Übungen zur Mathematischen Logik I — Blatt 9

Prof. Schroeder-Heister
René Gazzari

Wintersemester 2017/18
Universität Tübingen

Aufgabe 33: Sei $\mathcal{L}$ formale Sprache mit 1-stelligem Funktionszeichen $\dot{f}$ und 2-stelligem Funktionszeichen $\dot{g}$. Es werden zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ über der Menge $\mathbb{N}$ betrachtet. Das Funktionszeichen $\dot{g}$ wird in beiden Strukturen durch die Addition, $\dot{f}$ in $\mathfrak{A}$ durch $n \mapsto 2$ und in $\mathfrak{B}$ durch $n \mapsto n \mod 4$ interpretiert. Prüfen Sie die folgenden Aussagen in beiden Strukturen auf Gültigkeit:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \forall x \exists y : \dot{f}(\dot{g}(x,y)) = \dot{f}(x) \\ \text{(b)} & \exists y \forall x : \dot{f}(\dot{g}(x,y)) = \dot{f}(x) \end{array}$$

Aufgabe 34: Sei $\mathcal{L}$ beliebige formale Sprache. Prüfen Sie, ob die angegebenen Formeln und Formelschemata allgemeingültig sind.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \exists x\, (\phi \to \forall x\, \phi) \\ \text{(b)} & \forall x\, (\phi \to \phi) \to (\phi \to \forall x\, \phi) \\ \text{(c)} & x = y \to \forall x \forall y\, x = y \end{array}$$

(Beweisen Sie gegebenenfalls die Allgemeingültigkeit; andernfalls geben Sie ein möglichst einfaches Gegenbeispiel an.)

Aufgabe 35: Sei $\mathcal{L}$ die formale Sprache ohne nichtlogischen Zeichen. Geben Sie für jedes $0 \neq n \in \mathbb{N}$ Formeln an, die die folgenden metasprachlichen Aussagen ausdrücken:

1. Es gibt mindestens n Elemente im Universum.
2. Es gibt höchstens n Elemente im Universum.
3. Es gibt genau n Elemente im Universum.

Wie sehen die Modelle solcher Formeln aus? Analysieren Sie die Situation für $n = 0$. Geben Sie weiterhin eine Formelmenge Γ an, so dass jedes Modell von Γ unendlich ist.

Aufgabe 36: Zeigen Sie, dass der Quantor $\exists_1$ (*es gibt genau ein Objekt*) mithilfe der üblichen Quantoren und Junktoren ausgedrückt werden kann. Geben Sie zudem eine Klausel an, mithilfe der die Definition der Auswertung von Formeln erweitert werden kann, falls man diesen Quantor in der formalen Sprache einführen möchte.

Abgabe der Aufgaben montags bis 17:30 Uhr (Internet) bzw. in der Vorlesung.