Übungen zur Vorlesung Mathematischen Logik II — Blatt 3

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister — **SS 2011**

Aufgabe 9

Zeigen Sie: Zu jeder Σ_1-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ gibt es eine *strikte* Σ_1-Formel $\psi(x_1, \ldots, x_k)$, so daß für alle $n_1, \ldots, n_k$ gilt: $\mathsf{PA} \vdash \varphi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}) \leftrightarrow \psi(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$.

Aufgabe 10

Eine n-stellige Relation $R \subseteq \mathbb{N}^n$ heißt *arithmetisch*, falls es eine Formel φ_R mit genau n freien Variablen gibt, so daß für alle $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ gilt: $R(k_1, \ldots, k_n) \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \varphi_R(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$.

Zeigen Sie:

1. Die Menge aller natürlichen Zahlen ist arithmetisch.
2. Die leere Menge ist arithmetisch.
3. Die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen ist arithmetisch.
4. Die Menge der arithmetischen Relationen ist abgeschlossen unter Negation, Konjunktion und Allquantifikation.
5. Die Menge der arithmetischen Relationen ist abgeschlossen unter primitiv rekursiven Funktionen, d.h. falls R arithmetisch und f primitiv rekursiv, dann ist (im einstelligen Fall) Q mit $Q(k) :\Leftrightarrow R(f(k))$ arithmetisch. (Bemerkung: Dies gilt auch für totale μ-rekursive Funktionen.)
6. Jede primitiv-rekursive Relation ist arithmetisch.

Aufgabe 11

Sei T die Menge der Gödelnummern von wahren Aussagen, d.h. $T := \{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \mathbb{N} \models \varphi\}$.

Zeigen Sie: T ist nicht arithmetisch.

Aufgabe 12

Beweisen Sie den folgenden Satz von Tarski: Falls PA konsistent ist, so gibt es keine Formel φ_T mit einer freien Variablen, so daß für alle Aussagen ψ gilt: $\mathsf{PA} \vdash \varphi_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \leftrightarrow \psi$.

1. Beweisen Sie diesen Satz direkt.
2. Beweisen Sie diesen Satz aus Aufgabe 11.