Übungen zur Vorlesung Mathematische Logik

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **Blatt 3**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Geben Sie zu jeder der folgenden Formeln eine äquivalente Formel an, in der als einziger Junktor der Peircesche Pfeil $\downarrow$ vorkommt.

a) $p \wedge \neg q$

b) $(q \rightarrow p) \rightarrow p$

c) $(p \wedge q) \vee r$

d) $p \leftrightarrow \neg q$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Konstruieren Sie für die folgenden Formeln jeweils konjunktive und disjunktive Normalformen. Geben Sie die Zwischenschritte der Konstruktionen an.

a) $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$

b) $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$

c) $(\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\psi)) \wedge (\psi \rightarrow (\psi \wedge \neg\varphi))$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Beweisen Sie:

$$\bigwedge_{i \leq m} \varphi_i \vee \bigwedge_{j \leq n} \psi_j \mathrel{=\!\!|\!\models} \bigwedge_{\substack{i \leq m \\ j \leq n}} (\varphi_i \vee \psi_j)$$

Aufgabe 4 (6 Zusatzpunkte)

Eine n-stelliges Konnektiv mit Wahrheitsfunktion f heiße *selbstdual* genau dann, wenn für alle $x_1, \ldots, x_n$ gilt:

$$f(x_1^*, \ldots, x_n^*) = f(x_1, \ldots, x_n)^*.$$

Dabei sei $0^* \stackrel{def}{=} 1$ und $1^* \stackrel{def}{=} 0$.

Zeigen Sie, dass eine Menge, welche nur selbstduale Konnektive enthält, nicht funktional vollständig sein kann.