Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 4**

Aufgabe 1 (3 + 3 Punkte)

Geben Sie jeweils ein einfaches Verfahren zur Überprüfung der folgenden Eigenschaften an, und begründen Sie, warum das Verfahren das Gewünschte leistet.

a) Erfüllbarkeit einer Formel in disjunktiver Normalform

b) Allgemeingültigkeit einer Formel in konjunktiver Normalform

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Zeigen Sie:

a) $(\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \vdash \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$

b) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \sigma \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)$

c) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi$

d) $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \sigma))$

e) $\neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$

f) $\neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi \vdash \psi$

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass mit $\Gamma \vdash \varphi$ auch $\Gamma, \Delta \vdash \varphi$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass mit $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Delta, \varphi \vdash \psi$ auch $\Gamma, \Delta \vdash \psi$ gilt.

Aufgabe 5 (8 Zusatzpunkte)

Für eine Formel φ sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ eine minimale (d.h. nur aus Teilformeln von φ bestehende) Bildungsfolge für $\varphi_n = \varphi$. Seien weiterhin $q_1, \ldots, q_n$ neue atomare Aussagensymbole. Die Formel ψ sei dann die Konjunktion von q_n und den konjunktiven Normalformen der folgenden Formeln:

$$\begin{array}{rll} (q_i \vee q_j) \leftrightarrow q_k & \text{für} & \varphi_k = (\varphi_i \vee \varphi_j) \\ (q_i \wedge q_j) \leftrightarrow q_k & \text{für} & \varphi_k = (\varphi_i \wedge \varphi_j) \\ \neg q_i \leftrightarrow q_k & \text{für} & \varphi_k = \neg\varphi_i \end{array}$$

Zeigen Sie, dass φ und ψ erfüllbarkeitsäquivalent sind.