PD. Dr. Klaus Reinhardt **Universität Tübingen, WS 09/10**

Übungen zur Mathematischen Logik I

Blatt 4

Aufgabe 14: Erweitern Sie die Definition des Duals (4.9) für die Junktoren $\circ$ aus $\mathfrak{J} := \{\rightarrow, \leftrightarrow, \downarrow, \mid\}$.

Finden Sie also für alle $\circ \in \mathfrak{J}$ eine geeignete Formel σ, so dass σ^δ den Junktor $\circ$ darstellt. Beweisen Sie dies. Definieren Sie damit dann die Übersetzung $(\phi \circ \psi)^\delta$.

Aufgabe 15: Zeigen Sie die folgenden logischen Äquivalenzen mithilfe algebraischer Umformungen. Sie dürfen dabei die logischen Äquivalenzen aus dem Theorem über algebraische Gesetze (5.1) und $\phi \rightarrow \psi \mathrel{=\!\!|}\models \neg\phi \vee \psi$ verwenden. Geben Sie dabei in jedem Schritt an, welche dieser Äquivalenzen Sie verwenden. Falls Sie dabei den Substitutionssatz (Theorem 3.3) verwenden, geben Sie dies auch an.

(a) $\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi) \mathrel{=\!\!|}\models \phi \rightarrow \psi$
(b) $\phi \vee \psi \rightarrow \sigma \mathrel{=\!\!|}\models (\phi \rightarrow \sigma) \wedge (\psi \rightarrow \sigma)$

Aufgabe 16: Beweisen Sie durch vollständige Induktion das folgende allgemeine Distributivgesetz:

$$\bigwedge_{k \leq m} \phi_k \vee \bigwedge_{k \leq n} \psi_k \mathrel{=\!\!|}\models \bigwedge_{k \leq n; l \leq m} (\phi_k \vee \psi_l)$$

Das Theorem über algebraische Gesetze (5.1) und das einfache Distributivgesetz im Lemma (5.4) dürfen dabei vorausgesetzt werden.

Aufgabe 17: Beschreiben Sie ein Verfahren, wie man aus der Wahrheitstafel einer Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ direkt eine ihrer Disjunktiven Normalformen ablesen kann. Geben Sie eine Variation dieses Verfahrens an, mit deren Hilfe man eine Konjunktive Normalform findet.

Wenden Sie beide Verfahren für die Formel $(p \mid q) \downarrow (q \mid p)$ an und bestimmen Sie damit eine DNF und KNF. Geben Sie zudem eine DNF und eine KNF der Peirc'schen Tautologie $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$ an. Warum kann man diese nicht allgemein für Formelschemata angeben?

DEF (Selbstdualer Junktor): Ein n-stelliger Junktor \$ mit Wahrheitsfunktion $f_\$$ heißt *selbstdual*, falls für alle $x_1, \ldots x_n \in \{0, 1\}$ gilt:

$$f_\$(x_1^*, \ldots x_n^*) = f_\$(x_1, \ldots x_n)^*$$

Dabei sei $1^* := 0$ und $0^* := 1$.

Aufgabe 18 (Zusatzaufgabe): Prüfen Sie, ob eine Junktorenmenge $\mathfrak{J}$, die nur selbstduale Junktoren enthält, funktional vollständig sein kann. Ändert sich etwas, wenn man zusätzlich das Falsum ($\perp$) zuläßt? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Abgabe der Aufgaben am Do. 19.11.2009 nach der Vorlesung