \mu} B_0^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Auch hier stehen die Querstriche für die zeitliche Mittelung der entsprechenden Größen. Bei dem Übergang zur letzten Zeile wurde wieder (6.20) benutzt, wodurch sich ergab, dass die Energiedichte durch die Magnetfelder genau so groß ist wie die der elektrischen. Vergleicht man (6.22) und (6.23) so ergibt sich

$$\bar{S} = c \bar{W},$$

die gemittelte Energieflußdichte  $\bar{S}$  der elektromagnetische Welle entspricht gerade ihrer Energiedichte  $\bar{W}$  multipliziert mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ . Die Geschwindigkeit  $c$  ist also die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Energiedichte.

An dieser Stelle wollen wir verschiedene Beispiele für elektromagnetische Wellen betrachten. Dazu rufen wir uns in Erinnerung, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen im Vakuum oder allgemein in einem Medium mit  $\mu = \varepsilon = 1$  den Wert (siehe (6.9))

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (6.24)$$

besitzt. Zusammen mit (6.14) bedeutet dies, dass es einen festen Zusammenhang zwischen der Wellenlänge  $\lambda$  und der Frequenz  $\nu$  einer elektromagnetischen Welle gibt:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \frac{\lambda}{2\pi} = \nu \lambda = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (6.25)$$

Wir wollen diese Beziehung an verschiedenen Formen der elektromagnetischen Wellen verifizieren.

- Elektromagnetische Wellen im Frequenzbereich zwischen etwa  $10^5$  Hertz und  $10^8$  Hertz bezeichnet man als **Radiowellen**. So kennen wir auf einem normalen Radio-Empfänger die sogenannte Mittelwelle mit Frequenzen zwischen 500 kHz und 1.6 MHz. Nach (6.25) entspricht dabei  $\nu = 1.5 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 1.5 \text{ MHz}$  einer Wellenlänge von 200 Metern. Höhere Frequenzen im Bereich der Kurzwelle oder im UKW (Ultra-Kurz-Wellen) Bereich ( $\nu \approx 100 \text{ MHz}$ ) entsprechen kürzeren Wellenlängen (hier also etwa  $\lambda \approx 3 \text{ m}$ ).

- Den sich hier anschließenden Bereich höherer Frequenzen (etwa  $3 \cdot 10^8 \text{ Hz} < \nu < 3 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$  also  $1 \text{ m} < \lambda < 10^{-4} \text{ m}$ ) bezeichnet man als den Bereich der Mikrowellen. In diesem Bereich von Frequenzen ist auch von Interesse, dass bei der Taktfrequenz heutiger Computer (etwa 3 GHz als  $3 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ ), die Wellenlänge  $\lambda$  1 Meter beträgt. Bei höheren Frequenzen muss man also darauf achten, dass die Abmessungen der Bauteile so klein gehalten werden, dass über die Ausmaße der Bauteile sich die Feldstärken nicht signifikant ändern.
- Im Frequenzbereich zwischen etwa  $3 \cdot 10^{12} \text{ Hz} < \nu < 4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  spricht man vom Bereich des infraroten Lichts.
- Das für unser Auge sichtbare Licht umfasst der sehr kleinen Frequenzbereich zwischen  $\nu = 4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  (rotes Licht,  $\lambda = 750 \text{ nm}$ ) und  $\nu = 8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  (blaues Licht,  $\lambda = 375 \text{ nm}$ ).
- Bei höheren Frequenzen ( $10^{15} \text{ Hz} < \nu < 10^{18} \text{ Hz}$ ) findet man das Ultraviolette Licht.
- Den Bereich  $10^{16} \text{ Hz} < \nu < 10^{20} \text{ Hz}$  bezeichnet man auch als Röntgenstrahlen.
- Noch höhere Frequenzen ( $\nu > 10^{18} \text{ Hz}$ ) fasst man als  $\gamma$ -Strahlung zusammen. Dabei ist zu beachten, dass die Frequenzbereiche für die verschiedenen Typen von elektromagnetischen Wellen oder Strahlen überlappen.

### Abstrahlung von Radiowellen im Experiment

Wir erzeugen durch einen Röhrenverstärker Schwingungen der Frequenz  $f = 150 \text{ MHz}$ . Der Schwingkreis enthält eine kreisförmige Schleife. Das in der Schleife erzeugte B-Feld koppeln wir in eine stabförmige Antenne ein (s. Abb. 6.2(a)). Der Stab sei parallel zur  $x$ -Richtung orientiert.

Die Antenne strahlt elektromagnetische Wellen der Wellenlänge

$$\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 \text{ (m/s)} / 1.5 \cdot 10^8 \text{ Hz} = 2 \text{ m}$$

ab. Wir messen zunächst das elektrische Feld mittels einer stabförmigen Antenne. In die Mitte der Antenne fließt der induzierte Strom über eine Parallelschaltung eines Widerstands und einer Diode<sup>1</sup>. Der zeitliche Mittelwert der über dem Widerstand abgegriffenen Spannung ist damit von Null verschieden und kann detektiert werden.

Das detektierte elektrische Feld ist maximal, wenn die Empfangsantenne parallel zur Abstrahlantenne steht (d. h. Orientierung in  $x$ -Richtung). Dreht man die Antenne um  $90^\circ$  aus der Abstrahlebene heraus (d. h. Orientierung in  $z$ -Richtung) so geht das Signal (fast) auf Null zurück. Ebenso verringert sich das Signal stark, wenn Sende- und Empfangsantenne auf einer Achse liegen (Abb. 6.2(b)).

Die Magnetfeldkomponente der abgestrahlten Welle messen wir mittels einer ringförmigen Antenne. Der den Ring durchsetzende magnetische Fluss induziert Wechselströme, die wir wiederum gleichrichten<sup>2</sup>. Wir finden, dass  $\vec{B}$  senkrecht zu  $\vec{E}$  steht.

<sup>1</sup>Die Diode lässt den Strom im Wesentlichen nur in einer Richtung passieren.

<sup>2</sup>Es sei hier noch angemerkt, dass die detektierten Spannungen einige mV betragen. Ähnliche Spannungen können durch die zahlreichen Radiosender in der Umgebung in einem "unvorsichtig" aufgebauten Laborexperiment auftreten, falls die Verbindungskabel beispielsweise Schleifen bilden. Der Effekt ist sehr gefürchtet, da er nicht nur Messungen sondern u. U. sogar die zu messende Probe zerstören kann.

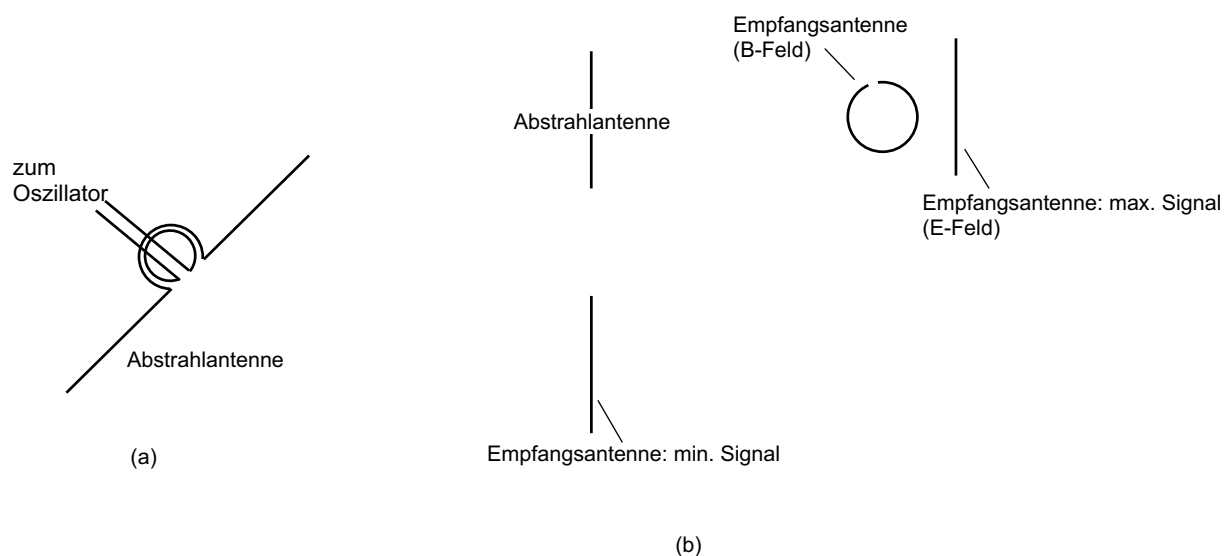


Abbildung 6.2: *Abstrahlung von Radiowellen. (a) Ankoppelung an Oszillator; (b) Abstrahlcharakteristik*

Schließlich variieren wir die Länge der stabförmigen Empfangsantenne und der Abstrahlantenne. In beiden Fällen wird das Signal maximal, wenn die Stablänge  $\lambda/2$  (d. h. 1 m) beträgt. Speziell im Fall der Abstrahlantenne finden wir, dass das Signal praktisch auf Null zurückgeht, wenn wir die Antenne entfernen, so dass die Abstrahlung nur noch über die Leiterschleife des Senders erfolgen kann.

## 6.2 Erzeugung von elektromagnetischen Wellen

In diesem Abschnitt soll die Entstehung und die Emission von elektromagnetischen Wellen beschrieben werden. Die Quelle dieser elektromagnetischen Welle sei eine auf einem kleinen Raum lokalisierte, oszillierende Ladungs- und Stromverteilung

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}', t) &= \rho(\vec{r}') \exp(-i\omega t) \\ \vec{j}(\vec{r}', t) &= \vec{j}(\vec{r}') \exp(-i\omega t)\end{aligned}\quad (6.26)$$

Auch hier wird wieder die komplexe Schreibweise benutzt, damit einzelne Rechenschritte vereinfacht werden. Letzendlich interessiert natürlich nur der Realteil dieser Größen. Natürlich sind auch andere Zeitabhängigkeiten denkbar als die in (6.26) angenommen Oszillation mit einer konstanten Frequenz. Solche komplexeren Oszillationen können aber über die Fourierentwicklung stets als Überlagerung von den harmonischen Oszillationen aus (6.26) dargestellt werden.

Realisierung solcher lokalisierten Quellen sind z.B. Antennen für Radiowellen oder aber auch einzelne Atome und Moleküle, die ja elektromagnetische Wellen in Form von Licht, Röntgenstrahlung oder auch in anderen Frequenzbereichen emittieren können.

Zur Beschreibung der elektromagnetischen Felder, die durch die oszillierenden Ladungs- und Stromverteilungen erzeugt werden, betrachten wir zunächst die elektromagnetischen Potentiale  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  und  $\Phi(\vec{r}, t)$ . Dabei wollen wir diese Potentiale in der Lorentzgleichung betrachten, was bedeutet, dass

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (6.27)$$

erfüllt sein muss und für das Potenzial  $\Phi(\vec{r}, t)$  die Differentialgleichung

$$\varepsilon_0 \left( -\Delta \Phi + \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi}{dt} \right) = \rho, \quad (6.28)$$

gilt. Dies ist eine Wellengleichung für das Potenzial  $\Phi$  allerdings mit einer Inhomogenität  $\rho$ . Aus der Diskussion der homogenen Wellengleichung wissen wir, dass beliebige Funktionen eine Lösung dieser Gleichung liefern, die nicht unabhängig vom Ort  $\vec{r}$  und der Zeit  $t$  abhängen sondern nur von der Linearkombination

$$\Phi(ct - |\vec{r}'|). \quad (6.29)$$

Nun interessiert uns eine lokalisierte Ladungs- und Stromverteilung. Das bedeutet, wenn wir in hinreichendem Abstand von dieser Quelle sind, wird die Ladungsdichte gleich null sein und wir können für diesen Bereich die homogene Form der Wellengleichung (6.28) verbunden mit der Eigenschaft (6.29) annehmen. Bei oszillierenden Ladungsverteilungen können wir ausserdem annehmen, dass nicht die Gesamtladung oszilliert, das würde ja der Ladungserhaltung widersprechen, sondern nur die räumliche Verteilung. Weit weg von der Ladungsverteilung sollte das elektromagnetische Feld durch die zeitlich oszillierende Dipolkomponente der Ladungsverteilung beschrieben sein. Wir betrachten deshalb noch

einmal das Potenzial, das durch eine statische Dipolverteilung am Koordinatenursprung  $\vec{d}$  erzeugt wird

$$\begin{aligned}\Phi_{stat}(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{d}}{r} \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{N},\end{aligned}\quad (6.30)$$

mit

$$\vec{N} = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{d}}{r}.$$

Wir versuchen jetzt dieses Ergebnis für das Potenzial im statischen Fall zu erweitern auf den zeitabhängigen Fall, bei dem wir eine oszillierende Dipolquelle der Form

$$\vec{d}(t) = \vec{d}_0 \exp(-i\omega t) = \vec{d}_0 \exp(-ikct), \quad (6.31)$$

am Koordinatenursprung ansetzen. Unsere Überlegungen zur zu (6.28) haben uns dazu geführt, im Falle der zeitabhängigen Quellen ein Potenzial der Form (6.29) zu betrachten. Wenn wir diese Überlegung auf das Potenzial übertragen, so liegt es nahe, den statischen Ansatz zu verallgemeinern auf die Form

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{d}(ct' = ct - |\vec{r}'|)}{r} \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{N}(\vec{r}, t).\end{aligned}\quad (6.32)$$

Dies bedeutet, dass das Potenzial am Ort  $\vec{r}$  zur Zeit  $t$  dem Potenzial des Dipols zur Zeit  $t' = t - r/c$  entspricht. Dies ist natürlich kein Beweis dafür, dass die Form des Potenzials korrekt ist. Dazu müssen wir dieses Ergebnis in (6.28) einsetzen und diese Gleichung verifizieren, eine Rechnung, die wir uns an dieser Stelle ersparen wollen. Wir sehen aber, dass die Lösung im Grenzfall  $\omega \rightarrow 0$  das richtige Ergebnis des elektrostatischen Dipols liefert.

Ausgehend von diesem Ausdruck für das Potenzial können wir aber auch das Vektorpotenzial bestimmen. Wir betrachten dazu die Gleichung (6.27) der Lorentzgleichung in der Form

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= -\mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi}{dt} \\ &= \mu_0\vec{\nabla}\cdot\frac{d\vec{N}}{dt}\end{aligned}\quad (6.33)$$

wobei wir bei dem Übergang zur zweiten Zeile die Darstellung von  $\Phi$  aus (6.32) übernommen haben. Aus dieser Gleichung ergibt sich als mögliche Lösung für  $\vec{A}$

$$\vec{A} = \mu_0\frac{d\vec{N}}{dt}. \quad (6.34)$$

Zurück zur Berechnung des Potenzials  $\Phi$  nach (6.32). Unter Benutzung der Produktregel für die Ableitungen im  $\vec{\nabla}$  Operator ergibt sich

$$\Phi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{d}}{r} + \vec{d}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]. \quad (6.35)$$

Zur Berechnung von  $\vec{\nabla} \cdot \vec{d}$  benutzen wir die Kettenregel

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{d}_0 \exp(-ik(ct - \vec{r})) = -ik\vec{d}_0 \exp(-ik(ct - \vec{r})) \cdot (-\hat{e}_r) = ik\hat{e}_r \cdot \vec{d}, \quad (6.36)$$

wobei  $\hat{e}_r$  wie üblich den Einheitsvektor in Richtung des Beobachtungspunktes  $\vec{r}$  bezeichnet. Damit ergibt sich

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-ik\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^2} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^3} \right]. \quad (6.37)$$

Damit und nach einer etwas längeren Rechnung ergibt sich für

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\vec{\nabla}\Phi - \frac{d}{dt}\vec{A} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r^3} \left\{ [(kr)^2 + ikr - 1] \vec{d}_0 - [(kr)^2 - 3ikr - 3] (\vec{d}_0 \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r \right\} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Bei unseren Überlegungen spielen drei Längenskalen eine Rolle. Da ist einmal die Ausdehnung der Quelle, die z.B. durch einen Radius der Größe  $\delta$  charakterisiert sein soll. Die zweite Längenskala ist der Abstand des Beobachtungspunktes von der Quelle. Nehmen wir an, dass die Quelle sich im Koordinatenursprung befindet, so ist dieser Abstand identisch mit dem Betrag des Vektors  $\vec{r}$ . Die dritte Längenskala ist die Wellenlänge  $\lambda$  der elektromagnetischen Welle, die mit der Wellenzahl  $k$  oder auch der Winkelfrequenz  $\omega$  verknüpft ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

Wir nehmen an, dass die Ausdehnung der Quelle sehr klein ist gegenüber den beiden anderen Längen und unterscheiden dann

$$\begin{aligned} \text{Nahbereich:} & \quad \delta \ll r \ll \lambda \\ \text{Fernbereich:} & \quad \delta \ll \lambda \ll r \end{aligned} \quad (6.39)$$

Wir wollen uns hier das Feld im Fernbereich ansehen für den also gilt

$$1 \ll kr = \frac{2\pi}{\lambda} r$$

so dass man in (6.38) die Terme proportional zu  $kr$  und zu 1 gegenüber den quadratischen Termen proportional zu  $(kr)^2$  vernachlässigen kann. Damit ergibt sich

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(i(kr - \omega t))}{r} \left\{ \vec{d}_0 - (\vec{d}_0 \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r \right\}. \quad (6.40)$$

Im Folgenden positionieren wir das Koordinatensystem so, dass der Dipolvektor  $\vec{d}_0 = d_0 \hat{e}_z$  in  $z$ -Richtung orientiert ist und damit der Ortsvektor des Beobachters  $\vec{r}$  mit der  $z$ -Achse den Winkel  $\theta$  bildet (Bezeichnung wie bei den Kugelkoordinaten), so dass

$$\vec{d}_0 \cdot \hat{e}_r = \cos \theta$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{k^2 d_0 \exp(i(kr - \omega t))}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \cos\theta \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \frac{k^2 d_0 \exp(i(kr - \omega t))}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ -\sin\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \frac{k^2 d_0 \exp(i(kr - \omega t))}{4\pi\epsilon_0 r} \{-\sin\theta \hat{e}_\theta\}. \tag{6.41}
 \end{aligned}$$

Dieses elektrische Feld, das auch häufig als elektrisches Feld eines **Hertz'schen Dipols** (in der Fernfeldnäherung) bezeichnet wird besitzt also die folgenden Eigenschaften:

- Es handelt sich um eine Kugelwelle, die radial vom Punkt des oszillierenden Dipols im Koordinatenursprung nach aussen läuft. Dies wird durch den Faktor

$$\frac{\exp(i(kr - \omega t))}{r}$$

zum Ausdruck gebracht. Der Wellenzahlvektor am Beobachtungsort  $\vec{r}$  zeigt also radial in Richtung  $\hat{e}_r$  nach aussen und besitzt den Betrag  $k$ .

- Das elektrische Feld ist in Richtung des Einheitsvektors  $\hat{e}_\theta$ , einem der Basisvektoren der Kugelkoordinaten, polarisiert. Da  $\hat{e}_\theta$ , senkrecht zur Richtung des Vektors  $\hat{e}_r$  und damit senkrecht zum Wellenzahlvektor  $\vec{k}$  steht, haben wir es mit einer transversal polarisierten Welle zu tun, was ja auch für elektromagnetische Wellen gegeben sein muss.
- Die Amplitude des elektrischen Feldes ist proportional zu  $\sin\theta$  und hängt damit von der Ausbreitungsrichtung ab. Sie ist identisch null in Richtung der  $z$ -Achse, also in Richtung des Dipols und damit am Beispiel der Stabantenne in Richtung des Stabes. Die Amplitude ist maximal in der  $xy$ -Ebene, also bei Ausbreitung senkrecht zum Dipol.
- Die Amplitude ist proportional zur Wellenzahl zum Quadrat, der Faktor  $k^2$  in (6.41).

Die abgestrahlte Energie wird durch den Pointing-Vektor beschrieben. Dieser zeigt im Fall der elektromagnetischen Wellen in Richtung des Wellenvektors  $\vec{k}$ , also in Ausbreitungsrichtung, und ist proportional zum Quadrat der Amplitude des elektrischen Feldes. Damit ergibt sich als Funktion der Richtung die Abstrahlcharakteristik eines Dipolstrahlers, wie sie in Abb. 6.3 dargestellt ist.

Es ist ausserdem interessant festzustellen, dass die abgestrahlte Energie proportional zu  $k^4 \propto \omega^4 \propto \lambda^{-4}$  ist. Kurzwelliges Licht wird also mit größerer Intensität abgestrahlt und auch absorbiert, beziehungsweise gestreut. Dieser Mechanismus der sogenannten **Rayleigh Streuung** gilt für Sender, Absorber oder Streuzentren, die klein sind gegenüber der Wellenlänge  $\lambda$ , wie das ja hier angenommen wurde (siehe (6.39)). Dementsprechend ist z.B. die Eindringtiefe von Sonnenlicht in unsere Atmosphäre

$$l \approx 160 \lambda^4$$



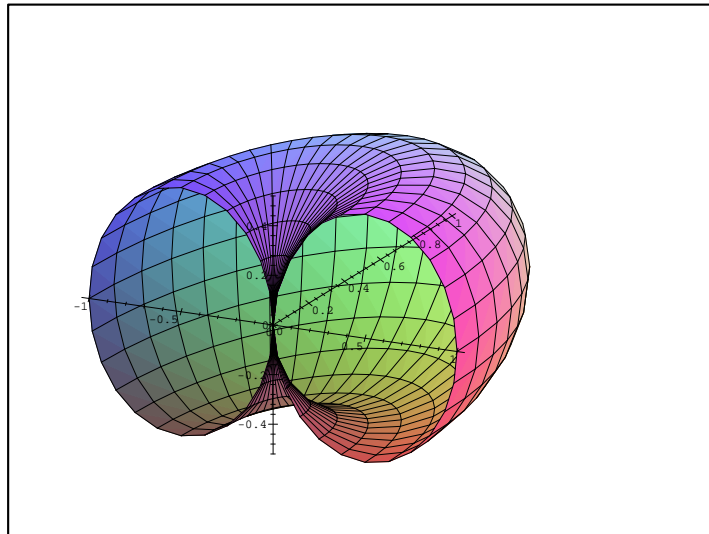


Abbildung 6.3: Abstrahlung eines elektrischen Dipols. Dargestellt ist ein Ausschnitt aus einer Fläche, auf der die abgestrahlte Energie konstant ist.

mit  $\lambda$  angegeben in  $\mu\text{m}$  und  $l$  in Kilometer. Dies bedeutet  $l \approx 4$  km für violettes Licht ( $\lambda$   $0.4 \mu\text{m}$ ) und  $65$  km für rotes Licht ( $\lambda$   $0.8 \mu\text{m}$ ). Da die dichte Atmosphäre etwa  $8$  km hoch ist, wird tagsüber bei steilem Sonnenstand vor allen Dingen blaues Licht gestreut, was zu der blauen Farbe des Himmels führt. Bei auf- und untergehender Sonne ist der Weg des Lichtes durch die Atmosphäre entsprechend länger, so dass auch rotes Licht gestreut wird (Abendrot).



### 6.3 Überlagerung von elektromagnetischen Wellen

Die Maxwellgleichungen im Vakuum oder in einem isolierenden Medium ( $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = 0$ ) sind Differenzialgleichungen, die sowohl linear sind, d.h. die zu berechnenden elektrischen und magnetischen Felder treten nur linear und nicht quadratisch oder in höherer Potenz auf, und sie sind homogen, was bedeutet, dass es keine Terme gibt, in denen die elektromagnetischen Felder nicht auftreten. Dies bedeutet aber, dass für die Lösungen das **Superpositionsprinzip** gilt. Sind also zwei Lösungen  $(\vec{E}_1(\vec{r}, t), \vec{B}_1(\vec{r}, t))$  und  $(\vec{E}_2(\vec{r}, t), \vec{B}_2(\vec{r}, t))$  bekannt, so ist auch die Lienarkombination dieser beiden Lösungen

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \alpha \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \beta \vec{E}_2(\vec{r}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \alpha \vec{B}_1(\vec{r}, t) + \beta \vec{B}_2(\vec{r}, t)\end{aligned}\quad (6.42)$$

mit beliebigen Koeffizienten, also Zahlen,  $\alpha$  und  $\beta$ , Lösungen dieser Maxwellgleichungen im Vakuum. Wir wollen verschiedene Beispiele betrachten und nehmen dazu an, dass die Ausbreitungsrichtung der beiden überlagerten Wellen identisch ist und das Koordinatensystem so orientiert ist, dass die  $z$ -Achse in Ausbreitungsrichtung liegt

$$\vec{k}_i = k_i \hat{e}_z. \quad (6.43)$$

Das elektrische Feld hat dann die Form

$$\vec{E}_j(\vec{r}, t) = \hat{e}_j E_{0j} e^{i\varphi_j} e^{i(k_j z - \omega_j t)} \quad \text{mit} \quad \frac{\omega_j}{k_j} = c \quad (6.44)$$

mit einer reellwertigen Amplitude  $E_{0j}$  und einer Phase  $\varphi_j$ . Als Basisvektoren für die Polarisation des elektrischen Feldes kommen  $\hat{e}_j$  kommen Vektoren senkrecht zur Ausbreitungsrichtung in Frage, also z.B.  $\hat{e}_x$  oder  $\hat{e}_y$ . Realisiert wird von diesem elektrischen Feld natürlich nur der Realteil also

$$\text{Real } \vec{E}_j(\vec{r}, t) = \hat{e}_j E_{0j} \cos(k_j z - \omega t + \varphi_j)$$

Nun zu verschiedenen Beispielen:

- **Linear polarisierte Welle:**

Nehmen wir den Fall

$$k_1 = k_2, \quad \text{und} \quad \varphi_1 = \varphi_2.$$

Mit der Superposition (6.42) ergibt sich für den Realteil der Ergebniswelle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (\alpha E_{01} \hat{e}_1 + \beta E_{02} \hat{e}_2) \cos(k_1 z - \omega_1 t + \varphi_1) \quad (6.45)$$

Bei dieser Lösung (6.45) ändert sich die Polarisationsrichtung von  $\vec{E}$  nicht als Funktion von Ort und Zeit, lediglich die Amplitude ist variabel. In diesem Fall spricht man von linear polarisierten Wellen. Das zugehörige Magnetfeld ergibt sich aus der Beziehung

$$\vec{k}_1 \times \vec{E} = \omega \vec{B}.$$

- **Zirkular polarisierte Welle**

Es gibt aber auch transversal polarisierte Wellen, die nicht linear polarisiert sind. Dazu betrachten wir die Superposition mit  $\alpha = \beta = 1$  und

$$k_1 = k_2 = k, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

In diesem Fall ergibt sich also für das elektrische Feld:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= E_{01} \hat{e}_1 \cos(kz - \omega t) + E_{02} \hat{e}_2 \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \\ &= E_{01} \hat{e}_1 \cos(kz - \omega t) - E_{02} \hat{e}_2 \sin(kz - \omega t) \end{aligned} \quad (6.46)$$

Betrachtet man nun z.B. den Fall, dass  $\hat{e}_1 = \hat{e}_x$  und  $\hat{e}_2 = \hat{e}_y$ , sowie  $E_{01} = E_{02}$  so ist dieses elektrische Feld am Koordinatenursprung ( $z = 0$ ) gegeben durch

$$\vec{E}(0, t) = E_0 \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es handelt sich also um ein elektrisches Feld mit einer Amplitude, die vom Betrag her konstant ist, deren Richtung aber auf einem Kreis in der  $xy$ -Ebene zirkuliert. Man spricht deshalb von einer zirkular polarisierten Welle. Die hier betrachtete Welle besitzt **positive Helizität**, da das Feld als Funktion des Ortes eine Rechtsschraube in Ausbreitungsrichtung bildet. Für  $\varphi_2 = 0 - \pi/2$  erhält man eine Linksschraube bzw. **negative Helizität**. Sind die Amplituden  $E_{01}$  und  $E_{02}$  unterschiedlich, so beschreibt der Vektor des elektrischen Feldes als Funktion der Zeit eine Ellipsenbahn. Man spricht deshalb von elliptischer Polarisation.

- **Stehende Welle**

Es soll nun der Fall der Überlagerung von linear polarisierten Wellen betrachtet werden, bei denen der Amplitudenvektor identisch ist, aber die Ausbreitungsrichtung der beiden Wellen gegenläufig ist, also

$$k_2 = -k_1.$$

In diesem Fall ergibt sich für die Superposition der beiden Wellen das Ergebnis

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} + \vec{E}_0 e^{i(-kz - \omega t + \varphi)} \\ &= \vec{E}_0 e^{i(-\omega t + \varphi/2)} (e^{i(kz - \varphi/2)} + e^{-i(kz - \varphi/2)}) \\ &= 2\vec{E}_0 e^{i(-\omega t + \varphi/2)} \cos(kz - \varphi/2). \end{aligned} \quad (6.47)$$

Es handelt sich also um eine Welle mit einer Amplitude, die sich als Funktion des Ortes wie eine Kosinusfunktion verhält. Diese Amplitude ist dann multipliziert mit einer komplexwertigen Exponentialfunktion, die die zeitliche Schwingung beschreibt. Man spricht von einer stehenden Welle. An den Stellen, an denen  $\cos(kz - \varphi/2)$  den Wert null annimmt ist das elektrische Feld für alle Zeiten identisch null. Dies sind die Knoten der stehenden Welle. An den Stellen, an denen die Kosinusfunktion den Wert 1 oder -1 annimmt, oszilliert das elektrische Feld als Funktion der Zeit mit maximaler Amplitude. Man bezeichnet diese Stellen als Schwingungsbäuche der stehenden Welle.

- Ausserdem sei der Fall betrachtet, bei denen Wellen mit verschiedenen Wellenzahlen (bei gleicher Ausbreitungsrichtung) überlagert werden. Hier kommt es wie wir bereits im Kurs Physik I diskutiert haben zu Amplitudenmodulationen der Welle, die wir auch unter den Stichworten Fourier-Zerlegung behandelt haben.

### Elektromagnetische Stehwellen im Experiment

Wir stellen dem Sender der Abb. 6.2 einen metallischen Reflektor gegenüber, so dass sich eine Stehwelle ausbildet. Wenn wir die Stehwelle mit der Antenne abfahren so finden wir, dass sich die Bäuche bzw. Knoten der Stehwelle im Abstand  $\lambda/2 = 1$  m wiederholen. Hieraus finden wir mit der Senderfrequenz von 150 MHz für die  $c$  einen Wert von  $3 \cdot 10^8$  m/s, was zeigt, dass sich auch diese elektromagnetische Welle mit "Licht"geschwindigkeit ausbreitet.

Wenn wir das Experiment in Wasser wiederholen, finden wir  $\lambda/2 \approx 0.15$  m. Mit  $c = c_{\text{vak}}/\sqrt{\epsilon\mu}$  und  $\mu = 1$  für Wasser bestimmen wir hieraus  $\epsilon \approx 45$ , was geringer ist als der statisch bestimmte Wert von  $\epsilon$  ( $\epsilon_{\text{statisch}} \approx 81$ ). Der Grund liegt schlicht darin, dass die permanenten Dipolmomente der  $\text{H}_2\text{O}$ -Moleküle nicht schnell genug dem elektrischen Wechselfeld folgen können. Die bei 150 MHz (oder auch bei höheren Frequenzen) gemessene Dielektrizitätskonstante ist also deutlich kleiner als die statisch gemessene. Schließlich demonstrieren wir Stehwellen noch mit einem bei 9.7 GHz arbeitenden Sender. Wir finden  $\lambda/2 \approx 1.6$  cm und heraus wiederum  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s.



## 6.4 Wellen in einem leitenden Medium

Unter einem leitenden Medium verstehen wir ein System, in dem wir keine ruhenden Ladungen berücksichtigen, aber Ströme, die nach dem Ohmschen Gesetz durch ein elektrisches Feld verursacht werden. Wir nehmen also an

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}, t) &= 0 \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= \sigma \vec{E}(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

mit der Leitfähigkeit  $\sigma$  als charakteristische Materialkonstante. Nehmen wir außerdem an, dass die Materialparameter  $\varepsilon$  und  $\mu$  Konstanten, also unabhängig von  $\vec{r}$  und  $t$ , sind, so lassen sich die Maxwellgleichungen auf die Form bringen

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = 0 & \rightarrow & \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= \mu \mu_0 \operatorname{div} \vec{H} = 0 & \rightarrow & \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\mu_0 \mu \frac{d\vec{H}}{dt} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{d\vec{D}}{dt} + \vec{j} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d\vec{E}}{dt} + \sigma \vec{E}\end{aligned}\quad (6.48)$$

Auch zur Lösung dieser Gleichung betrachten wir den Ansatz von Vektorfeldern, die als Funktion der Zeit harmonisch oszillieren

$$\begin{aligned}\text{Ansatz : } \quad \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}(\vec{r}) \exp(-i\omega t) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}(\vec{r}) \exp(-i\omega t)\end{aligned}\quad (6.49)$$

Die Maxwellgleichungen für die Wirbelstärken liefern mit diesem Ansatz

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= i\omega \mu_0 \mu \vec{H} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} + \sigma \vec{E} = -i\omega \eta \vec{E}\end{aligned}\quad (6.50)$$

wobei wir definiert haben

$$\eta = \varepsilon_0 \varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega}\quad (6.51)$$

Die Maxwellgleichungen in einem leitenden Medium sind also fast identisch zu den Maxwellgleichungen in einem Isolator ( $\sigma = 0$ ) mit den Unterschieden

- Die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_0 \varepsilon$  ist zu ersetzen durch die komplexwertige Variable  $\eta$ , definiert in (6.51).
- Diese komplexwertige "Dielektrizitätsfunktion"  $\eta$  hängt ab von der Frequenz der oszillierenden Felder  $\omega$ .

Im Folgenden werden wir also  $\omega$  festhalten und erwarten dann auch für die Lösungen der Maxwellgleichungen im leitenden Medium, Lösungen in der Form von ebenen Wellen

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}_0 \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)).\end{aligned}\quad (6.52)$$

Aus den Maxwellgleichungen zur Quellstärke der Felder erhalten wir die Bedingungen

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{E} = i\vec{k}\vec{E} = 0 &\quad \Rightarrow \quad \vec{k} \perp \vec{E} \\ \operatorname{div}\vec{H} = i\vec{k}\vec{H} = 0 &\quad \Rightarrow \quad \vec{k} \perp \vec{H}\end{aligned}\quad (6.53)$$

Auch in den leitenden Medien sind also die elektromagnetischen Felder senkrecht zum Wellenvektor  $\vec{k}$ , sie sind also auch hier transversal polarisiert. Ein Unterschied tritt aber auf bei der Betrachtung der beiden anderen Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{k} \times \vec{H} &= -\omega\eta\vec{E} \\ \frac{1}{i}\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{k} \times \vec{E} &= \omega\mu\mu_0\vec{H}\end{aligned}\quad (6.54)$$

Multipliziert man die erste dieser beiden Gleichungen von links mit  $\vec{k} \times$  so ergibt sich unter Einbeziehung der zweiten Gleichung

$$\begin{aligned}\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{H}) &= \underbrace{\vec{k}(\vec{k}\vec{H})}_{=0} - k^2\vec{H} \\ &= \vec{k} \times (-\omega\eta\vec{E}) = -\omega^2\eta\mu\mu_0\vec{H}\end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite der ersten Zeile dieser Gleichung verschwindet wegen der Eigenschaft (6.53), dass  $\vec{H}$  transversal polarisiert ist. Damit können wir diese Gleichung zusammenfassen zu

$$k^2\vec{H} = \omega^2\eta\mu\mu_0\vec{H}$$

beziehungsweise mit der Definition von  $\eta$  in (6.51) zu

$$k^2 = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\omega^2 \left( 1 + i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} \right) \quad (6.55)$$

Das Quadrat der Wellenzahl, und damit natürlich auch die Wellenzahl  $k$  sind komplex, sodass man den Wellenzahlvektor schreiben kann

$$\vec{k} = \hat{e}_k(\alpha + i\beta), \quad (6.56)$$

mit  $\alpha$  und  $\beta$  als Bezeichnung für den Real- und Imaginärteil von  $k$ , während  $\hat{e}_k$  den Einheitsvektor in Richtung  $\vec{k}$  bezeichnet. Aus dem Vergleich von

$$k^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + i2\alpha\beta$$

mit (6.55) ergibt sich

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - \beta^2) &= \mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon\omega^2 \\ 2\alpha\beta &= \mu\mu_0\omega\sigma\end{aligned}\quad (6.57)$$



### 6.4.1 Der Skineffekt

Mit der komplexen Wellenzahl erhält man z.B. für die Welle des elektrischen Feldes in (6.52)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \left( \vec{E}_0 \exp(i(\alpha \hat{e}_k \vec{r} - \omega t)) \right) \exp(-\beta \hat{e}_k \vec{r}) \quad (6.58)$$

und einen entsprechenden Ausdruck für das Magnetfeld  $\vec{H}$ . Für positive Werte von  $\beta$  ergibt sich eine Welle, deren Amplitude entlang der Ausbreitungsrichtung  $\hat{e}_k$  exponentiell abnimmt. Verfolgt man die Welle über eine Wegstrecke der Länge

$$\tau = \frac{1}{\beta} \quad (6.59)$$

so fällt die Amplitude um den Faktor  $1/e$  ab. Man bezeichnet die Größe  $\tau$  deshalb als Eindringtiefe oder **Skinkonstante**, d.h. die Dicke der Haut ("Skin") des leitenden Mediums, in die elektromagnetische Wellen in das leitende Medium eindringen können.

Wie groß ist diese Skinkonstante und wie stark hängt sie von der Frequenz ab? Dazu die folgende Abschätzung: Im Fall von Materialien mit hoher Leitfähigkeit  $\sigma$  wird der Imaginärteil von  $k^2$ , der ja wie aus (6.57) ersichtlich proportional zu  $\sigma$  ist, sehr viel größer sein als der Realteil. Wir können also annehmen, daß

$$\alpha^2 - \beta^2 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx \beta \quad (6.60)$$

Damit ergibt sich also

$$2\alpha\beta \approx 2\beta^2 \approx \mu_0\mu\omega\sigma$$

und für die Skinkonstante (6.59)

$$\tau = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\mu_0\omega}} \quad (6.61)$$

Die Eindringtiefe ist also insbesondere bei Materialien mit sehr hoher Leitfähigkeit und bei hohen Frequenzen  $\omega$  sehr klein. In diesem Fall wird die Energie der elektromagnetischen Welle sehr rasch auf das leitende Material übertragen und die Welle entsprechend gedämpft.

Wegen dieses Skineffektes sind leitende Materialien weitgehend undurchlässig für elektromagnetische Wellen. Insbesondere lassen sie kein Licht durch (relativ großes  $\omega$ ) und dämpfen auch Wellen im Bereich der Radiofrequenzen sehr stark.

Die komplexwertige Wellenzahl hat aber auch noch eine weitere Konsequenz. Nach (6.54) gilt

$$\frac{1}{\mu\mu_0\omega} k(\hat{e}_k \times \vec{E}) = \vec{H}$$

Für die Amplitude des magnetischen Feldes in (6.52) gilt also damit

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{\mu_0\mu\omega} |k| \exp(i\phi) (\hat{e}_k \times \vec{E}_0)$$

wobei wir die komplexe Zahl  $k$  über den Betrag und eine Phase  $\phi$  dargestellt haben. Nach unseren Überlegungen zu (6.60) ist  $\phi$  bei guten Leitern etwa gleich  $\pi/4$  oder 45 Grad. Die Welle des Magnetfeldes ist also damit um diesen Winkel phasenverschoben zur Welle des elektrischen Feldes, sie *hinkt entsprechend nach*.

### 6.4.2 Frequenzabhängige Dielektrizitätskonstante

Bisher wurde der Einfluss des Mediums auf das elektrische Feld dadurch berücksichtigt, dass wir eine Polarisation des Mediums annahmen,  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$  und damit z.B. die dielektrische Verschiebung definiert haben als

$$\vec{D} = \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon = 1 + \chi$ . Dabei geht man davon aus, dass sich die Polarisation des Mediums zeitgleich mit dem elektrischen Feld ändert. Das elektrische Feld ändert sich also so langsam, dass die Elektronen im atomaren Bereich, die für die Polarisation verantwortlich sind, jeder Feldänderung instantan folgen können. Dies ist natürlich in der Elektrostatik eine vernünftige Annahme, die auch bei langsam variierenden Feldern noch gültig ist. Wie verhält es sich aber bei Feldern mit hohen Frequenzen  $\omega$ ?

Zur Untersuchung dieser Frage betrachten wir die Bewegungen der atomaren Ladungen, also der Elektronen, um die Gleichgewichtslage in einem Atom ohne externes Feld. Die makroskopischen Felder bilden nur eine kleine Störung der starken atomaren Felder. Deshalb ist es eine gute Näherung die Auslenkung aus der Ruhelage in der harmonischen Näherung zu behandeln, also mit einer Rückstellkraft die proportional zur Auslenkung  $\vec{r}$  mit einer Konstanten  $K$  beschrieben wird

$$\text{Rückstellkraft: } -K\vec{r} = -m\omega_0^2\vec{r}$$

dabei bezeichnet  $m$  den Massenparameter der atomaren Ladung und  $\omega_0^2 = K/m$  entspricht der Frequenz dieser harmonischen Schwingung, ist also ein Charakteristikum des Materials. Außerdem können wir annehmen, dass es eine Reibungs- oder Dämpfungskraft proportional zur Geschwindigkeit der bewegten Ladung gibt und eben die Kraft durch das externe Feld,  $q\vec{E}$ , mit  $q$  für die Ladung. Die Bewegungsgleichung ergibt sich also als

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2\vec{r} - \gamma m \frac{d\vec{r}}{dt} + q\vec{E} \quad (6.62)$$

Multipliziert man diese Bewegungsgleichung mit  $q/m$  und ersetzt  $q\vec{r}$  durch das Dipolmoment  $\vec{d}$ , so ergibt sich

$$\frac{d^2\vec{d}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{d}}{dt} + \omega_0^2\vec{d} = q\vec{E} \quad (6.63)$$

Im Fall der Elektrostatik ( $d\vec{d}/dt = 0$ ) erhält man also

$$\vec{d} = \frac{q^2}{\omega_0^2 m} \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = N\vec{d} = \frac{Nq^2}{\omega_0^2 m} \vec{E} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

mit  $N$  die Dichte der Atome. Damit ergibt sich also für die elektrische Suszeptibilität  $\chi$ , beziehungsweise für die Dielektrizitätskonstante

$$\chi = \varepsilon - 1 = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 \omega_0^2 m} \quad (6.64)$$

Im nächsten Schritt nehmen wir an, dass das externe elektrische Feld  $\vec{E}$  mit einer Frequenz  $\omega$  schwingt und auch der Ladungsverteilung beziehungsweise dem Dipolmoment  $\vec{d}$  die entsprechende Frequenz aufzwingt (siehe Mechanik von erzwungenen Schwingungen)

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t) \quad \text{und} \quad \vec{d} = \vec{d}_0 \exp(-i\omega t)$$

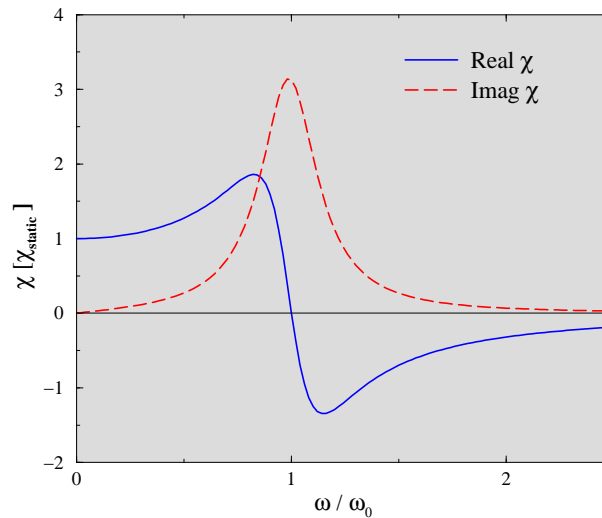


Abbildung 6.4: Real- und Imaginärteil der elektrischen Suszeptibilität nach (6.66).

Geht man mit diesen Ansatz in (6.63)

$$(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2) \vec{d} = \frac{q^2}{m} \vec{E}$$

ergibt sich daraus nach Abspalten des gemeinsamen Faktors  $\exp(-i\omega t)$

$$\vec{d}_0 = \frac{q^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \vec{E}_0 = \frac{\chi(\omega)}{N} \vec{E}_0 \quad (6.65)$$

Die elektrische Suszeptibilität  $\chi$  und damit auch die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  nehmen komplexe Werte an und hängen von der Frequenz des elektrischen Feldes  $\omega$  ab mit

$$\begin{aligned} \text{Real } \chi &= N \frac{q^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\ \text{Imag } \chi &= N \frac{q^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (6.66)$$

Diese Abhängigkeit des Real- und Imaginärteiles von  $\chi$  von der Frequenz  $\omega$  sind in Abb. 6.4 dargestellt. Im Grenzfall  $\omega \rightarrow 0$  ergibt sich wieder die reelle Suszeptibilität  $\chi$  der Elektrostatik. Bei der Resonanzfrequenz  $\omega = \omega_0$  ist der Imaginärteil von  $\chi$  und damit auch der Imaginärteil von  $\varepsilon$  maximal. Weiter oben in diesem Abschnitt haben wir gesehen, daß ein komplexer Wert von  $\varepsilon$  ein Zeichen für die Dämpfung und Absorption der elektromagnetischen Welle ist. Also werden die elektromagnetischen Wellen stets dann in einem Material besonders stark absorbiert werden, wenn die Frequenz in der Nähe einer Resonanzfrequenz  $\omega_0$  des Materials ist.

In diesem Bereich  $\omega \approx \omega_0$  zeigt auch der Realteil von  $\chi$  eine ausgeprägte Frequenzabhängigkeit. Für  $\omega = \omega_0$  gilt  $\chi = 0$ . Für Werte von  $\omega$ , die leicht oberhalb der Resonanzfrequenz liegen wird  $\chi$  negativ, sodass  $\varepsilon$  Werte kleiner als 1 annimmt. Dies bedeutet aber daß die Phasengeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit ist. Auf dem ersten

Blick scheint es also die Möglichkeit zu geben, daß Informationen mit Geschwindigkeiten oberhalb der Lichtgeschwindigkeit verbreitet werden können. An dieser Stelle soll zu diesem Thema nur angemerkt werden, daß für die Ausbreitung von Information nicht die Phasengeschwindigkeit sondern die Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpaketes relevant ist. Außerdem sei darauf hingewiesen, daß  $\chi$  nur für solche Werte von  $\omega$  negativ wird, für die die Absorption, dargestellt durch den Imaginärteil von  $\chi$  groß ist.

Aus der Abb. 6.4 können wir weiter entnehmen, daß die Suszeptibilität  $\chi$  und damit auch die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  und auch der Brechungsindex  $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$  über weite Bereiche von  $\omega$  mit  $\omega$  und damit auch mit der Wellenzahl  $k$  anwächst. Es gilt also  $dn/d\omega > 0$ . Man spricht in diesem Fall von **normaler Dispersion**. Im Bereich der Resonanzfrequenzen  $\omega_0$  gibt es aber auch Bereiche anormaler Dispersion mit  $dn/d\omega < 0$ .

## 6.5 Erzeugung, Übertragung, Empfang von Radio- und Mikrowellen

Wir werden uns in diesem Abschnitt mit elektromagnetischen Wellen vom Radio- bis in den Ferninfrarotbereich beschäftigen. Eine Grobeinteilung der Wellenlängenbereiche haben wir bereits in Abschnitt 6.1 gegeben. Etwas genauer aufgeteilt spricht man von

- "Langwellen" für Frequenzen zwischen 30 kHz und 300 kHz ( $\lambda$  von 10 km bis 1 km),
- "Mittelwellen" für Frequenzen zwischen 0.3 MHz und 3 MHz ( $\lambda$  von 100 m bis 1 km),
- "Kurzwellen" für Frequenzen zwischen 3 MHz und 30 MHz ( $\lambda$  von 10 m bis 100 m),
- "Ultrakurzwellen" für Frequenzen zwischen 30 MHz und 300 MHz ( $\lambda$  von 1 m bis 10 m),
- "Dezimeterwellen" für Frequenzen zwischen 300 MHz und 3 GHz ( $\lambda$  von 10 cm bis 1 m),
- "Zentimeterwellen" für Frequenzen zwischen 3 GHz und 30 GHz ( $\lambda$  von 1 cm bis 1 m),
- "Millimeterwellen" für Frequenzen zwischen 30 GHz und 300 GHz ( $\lambda$  von 1 mm bis 1 cm),
- "Ferninfrarot" für Frequenzen zwischen 300 GHz und 30 THz ( $\lambda$  von 10  $\mu\text{m}$  bis 1 mm).

"Radiowellen" reichen bis 300 MHz; "Mikrowellen"<sup>3</sup> erstrecken sich je nachdem, ob "Ferninfrarot" als eigener Bereich ausgewiesen wird oder nicht, von 300 MHz bis 300 GHz bzw. von 300 MHz bis 3 THz.

### 6.5.1 Erzeugung

Für die Erzeugung von Radiowellen haben wir bereits Schwingkreise mit integrierten Röhrenverstärkern oder Transistoren kennengelernt. Mit Feldeffekttransistoren können Frequenzen von einigen 10 GHz erreicht werden, wenngleich mit relativ geringer Leistungsabgabe.

Für die Erzeugung von Mikrowellen kennt man eine Reihe von Methoden, von denen wir nur eine Auswahl kurz ansprechen wollen.

#### Anregung von Hohlraumresonatoren durch Elektronenstrahlen

Ein vielfach genutztes Prinzip besteht darin, **Elektronenstrahl-Pakete** durch einen oder mehrere **Hohlraumresonatoren** laufen zu lassen. Im Resonator oszilliert eine elektromagnetische Stehwelle, die einerseits Energie aus den Elektronenstrahlpaketen aufnimmt und andererseits die Elektronenpakete stabilisiert. Bevor wir die entsprechenden Oszillatoren genauer diskutieren, wollen wir zunächst kurz Hohlraumresonatoren ansprechen:

*Einschub: Hohlraumresonatoren*

Der einfachste Hohlraumresonator ist ein von metallischen Wänden begrenzter **Quader**. Die Länge des Quaders in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung sei  $(L_x, L_y, L_z)$ . Im Quader sei Luft.

<sup>3</sup>Besonders erwähnenswert ist  $f = 2.45$  GHz. Hier arbeiten die haushaltsüblichen Mikrowellenherde.

Elektromagnetische Wellen bilden bzgl. allen Raumrichtungen Stehwellen aus, wobei das elektrische Feld jeweils wie im statischen Fall senkrecht auf den Metalloberflächen stehen muss.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass das  $\vec{E}$ -Feld in die  $y$ -Richtung zeigt, d. h.  $\vec{E} = (0, E_y, 0)$ . Für  $E_y$  gilt dann:

$$E_y = E_y^0 \cdot \sin\left(n_x \pi \frac{x}{L_x}\right) \sin\left(n_z \pi \frac{z}{L_z}\right) \quad (6.67)$$

Hierbei sind  $n_x, n_z$  ganze Zahlen  $> 0$ .  $E_y$  bildet in  $x$ -Richtung eine Stehwelle mit  $L_x = n_x \lambda/2$ , d. h.  $k_x = n_x \pi/L_x$ . Analog ergibt sich  $k_z = n_z \pi/L_z$ .  $\vec{E}$  verschwindet an den 6 vertikalen Quaderwänden und steht senkrecht auf Boden und Deckel. Der kleinstmögliche Zahlenwert für  $n_x$  und  $n_z$  ist 1. Dies ergibt die "TE101-Mode", wobei "TE" für "transversal<sup>4</sup> elektrisch" steht (das  $E$ -Feld hat keine Komponente in  $z$ -Richtung) und die Zahlen die Zahl der Halbwellen in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung zählen. Die Magnetfeldlinien bilden für diese Moden geschlossene Linien in der  $(x, z)$ -Ebene. Im Fall der TE101-Mode ist der Betrag des  $B$ -Feldes an den Resonatorwänden maximal und hat eine Nullstelle in der Mitte des Resonators (vgl. Abb. 6.5).

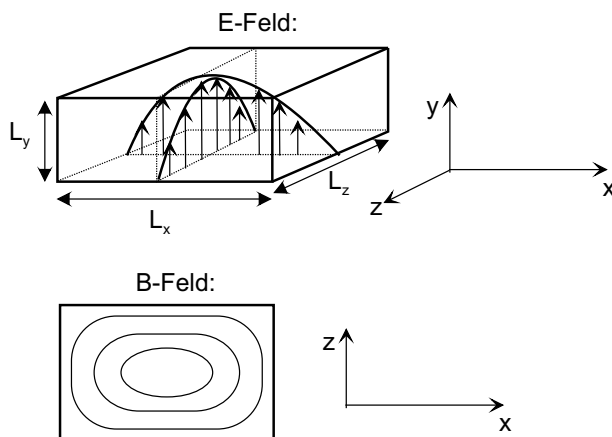


Abbildung 6.5: Elektrisches und magnetisches Feld im quaderförmigen Hohlraumresonator in der TE101-Mode.

Analog definiert man Moden mit  $n_x, n_y, n_z$  Halbwellen in  $(x, y, z)$ -Richtung). Für  $n_y \neq 0$  hat das elektrische Feld ebenfalls eine Komponente in  $x$ -Richtung. Im quaderförmigen Hohlraumresonatoren sind ebenfalls Schwingungsmoden erlaubt, bei denen die  $z$ -Komponente des  $\vec{B}$ -Felds verschwindet und die  $z$ -Komponente des  $\vec{E}$ -Felds endlich ist ("Transversal-magnetische Moden", "TM-Moden"). Hier ist im wesentlichen gegenüber den TE-Moden  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  vertauscht; die Maxima der  $\vec{B}$ -Felder liegen zudem an den Wänden (d. h. Vertauschung  $\sin() \rightarrow \cos()$  in 6.5).

Wir wollen diese Nomenklatur hier nicht weiter vertiefen, Entscheidend ist aber, dass der Resonator analog zu den in Abschnitt 5.2 behandelten Schwingkreisen bei ganz bestimmten<sup>5</sup> Frequenzen schwingen kann (d. h. elektromagnetische Stehwellen aufbauen kann). Die

<sup>4</sup>Wir werden später Hohlleiter mit rechteckförmigem Querschnitt betrachten, bei denen sich die Welle in  $z$ -Richtung ausbreiten kann. "Transversal" bedeutet in diesem Sinne senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des gedachten Rechteckhohlleiters.

<sup>5</sup>Bei Berücksichtigung der Dämpfung der Schwingungen durch Wirbelstromverluste in den Resonatorwänden erhält man eine endliche Frequenzbreite  $\Delta\omega$ , die sich wie bei Schwingkreisen durch einen

Frequenzen sind gegeben durch:

$$\omega = ck = s\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = c\sqrt{\left(\frac{\pi n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_z}{L_z}\right)^2}. \quad (6.68)$$

Analog schwingen auch anders geformte Hohlraumresonatoren bei bestimmten Frequenzen.

### Klystrons

Beim Klystron lässt man im Prinzip zunächst einen Elektronenstrahl durch einen ersten Resonator laufen, in dem bereits elektromagnetische Wellen angeregt wurden. Das im Resonator oszillierende  $E$ -Feld bildet aus dem Elektronenstrahl Pakete (etwa in Analogie zu einer Ampel, die aus dem Fahrzeugstrom Pakete bildet). Die Pakete laufen in einen zweiten (oder weitere) Resonator und geben Energie an das dort oszillierende elektromagnetische Feld ab. Das Prinzip ist in Abb. 6.6 veranschaulicht.

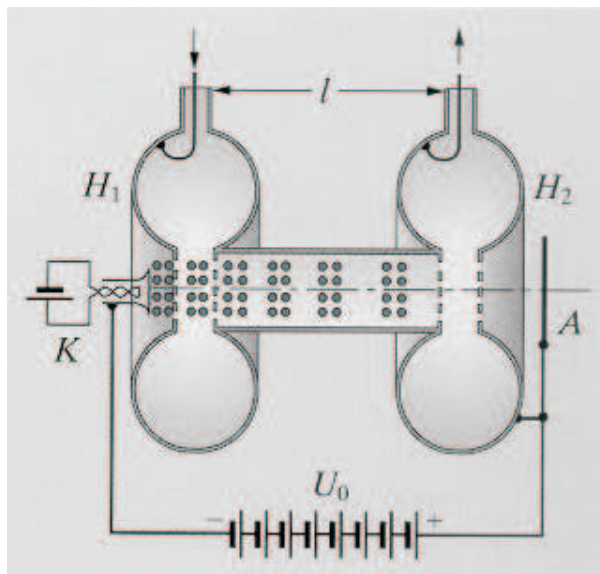


Abbildung 6.6: Prinzip des Klystrons (aus: Gerthsen Physik, Abb. 8.33)

Beim Reflexklystron wird nur ein Hohlraumresonator verwendet, in den die Elektronenpakete zurückreflektiert werden (Abb. 6.7). Die Elektronen werden hierbei zunächst aus der Kathode in den Resonator hinein- bzw. durch ihn hindurchbeschleunigt, durchlaufen dann eine Gegenspannung und passieren wiederum den Resonator.

Analog lassen sich Klystrons mit mehreren Resonatoren (z. B. "Dreikammerklystron") herstellen. Klystrons können Frequenzen im Bereich einiger GHz bis ca. 100 GHz erzeugen. Bei **Wanderfeldröhren** führt ein Elektronenstrahl ebenfalls Energie resonatorähnlichen Strukturen zu. Dabei "wandert" die elektromagnetische Welle entlang der Resonatoren. Beispiele sind der **Rückwärtswellen-Oszillator** (backward wave oscillator, BWO)

---

Gütefaktor  $Q = \omega/(2\Delta\omega)$  beschreiben lässt (die allgemeine Definition des Gütefaktors ist:  $Q = 2\pi \cdot (\text{im Resonator gespeicherte Energie})/(\text{Energieverlust pro Schwingungsperiode})$ ). Je höher der Gütefaktor ist, desto enger ist einerseits das Frequenzintervall, das angeregt werden kann, desto höher wird aber andererseits die Amplitude des elektrischen bzw. magnetischen Felds.

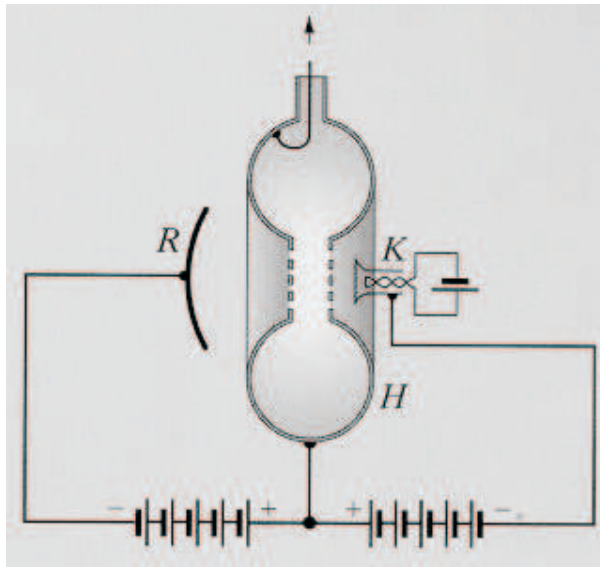


Abbildung 6.7: Prinzip des Reflexklystrons (aus: Gerthsen Physik, Abb. 8.34)

oder das **Magnetron**. Beim BWO durchläuft der Elektronenstrahl eine Kette von resonatorähnlichen Elementen und regt dabei eine Welle an, die beim BWO entgegen der Elektronenstrahlrichtung den Oszillator verlässt (Abb. 6.8)

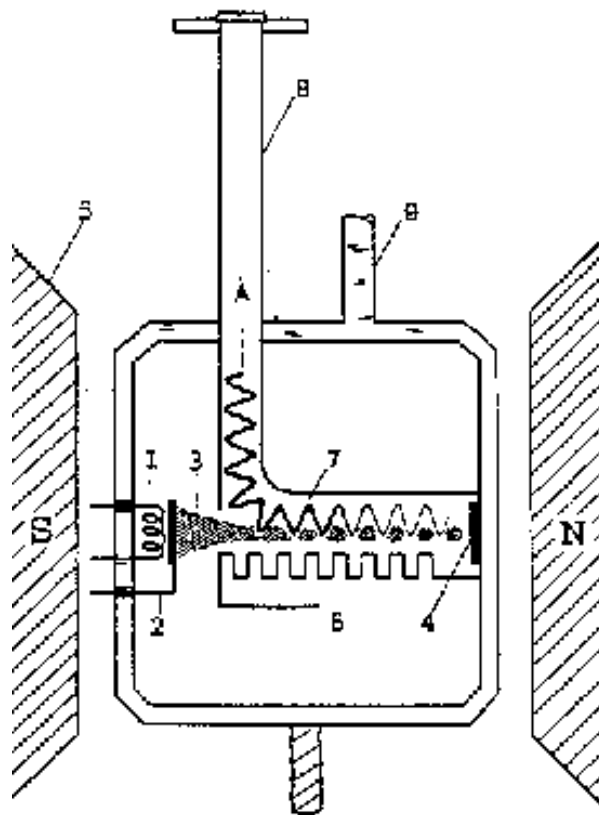


Abbildung 6.8: Rückwärtswellen-Oszillator; Quelle: Arbeitsgruppe M. Dressel, Physikalisches Institut, Univ. Stuttgart, <http://www.pi1.physik.uni-stuttgart.de/indexjs.html>

Mit BWO's können bei hoher Leistung Frequenzen bis ca. 1 THz erzeugt werden.



Beim Magnetron (Abb. 6.9) wird durch ein senkrecht zur Rotationsachse stehendes Magnetfeld der Elektronenstrahl auf eine Kreisbahn gelenkt und gibt dort Energie an eine Serie von Resonatoren ab. Abb. 6.9(a) zeigt die Elektronenbahnen im Magnetron, Abb. 6.9(b) einige Bauformen von Magnetrons. Die rosettenförmige Bahn rotiert um die Achse des Magnetrons und regt in den Resonatoren des Magnetrons eine mit der gleichen Frequenz rotierende Welle an.

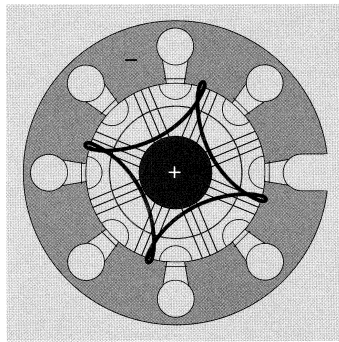
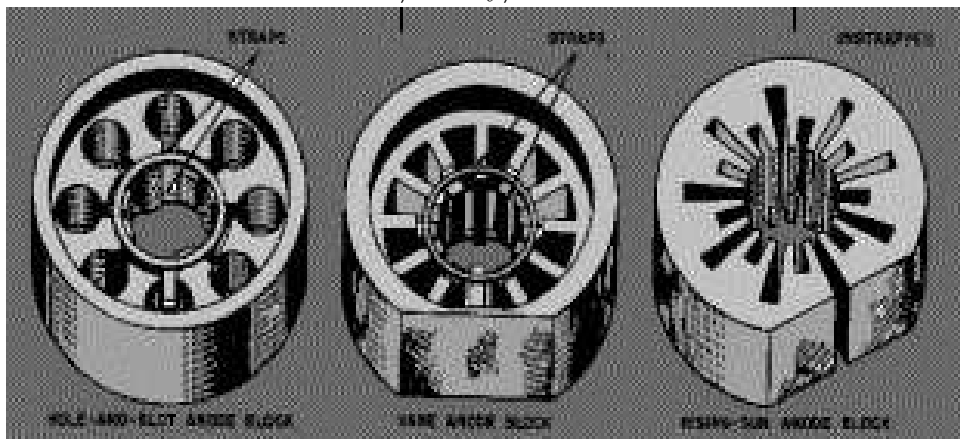


Abbildung 6.9: Magnetrons (links) Elektronenbahn (dicke Linie) im Magnetron; (unten) technische Ausführungen von Magnetrons. Quellen: (links) aus Gerthsen Physik, Abb. 8.36; (unten) aus: <http://www.fnrp.science.cmu.ac.th/theory/microwave>



### Anregung durch Bauelemente mit negativem differentiellen Widerstand

Einige Bauelemente in der Mikroelektronik besitzen Strom-Spannungs-Charakteristiken, bei denen Bereiche negativen differentiellen Widerstands  $r = dU/dI < 0$  auftreten. Eine Kennlinie dieser Art ist schematisch in Abb. 6.10 gezeigt. Integriert man ein solches Bauelement in einen Schwingkreis und wählt man eine Vorspannung  $U_0$  so, dass der statische Strom  $I_0(U_0)$  sich gerade in einem Bereich  $r < 0$  befindet, so "sehen" Stromänderungen  $\Delta I$  um diesen Wert  $I_0$  diesen negativen Widerstand  $r$ , der auf Grund seines Vorzeichens Schwingungen antreibt statt dämpft. Beispiele für Halbleiter-Bauelemente, die solche Strom-Spannungs-Charakteristiken besitzen, sind **Schottky-, Gunn- oder Tunnelioden**.

Auf die Ursachen für das Auftreten des negativen differentiellen Widerstands können wir hier nicht im Detail eingehen. Für den Fall der Gunn-Diode (Material: GaAs) sei beispielhaft erwähnt, dass hier die Beweglichkeit der Ladungsträger in einem gewissen  $E$ -Feld-Bereich stark abnimmt und somit der mit wachsender Spannung  $U$  der Strom fällt statt ansteigt. In der Gunn-Diode bilden sich als Resultat domänenartige Zonen abwechselnd hoher und niedriger Elektronendichte aus, die sich durch die Diode bewegen.

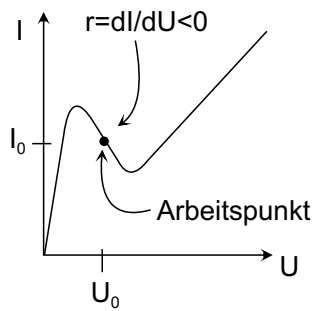


Abbildung 6.10: Kennlinien mit negativem differentiellen Widerstand zur Erzeugung von Hochfrequenzoszillationen.

### Parametrische Verstärkung

Das Prinzip der parametrischen Verstärkung hatten wir bereits in Abschnitt 5.2 kennengelernt. Wir besprechen hier ein Beispiel, bei dem die Kapazität eines Schwingkreises mit der Wechselspannung  $U$  "pumpt". Man verwendet hierzu **Varaktordioden** (spezielle halbleitende pn-Übergänge). Deren Kapazität hängt von der angelegten Spannung ab,  $C = C(U)$ , s. Abb. 6.11. Man hat damit ein Bauelement, mit dem sich wiederum ein parametrischer verstärkender Schwingkreis realisieren lässt.

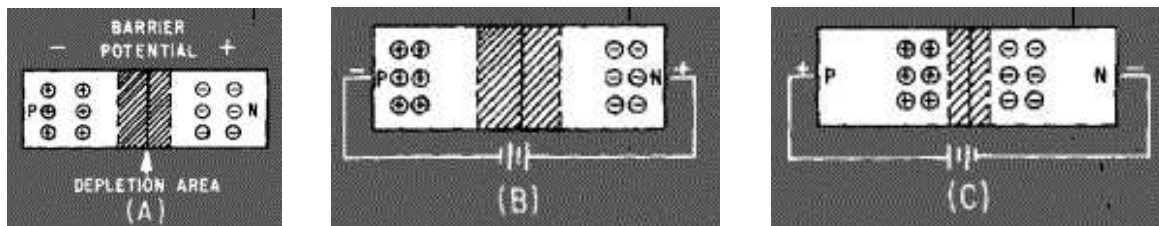


Abbildung 6.11: Varaktordiode;

Abb. aus: <http://www.fnrf.science.cmu.ac.th/theory/microwave/>

## 6.5.2 Übertragung

### Trägerwellen:

Akustische Signale  $A_0(t)$  (z. B. ein Musikstück) nehmen einen Frequenzbereich von ca. 1 Hz bis einigen 10 kHz ein. Im Prinzip kann man dieses Signal direkt übertragen (ein Mikrofon arbeitet auf diese Weise). Für die Übertragung auf lange Distanzen über freie elektromagnetische Wellen hat man aber zwei Schwierigkeiten:

- die Wellenlängen sind extrem groß; man würde äußerst hohe Sendemasten benötigen
- sind viele Sender vorhanden, so überlagern sich die Signale dieser Sender

Die Lösung der obigen Probleme besteht darin, das Ausgangssignal  $A_0(t)$  zu höheren Frequenzen auf eine "Trägerwelle" zu transformieren. Hierzu existieren zwei Möglichkeiten:

- **Amplitudenmodulation:** Man sendet ein Signal der Form  $A(t) = A_0(t) \cdot \cos(\omega_t t)$ . Hierbei ist  $\omega_t$  bzw.  $f_t = \omega_t/2\pi$  die Frequenz der Trägerwelle. Ein Fourierspektrum

$A(\omega)$  des Signals  $A(t)$  hat eine endliche Intensität um die Trägerfrequenz  $\omega_t$  herum, wobei die "Bandbreite"  $\Delta\omega$  gleich der Bandbreite des Ausgangssignals (einige kHz in unserem Beispiel) ist.

- **Phasenmodulation:** Hier ist das Signal von der Form:  $A(t) = \hat{A} \cdot \cos[\omega_t t + \delta(t)]$ , wobei die Phase  $\delta(t)$  proportional zum Ursprungssignal  $A_0(t)$  ist. Auch bei dieser Methode wird das ursprüngliche Signal auf die Trägerfrequenz  $f_t$  transformiert.

Abb. 6.12 zeigt das Prinzip mittels der ersten Takte von Beethovens 5. Sinfonie. In Abb. 6.13 ist der Unterschied von Amplituden- und Phasenmodulation dargestellt.

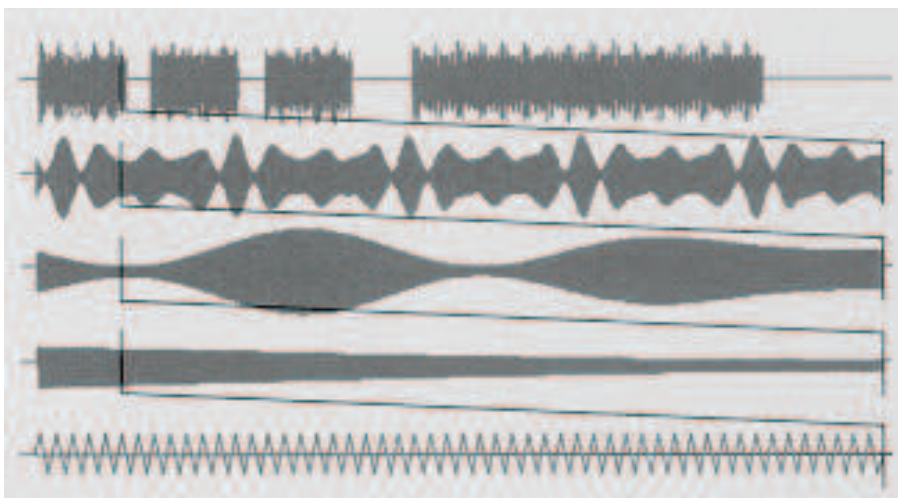


Abbildung 6.12: Übertragung mit Trägerwellen: Signal (elektrische Feldstärke) von Beethovens 5. Sinfonie als Funktion der Zeit. Aus: Gerthsen Physik, Abb. 7.141.

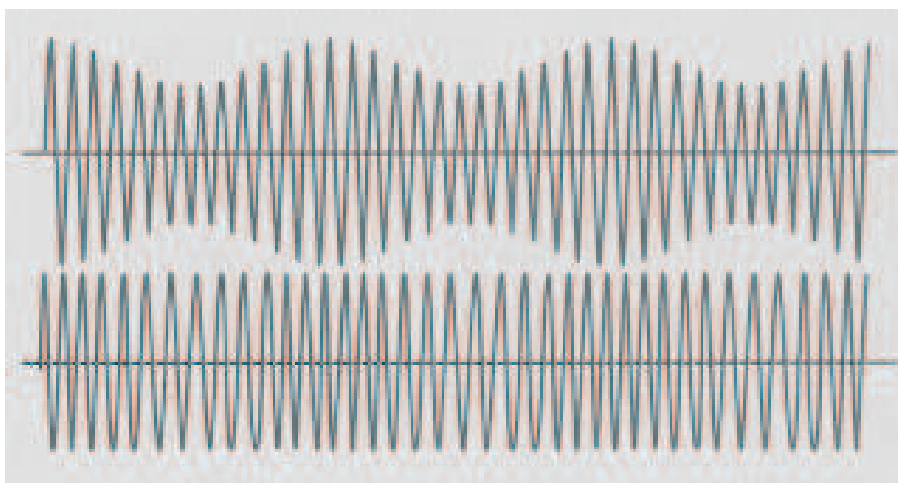


Abbildung 6.13: Trägerwelle mit (oben) Amplituden- bzw. (unten) Phasenmodulation ( $E$ -Feld als Funktion der Zeit). Aus: Gerthsen Physik, Abb. 7.143.

**Übertragungsmethoden:** Als Übertragungsmethoden der elektrischen Signale können frei abgestrahlte Wellen oder **geführte** Wellen gewählt werden.

**Freie Abstrahlung:**

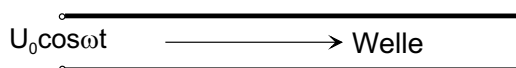
Die freie Abstrahlung (in die Luft oder ins Vakuum) haben wir bereits mehrfach kennengelernt. Hierbei wollen wir noch auf zwei Besonderheiten eingehen:

- mit Langwellen kann man "um die Erde herum" funken. Der Grund besteht darin, dass in den oberen Atmosphärenschichten genügend freie Ladungsträger vorhanden sind, um diese Schichten als metallische "Spiegel" wirken zu lassen. Metalle reflektieren elektromagnetische Wellen bis zu einer gewissen Maximalfrequenz (der "Plasmafrequenz"), die proportional zur Wurzel aus der Dichte der freien Ladungsträger (d. h. Elektronen im Metall) ist. In Metallen liegt die Plasmafrequenz typischerweise im UV-Bereich. In der Ionosphäre liegt die Plasmafrequenz im 100 kHz-Bereich.
- beim Mobilfunk werden die (Handy-)Signale zunächst an eine Basisstation übertragen und von dort über einen oder mehrere Satelliten zurück auf eine irdische Basisstation übertragen.

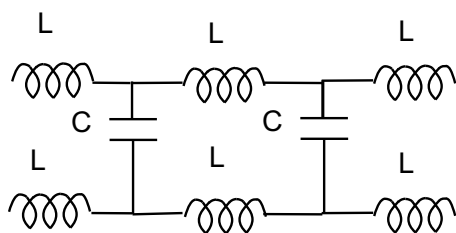
**Geführte Wellen: Doppelleitung (Lecherleitung)**

Für die geführte Abstrahlung existieren eine Reihe von Möglichkeiten. Wir stellen einige exemplarisch vor:

Die **Lecherleitung** besteht aus zwei parallel zueinander gespannten Drähten (Abstand  $d \ll \lambda$ ), entlang derer sich die elektromagnetische Welle ausbreitet<sup>6</sup>(Abb. 6.14 (a)). Da  $d \ll \lambda$  ist, können wir kurze Segmente dieses Leitungstyps näherungsweise durch zwei Induktivitäten und eine dazwischen geschaltete Kapazität charakterisieren<sup>7</sup> (s. Abb. 6.14 (b)). Wir wollen dieses Ersatzschaltbild kurz charakterisieren und eine Wellengleichung,



(a)

(b) Abbildung 6.14: *Lecherleitung: (a) Geometrie, (b) näherungsweise Beschreibung durch Induktivitäten und Kapazitäten.*

die sogenannte "**Telegraphengleichung**" aufstellen. In Abb. 6.15(a) sind die im folgenden verwendeten Bezeichnungen eingetragen. Der entlang des oberen Drahtes fließende Strom sei  $I_1(x)$ , der entlang des unteren Drahtes fließende Strom sei  $I_2(x)$ . Über die Kapazität am Ort  $x$  fließe der Strom  $I_K(x)$ . Über dieser Kapazität falle die Spannung  $U(x)$  ab.

<sup>6</sup>Bei mikroelektronischen Schaltungen verwendet man analog zwei aufgedampfte leitfähige Streifen (Streifenleitung, Mikrostreifenleitung)

<sup>7</sup>In Serie zu den Induktivitäten könnten wir noch einen Widerstand  $R$  berücksichtigen, den wir hier aber aus Gründen der Einfachheit ignorieren.

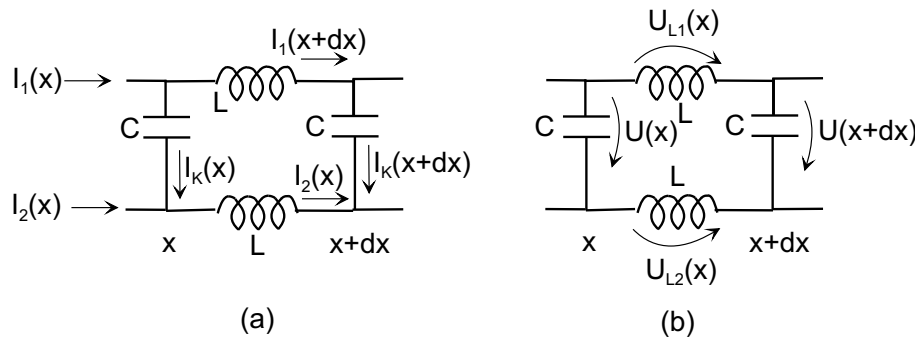


Abbildung 6.15: Zur Herleitung der Telegraphengleichungen

Mit der Kirchhoffschen Knotenregel finden wir:

$$I_1(x) = I_K(x) + I_1(x + dx) = C\dot{U}(x) + I_1(x + dx) \quad (6.69a)$$

$$I_2(x) = -I_K(x) + I_2(x + dx) = -C\dot{U}(x) + I_2(x + dx) \quad (6.69b)$$

Wir definieren  $I(x) = [I_1(x) - I_2(x)]/2$ .  $I$  ergibt gerade den am Ort  $x$  in den beiden Leitungen in entgegengesetzte Richtung fließenden Strom. Die Subtraktion der beiden Gleichungen (6.69a) und (6.69b) ergibt:

$$I(x) = C\dot{U}(x) + I(x + dx). \quad (6.70)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{I(x + dx) - I(x)}{dx} \equiv \frac{dI}{dx} = -\frac{C}{dx}\dot{U}(x) = \tilde{C}\dot{U}(x). \quad (6.71)$$

Hierbei haben wir mit  $\tilde{C}$  die Kapazität pro Längenintervall  $dx$  bezeichnet.

Wir wenden jetzt die Maschenregel an (vgl. Abb. 6.15(b)):

$$U(x) + L\dot{I}_2(x) = U(x + dx) + L\dot{I}_1(x) \quad (6.72)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{U(x + dx) - U(x)}{dx} \equiv \frac{dU}{dx} = -\frac{2L}{dx} \frac{I_1 - I_2}{2} = -\frac{2L}{dx} \cdot I(x) =: -\tilde{L}I(x) \quad (6.73)$$

Hierbei haben wir mit  $\tilde{L}$  die Induktivität pro Länge  $dx$  bezeichnet.

Wir haben jetzt also:

$$\frac{dI}{dx} = -\tilde{C}\dot{U} \quad (6.74a)$$

$$\frac{dU}{dx} = -\tilde{L}\dot{I}. \quad (6.74b)$$

$$(6.75)$$

Wir leiten (6.74b) nach  $x$  ab, setzen (6.74a) ein und finden:

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \tilde{L}\tilde{C} \cdot U = 0. \quad (6.76)$$

Analog finden wir durch Ableiten von (6.74a) nach  $x$  und Einsetzen von (6.74b):

$$\frac{d^2 I}{dx^2} - \tilde{L}\tilde{C} \cdot I = 0. \quad (6.77)$$

(6.76) und (6.77) sind die Telegraphengleichungen. Am Anfang der Leitung (er sei bei  $x = 0$ ) müssen sie noch durch Randbedingungen ergänzt werden, z. B.  $U(x = 0) = \hat{U}_0 \cos \omega t$ ;  $I(x = 0) = 0$ .

Die Lösungen  $I(x, t)$  und  $U(x, t)$  sind ebene Wellen (d. h.  $U = U_0 \exp[i(kx - \omega t)]$ ;  $I = I_0 \exp[i(kx - \omega t)]$ ) mit einer Wellengeschwindigkeit

$$v_{\text{Welle}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{L}\tilde{C}}}. \quad (6.78)$$

Wir wollen hier darauf verzichten,  $\tilde{L}$  und  $\tilde{C}$  explizit auszurechnen. Für parallelgespannte Drähte findet man unabhängig von der genauen Form des Drahtes:

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{L}\tilde{C}}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}. \quad (6.79)$$

Die Welle breitet sich also entlang des Drahtes mit der gleichen Geschwindigkeit aus wie die freie elektromagnetische Welle im gleichen Medium, d. h.  $v_{\text{Welle}} = c_{\text{vak}}/\sqrt{\varepsilon\mu}$ .

In welcher Richtung stehen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ ?

Auf Grund des Ersatzschaltbild wird klar, dass das  $\vec{E}$ -Feld zwischen den Drähten in der durch die Drähte aufgespannten Ebene verläuft. Der Strom  $I(x)$  beschreibt gerade Ringströme zwischen den beiden Drähten. Das  $\vec{B}$ -Feld steht also senkrecht zu der von den Drähten aufgespannten Ebene, ist also wie bei der freien elektromagnetischen Welle senkrecht zu  $\vec{E}$  und zur Ausbreitungsrichtung. Ferner ist  $B$  maximal, wenn  $E$  minimal ist und umgekehrt. Die Situation ist in Abb. 6.16 nochmals graphisch skizziert.

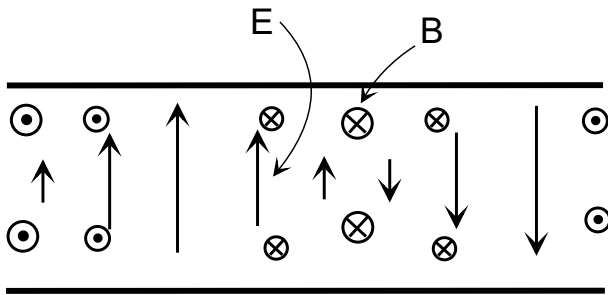


Abbildung 6.16: Elektrisches und magnetisches Feld in der Lecherleitung.

Kommen wir nochmals zurück auf die Ströme  $I(x, t)$  bzw. Spannungen  $U(x, t)$ . Mit dem Ansatz  $U = U_0 \exp[i(kx - \omega t)]$ ,  $I = I_0 \exp[i(kx - \omega t)]$  finden wir aus (6.74a) und (6.74b):

$$ikU = i\tilde{L}\omega I \quad (6.80a)$$

$$ikI = i\omega\tilde{C}U \quad (6.80b)$$

Dividieren wir beide Gleichungen, so erhalten wir:

$$\frac{U}{I} = \frac{\tilde{L}}{\tilde{C}} \cdot \frac{I}{U} \quad (6.81)$$

bzw:

$$\frac{U}{I} \sqrt{\frac{\tilde{L}}{\tilde{C}}} = Z_W \quad (6.82)$$

Die Größe  $Z_W$  hat die Dimension eines Widerstand und wird **Wellenwiderstand** genannt. Da  $\tilde{L}$  proportional zu  $\mu_0\mu$  und  $\tilde{C}$  proportional zu  $\varepsilon_0\varepsilon$  ist, können wir auch schreiben:

$$Z_W = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot (\text{Geometriefaktor}). \quad (6.83)$$

Für zwei parallele zylindrische Drähte mit Radius  $r$  und Abstand  $d$  wird dieser Geometriefaktor gleich  $\ln(d/r)/\pi$ . Für  $r = 0.5$  mm,  $d = 9$  cm (diese Geometrie verwenden wir im Experiment, s. unten) beträgt dieser Faktor ca. 1.65.

Die Größe  $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = Z_0 = 377 \Omega$  wird auch **Wellenwiderstand des Vakuums** genannt. Sie spielt bei der freien Abstrahlung von Wellen eine große Rolle.

Für die obigen Zahlenwerte für  $d$  und  $r$  finden wir mit  $\mu = \varepsilon = 1$  für unsere Lecherleitung einen Wellenwiderstand von ca. 620 W.

Im Experiment betreiben wir eine mehrere Meter lange Lecherleitung mit  $d = 9$  cm. Wir regen die Leitung mit dem 150 MHz-Oszillator an. Am anderen Ende stellen wir einen Reflektor auf, der die Drahtenden leitend miteinander verbindet (Kurzschluss). Entlang der Leitung baut sich eine Stehwelle auf. Wir messen wiederum  $\vec{B}$  und  $\vec{E}$  und finden zwischen den Drähten ein Feldprofil wie in Abb. 6.16. Die Amplituden von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  nehmen bereits wenige cm vom Draht entfernt stark ab.

Was wäre passiert, wenn wir anstelle der elektrisch sehr gut leitenden Platte ( $R \approx 0$ ) am Drahtende eine Platte mit Widerstand  $R$  angebracht hätten? Wir hätten gesehen, dass für  $R = Z_W$  die gesamte Leistung in der Platte absorbiert worden wäre, d. h. keine rückreflektierte Welle entsteht. Dies wird ausgenutzt, um Leitungen "abzuschließen". Den Widerstand  $R$  bezeichnet man entsprechend auch als Abschlusswiderstand. Würden wir umgekehrt freie Drahtenden bei variablem  $d$  betrachten, so stellten wir fest, dass die Drahtenden maximal abstrahlen, wenn  $Z_W$  gleich  $Z_0$ , also dem Wellenwiderstand des Vakuums ist. In diesen beiden Effekten wird der Sinn des Begriffs "Wellenwiderstand" deutlich: "Angepasste" Antennen sollten für eine optimale Abstrahlung den gleichen Wellenwiderstand des sie umgebenden Mediums haben. Kabelenden sollten mit  $R = Z_W$  "abgeschlossen" sein. Verbindet man zwei unterschiedliche Leitungen (oder Leitungen und Antennen etc.), so sollten deren Wellenwiderstände identisch sein.

### geführte Wellen: Koaxialkabel

Koaxialkabel bestehen aus einem Innenleiter und einem konzentrischen Außenleiter, die voneinander durch eine Isolatorschicht voneinander getrennt sind. Bei Radiofrequenzen verwendet man **BNC-Kabel**, bei Mikrowellenfrequenzen sog. "**Semirigid-Kabel**" (Leiter: Cu; Isolatorschicht: Teflon). Semirigid-Kabel können je nach Ausführung bis ca. 20–40 GHz Signale übertragen. Mathematisch behandelt man Koaxialkabel analog zur Doppelleitung, d. h. man erhält wiederum Telegraphengleichungen, die die Wellenausbreitung beschreiben. Es ist weiterhin zu beachten, dass  $E$ -Feld und  $B$ -Feld auf den Zwischenraum zwischen den beiden Leitern beschränkt sind, also nicht aus dem Kabel "herauslecken". Der Wellenwiderstand der Kabel ist üblicherweise auf den Wert  $50 \Omega$  ausgelegt.

### Geführte Wellen: Hohlleiter

Hohlleiter werden eingesetzt, um Mikrowellen über relativ kurze Distanzen (cm bis m) zu übertragen. Typische Frequenzen  $f$  reichen von wenigen GHz bis zu einigen 100 GHz. Wir diskutieren beispielhaft Reckehohlleiter, deren Geometrie in Abb. 6.17 gezeigt ist.

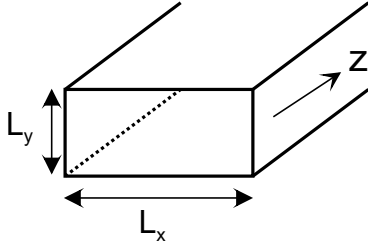


Abbildung 6.17: Rechteckhohlleiter.

Der Hohlleiter sei in  $y$ -Richtung ausgedehnt. In  $x$ - und  $y$ -Richtung bildet sich wie beim quaderförmigen Resonator eine Stehwelle ( $n_x$  bzw.  $n_y$  Halbwellen auf den Querschnitt  $L_x$  bzw.  $L_y$ ) aus. Wenn das elektrische Feld keine Komponente in der Ausbreitungsrichtung  $z$  besitzt, spricht man von TE-Moden (je nach Zahl der Halbwellen in  $x$ - und  $y$ -Richtung TE<sub>10</sub>, TE<sub>11</sub> usw. -Moden). Falls das Magnetfeld keine  $z$ -Komponente besitzt, spricht man von TM-Moden.

Kreisfrequenz und Wellenzahlvektor hängen wiederum über

$$\omega = c|\vec{k}| = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (6.84)$$

zusammen. Hierbei sind  $k_x$  und  $k_y$  auf diskrete Werte festgelegt:  $k_x = n_x\pi/L_x$ ,  $k_y = n_y\pi/L_y$ , mit  $n_x, n_y = 0, 1, 2, \dots$

Man erhält also:

$$\omega = c|\vec{k}| = c\sqrt{\left(\frac{\pi n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_y}{L_y}\right)^2 + k_z^2}. \quad (6.85)$$

Aufgelöst nach  $k_z$  ergibt dies:

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi n_x}{L_x}\right)^2 - \left(\frac{\pi n_y}{L_y}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{\text{grenz}}^2}{c^2}. \quad (6.86)$$

Für Frequenzen kleiner als  $\omega_{\text{grenz}}$  ist  $k_z^2 < 0$  und damit  $k_z$  imaginär. Die Wellen werden exponentiell gedämpft. Eine Ausbreitung entlang des Hohlleiters kann erst für  $\omega > \omega_{\text{grenz}}$  stattfinden. Es sei  $L_x < L_y$ . Die Mode mit der niedrigsten Grenzfrequenz ist dann die TE<sub>01</sub>-Mode mit einer Grenzfrequenz  $\omega_{\text{grenz}}$  von  $c\pi/L_y$ . Oberhalb  $\omega_{\text{grenz}}$  existiert ein bestimmtes Frequenzband, in dem sich nur diese eine Mode ausbreiten kann. Entsprechend dieses Bandbereichs klassifiziert man die Hohlleiter, wobei Begriffe wie X-Band ( $f$  von 8 bis 12 GHz), K-Band ( $f$  von 18 bis 26 GHz) verwendet werden (die Bezeichnungen sind historisch bedingt; einige Bezeichnungen sind in Tab. 6.1 aufgelistet).

Aus der Beziehung

$$\omega = c\sqrt{k_z^2 + \omega_{\text{grenz}}^2/c^2} \quad (6.87)$$

sehen wir weiterhin, dass sich elektromagnetische Wellen im Hohlleiter *nicht* mit  $c$  ausbreiten.

Für die **Phasengeschwindigkeit** gilt  $v_{\text{Ph}} = \omega/k$ , für die **Gruppengeschwindigkeit**<sup>8</sup>

<sup>8</sup>Wellenpakete und damit "Information" breiten sich mit  $v_{\text{gr}}$  aus.



Frequenzband	Frequenzen $f$ [GHz]
L	1-2
S	2-4
C	4-8
X	8-12
Ku	12-18
K	18-26
Ka	26-40
U	40-60

Tabelle 6.1: Einige Mikrowellen-Frequenzbänder und ihre Bezeichnungen

$v_{gr} = d\omega/dk$ . Aus (6.87) erhalten wir:

$$\frac{\omega}{k_z} = c \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{\text{grenz}}}{k_z c}\right)^2} > c \quad (6.88a)$$

und

$$\frac{d\omega}{dk_z} = c \frac{k_z}{\sqrt{k_z^2 + \omega_{\text{grenz}}^2/c^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + (\omega_{\text{grenz}}/k_z c)^2}} < c \quad (6.88b)$$

Das Produkt  $v_{ph}v_{gr}$  ergibt gerade  $c^2$  (man kann zeigen, dass dies allgemein gilt).

Medien mit  $v_{ph} \neq v_{gr}$  heißen ”**dispersiv**”.

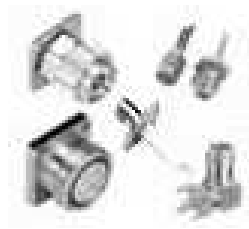
Neben Hohlleitern und Koaxialkabel existieren eine Vielzahl weiterer Mikrowellenkomponenten wie Abschwächer, Leistungsteiler usw. Einige Beispiele sind in Abb. 6.18 gezeigt.



(a) Abschwächer



(b) Resistiver Abschluss



(c) Stecker



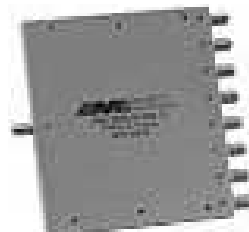
(d) Koppler



(e) DC Blocker



(f) Kabel



(g) Leistungsteiler



(h) Phasenschieber

(i) Verbinder  
Endstücke

(j) Adapter

Abbildung 6.18: Beispiele für Mikrowellenbauteile.

Nach: <http://ebiz.midwest-microwave.com/cgi-bin/mmb2c/main.html>

## 6.6 Empfang

### 6.6.1 Antennen

Zum Empfang von Radio- oder Mikrowellen existieren eine Vielzahl unterschiedlicher Antennenformen. Einige Beispiele (Stabantenne, Ringantenne) hatten wir bereits kennengelernt. Abb. 6.82 zeigt als weiteres Beispiel eine "logarithmisch-periodische Antenne". Dieser Antennentyp kann Mikrowellen über einen weiten Frequenzbereich empfangen. Die im Bild in horizontaler Richtung verlaufenden dreieckförmigen Strukturen bilden eine dipol-

tellen Resonatorelemente dar, die Resonanzen

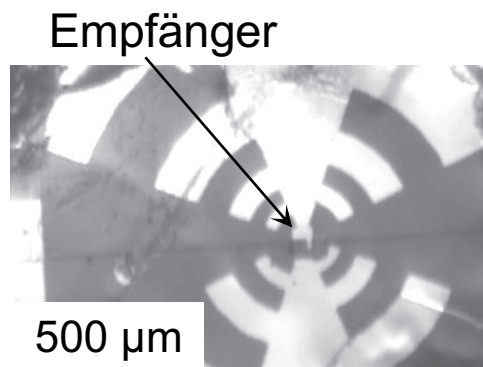


Abbildung 6.19: *Logarithmisch-Periodische Antenne (schwarze Struktur) mit integriertem Empfänger. Die hier gezeigte Anordnung wurde benutzt, um Mikrowellen im Bereich einiger 100 GHz bis zu einigen THz zu detektieren. [”Far Infrared Response of Intrinsic Josephson Junctions”, S. Rother, R. Kleiner, P. Müller, M. Darula, Y. Kasai, and K. Nakajima, Physica C **341**, 1565 (2000).]*

Die logarithmisch-periodische Antenne soll beispielhaft zeigen, dass Antennen (bzw. Mikrowellenbauteile im allgemeinen) oft eine relativ nichttriviale Form haben. Man kann derartige Gebilde mit geeigneten numerischen Programmen optimieren. Allerdings müssen Feinabstimmungen nach wie vor manuell durch "ausprobieren" gemacht werden.

### 6.6.2 Homodyn- und Heterodyn-Empfang

Im einfachsten Fall wird ein Mikrowellensignal bei der Frequenz  $f_S$  ("Signalfrequenz") detektiert und elektronisch verarbeitet ("Homodyn-Prinzip"). Dieses Prinzip funktioniert, solange genügend schnelle Schaltkreise zur Verfügung stehen bzw.  $f_S$  genügend klein ist. Für Frequenzen  $f$  oberhalb einiger GHz verwendet man dagegen das **Heterodynprinzip**. Hier wird das Signal von der Frequenz  $f_S$  auf die niedrigere "Zwischenfrequenz"  $f_{ZF}$  umgesetzt und weiterverarbeitet. Diese Umsetzung erfordert einen "Mischer". Der Mischer empfängt neben dem Signal eine zweite Frequenz  $f_{LO}$ , die von einem "Lokaloszillator" erzeugt wird und erzeugt die Frequenz  $f_{ZF} = |f_S - f_{LO}|$ . Dieses Prinzip wird beispielsweise beim Satellitenempfang eingesetzt ( $f_S$  ca. 10 GHz,  $f_{ZF}$  ca. 1 GHz).

Ein Mischer ist ein Bauelement mit einer nichtlinearen Strom-Spannungs-Charakteristik  $I(U)$  (z. B. Diode). Zum qualitativen Verständnis betrachten wir eine Taylor-Entwicklung von  $I(U)$ :  $I(U) = I_0 + aU + bU^2 + \dots$

Am Mischer liege die Spannung  $U_1 \cos(2\pi f_S t) + U_2 \cos(2\pi f_{LO} t)$  an. Der Strom  $I$  erhält über den quadratischen Term der Taylor-Entwicklung einen Anteil

$$\cos(2\pi f_S t) \cos(2\pi f_{LO} t) = \frac{1}{2} \left[ \cos [2\pi (f_S + f_{LO}) t] + \cos [2\pi (f_S - f_{LO}) t] \right].$$

Der zweite Term liefert die gesuchte Differenzfrequenz  $f_{ZF}$ . Analog produzieren auch höhere Entwicklungsglieder der Taylorreihe diese Frequenz.

Ein sehr guter Mischer kann Signale mit sehr wenig Verlust oder sogar verstärkend zur Zwischenfrequenz transformieren. Ein sehr einfaches Beispiel besteht aus einem Schalter, an den eine sinusförmige Wechselspannung mit Frequenz  $f_S$  angelegt wird. Bei offenem Schalter liegt an diesem die Spannung  $U(t)$  an und wird detektiert. Öffnet man den Schalter für eine jeweils sehr kurze Zeit mit der Abtastrate  $f_{LO}$ , die etwas kleiner ist als  $f_S$ , so durchläuft die abgetastete Spannung allmählich die gesamte Sinusfunktion. Eine Periode ist dabei nach der Zeit  $T = 1/(f_S - f_{LO})$  durchlaufen. Der Schalter hat damit das Signal auf die Zwischenfrequenz herabgesetzt, wobei die Amplitude des ZF-Signals gleich der Amplitude des Eingangssignals ist.

Hiermit schließen wir unsere Ausführungen über Mikrowellen bzw. über elektromagnetische Wellen insgesamt ab. Viele weitere Aspekte der Mikrowellentechnik können beispielsweise in [Meinke/Gundlach, "Taschenbuch der Hochfrequenztechnik" (Springer-Verlag)] oder in: [D. M. Pozar, "Microwave Engineering", John Wiley Sons] nachgelesen werden.

# Kapitel 7

## Spezielle Relativitätstheorie

### 7.1 Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

In diesem Abschnitt wollen wir uns damit beschäftigen, wie sich elektromagnetische Wellen, also z.B. das sichtbare Licht, ausbreiten. Zum Vergleich betrachten wir noch einmal die Ausbreitung von Schallwellen. Bei der Ausbreitung von Schallwellen in der Luft handelt es sich um Druckschwankungen, also Abweichungen des Druckes an einem bestimmten Ort  $\vec{r}$  zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  vom Normaldruck, die wir durch eine Funktion  $p(\vec{r}, t)$  beschreiben (siehe hierzu das Kapitel 7 der Vorlesung Physik I). Wird eine solche Schallwelle zur Zeit  $t = 0$  am Koordinatenursprung  $\vec{r} = 0$  ausgesendet, so entwickelt sich diese Schallwelle in Form einer Kugelwelle der Form

$$p(\vec{r}, t) = \frac{p_0}{r} \cos(kr - \omega t) . \quad (7.1)$$

Das Maximum dieser Schwingungsamplitude, das sich zur Zeit  $t = 0$  am Koordinatenursprung  $r = 0$  befindet, breitet sich also in Form einer Kugelschale aus, wobei zwischen Radius der Kugel  $r$  und der Zeit  $t$  der Zusammenhang

$$kr - \omega t = 0 \quad \rightarrow \quad r = \frac{\omega}{k} t = c_S t$$

besteht. Die Schallwelle breitet sich mit der Schallgeschwindigkeit  $c_S = \omega/k$  aus. Diese Schallgeschwindigkeit ist eine Eigenschaft des Mediums (hier Luft), in dem sich der Schall ausbreitet, und allgemein gilt für die Ausbreitung von Schall, der zur Zeit  $t = t_0$  and der Stelle  $\vec{r} = \vec{r}_0$  emittiert wird, die folgende Gleichung für den Ort  $\vec{r}$ , an dem man den Schall zur Zeit  $t$  empfängt

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 - c_S^2 (t - t_0)^2 = 0 . \quad (7.2)$$

Diese Beziehung gilt natürlich nur für ein Koordinatensystem, das relativ zum Ausbreitungsmedium ruht. Betrachten wir einen Beobachter, beziehungsweise ein Koordinatensystem, das mit diesem Beobachter verbunden ist, der sich mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$  relativ zum Medium bewegt. Bezeichnet man die Vektoren in diesem bewegten Koordinatensystem mit  $\vec{r}'$ , so gilt zwischen den Vektoren des ruhenden Koordinatensystems  $\vec{r}$  und des bewegten Systems entsprechend der Galilei Transformation

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t , \quad (7.3)$$

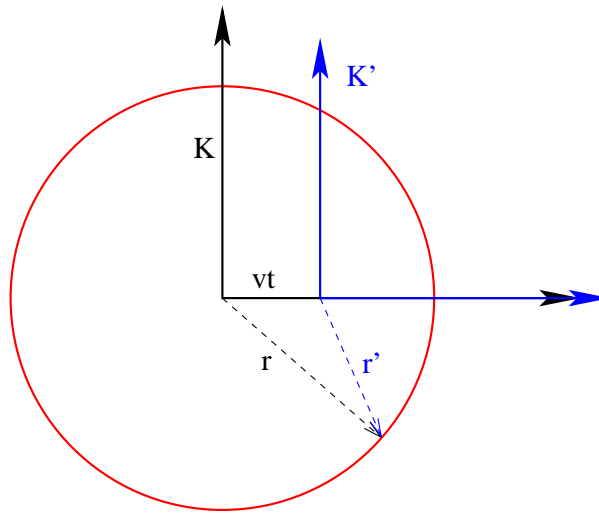


Abbildung 7.1: Schallausbreitung für verschiedene Beobachter

wenn wir annehmen, dass zur Zeit  $t = t_0 = 0$  die beiden Koordinatenursprünge am gleichen Ort waren. Setzen wir außerdem voraus, dass zur Zeit  $t = t_0 = 0$  an diesem gemeinsamen Koordinatenursprung eine Schallwelle emittiert wird, so gilt für die Ausbreitung aus der Sicht des bewegten Koordinatensystems an Stelle von (7.2) die Beziehung

$$(\vec{r}' + \vec{v}t)^2 - c_s^2 t^2 = 0. \quad (7.4)$$

Aus der Sicht dieses bewegten Beobachters breitet sich der Schall also nicht auf Kugelschalen aus sondern in der einen Richtung (parallel zu  $\vec{v}$ ) langsamer als in andere (antiparallel zu  $\vec{v}$ , siehe Abbild 7.1). Außerdem kann der Beobachter dem Schall davon laufen, wenn er sich mit Überschallgeschwindigkeit,  $v > c_s$  bewegt.

In welchem Medium breiten sich elektromagnetische Wellen aus? Zunächst können wir festhalten, dass sich elektromagnetische Wellen offensichtlich auch im Vakuum ausbreiten. Dies wird aus der Sicht der Theorie dadurch belegt, dass wir auch im Vakuum eine Ausbreitungsgeschwindigkeit für die elektromagnetischen Wellen der Form

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad (7.5)$$

definieren können. Aber auch der experimentelle Befund, dass uns z.B. das Licht der Sonne als elektromagnetische Welle über das im Weltraum existierende Vakuum hier auf der Erde erreicht, ist ein deutlicher Beleg dafür, dass elektromagnetische Wellen im Gegensatz etwa zu Schallwellen sich auch im Vakuum ausbreiten.

Bis zum Jahre 1900 zweifelte kaum jemand daran, dass es auch für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen ein Medium gibt, das man allgemein als Äther bezeichnete. Erst der Versuch von **Michelson** zeigte dann, dass es keinen solchen Äther gibt und sich elektromagnetische Wellen unabhängig von einem Medium ausbreiten. Zum Verständnis dieses Michelson Versuches wollen wir zunächst einmal annehmen, dass es einen Äther gibt, der sich relativ zu unserem im Labor verankerten Koordinatensystem mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt. Was passiert nun, wenn wir Licht einmal parallel zu der Geschwindigkeit des Äthers emittieren und ein anderes mal senkrecht dazu.

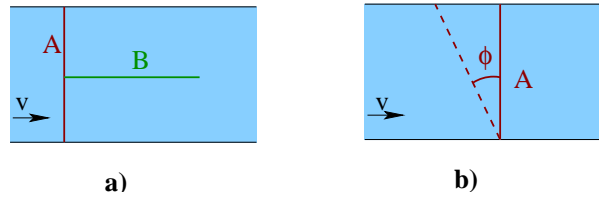


Abbildung 7.2: Schwimmer im Fluss, siehe Diskussion im Text

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir ein entsprechendes Beispiel aus unserer Alltagserfahrung. Wir betrachten zwei Schwimmer, die gleich schnell mit einer Geschwindigkeit  $c$  schwimmen. Diese Geschwindigkeit gilt relativ zum Wasser, das für die Schwimmer die gleiche Rolle übernimmt, wie der Äther für die Ausbreitung von Lichtwellen. Die Schwimmer sollen in einem Fluss schwimmen, der sich relativ zu uns mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt. Der Schwimmer (A) überquert den Fluss der Breite  $L$  und schwimmt dann wieder zum Ausgangspunkt zurück. Der Schwimmer (B) schwimmt zunächst in Flussrichtung die Strecke  $L$  und kehrt dann gegen die Strömung zum Ausgangspunkt zurück (siehe Abb. 7.2a). Beide Schwimmer legen die Strecke  $2L$  zurück und wir stellen die Frage: Wer ist schneller an seinem Ausgangspunkt zurück?

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir zunächst einmal die Aufgabe des Schwimmers A. Damit er direkt gegenüber am anderen Flussufer ankommt, muss er in eine Richtung schwimmen, die relativ zur direkten Verbindungslinie einen Winkel  $\phi$  bildet (siehe Abb. 7.2b). Wenn er in die gewählte Richtung mit seiner Geschwindigkeit  $c$  eine gewisse Zeit  $t$  schwimmt, so trägt ihn der Fluss in dieser Zeit eine Strecke  $vt$  flussabwärts. Er schwimmt also auf der Ideallinie, der direkten Verbindungslinie, wenn gilt

$$\sin \phi = \frac{vt}{ct} = \frac{v}{c}. \quad (7.6)$$

Von seiner Geschwindigkeit  $c$  bringt ihn aber nur die Komponente  $c \cos \phi$  in die Richtung des gegenüberliegenden Ufers. Er benötigt deshalb für die Strecke  $L$  bis zum anderen Ufer die Zeit

$$t = \frac{L}{c \cos \phi} = \frac{L}{c \sqrt{1 - \sin^2 \phi}} = \frac{L}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Die gleiche Zeit benötigt er für den Rückweg, so dass der Schwimmer A insgesamt die Zeit

$$T_A = \frac{2L}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (7.7)$$

benötigt. Der Schwimmer B schwimmt auf dem Hinweg mit der Strömung und hat also relativ zum Ufer die Geschwindigkeit  $c + v$ . Auf dem Rückweg aber dafür nur die Geschwindigkeit  $c - v$ . Insgesamt benötigt er also für die gesamte Strecke die Zeit

$$T_B = \frac{L}{c + v} + \frac{L}{c - v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}. \quad (7.8)$$

Daraus ergibt sich das Verhältnis

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c^2 - v^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (7.9)$$

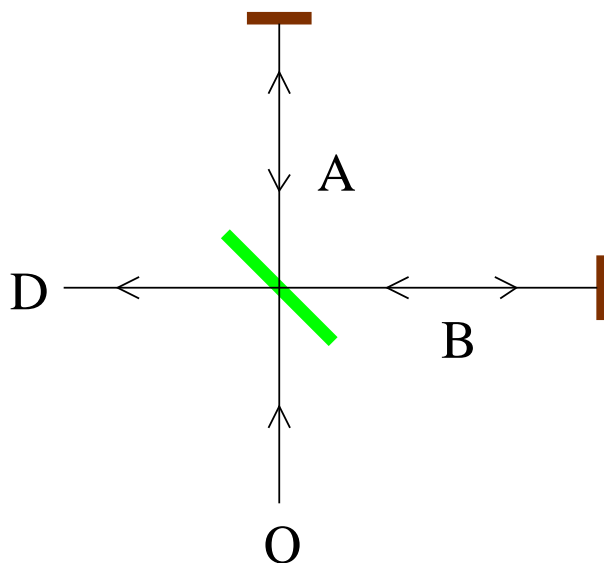


Abbildung 7.3: Schematische Darstellung des Michelson Interferometers, siehe Diskussion im Text

der Schwimmer B benötigt also etwas mehr Zeit als der Schwimmer A.

Analog zu diesem Beispiel der Schwimmer A und B wollen wir nun in einem Gedankenexperiment zwei elektromagnetische Wellen auf Hin- und Rückreise senkrecht zur Bewegungsrichtung des Äthers und parallel beziehungsweise antiparallel zum Äther schicken. Dies geschieht mit dem in der Abbildung 7.3 schematisch dargestellten Michelson Interferometer.

Von einer Lichtquelle Q wird Licht durch einen halbdurchlässigen Spiegel zum Teil durchgelassen in Richtung A, dann an einem festen Spiegel reflektiert und über den halbdurchlässigen Spiegel in Richtung des Beobachters (Detektor D) abgelenkt. Ein anderer Teil wird ausgehend von der Quelle Q über den halbdurchlässigen Spiegel in Richtung B ausgelenkt, reflektiert und ebenfalls in Richtung D durchgelassen.

Die total reflektierenden Spiegel können nun so justiert werden, dass die Lichtwellen, die über den Weg A zum Detektor D kommen genau in Phase sind mit denen, die den Weg B nehmen. Das bedeutet, dass die Zeiten, die das Licht für den Weg A und den Weg B benötigt so aufeinander eingestellt sind, dass die Zeitdifferenz gerade ein ganzes Vielfaches der Schwingungsperiode des benutzten Lichts ist. Wird nun die Apparatur gedreht, so ändert sich die Richtung der Wege A und B relativ zur Geschwindigkeit des Äthers. Das bedeutet aber, dass die Justierung der Phasen bei einer solchen Drehung gestört würde.

Der Versuch zeigte, dass eine solche Phasenverschiebung nicht eintritt. Dies bedeutet also entweder, dass die Relativgeschwindigkeit des Äthers relativ zum Labor, in dem der Versuch stattfindet gleich Null ist (eine Annahme, die unter Berücksichtigung der Bewegungen, die ein Punkt auf der Erde durch die Rotation der Erde, der Bewegung der Erde um die Sonne, der Bewegung des Sonnensystems in unserer Galaxie usw. nicht sehr plausibel ist) oder aber kein Äther existiert.

Wenn es aber keinen Äther, kein Medium, gibt, in dem sich das Licht ausbreitet, so muss die Gleichung für die Ausbreitung eines Lichtblitzes, der zur Zeit  $t_0 = 0$  im Koordina-



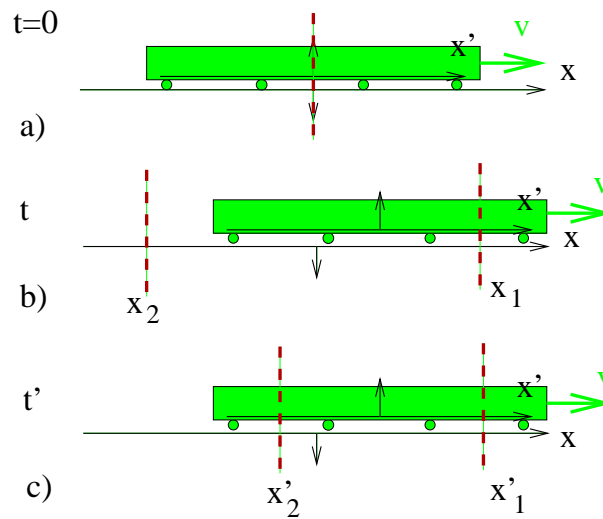


Abbildung 7.4: Gedankenexperiment: Zug mit Geschwindigkeit  $v$  nahe der Lichtgeschwindigkeit, siehe Diskussion im Text

tenursprung gezündert wurde

$$\vec{r}^2 - c^2 t^2 = 0, \quad (7.10)$$

in jedem Koordinatensystem gelten, dessen Koordinatenursprung zur Zeit  $t_0$  am Emissionspunkt des Lichtes war.

Vergegenwärtigen wir uns die Konsequenz dieses experimentellen Ergebnisses noch in einem weiteren Gedankenexperiment. Wir stellen uns vor, dass wir zwei Koordinatensysteme haben, die sich mit einer Geschwindigkeit  $v$  relativ zueinander bewegen, aber zur Zeit  $t_0 = 0$  den Koordinatenursprung am selben Ort haben. Dies könnte so realisiert sein, dass ein Koordinatensystem an den Schienen der Bahnstrecke Rottenburg - Reutlingen angebracht ist, ein zweites in einem Eisenbahnzug, der mit der Geschwindigkeit  $v$  durch den Bahnhof Tübingen saust. Dies bedeutet, dass wir eine Schar von Messknechten haben, die sich mit aufeinander abgestimmten Uhren an den Messstellen des Bahngleises aufstellen. Eine zweite Schar von Messknechten ist, ebenfalls mit aufeinander abgestimmten Uhren im Zug positioniert. Zur Zeit,  $t_0 = 0$ , befindet sich der Koordinatenursprung des Zugsystems am Koordinatenursprung des Schienensystems (das ist natürlich der Tübinger Hauptbahnhof) und es werde an diesem gemeinsamen Koordinatenursprung ein Lichtblitz gezündet (siehe Abb. 7.4 a).

Nach einer gewissen Zeit  $t$  stellt sich die Situation der Abb. 7.4 b) ein: Der Koordinatenursprung des Zuges hat sich um die Strecke  $vt$  vom Koordinatenursprung des Schienensystems entfernt und der Lichtblitz kommt für die Beobachter des Schienensystems gleichzeitig an den Stellen  $x_1 = ct$  und  $x_2 = -ct$  an. Wie stellt sich aber die gleiche Situation für die Beobachter des Zugsystems dar? Natürlich wird sich der Messknecht des Zugsystems der dem Kollegen des Schienensystems an der Stelle  $x_1$  gerade gegenübersteht mit diesem darüber verständigen können, dass der Lichtblitz angekommen ist. Für das Mitglied des Zugsystems gilt aber, dass das Licht erst die Strecke  $x'_1 = x_1 - vt$  zurückgelegt hat. Da aber auch für das Zugsystem die gleiche Beziehung (7.10) für die Ausbreitung

des Lichtes gilt, wird er auf seiner Uhr ablesen, dass das Licht erst die Zeit

$$t' = \frac{x'_1}{c}$$

unterwegs ist. Aus der Sicht des Zugteams stellt sich die Situation aber auch wie in Abb. 7.4 c) dargestellt dar: Zur Zeit  $t'$  kommt der ausgesandte Lichtblitz gleichzeitig an der Stelle  $x'_2 = -x'_1$  an. Die Ereignispunkte, die für die Zugfahrer gleichzeitig erscheinen (die von Abb. 7.4 c), sind offensichtlich andere als die für das Schienenteam (siehe Abb. 7.4 b).

Diese merkwürdigen Ergebnisse resultieren aus der Beobachtung, dass die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in allen zueinander bewegten Bezugssystemen durch die gleiche Gleichung (7.10) beschrieben wird. Die Situation ist anders bei der Ausbreitung des Schalls. In diesem Fall gilt eine Ausbreitungsgleichung vom Typ (7.10) nur im Ruhesystem des Ausbreitungsmediums, also z.B. der Luft.

Wir fassen als erste Konsequenzen dieser Überlegungen zur Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen zusammen:

- Es gibt kein ausgezeichnetes Referenzsystem (das Ruhesystem des Äthers).
- Da die Gleichung (7.10) für die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in allen Bezugssystemen, auch solchen die sich relativ zueinander bewegen, gilt, muss die Bestimmung einer Zeitdifferenz (z.B. zwischen Aussenden eines Lichtblitzes und Empfang) vom Koordinatensystem abhängen. Die Messknechte im Zug ermitteln andere Ankunftszeiten für den Lichtblitz als die an den Schienen.
- Zwei Ereignispunkte, die in einem Koordinatensystem gleichzeitig sind, sind dies im Allgemeinen nicht auch in anderen Bezugssystemen.
- Man kann elektromagnetische Wellen nicht überholen. Ein Beobachter kann versuchen sich so schnell wie möglich zu bewegen, dennoch läuft ihm das Licht in seinem mitgeführten Koordinatensystem immer noch mit Lichtgeschwindigkeit davon. Das bedeutet aber für einen zuschauenden, ruhenden Beobachter, dass die Geschwindigkeit des laufenden Beobachters immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein muss. Dies bedeutet, dass kein Beobachter und damit natürlich auch kein Massenpunkt eine Geschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit erreichen kann.

Dieser letzte Punkt soll an einem Experiment verifiziert werden. Dazu betrachten wir die Beschleunigung von Elektronen durch eine Spannung  $U_0$ . Sind die Elektronen an der Kathode dieser Beschleunigungsspannung,  $U_0$  in Ruhe so ist ihre Energie allein durch die potenzielle Energie gegeben. Auf dem Weg zur Anode wird diese potenzielle Energie  $|eU_0|$  (mit  $e$  der Ladung des Elektrons) vollkommen in kinetische Energie umgesetzt. Nach den Gesetzen der nicht-relativistischen Mechanik sollte also gelten

$$\frac{m}{2}v^2 = |eU_0|.$$

Das Elektron mit der Masse  $m$  sollte also am Ende der Beschleunigungsstrecke eine Geschwindigkeit  $v$  besitzen, für die gilt

$$v^2 = \frac{2|eU_0|}{m}. \quad (7.11)$$

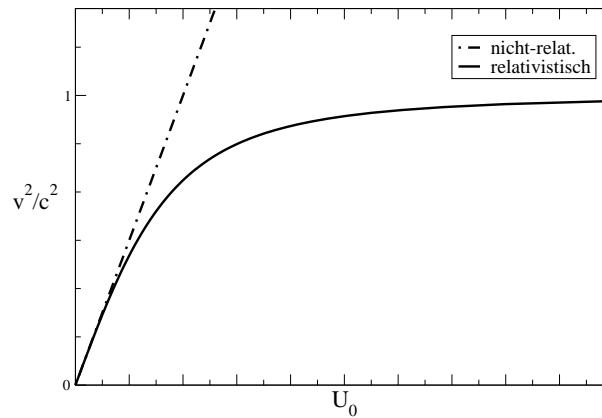


Abbildung 7.5: Geschwindigkeit eines Elektrons zum Quadrat ( $v^2$ ) als Funktion der Beschleunigungsspannung  $U_0$ . Dargestellt sind die Vorhersagen der nicht-relativistischen Abschätzung von Gl.(7.11) und der Relativitätstheorie, die mit dem Experiment übereinstimmt

Misst man aber diese Geschwindigkeit der Elektronen als Funktion der Beschleunigungsspannung  $U_0$ , so ergibt sich nicht dieser lineare Zusammenhang zwischen  $v^2$  und  $|U_0|$  aus Gl.(7.11) (gestrichelte Kurve in 7.5) sondern die Werte der durchgezogenen Linie. Man sieht, dass die gemessenen Geschwindigkeiten unterhalb der Lichtgeschwindigkeit  $c$  bleiben auch für beliebig große Beschleunigungsspannungen  $U_0$ . Die analytische Form dieser Funktion werden wir einige Abschnitte später herleiten.



## 7.2 Der 4-dimensionale Raum

Jeder Ereignispunkt wird durch 4 Koordinaten, 3 für die Position im Raum wo das Ereignis stattfindet und eine für die Zeit wann das Ereignis stattfindet, festgelegt. Damit auch die Zeitkoordinate in den gleichen Einheiten definiert werden kann wie die Raumkoordinaten, nämlich z.B. in Metern, multipliziert man die Zeitkoordinate mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $c$  und definiert so einen Ereignispunkt durch einen Vektor der Dimension 4, z.B. als Spaltenvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (7.12)$$

wobei  $x, y, z$  die Raumkoordinaten des Ereignispunktes in einem kartesischen Koordinatensystem bezeichnen und  $t$  für die Zeit in diesem Koordinatensystem steht. In einem Koordinatensystem  $K'$  wird der gleiche Ereignispunkt durch einen anderen Vektor definiert

$$\vec{r} \quad \Longrightarrow \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (7.13)$$

wobei wir berücksichtigt haben, dass bei einer Koordinatentransformation von  $K$  nach  $K'$  eventuell auch die gemessene Zeit transformiert werden muss (siehe Diskussion im vorhergehenden Abschnitt). Die Transformation der Koordinaten des gleichen Ereignispunktes soll dabei so gestaltet werden, dass gilt

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2. \quad (7.14)$$

Durch diese Forderung ist gewährleistet, dass ein Ereignispunkt, der dem Empfang eines Lichtsignals (ausgehend vom Koordinatenursprung zur Zeit  $t = 0$ ) beschreibt in beiden Koordinatensystemen durch die jeweils richtige Beziehung zwischen Ort und Zeit beschrieben wird. Die Forderung (7.14) spiegelt also die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Koordinatensystemen.

Um diese Forderung etwas präziser zu formulieren definieren wir den **Minkowski Raum** als den 4-dimensionalen Vektorraum von Raumzeitpunkten, in dem das Betragsquadrat eines Vektors in einem bestimmten Koordinatensystem definiert ist durch

$$|\vec{r}|^2 := c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (7.15)$$

Die Suche nach Koordinatentransformationen, die (7.14) erfüllen, entspricht also der Suche nach Transformation in der Basis des Minkowski Raumes, die die in (7.15) definierte Länge des Vierervektors invariant lassen.

Für die weitere Diskussion ist es hilfreich weitere Bezeichnungen und Definitionen einzuführen. So definieren wir z.B. einen Ereignispunkt  $\vec{r}$  durch einen Spaltenvektor, den wir als **kontravarianten Vektor** bezeichnen, durch die Darstellung

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

Die nullte Komponente dieses kontravarianten Vektors  $x^\mu$ ,  $x^0 = ct$ , bezeichnet also die zeitartige Koordinate des Ereignispunktes, die erste bis dritte Komponente die 3 raumartigen nach der Vereinbarung  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$  und  $x^3 = z$ . Der gleiche Raumzeitpunkt wird auch durch einen **kovarianten Vektor**  $x_\mu$  (beachte, der Index steht hier unten) charakterisiert in der Form

$$x_\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

Damit berechnet sich das Betragsquadrat des Raumzeitpunktes  $\vec{r}$  im Minkowski Raum als das Skalarprodukt des zugehörigen kontravarianten Spaltenvektors mit dem entsprechenden kovarianten Spaltenvektor. Es gilt ja

$$\begin{aligned} |\vec{r}|^2 &= \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 \\ &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Bei der Bezeichnung dieses Skalarproduktes verzichtet man im Allgemeinen auf das Summenzeichen und definiert das Produkt von 2 Vierer Vektoren  $x$  und  $y$

$$x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu := x^0 y_0 + x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3. \quad (7.19)$$

Als ein weiteres Beispiel für die Anwendung dieser Nomenklatur betrachten wir die Transformation des kontravarianten Spaltenvektors  $x$  in den zugehörigen kovarianten Spaltenvektor

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu := \sum_{\nu=0}^4 g_{\mu\nu} x^\nu. \quad (7.20)$$

Auch in dieser Gleichung implizieren die gleichlautenden Indizes  $\nu$  auf der rechten Seite der Gleichung eine Summation über diesen Index, was an dieser Stelle auch noch einmal explizit angegeben wird. Die Verbindung zwischen kontravariantem und kovarianten Vektor wird durch die 16 Zahlen  $g_{\mu\nu}$  definiert, die aber in diesem Fall einfach gegeben sind durch

$$g_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \mu = \nu = 0 \\ -1 & \mu = \nu = i \in (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} \quad (7.21)$$

Die Transformationsgleichung (7.20) kann man natürlich auch durch Multiplikation einer Matrix  $g$  mit dem Spaltenvektor  $x^\nu$  darstellen in der Form

$$x_\mu = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Man bezeichnet diese Transformationsmatrix  $g$  bzw.  $g_{\mu\nu}$  als metrischen Tensor, da mit diesem Tensor das Skalarprodukt zweier Vektoren definiert ist gemäß

$$\vec{x} \vec{y} = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu.$$

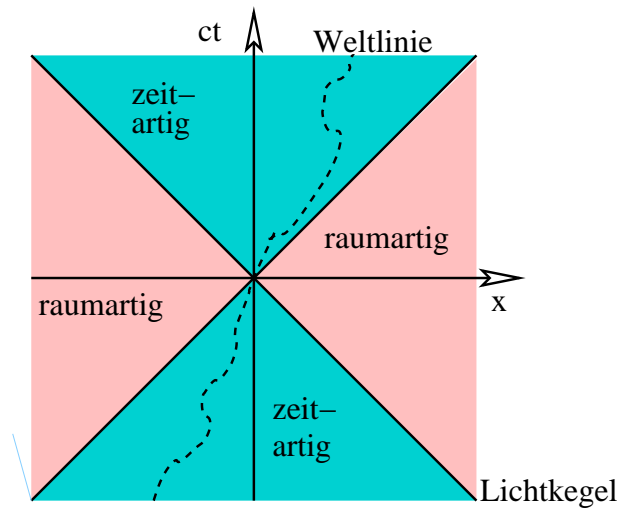


Abbildung 7.6: Weltlinie im Minkowski Raum

Einzelne Ereignispunkte  $\vec{r}$  sind also durch einen Vierervektor, ein Element des Minkowski Raumes definiert. Eine Abfolge von Ereignispunkten, also z.B. die Bewegung eines Teilchens, wird damit durch eine Trajektorie im Minkowski Raum dargestellt. Man spricht von der Weltlinie des betroffenen Teilchens. Zur Darstellung einer solchen Weltlinie wurde in Abb. 7.6 auf die Darstellung der  $y$  und  $z$  Koordinaten verzichtet und eine solche Weltlinie als Funktion einer Raumkoordinate  $x$  und der Zeitkoordinate  $ct$  dargestellt.

In dieser Figur sind außerdem die Linien eingezeichnet für die gilt (beachte wir beschränken die Abbildung auf  $y = z = 0$ )

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0. \quad (7.22)$$

Diese Punkte definieren den Lichtkegel. Zur Bedeutung dieses Namens, muss man sich z.B. für  $z = 0$  die Punkte vorstellen, die diese Gleichung erfüllen. Diese Punkte liegen auf den Kegeln, die ihre Achse auf der Zeitachse haben und deren Spitzen sich im Koordinatenursprung berühren. Alle Vektoren, die (7.22) erfüllen haben die Länge Null in der Metrik des Minkowski Raumes. Die zugehörigen Ereignispunkte haben also vom Koordinatenursprung den Abstand Null, gemessen mit der Metrik des Minkowski Raumes.

Physikalisch sind diese Punkte auf dem Lichtkegel mit dem Koordinatenursprung über das Gesetz der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen verbunden. Punkte, die auf dem Zukunfts-Lichtkegel liegen, das sind solche, für die  $t > 0$  gilt, werden einen Lichtblitz empfangen, der zur Zeit  $t = 0$  im Koordinatenursprung gezündet wird. Punkte auf dem Vergangenheits-Lichtkegel  $t < 0$  sind Punkte, von denen ein Empfänger im Koordinatenursprung zur Zeit  $t = 0$  ein Lichtsignal empfangen kann. So liegt also für uns hier z.B. in Tübingen als Koordinatenursprung, zur jetzigen Zeit  $t = 0$  das Ereignis, dass die Sonne zur Zeit  $t = -8$  Minuten Licht ausgesandt hat, das wir genau jetzt hier empfangen, auf dem Vergangenheits - Lichtkegel.

Alle Punkte, die vom Koordinatenursprung einen negativen Minkowski Abstand haben, also

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 < 0,$$

bezeichnet man als raumartige Punkte: der raumartige Abstand  $x^2 + y^2 + z^2$  ist größer als der zeitartige  $c^2t^2$ . Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass man stets eine Transformation von Koordinaten finden kann, so dass ein Ereignispunkt im raumartigen Bereich die Zeit  $t' = 0$  in diesem Koordinatensystem besitzt. Dieser Ereignispunkt ist gleichzeitig zum Koordinatenursprung. Man kann allgemein für raumartige Punkte nicht sagen ob sie eine Zeit  $t > 0$  oder  $t < 0$  haben, ob sie relativ zum Koordinatenursprung in der Zukunft oder in der Vergangenheit liegen. Dies hängt vom jeweiligen Koordinatensystem ab. Deshalb kann natürlich ein Ereignis im Koordinatenursprung keinen Einfluss nehmen auf ein Ereignispunkt im raumartigen Bereich. Bei entsprechender Wahl des Koordinatensystems würde dieser Ereignispunkt ja in die Vergangenheit transformiert und ein Einfluss auf einen Ereignispunkt der Vergangenheit verletzt natürlich die Kausalität.

Andererseits kann aber auch ein Ereignis auf einem raumartigen Ereignispunkt keinen Einfluss auf den Koordinatenursprung nehmen. Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems würde der Ereignispunkt in der Zukunft liegen und ein Einfluss der Zukunft auf die Gegenwart verletzt natürlich auch die Kausalität. Diese Feststellungen ist nur eine alternative Art um zum Ausdruck zu bringen, dass Information, bzw. Einfluss nehmen auf einen Ereignispunkt, maximal mit Lichtgeschwindigkeit übertragen werden kann. Dies schließt eine Einflussnahme eines Ereignisses im Koordinatenursprung auf Raumzeitpunkte im raumartigen Bereich aus.

Alle Punkte, die vom Koordinatenursprung einen positiven Minkowski Abstand haben, also

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0,$$

gehören zum zeitartigen Bereich. Für diese Punkte ist eindeutig definiert ob sie bezogen auf den Koordinatenursprung in der Vergangenheit oder in der Zukunft liegen. Diese Punkte können den Koordinatenursprung erreichen ( $t < 0$ ) oder können vom Koordinatenursprung aus erreicht werden ( $t > 0$ ). Deshalb liegt die Weltlinie, die in Abb. 7.6 skizziert ist und durch den Koordinatenursprung verläuft, ausschließlich im zeitartigen Bereich.



## 7.3 Lorentz Transformation

In diesem Abschnitt sollen die Transformationen im 4-dimensionalen Minkowski Raum betrachtet werden. Dabei wollen wir uns auf solche Transformationen des Koordinatensystems  $K \rightarrow K'$  beschränken, bei denen der Koordinatenursprung, das heisst der Raumzeitpunkt  $\vec{r} = 0$  und  $t = 0$ , beibehalten wird. Außerdem soll bei der Transformation der Koordinaten der Betrag des Vektors gemäß der Minkowski Norm konstant gehalten werden. Im einfachen 3-dimensionalen Raum entsprechen solche Transformationen z.B. den Drehungen des Koordinatensystems. In diesem Fall bleibt der Koordinatenursprung identisch die Länge der räumlichen Vektoren bleibt erhalten.

Ein Beispiel für eine Koordinatentransformation, die über eine einfache Drehung hinausgeht und die Transformation der Koordinate Zeit mit einbezieht, ist die Transformation auf ein Koordinatensystem  $K'$ , das sich aus der Sicht des Koordinatensystems  $K$  mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v} = v\hat{e}_x$ , also parallel zur  $x$ -Achse bewegt. Dabei soll zunächst einmal angenommen werden, dass die Achsen des raumartigen Koordinatensystems  $K'$  parallel zu denen des Systems  $K$  stehen, wie das auch in Abb. 7.7 skizziert ist. Diese Transformation ist ein Spezialfall der allgemeinen **Lorentz Transformation**, den wir in den folgenden Diskussionen häufig als Beispiel heranziehen werden.

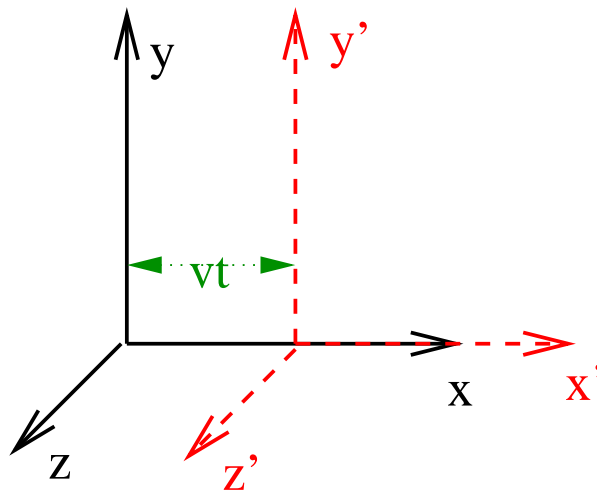


Abbildung 7.7: Standard Beispiel für eine Lorentz Transformation

Ein Raumzeitpunkt werde im Koordinatensystem  $K$  durch die Koordinaten des zugehörigen kontravarianten Vektors  $x^\mu$  definiert. Die Koordinaten des gleichen Raumzeitpunktes im Koordinatensystem  $K'$  ergeben sich durch die lineare Transformationsgleichung

$$\begin{aligned}
 x'^0 &= ct' = a^0_0 ct + a^0_1 x + a^0_2 y + a^0_3 z \\
 x'^1 &= x' = a^1_0 ct + a^1_1 x + a^1_2 y + a^1_3 z \\
 x'^2 &= y' = a^2_0 ct + a^2_1 x + a^2_2 y + a^2_3 z \\
 x'^3 &= z' = a^3_0 ct + a^3_1 x + a^3_2 y + a^3_3 z
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

In der kompakten Schreibweise, die wir im vorigen Abschnitt eingeführt haben, reduzieren sich diese Gleichungen auf

$$x'^\nu = a^\nu_\mu x^\mu. \tag{7.24}$$

Natürlich kann man die Koeffizienten  $a^\nu{}_\mu$  auch als Elemente einer  $4 \times 4$  Matrix  $A$  auffassen, wobei der erste Index  $\nu$  sich auf die Zeile und der zweite Index  $\mu$  auf die Spalte bezieht, womit die Transformation (7.23) sich als Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor schreiben lässt

$$x' = Ax. \quad (7.25)$$

Die Lorentz Transformation für das Standardbeispiel eines **Boostes des Koordinatensystem  $K'$  in  $x$ -Richtung** mit einer Geschwindigkeit  $v$  (siehe auch Abb. 7.7) wird durch die Transformationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (7.26)$$

beschrieben. Dies bedeutet, dass ein Ereignispunkt, der im Koordinatensystem  $K$  durch die Koordinaten  $x^\mu = (ct, x, y, z)$  dargestellt ist im geboosteten Koordinatensystem  $K'$  die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ct-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{-\beta ct+x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (7.27)$$

besitzt.

Zum Nachweis, dass diese Transformation (7.26) die richtige Lorentz Transformation ist, machen wir die folgenden Bemerkungen:

- Bei der Koordinatentransformation (7.27) bleibt der Betrag des Vektors im Sinne der Metrik des Minkowski Raumes erhalten. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= \frac{1}{1-\beta^2} [(ct-\beta x)^2 - (x-\beta ct)^2] - y^2 - z^2 \\ &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \end{aligned}$$

- Im Koordinatensystem  $K$  werden die Ereignispunkte, die die aktuelle Position des räumlichen Koordinatenursprungs des geboosteten Systems beschreiben durch die Koordinaten  $x^0 = ct$  und  $x^1 = x = vt$ ,  $x^2 = y = 0$ ,  $x^3 = z = 0$  erfasst. Mit der Transformation (7.27) ergibt sich für diese Ereignispunkte im geboosteten System

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ct-\beta vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{-\beta ct+vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct\sqrt{1-\beta^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

was natürlich genau dem räumlichen Koordinatenursprung entspricht. Die Zeit  $t' = t\sqrt{1-\beta^2}$  ist die Zeit, die von einem Messknecht gemessen wird, der sich mit dem Koordinatenursprung von  $K'$  mitbewegt.

- Für Geschwindigkeiten des Boostes  $v$ , die sehr klein sind verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  sollte die Lorentz Transformation (7.27) natürlich die Ergebnisse der entsprechenden nicht-relativistischen Galilei Transformation liefern. In diesem Fall ist  $\beta = v/c$  sehr klein verglichen mit 1 und wir können berechnen

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= (x - vt) \left[ 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \dots \right] \\ &\rightarrow (x - vt). \end{aligned}$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile wurde die Taylorentwicklung benutzt, die für sehr kleine Werte von  $\beta$  natürlich sehr rasch konvergiert, so dass im nicht-relativistischen Grenzfall  $\beta \rightarrow 0$  der Übergang zur dritten Zeile und damit zum Ergebnis der Galilei Transformation legitimiert ist.

Die Umkehrttransformation zu (7.27) lautet

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta ct' + x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (7.28)$$

Dies kann man durch Ausrechnen betätigen oder durch die Überlegung, dass ja das Koordinatensystem  $K$  aus der Sicht von  $K'$  mit der Geschwindigkeit  $-v$  in  $x$  Richtung geboostet wird. Die Umkehrtransformation ergibt sich also aus (7.27) einfach dadurch, dass  $v \rightarrow -v$  bzw.  $\beta \rightarrow -\beta$  gesetzt wird.

Mit (7.27) haben wir die Lorentz Transformation für den einfachen Boost in  $x$ -Richtung kennen gelernt. Als nächstes Beispiel wollen wir nun die Transformation betrachten, die in Abb. 7.8 skizziert ist. Das System  $K'$  bewegt sich auch in diesem Beispiel mit einer Geschwindigkeit  $v$  in Richtung der  $x$ -Achse von  $K$  ist aber außerdem noch um einen Winkel  $\phi$  gedreht.

Diese Koordinatentransformation behandeln wir in zwei Schritten:

1. Im ersten Schritt transformieren wir auf das Koordinatensystem  $K''$ , was durch die Boost-Transformation (7.24) geschieht

$$x''^\alpha = a^\alpha{}_\mu x^\mu, \quad (7.29)$$

wobei die Koeffizienten  $a^\alpha{}_\mu$  durch die Elemente der Matrix  $A$  in (7.26) definiert sind.

2. Im zweiten Schritt berechnen wir die Koordinaten eines Ereignispunktes aus den Koordinaten des Systems  $K''$  in die des Systems  $K'$  um. Bei dieser Transformation ruht der Koordinatenursprung, es erfolgt lediglich eine Drehung um die  $z''$  Achse mit dem Winkel  $-\phi$ . Diese Transformation berechnet sich gemäß

$$x'^\nu = b^\nu{}_\alpha x''^\alpha, \quad (7.30)$$

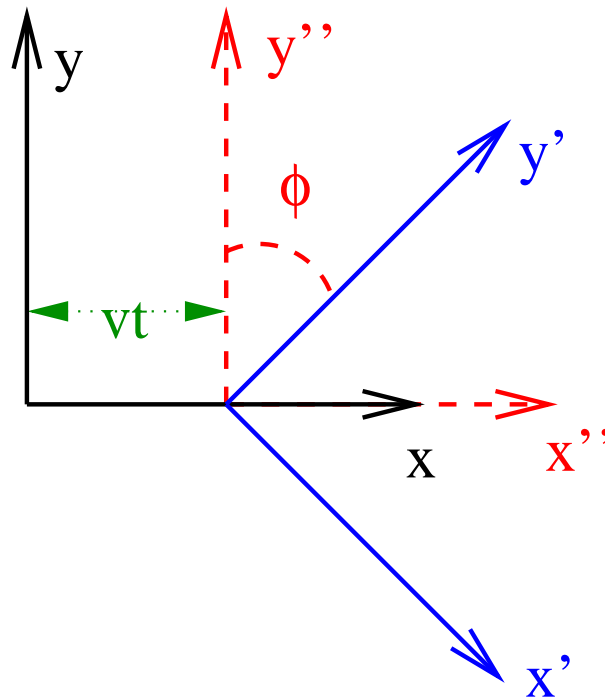


Abbildung 7.8: Beispiel für eine Lorentz Transformation mit Drehung. Die  $z$ -Achsen sind hier nicht dargestellt um die Abbildung übersichtlicher zu gestalten.

mit

$$b^\nu{}_\alpha \equiv B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

Insgesamt ergibt sich also die Transformation zu

$$x'^\nu = b^\nu{}_\alpha a^\alpha{}_\mu x^\mu = c^\nu{}_\mu x^\mu \quad (7.32)$$

mit

$$c^\nu{}_\mu = b^\nu{}_\alpha a^\alpha{}_\mu,$$

was auch bedeutet, dass sich die Transformationmatrix  $C \equiv c^\nu{}_\mu$  als Produkt der Matrizen  $A$  mit  $B$  ergibt (Achtung: das Ergebnis hängt von der Reihenfolge der Faktoren  $A$  und  $B$  ab).

Ein weiteres Beispiel ist in Abb. 7.9 skizziert. In diesem Fall wird das Koordinatensystem  $K'$  in eine beliebige Richtung (nicht parallel zur  $x$ -Achse) geboostet. Die zugehörige Transformation kann in 3 Schritte zerlegt werden:

1. Transformation  $K \rightarrow K''$  was einer Drehung um die  $z$ -Achse um den Winkel  $\phi$  entspricht, in Matrixschreibweise:

$$x'' = B^{-1} x$$

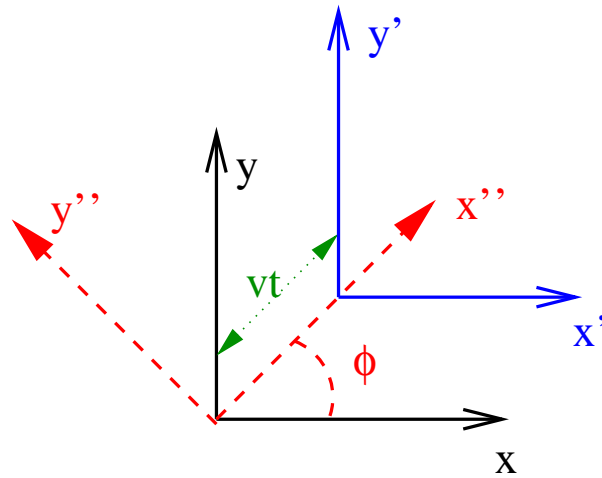


Abbildung 7.9: Boost in beliebige Richtung

2. Boost eines Koordinatensystems  $K'''$  in Richtung der  $x$ -Achse des Koordinatensystems  $K''$  (dieses System ist in Abb. 7.9 nicht dargestellt). Dies entspricht der einfachen Boost Transformation von (7.25) also

$$x''' = A x''$$

3. Das Koordinatensystem  $K'$  ergibt sich aus  $K'''$  durch Drehung um die  $z$ -Achse um den Winkel  $-\phi$ , also

$$x' = B x''' = B A x'' = B A B^{-1} x$$

Allgemeine Lorentz Transformationen können nun nach dem Schema dieser Beispiele durch Drehungen und Boost Transformationen generiert werden.



## 7.4 Einige Konsequenzen aus der Lorentz Transformation

Um zu sehen welche Konsequenzen sich aus der Lorentz Transformation und damit ja eigentlich aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ergeben, betrachten wir zunächst einmal zwei Ereignispunkte  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$ , die einen zeitartigen Abstand voneinander haben. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $\vec{r}_1$  dem Koordinatenursprung (in Raum und Zeit) entspricht, so dass  $\vec{r}_2 = \vec{r}$  Koordinaten  $ct, x, y, z$  besitzt für die gilt:

$$\Delta x^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0. \quad (7.33)$$

Wir wollen uns weiter auf die Ebene mit  $y = z = 0$  beschränken und diesen Raumzeitpunkt in geboosteten Koordinatensystemen betrachten, die sich mit der Geschwindigkeit  $v$  in  $x$  Richtung bewegen. Nach unseren Überlegungen aus dem vorigen Abschnitt misst man in diesen geboosteten Koordinatensystemen für den Ereignispunkt, der im System  $K$  die Koordinaten  $ct$  und  $x$  besitzt, die Koordinaten

$$\begin{aligned} ct' &= \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (7.34)$$

und

$$c^2 t'^2 - x'^2 = \Delta x^2$$

beziehungsweise

$$\frac{c^2 t'^2 - x'^2}{\Delta x^2} = 1. \quad (7.35)$$

Die Koordinaten  $ct'$  und  $x'$ , die den gleichen Ereignispunkt beschreiben liegen also im Fall eines zeitartigen Punktes auf einer Hyperbel (siehe auch Abb. 7.10), die durch die Gleichung (7.35) definiert ist.

Greifen, wir das Koordinatensystem heraus, in dem dieser Ereignispunkt durch die Koordinaten beschrieben wird, die durch die Markierung angedeutet sind. Ein Koordinatensystem  $K'$ , was sich zu diesem mit einer Geschwindigkeit  $v > 0$  parallel zur  $x$ -Achse bewegt, wird einen entsprechend kleineren Wert für  $x'$  liefern. Insbesondere existiert natürlich auch ein Koordinatensystem, in dem der Ereignispunkt die Koordinate  $x = 0$  besitzt. Das erscheint in diesem Fall trivial zu sein, handelt es sich ja um das Koordinatensystem, das sich gerade so schnell bewegt, dass sich sein räumlicher Koordinatenursprung zur Zeit  $t$  an der Stelle mit der Koordinate  $x$  befindet.

Wir betrachten nun einen Ereignispunkt, der bezogen auf den Koordinatenursprung einen raumartigen Abstand besitzt. In diesem Fall gilt also

$$-\Delta x^2 = x^2 - c^2 t^2 > 0$$

und die Koordinaten des gleichen Ereignispunktes in geboosteten Koordinatensystemen  $K'$  erfüllen die Gleichung

$$\frac{x'^2 - c^2 t'^2}{|\Delta x^2|} = 1. \quad (7.36)$$

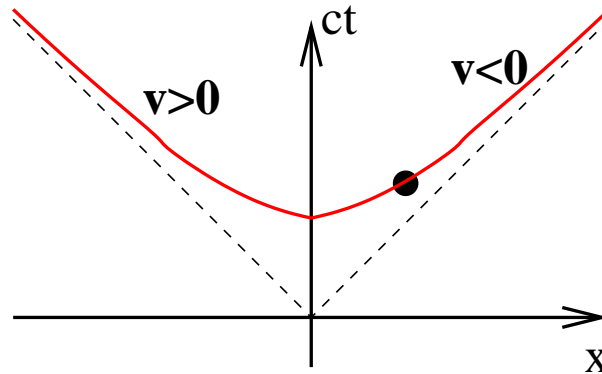


Abbildung 7.10: Koordinaten, die in verschiedenen Lorentzsystemen den gleichen zeitartigen Ereignispunkt beschreiben. Diese erfüllen die Gleichung (7.35).

Die entsprechende Hyperbel ist in Abb. 7.11 dargestellt. Insbesondere sehen wir in diesem Fall, dass es für einen raumartigen Ereignispunkt stets ein Koordinatensystem  $K'$  gibt, in dem dieser Ereignispunkt zeitgleich mit dem Koordinatenursprung ist. Dazu muss gelten

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0,$$

beziehungsweise

$$ct - \frac{v}{c}x = 0.$$

Damit diese Gleichung erfüllt wird muss sich also das Koordinatensystem  $K'$  mit der Geschwindigkeit

$$v = c \frac{ct}{x},$$

bewegen. Da  $x$  und  $ct$  die Koordinaten des raumartigen Punktes in  $K$  sind, ist diese Geschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Für raumartige Punkte hängt es also vom Koordinatensystem ab, ob sie bezogen auf den Koordinatenursprung in der Zukunft, gleichzeitig oder in der Vergangenheit sind. Wie wir bereits vorher diskutiert haben bedeutet dies, dass 2 Ereignispunkte, die einen raumartigen Abstand zueinander haben, sich nicht gegenseitig beeinflussen können, beziehungsweise keine Information austauschen können. Information kann maximal mit Lichtgeschwindigkeit verbreitet werden.

Wir werden uns nun davon überzeugen, dass die Frage, wie lang ist ein Körper in einer bestimmten Raumrichtung, davon abhängt, in welchem Koordinatensystem diese Länge vermessen wird. Dieses Phänomen bezeichnet man auch als **Längenkontraktion**. Es lässt sich formulieren in der Form:

Misst man die Länge eines Körpers in verschiedenen Koordinatensystemen, die sich mit Geschwindigkeiten  $v$  relativ zueinander bewegen, so misst man eine maximale Länge  $l_0$  dieses Körpers in dem Koordinatensystem, in dem der Körper ruht. Bewegt sich das Koordinatensystem in dem die Messung vorgenommen wird mit einer Geschwindigkeit  $v$  relativ zum Ruhesystem des Körpers und zwar parallel zur Richtung der zu vermessenden Länge, so wird die Messung in diesem bewegten Koordinatensystem ein Ergebnis

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (7.37)$$



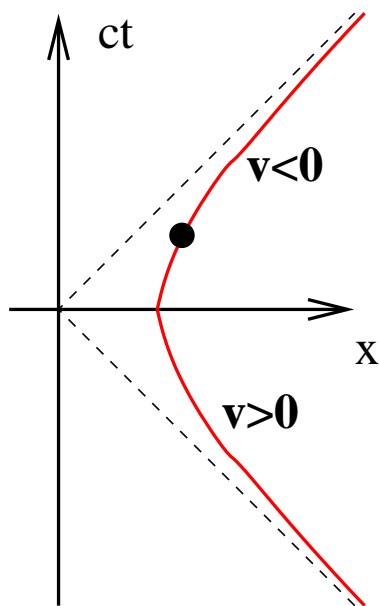


Abbildung 7.11: Koordinaten, die in verschiedenen Lorentzsystemen den gleichen raumartigen Ereignispunkt beschreiben. Diese erfüllen die Gleichung (7.36).

ergeben. Messungen von Längen senkrecht zur Bewegungsrichtung werden durch die Bewegung des Koordinatensystems nicht beeinflusst.

Zum Beweis dieser Längenkontraktion müssen wir uns zunächst einmal Klarheit darüber verschaffen, was wir unter einer Längenmessung zu verstehen haben. Bei einer solchen Längenmessung, etwa der Ausdehnung eines Körpers in  $x$  Richtung, müssen die beiden Ereignispunkte bestimmt werden, an denen sich das eine Ende zur Zeit  $t$  an der Stelle  $x_1$  befindet, während das andere Ende sich zur gleichen Zeit  $t$  an der Stelle  $x_2$  befindet. Die Länge oder Ausdehnung des Körpers ergibt sich dann als Differenz  $l = |x_2 - x_1|$ .

Wir betrachten zunächst die Messung der Länge im Koordinatensystem  $K'$ , das sich mit dem Körper mitbewegt. Dabei sei der räumliche Koordinatenursprung an der Stelle  $x'_1 = 0$ . Da sich das Koordinatensystem mit dem Körper mitbewegt gilt diese Fixierung für alle Zeiten  $t'$  und das andere Ende des Körpers befindet sich stets an der Stelle  $x'_2 = l_0$  wobei  $l_0$  die Länge des Körpers im mitbewegten System ist. Aus der Lorentz Transformation für Koordinatensysteme  $K$  und  $K'$  bei denen  $K'$  aus der Sicht von  $K$  mit der Geschwindigkeit  $v$  in  $x$ -Richtung geboostet ist entnehmen wir

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 0 \\ x'_2 &= \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = l_0. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Diese Beziehung gilt für alle Zeiten  $t_1$  und  $t_2$ , wobei  $x_1$  und  $x_2$  die zugehörigen Raumkoordinaten sind. Für eine Längenmessung in  $K$  können wir nun die Gleichzeitigkeit der Ereignispunkte in  $K$  fordern  $t_1 = t_2 = 0$  und erhalten so aus (7.38)

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \sqrt{1 - \beta^2} l_0. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Die Längenmessung  $l = x_2 - x_1$  in  $K$  liefert also das Resultat von (7.37).

Wir können uns also die paradoxe Situation überlegen, dass jemand eine Leiter der Länge  $l_0 = 10$  Meter in einem Aufzug befördern möchte, der aber nur 9 Meter lang ist. Er überlegt sich also, dass er nur mit einer Geschwindigkeit von  $v = 0.5c$  in den Aufzug laufen muss. Dadurch hat die Leiter aus der Sicht des Aufzugs nur die Länge  $l = l_0\sqrt{1-0.25} = 10 \cdot 0.866$  m und sollte also in den Aufzug passen. Andererseits hat aber der Aufzug aus der Sicht des Leiterträgers nur eine Länge von  $9 \cdot 0.866$  m, ist also deutlich kürzer als die Leiter, die ja in diesem Koordinatensystem, das sich mit der Leiter mitbewegt die Länge  $l_0 = 10$  m besitzt. Die Frage erhebt sich also: Passt die Leiter in den Aufzug oder nicht?

Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir uns zunächst einmal überlegen, wie wir die Feststellung, die Leiter passt in den Aufzug, definieren wollen. Es soll hier nicht auf die verschiedenen Möglichkeiten eingegangen werden. Es sei aber erwähnt, dass diese Definition natürlich mit der Frage zusammenhängt in welchem Koordinatensystem wir diese Frage beantworten wollen, in welchem Koordinatensystem sollen das vordere und das hintere Ende der Leiter **gleichzeitig** im Aufzug sein.

Ein anderes Phänomen, das für uns, die wir mit der relativistischen Kinematik im Alltag nicht vertraut sind, zunächst paradox erscheint, ist die sogenannte **Zeitdilatation**: Eine Uhr ruhe im Koordinatensystem  $K'$  und misst für die Zeitdifferenz zweier Ereignispunkte, deren Ortskoordinate sich relativ zur Uhr nicht verändert, die Zeitdifferenz  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ . Ein Beobachter, der sich relativ zu diesem Raumpunkt mit einer Geschwindigkeit  $v$  bewegt, misst hingegen eine längere Zeitdifferenz

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (7.40)$$

Zum Beweis betrachten wir die Lorentz Transformation von  $K'$  nach  $K$  für die beiden Ereignispunkte  $i = 1, 2$ :

$$ct_i = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( \frac{v}{c} x_i' + ct_i' \right). \quad (7.41)$$

Daraus ergibt sich für die Zeitdifferenz

$$c(t_2 - t_1) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[ \frac{v}{c} \underbrace{(x_2' - x_1')}_{=0} + c(t_2' - t_1') \right] = \frac{c\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (7.42)$$

womit (7.40) bewiesen ist. Die Uhren im mitbewegten System gehen langsamer.

Stellen wir uns also vor, dass ein Zwillingbruder mit einem Raumschiff mit einer Geschwindigkeit  $v = \sqrt{0.99}c$  zu einem fernen Planeten fliegt dort umkehrt und mit gleicher Geschwindigkeit zur Erde zurück kommt. Auf seiner Borduhr seien dabei für Hin- und Rückflug jeweils 1 Jahr vergangen und so eine Gesamtflugzeit von  $\Delta t'$  von 2 Jahren verstrichen. Bei  $v = \sqrt{0.99}c$  ist der Faktor  $\sqrt{1-\beta^2}$  gerade 0.1. Für den Zwillingbruder, der auf der Erde zurückgeblieben ist, liegen zwischen Abflug und Rückkehr 20 Jahre, was sich natürlich auch beim Altersvergleich der Zwillinge bemerkbar machen wird. Der zu Haus Gebliebene ist um 18 Jahre älter.

Dies erscheint uns paradox, wird aber durch Experimente bestätigt. Als Beispiel betrachten wir den Zerfall der M $\mu$ onen aus der Höhenstrahlung. Auf die Erde treffen ständig

Teilchen und Photonen mit sehr hoher Energie. Treffen diese Teilchen auf die ersten Atomkerne in der Ionosphäre, also etwa 20 km oberhalb der Erdoberfläche, so werden durch die Wechselwirkung dieser hochenergetischen Teilchen mit diesen Atomkernen Pionen, das sind die leichtesten Hadronen (Teilchen die die starke nukleare Wechselwirkung spüren). Diese Pionen leben im Mittel etwa  $2 \times 10^{-8}$  Sekunden. Nach unseren Maßstäben ist das fast nichts, auf den Zeitskalen der Hadronen ( $10^{-20}$  Sekunden) ist das aber so lang, dass man Pionen als stabile Teilchen auffasst. Ein Pion, z.B. ein  $\pi^-$ , das sind negativ geladene Teilchen von diesem Typ, zerfällt dann mit großer Wahrscheinlichkeit ein Müon ( $\mu^-$ ) und ein müonisches Antineutrino  $\bar{\nu}_\mu$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu.$$

Das Müon bezeichnet man häufig als den schweren Bruder (oder Schwester) des Elektrons. Es ist ebenfalls ein Lepton allerdings mit einer Masse, die 207 mal so groß ist, wie die des Elektrons. (Das dritte Lepton, das sogenannte  $\tau$  Lepton ist noch schwerer mit einer Masse die etwa 3750 mal so groß wie die des Elektrons ist.) Auch das Müon lebt nur eine begrenzte Zeit (mittlere Lebensdauer etwa  $\tau_0 = 2.2 \times 10^{-6}$  Sekunden) und zerfällt dann nach dem Schema

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

in ein Elektron ein müonisches Neutrino und ein elektronisches Antineutrino. In der Ionosphäre werden also sehr viele Müonen erzeugt mit einer Dichte  $N_0$ . Bei einer mittleren Lebensdauer  $\tau_0$  überleben von diesen  $N_0$  erzeugten Müonen eine Zeitdifferenz  $\Delta t$

$$N(\Delta t) = N_0 \exp(-\Delta t/\tau_0). \quad (7.43)$$

Nimmt man an, dass sich die erzeugten Müonen mit Lichtgeschwindigkeit, also mit der maximal möglichen Geschwindigkeit, auf den Erdboden zubewegen, so sollten nur etwa  $6.9 \times 10^{-14}$  der erzeugten Müonen diese Flugstrecke überleben. Das Experiment zeigt aber, dass etwa 3 Prozent der erzeugten Müonen auch auf die Erdoberfläche gelangen. Die Erklärung liefert die Zeitdilatation. Wegen der hohen Geschwindigkeit der Müonen tickt deren mitgeführte Uhr, die natürlich für die Lebensdauer verantwortlich ist, sehr viel langsamer als die ruhende Uhr des erdfesten Beobachters, und das Müon kann eine entsprechend größere Strecke zurücklegen.

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir diese Zeit, die von einer mitbewegten Uhr gemessen wird noch mit einem speziellen Namen belegen, die **Eigenzeit**. Für zwei Ereignispunkte  $(ct_1, x_1, y_1, z_1)$  und  $(ct_2, x_2, y_2, z_2)$ , die zeitartigen Abstand voneinander haben, d.h.

$$\Delta s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 > 0, \quad (7.44)$$

definieren wir die Eigenzeit durch

$$\tau_{12} = \frac{1}{c} \sqrt{\Delta s_{12}^2}. \quad (7.45)$$

Für die so definierte Eigenzeit gilt:

- Die Eigenzeit ist unabhängig von dem Koordinatensystem, in dem sie berechnet wird. Da der Abstand  $\Delta s_{12}^2$  bei einer Lorentz Transformation unverändert bleibt, gilt dies auch für die Zeit  $\tau_{12}$ . Man sagt die Eigenzeit transformiert sich wie ein Skalar unter einer Lorentz Transformation, sie ist ein **Lorentz Skalar**.

- Die Eigenzeit wird von einer Uhr im mitbewegten System ( $\vec{r}_1' = \vec{r}_2'$ ) gemessen.
- Die Eigenzeit ist die kürzeste Zeit, die zwischen den beiden Ereignispunkten gemessen werden kann.
- Nach (7.40) gilt für die Zeitdifferenz  $t_{12}$ , gemessen zwischen den beiden Ereignispunkten in einem Koordinatensystem, das sich mit Geschwindigkeit  $v$  relativ zu mitbewegten System bewegt

$$\tau_{12} = t_{12} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (7.46)$$

## 7.5 Relativistische Bewegungsgleichung

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, die Bewegungsgleichung der Klassischen Mechanik an die relativistische Kinematik anzupassen. Ausgangspunkt ist dazu die nicht-relativistische Bewegungsgleichung, die wir ja mit dem dritten Newtonschen Axiom formuliert haben in der Form

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}m\vec{v}, \quad (7.47)$$

mit  $\vec{F}$  der Kraft, die auf ein Partikelchen der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  wirkt. Auf beiden Seiten dieser Gleichung steht ein Vektor des dreidimensionalen Raumes der Ortsvektoren, der durch Koordinaten in  $x$ ,  $y$  und  $z$  Richtung eines gewählten kartesischen Koordinatensystems definiert ist.

Will man diese Bewegungsgleichung in einem anderen Koordinatensystem darstellen, das z.B. im Vergleich zum ersten durch eine Drehung erzeugt ist, so werden die Vektoren für die Kraft und die Geschwindigkeit durch neue Koordinaten, bezogen auf die gedrehten Koordinatenachsen, definiert. Diese Koordinatentransformation wird durch eine  $3 \times 3$  Matrix  $A_D$  beschrieben, wobei die Darstellung des Vektors  $\vec{F}$  in dem gedrehten System durch die Matrixmultiplikation

$$\vec{F}' = A_D \vec{F}$$

berechnet werden kann. Multiplizieren wir also die linke und rechte Seite der Gl.(7.47) mit der Matrix  $A_D$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{F}' = A_D \vec{F} &= A_D \frac{d}{dt}m\vec{v} \\ &= \frac{d}{dt}m A_D \vec{v} \\ &= \frac{d}{dt}m\vec{v}'. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Die Newtonsche Bewegungsgleichung gilt also auch für die Vektoren  $\vec{F}'$  und  $\vec{v}'$ , die Darstellung der Kraft und der Geschwindigkeit im gedrehten Koordinatensystem. Man sagt die Newtonschen Bewegungsgleichung ist kovariant unter einer orthogonalen Transformation, sie ändert ihre Form nicht, ganz gleich ob ich sie im ursprünglichen oder im gedrehten Koordinatensystem formuliere. Dies erscheint uns selbstverständlich, denn sonst müsste man ja das Koordinatensystem angeben, in dem die Bewegungsgleichung gültig ist.

Man beachte aber, dass der Übergang von der ersten zur zweiten Zeile in (7.48) nur deshalb gültig ist, weil die Masse des betrachteten Teilchens,  $m$ , und die Variable Zeit,  $t$ , skalare Größen sind, sich bei einer Rotation nicht ändern. Diese Kovarianz der Newtonschen Bewegungsgleichung gilt also nur unter der Voraussetzung, dass Masse und Zeit skalare Größen sind. Damit sehen wir aber auch sofort, dass die Newtonsche Bewegungsgleichung in der Form (7.47) nicht kovariant unter einer Lorentz Transformation ist. Bei einer solchen Lorentz Transformation muss ja im allgemeinen Fall auch die Zeit transformiert werden, sodass die Rechnung (7.48) nicht mehr möglich ist.

Um also die Bewegungsgleichung in eine Form zu bringen, die auch unter Lorentz Transformationen kovariant ist, müssen wir zunächst einmal Vektoren im 4-dimensionalen Minkowski Raum definieren, die die Funktion der Kraft und der Geschwindigkeit übernehmen.

Für den Fall der Geschwindigkeit ist dies relativ einfach. Wir definieren eine Geschwindigkeit als Vektor im Minkowski Raum dadurch, dass wir den Vektor  $x^\alpha$  eines Raumzeitpunktes nach einer zeitartigen Größe ableiten. Damit das Ergebnis das Transformationsverhalten eines Vektors aufweist, muss die Größe nach der wir ableiten selbst ein Skalar unter Lorentz Transformation sein. Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben besitzt die Eigenzeit

$$\tau = t\sqrt{1 - \beta^2} \quad (7.49)$$

gerade diese Eigenschaft. Dabei ist  $\tau$  die Zeit, die im mitbewegten Koordinatensystem bestimmt wird und  $t$  die Zeit, die in einem Koordinatensystem gemessen wird, das sich relativ zum mitbewegten System mit einer Geschwindigkeit vom Betrag  $v$  bewegt und  $\beta = v/c$ . Damit ist der kontravariante Lorentz Vektor für die Geschwindigkeit gegeben durch

$$\begin{aligned} u^\alpha &= \frac{d}{d\tau} x^\alpha \\ &= \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} x^\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{d}{dt} x^\alpha. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Übertragen auf die explizite Darstellung durch Spaltenvektoren bedeutet dies

$$\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (7.51)$$

mit

$$\beta^2 = \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}.$$

Durch Multiplikation dieses kontravarianten Vierer Vektors  $u^\alpha$  mit der skalaren Größe Masse  $m$  erhalten wir den Vierer Vektor des Impulses

$$p^\alpha = m u^\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \begin{pmatrix} mc \\ m\vec{v} \end{pmatrix}, \quad (7.52)$$

wobei wir im letzten Teil dieser Gleichung eine Notation gewählt haben, bei der der raumartige Anteil des 4-dimensionalen Vektors durch  $m\vec{v}$  dargestellt ist.

Nach dem gleichen Rezept (leite Vierer Vektoren nach der skalaren Größe Eigenzeit ab) können wir nun diesen Vierer Impuls  $p^\alpha$  nach der Eigenzeit ableiten und erhalten in Anlehnung an die Newtonsche Bewegungsgleichung (7.47) eine Definition für einen kontravarianten Kraftvektor  $K^\alpha$  im Minkowski Raum

$$K^\alpha = \frac{d}{d\tau} m u^\alpha = \frac{d}{d\tau} p^\alpha. \quad (7.53)$$

Durch diese Gleichung wird  $K^\alpha$ , die sogenannte Minkowski Kraft definiert. Um die Bedeutung dieser Minkowski Kraft besser einzuschätzen, betrachten wir die linke Seite dieser

Gleichung und berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} m u^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m \frac{d}{dt} u^\alpha \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[ \frac{\vec{v}}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\vec{v}}{dt} \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{m}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} + \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\vec{v}}{dt} \end{pmatrix}. \tag{7.54}
\end{aligned}$$

Beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile haben wir berücksichtigt, dass die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  von der Zeit abhängt und deshalb bei der Zeitableitung berücksichtigt werden muss.

Betrachten wir also diese Minkowski Kraft in dem Koordinatensystem, in dem das betrachtete Teilchen augenblicklich in Ruhe befindet, d.h. in diesem Koordinatensystem gilt  $\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = 0$ , so reduziert sich die Definitionsgleichung für die Minkowski Kraft in diesem Koordinatensystem auf

$$m \frac{du^{\alpha'}}{d\tau} = K^{\alpha'} = \begin{pmatrix} K^{0'} \\ \vec{K}' \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\vec{v}'}{dt'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F} \end{pmatrix}. \tag{7.55}$$

Dies ist aber für die raumartigen Komponenten die übliche Newtonsche Bewegungsgleichung und für die zeitartige Komponenten gilt  $K^{0'} = 0$ . Bei Geschwindigkeiten weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit, insbesondere bei dem Koordinatensystem, bei dem das Teilchen augenblicklich in Ruhe ist, reduziert sich (7.53) also wieder auf die klassische Newtonsche Bewegungsgleichung (7.47).

Wie sieht dies Bewegungsgleichung aber aus der Sicht eines Beobachters aus, der sich relativ zum augenblicklichen Ruhesystem z.B. in  $x$ -Richtung mit der Geschwindigkeit  $-\vec{v}$  bewegt, so dass sich das Teilchen aus seiner Sicht mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt. Die Komponenten der Minkowski Kraft in diesem Koordinatensystem erhalten wir aus der des augenblicklichen Ruhesystems durch die Lorentz Transformation für diesen Boost in  $x$ -Richtung

$$\begin{aligned}
K^0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (K^{0'} + \frac{v}{c} K^{1'}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c} F_x \\
K^1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (K^{1'} + \frac{v}{c} K^{0'}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} F_x \\
K^2 &= K^{2'} = F_y \\
K^3 &= K^{3'} = F_z
\end{aligned} \tag{7.56}$$

wobei  $\vec{F}$  die Kraft ist, die im augenblicklichen Ruhesystem auf das Teilchen wirkt.

Für eine allgemeine Richtung der Geschwindigkeit des Teilchens  $\vec{v}$  berechnet sich die Minkowski Kraft

$$\begin{pmatrix} K^0 \\ \vec{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c} \\ \vec{F} + \frac{v^2}{c^2} \frac{\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{F})}{v^2} \end{pmatrix}. \quad (7.57)$$

Entsprechend ihrer Konstruktion ist die Minkowski Kraft  $K^\alpha$  ein kontravarianter Vierer Vektor mit einem Betrag

$$K^\alpha K_\alpha = (K^0)^2 - \vec{K}^2 = -\vec{F}^2, \quad (7.58)$$

der invariant unter einer Lorentz Transformation ist.

Nachdem wir in (7.57) die Komponenten der Minkowski Kraft in einem Bezugssystem berechnet haben, in dem sich das Teilchen mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt, wollen wir nun die zeitartige Komponente der Bewegungsgleichung (7.53) in diesem Bezugssystem betrachten. Diese können wir schreiben

$$\begin{aligned} K^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c} \\ &= \frac{d}{d\tau} m u^0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left( \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right). \end{aligned} \quad (7.59)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit  $c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ , so ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (7.60)$$

Aus der rechten Seite sehen wir, dass die Seiten dieser Gleichung beschreiben, welche Energieänderung das Teilchen erfährt, wenn an ihm in der infinitesimalen Zeit  $dt$  eine Kraft  $\vec{F}$  auf seiner Bewegung entlang des Wegstückes  $d\vec{r}$  wirkt. Danach muss auch die linke Seite der Gleichung dieser Energieänderung beschreiben und wir können

$$E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (7.61)$$

mit der Energie des Teilchens als Funktion seiner Geschwindigkeit ( $v$ ) identifizieren. Um diesen Ausdruck besser zu verstehen, betrachten wir ihn im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten, d.h.  $v \ll c$ . In diesem Fall ist also der Quotient  $\beta = v/c \ll 1$  und wir können die Wurzel im Nenner in einer Taylorreihe entwickeln zu

$$\begin{aligned} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= mc^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right] \\ &\approx mc^2 + \frac{1}{2} mv^2. \end{aligned} \quad (7.62)$$



In diesem (nicht-relativistischen) Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten geht der Ausdruck für die Energie also gerade über in die nicht-relativistische kinetische Energie des Teilchens plus eine Ruheenergie von  $E = mc^2$ . Man könnte nun versucht sein, diese Ruheenergie als eine uninteressante Konstante zu ignorieren. Tatsache ist aber, dass diese Beziehung zwischen der Masse eines Teilchens und seiner Ruheenergie eine zentrale Beziehung darstellt, die so wichtig ist, dass sie jeder (auch wenn er gar nichts von ihrer Bedeutung versteht) schon häufig gesehen hat.

Als Beispiel für die Bedeutung dieser Beziehung führen wir die Bindungsenergie von Nukleonen in einem Atomkern an. Die Masse eines Protons beträgt

$$m_{Prot} = 938.27 \frac{\text{MeV}}{c^2},$$

(beachte, dass die Masse in Form einer Energie (MeV) dividiert durch die Lichtgeschwindigkeit zum Quadrat angegeben wird), die eines Neutrons

$$m_{Neut} = 939.56 \frac{\text{MeV}}{c^2}.$$

Damit sollte also die Masse eines  ${}^4\text{He}$  Kerns, das  $\alpha$  Teilchen, das aus 2 Protonen und 2 Neutronen besteht, eine Masse von

$$2 m_{Prot} + 2 m_{Neut} = 3755.66 \frac{\text{MeV}}{c^2} = 6.6968 \cdot 10^{-27} \text{ kg},$$

besitzen. In Wirklichkeit ist aber der  ${}^4\text{He}$  Kern um  $28.3 \text{ MeV}/c^2$  "leichter". Dieser **Mas-sendefekt** des  ${}^4\text{He}$  multipliziert mit  $c^2$  entspricht gerade der Bindungsenergie des  ${}^4\text{He}$ . In der Sonne verschmelzen Protonen und Neutronen zu  ${}^4\text{He}$ . Die bei dieser Fusion frei werdende Energie ist die Energiequelle der Sonne.

Damit können wir also den Vierervektor für den Impuls eines freien Teilchens schreiben (siehe (7.52))

$$p^\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} mc \\ m\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad (7.63)$$

mit

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Für den Betrag dieses Vierervektors gilt:

$$\begin{aligned} p^\alpha p_\alpha &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (m^2 c^2 - m^2 \vec{v}^2) \\ &= m^2 c^2 \\ &= \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Daraus ergibt sich die relativistische Beziehung zwischen Energie und Impuls eines freien Teilchens der Masse  $m$

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2. \quad (7.65)$$

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir die raumartige Komponente der relativistischen Bewegungsgleichung betrachten. Zur Vereinfachung der Nomenklatur nehmen wir an, dass  $v_y = v_z = 0$  und auch für die beschleunigende Kraft  $F_y = F_z = 0$  gilt. Damit ergibt sich für die  $x$ -Komponente der Bewegungsgleichung (7.53)

$$\begin{aligned} K^1 &= m \frac{d}{d\tau} u^1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} F_x &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} m \frac{d}{dt} u^1 \\ F_x &= \frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Ist die Kraft  $F_x$  zeitlich konstant, so können wir die letzte dieser Gleichung einfach integrieren und erhalten

$$\int_0^T F_x dt = F_x T = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (7.67)$$

wobei auf der rechten Seite dieser Gleichung die Geschwindigkeit des Teilchens  $v(T)$  steht, die es erreicht hat, wenn es über den Zeitraum  $T$  von dieser konstanten Kraft beschleunigt wird. Man sieht also, dass man sich selbst im Grenzfall unendlich langer Beschleunigung der Geschwindigkeit  $v \rightarrow c$  nur asymptotisch nähern kann. Dabei geht natürlich die Energie (7.61) mit  $v \rightarrow c$  asymptotisch gegen den Wert  $E \rightarrow \infty$ .

Vielfach versucht man sich diesen Sachverhalt, dass Teilchen bei einer Beschleunigung nur asymptotisch die Lichtgeschwindigkeit erreichen können, dadurch zu veranschaulichen, dass man eine geschwindigkeitsabhängige Masse

$$\tilde{m}(\beta) = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

eingführt. Die Beschleunigung des Teilchens wird dann immer schwieriger, da diese Masse mit zunehmender Geschwindigkeit immer größer wird. Dies mag zur Veranschaulichung hilfreich sein. Diese geschwindigkeitsabhängige Masse hängt dann aber natürlich vom Koordinatensystem des Beobachters ab,  $\tilde{m}$  ist kein Skalar unter Lorentz Transformation. In der Diskussion hier bezeichnet  $m$  stehts die Ruhemasse des Teilchens.

## 7.6 Relativitätstheorie und Elektrodynamik

Für eine Beschreibung von Kenngrößen in der Natur, die mit der speziellen Relativitätstheorie verträglich ist, ist es wichtig, dass man weiss, wie sich diese Kenngrößen unter einer Lorentz Transformation verhalten. Als Beispiele führen wir die Ruhemasse eines Teilchens an, die ein Lorentz Skalar ist und deshalb in jedem Bezugssystem den gleichen Wert besitzt. Ein anderes Beispiel sind kontravariante Vektoren im Minkowski Raum, das sind Vektoren mit 4 Komponenten, die sich bei einer Lorentz Transformation von einem Koordinatensystem  $K$  in ein anderes  $K'$  genau so transformieren wie der kontravariante Vektor  $x^\mu$  eines Ereignispunktes. Ein Spaltenvektor aus 4 Elementen  $Y^0, Y^1, Y^2, Y^3$  bildet also genau dann einen kontravarianten Vierervektor  $Y^\mu$  wenn bei einer Lorentz Transformation des Koordinatensystems gilt, dass dieser Vektor in dem neuen Koordinatensystem  $K'$  durch Komponenten  $Y'^\mu$  definiert ist, die sich aus den ursprünglichen berechnen nach

$$Y'^\mu = a^\mu{}_\nu Y^\nu. \quad (7.68)$$

Dabei bezeichnet  $a^\mu{}_\nu$  die Elemente der Transformationsmatrix für die Lorentz Transformation von Ereignispunkten  $x^\mu$  und ist z.B. für den Boost des Koordinatensystems  $K'$  in  $x$ -Richtung mit der Geschwindigkeit  $v$  gegeben durch (vergleiche Abschnitt 7.3)

$$a^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (7.69)$$

Zu jedem kontravarianten Vektor können wir den zugehörigen kovarianten Vektor definieren, dadurch dass wir die nullte Komponente übernehmen und die raumartigen Komponenten mit einem Minuszeichen versehen. Etwas abstrakter formuliert: Wir erhalten den kovarianten Vektor  $Y_\mu$  aus dem kontravarianten Vektor  $Y^\mu$  durch Multiplikation mit dem metrischen Tensor  $g_{\mu\nu}$

$$Y_\mu = g_{\mu\nu} Y^\nu, \quad (7.70)$$

mit der Matrixdarstellung (erster Index entspricht dem Zeilenindex, der zweite dem Spaltenindex)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.71)$$

Bei einer Lorentz Transformation des Koordinatensystems transformiert sich ein kovarianter Vektor gemäß

$$Y'_\mu = a_\mu{}^\nu Y_\nu, \quad (7.72)$$

mit

$$a_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha} a^\alpha{}_\beta g^{\beta\nu} \quad \text{wobei} \quad g^{\beta\nu} = g_{\beta\nu}. \quad (7.73)$$

Den Beweis dieses Transformationsverhaltens von kovarianten Vektoren ((7.72) mit (7.73)) erhält man leicht durch Anwenden von (7.68) und (7.70) mit

$$Y'_\mu = g_{\mu\alpha} Y'^\alpha = g_{\mu\alpha} a^\alpha{}_\beta Y^\beta = g_{\mu\alpha} a^\alpha{}_\beta g^{\beta\nu} Y_\nu.$$

Dies bedeutet also, dass sich die Transformationsmatrix für kovariante Vektoren bei dem Boost des Koordinatensystem  $K'$  mit Geschwindigkeit  $v$  in  $x$  Richtung berechnet zu

$$a_{\mu}{}^{\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & +\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ +\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.74)$$

Nach diesen einführenden Bemerkungen wollen wir uns nun davon überzeugen, dass der Vektor

$$\partial_{\mu} := \frac{d}{dx^{\mu}}, \quad (7.75)$$

gebildet aus den Ableitungen nach den Komponenten des kontravarianten Vektors für einen Ereignispunkt, sich wie ein kovarianter Vektor verhält. (Deshalb haben wir auch bereits den Index  $\mu$  als unteren Index angebracht.) An Stelle eines Beweises betrachten wir den Spezialfall der Lorentz Transformation für den Boost in  $x$  Richtung. In diesem Fall gilt ja für die Komponenten des kontravarianten Vektors eines Ereignispunktes:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x^0 - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}x^1 \\ x'^1 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x^1 - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}x^0, \end{aligned} \quad (7.76)$$

beziehungsweise für die Umkehrttransformation

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x'^0 + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}x'^1 \\ x^1 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x'^1 + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}x'^0, \end{aligned} \quad (7.77)$$

Damit berechnet sich

$$\begin{aligned} \partial'_0 &= \frac{d}{dx'^0} = \frac{dx^0}{dx'^0} \frac{d}{dx^0} + \frac{dx^1}{dx'^0} \frac{d}{dx^1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dx^0} + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dx^1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \partial_0 + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \partial_1. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Der Vergleich mit (7.74) zeigt, dass dies genau das Transformationverhalten für die nullte Komponente eines kovarianten Vektors bei Boost des Koordinatensystems in  $x$ -Richtung ist. Entsprechendes gilt für  $\partial_1$ .

Analog kann man auch zeigen, dass

$$\partial^{\mu} := \frac{d}{dx_{\mu}} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d(ct)} \\ \frac{d}{d(-x)} \\ \frac{d}{d(-y)} \\ \frac{d}{d(-z)} \end{pmatrix}, \quad (7.79)$$

ein kontravarianter Lorentz Vektor ist.

Als nächstes betrachten wir den 4-komponentigen Vektor

$$J^\mu := \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}, \quad (7.80)$$

mit der zeitartigen Komponente Ladungsdichte  $\rho$  multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit und der zugehörigen Stromdichte  $\vec{j}$  in den raumartigen Komponenten. Zum Beweis, dass es sich bei dem so definierten Lorentz Strom Vektor  $J^\mu$  um einen kontravarianten Vektor handelt, multiplizieren wir ihn mit dem kovarianten Vektor  $\partial_\mu$

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= \partial_0 J^0 + \partial_1 J^1 + \partial_2 J^2 + \partial_3 J^3 \\ &= \frac{d}{dct} c\rho + \frac{d}{dx} j_x + \frac{d}{dy} j_y + \frac{d}{dz} j_z \\ &= \frac{d}{dt} \rho + \operatorname{div} \vec{j} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (7.81)$$

Bei dem Übergang zur letzten Zeile haben wir die Kontinuitätsgleichung, die ja die Ladungserhaltung repräsentiert, benutzt. Das Ergebnis dieses Produktes, die Zahl 0 ist offensichtlich ein Lorentz Skalar. Da  $\partial_\mu$  ein kovarianter Vektor ist, das Produkt dieses kovarianten Vektors mit  $J^\mu$  einen Skalar liefert, muss also  $J^\mu$  ein kontravarianter Vektor sein, was die Schreibweise mit dem oberen Index  $\mu$  im Nachhinein rechtfertigt.

Wenn wir also in einem Koordinatensystem  $K$  eine Ladungsverteilung haben, die zeitlich konstant ist und keine Ströme vorhanden sind, so hat  $J^\mu$  in diesem Koordinatensystem nur die zeitartige Komponente  $J^0 = c\rho$ . In dem geboosteten Koordinatensystem gilt aber

$$\begin{aligned} J'^0 &= c\rho' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} c\rho \\ J'^1 &= j'_x = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} c\rho, \end{aligned}$$

für den vorbeifliegenden Beobachter ergibt sich also auch ein Strom in  $x$ -Richtung  $j'_x$ .

Wir wissen also bereits, wie bei einer Lorentz Transformation Ladungen und Ströme zu transformieren sind. Des weiteren erinnern wir uns daran, dass aus den beiden homogenen Maxwell Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{d\vec{B}}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (7.82)$$

folgte, dass die elektromagnetischen Felder durch ein Vektor Potenzial  $\vec{A}$  und ein skalares Potenzial  $\Phi$  definierbar sind über die Beziehungen

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad} \Phi - \frac{d\vec{A}}{dt}. \end{aligned} \quad (7.83)$$

Dabei sind diese Potentiale noch nicht eindeutig definiert; wir können z.B. die Lorentz Eichung fordern wonach gilt

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi}{dt} + \operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi}{dt} + \operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (7.84)$$

Durch Umeichen der Form

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &= \Phi - \frac{d}{dt} \Lambda \\ \tilde{\vec{A}} &= \vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda, \end{aligned} \quad (7.85)$$

mit einem beliebigen skalaren Feld  $\Lambda(\vec{r}, t)$  erhalten wir andere Potentiale  $\tilde{\Phi}$  und  $\tilde{\vec{A}}$ , die aber eingesetzt in (7.83) die gleichen elektromagnetischen Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  liefern, wie die Potentiale  $\phi$  und  $\vec{A}$ .

Wir werden uns nun davon überzeugen, dass

$$A^\alpha := \begin{pmatrix} \Phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix}, \quad (7.86)$$

ein kontravarianter Lorentzvektor ist. Analog zu (7.81) berechnen wir

$$\begin{aligned} \partial_\alpha A^\alpha &= \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi}{dt} + \operatorname{div} \vec{A} \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei der Übergang zur letzten Zeile für Potentiale in Lorentzeichung gilt (siehe (7.84)). Also haben wir durch diese Gleichung gezeigt, dass der Potenzialvektor  $A^\alpha$  ein kontravarianter Lorentzvektor ist, wenn die definierenden Potentiale  $\Phi$  und  $\vec{A}$  die Lorentzeichung erfüllen. Andere Potentiale werden aus diesen durch Umeichung erzeugt. Diese Umeichung in (7.85) können wir aber auch schreiben

$$\tilde{A}^\alpha = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}/c \\ \tilde{\vec{A}} \end{pmatrix} = A^\alpha - \partial^\alpha \Lambda.$$

Da  $A^\alpha$  ein kontravarianter Vektor ist und ebenso  $\partial^\alpha \Lambda$  gilt dies auch für die Differenz also auch für  $\tilde{A}^\alpha$ .

Damit wissen wir jetzt wie sich die Potentiale bei einer Lorentz Transformation verhalten, aber immer noch nichts über die elektromagnetischen Felder. Dazu definieren wir den sogenannten **antisymmetrischen Feldstärketensor**

$$F^{\alpha\beta} := \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha, \quad (7.87)$$

und diskutieren einige Eigenschaften:

- Dieses Objekt heisst antisymmetrisch, weil bei der Vertauschung der beiden hochgestellten Indizes offensichtlich gilt:

$$F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}. \quad (7.88)$$

Insbesondere gilt also, dass

$$F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0, \quad (7.89)$$

und von den ursprünglich  $4 \times 4$ , also 16 Elementen dieses Objektes sind nur 6 Elemente unabhängig voneinander.

- Wir berechnen als erstes das Element

$$\begin{aligned}
 F^{01} &= \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 \\
 &= \frac{d}{d(ct)} A_x - \frac{d}{d(-x)} \frac{\Phi}{c} \\
 &= \frac{1}{c} \left( \frac{d\vec{A}}{dt} + \text{grad}\Phi \right)_x \\
 &= -\frac{E_x}{c} = -F^{10},
 \end{aligned} \tag{7.90}$$

(siehe (7.83)). Entsprechend gilt auch

$$\begin{aligned}
 F^{02} &= -\frac{E_y}{c} = -F^{20} \\
 F^{03} &= -\frac{E_z}{c} = -F^{30}.
 \end{aligned} \tag{7.91}$$

- Als ein weiteres Beispiel betrachten wir

$$\begin{aligned}
 F^{12} &= \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 \\
 &= -\frac{d}{dx} A_y + \frac{d}{dy} A_x \\
 &= -B_z = -F^{21}.
 \end{aligned} \tag{7.92}$$

Für die anderen Elemente gilt:

$$\begin{aligned}
 F^{23} &= -B_x = -F^{32} \\
 F^{13} &= B_y = -F^{31}.
 \end{aligned} \tag{7.93}$$

- Stellen wir also den antisymmetrischen Feldstärketensor als Matrix dar, wobei der erste Index in  $F^{\alpha\beta}$  sich auf die Zeile und der zweite sich auf die Spalte bezieht, so ergibt sich aus (7.90)-(7.93):

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.94}$$

Die Matrixelemente sind also durch die elektromagnetischen Felder definiert. Dies rechtfertigt natürlich auch den Namen **Feldstärketensor**.

- Der antisymmetrische Feldstärketensor ist schliesslich ein Tensor, weil er sich bei einer Lorentz Transformation wie ein Tensor zweiter Stufe transformiert:

$$F'^{\alpha\beta} = a^\alpha{}_\nu a^\beta{}_\mu F^{\mu\nu}. \tag{7.95}$$

Dabei stehen  $F^{\mu\nu}$  für die Elemente des Feldstärketensors im ursprünglichen Koordinatensystem,  $F'^{\alpha\beta}$  für die entsprechenden Elementen im transformierten Koordinatensystem und  $a^\alpha{}_\nu$  repräsentiert die Transformationsmatrix für kontravariante Vektoren (Index oben) vom Koordinatensystem  $K$  nach  $K'$ .

Mit der Transformation (7.95) und dem Zusammenhang zwischen  $F^{\alpha\beta}$  und den elektromagnetischen Feldern in (7.94) haben wir nun auch das Ziel erreicht und kennen die Transformation der elektromagnetischen Felder von einem ins andere Koordinatensystem.

Als ein Beispiel für eine solche Transformation wollen wir eine Punktladung  $q$  betrachten, die im Koordinatenursprung des Koordinatensystems  $K$  ruht. Wir wissen also, dass in diesem Koordinatensystem ein statisches elektrisches Feld der Form

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

vorliegt und das magnetische Feld identisch null,  $\vec{B} = 0$  ist.

Aus der Sicht eines Beobachters, der sich relativ zu diesem Koordinatensystem (wie üblich in  $x$ -Richtung mit Geschwindigkeit  $v$ ) bewegt, wird aus dieser stationären Punktladung eine bewegte Punktladung und ein entsprechender Strom (siehe Diskussion von (7.82)). Dieser Beobachter sollte also auch ein zugehöriges Magnetfeld beobachten. So ergibt sich also z.B.

$$\begin{aligned} -B'_z = F'^{12} &= a^1{}_{\mu} a^2{}_{\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \sum_{i=1}^3 (a^1{}_0 a^2{}_i F^{0i} + a^1{}_i a^2{}_0 F^{i0}) \\ &= \sum_{i=1}^3 (a^1{}_0 a^2{}_i - a^1{}_i a^2{}_0) \frac{-E_i}{c} \\ &= \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{-E_2}{c} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{v}{c^2} E_y. \end{aligned} \tag{7.96}$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile wurde ausgenutzt, dass der Feldstärketensor in unserem Beispiel nur in der ersten Zeile und in der ersten Spalte von Null verschiedenen Einträge hat. Bei dem Übergang zur zweitletzten Zeile wurden die Eigenschaften der Transformationsmatrix  $a$  für den Boost in  $x$ -Richtung benutzt.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir die Maxwell Gleichungen in dieser Nomenklatur des Feldstärketensors, die ja die Lorentz Struktur der elektromagnetischen Phänomene verdeutlicht, darstellen.

Wir werden uns zunächst davon überzeugen, dass die homogenen Maxwell Gleichungen (7.82) einer einfachen Symmetrie des Feldstärketensors entsprechen nämlich der sogenannten **Jakobi Identität**. Diese Jakobi Identität besagt, dass

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0, \tag{7.97}$$

dabei sind  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  eine beliebige Kombination der Indizes (0,1,2,3) ist, die bei den drei Summanden in (7.97) zyklisch durchgetauscht werden. Den Beweis dieser Jakobi Identität erhält man durch Einsetzen der Definition von  $F$  und sturem Ausrechnen, wobei man benutzt, dass z.B.

$$\partial^\alpha \partial^\beta A^\gamma = \partial^\beta \partial^\alpha A^\gamma.$$



Betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{B} &= -\partial^1 B_x - \partial^2 B_y - \partial^3 B_z \\ &= -\partial^1 F^{32} - \partial^2 F^{13} - \partial^3 F^{21} \\ &= 0.\end{aligned}\tag{7.98}$$

Die Null in der letzten Zeile ergibt sich durch die Anwendung der Jakobi Identität (7.97) für  $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 3, 2)$ .

Andererseits gilt aber auch für die  $x$ -Komponente der zweiten homogenen Maxwell Gleichung

$$\begin{aligned}\left(\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{d\vec{B}}{dt}\right)_x &= c \left[ \frac{d(E_z/c)}{dy} - \frac{d(E_y/c)}{dz} + \frac{dB_x}{d(ct)} \right] \\ &= c \left[ -\partial^2(-F^{03}) + \partial^3(-F^{02}) + \partial^0 F^{32} \right] \\ &= c \left[ \partial^2 F^{03} + \partial^3 F^{20} + \partial^0 F^{32} \right] \\ &= 0\end{aligned}\tag{7.99}$$

Die Null ergibt sich also hier durch die Jakobi Identität für  $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 0, 3)$ . Entsprechendes gilt für die  $y$  und  $z$  Komponenten der zweiten homogenen Maxwell Gleichung.

Man könnte also an dieser Stelle den Eindruck bekommen, dass die homogenen Maxwell Gleichungen gar keine physikalische Information enthalten sondern eben eine einfache mathematische Eigenschaft des Feldstärketensors sind. Dies ist aber nicht richtig. Wir haben ja genau die homogenen Maxwellgleichungen benutzt, um die elektromagnetischen Felder durch die Potentiale zu definieren. Erst diese Reduktion der elektromagnetischen Felder auf die Potentiale ermöglichte ja die kompakte Definition des Feldstärketensors.

Die inhomogenen Maxwell Gleichungen

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{D} &= \rho & \text{mit} & \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \\ \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{d\vec{D}}{dt} &= \vec{j} & \text{mit} & \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H},\end{aligned}\tag{7.100}$$

können in der kompakten Form

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta,\tag{7.101}$$

dargestellt werden. Dies zeigt, dass die Maxwell Gleichungen kovariant unter Lorentz Transformationen sind.

Zum Beweis dieser kompakten Darstellung betrachten wir zunächst einmal die erste der beiden Gleichungen in (7.100) und multiplizieren diese mit  $c\mu_0$

$$\begin{aligned}\mu_0 c \rho = \mu_0 J^0 &= \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{=1/c^2} c \operatorname{div} \vec{E} \\ &= \frac{d}{dx} \frac{E_x}{c} + \frac{d}{dy} \frac{E_y}{c} + \frac{d}{dz} \frac{E_z}{c} \\ &= \partial_0 \underbrace{F^{00}}_{=0} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} \\ \mu_0 J^0 &= \partial_\alpha F^{\alpha 0}.\end{aligned}$$

Zum Beweis der raumartigen Komponenten der Darstellung (7.101) betrachten wir die  $x$ -Komponente der zweiten inhomogenen Maxwell Gleichung in (7.100) und multiplizieren diese mit  $\mu_0$

$$\begin{aligned}
 \mu_0 \dot{j}_x = \mu_0 J^1 &= \left( \text{rot} \vec{B} \right)_x - \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{=1/c^2} \frac{dE_x}{dt} \\
 &= \frac{dB_z}{dy} - \frac{dB_y}{dz} - \frac{d(E_x/c)}{d(ct)} \\
 &= \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} + \partial_1 \underbrace{F^{11}}_{=0} \\
 \mu_0 J^1 &= \partial_\alpha F^{\alpha 1}.
 \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für die  $y$ - und  $z$ -Komponente, so dass die Darstellung (7.101) bewiesen ist.