

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Prüfen Sie mithilfe von Wahrheitstabellen, ob die folgenden Formeln und Formelschemata Tautologien, Kontradiktionen oder kontingente Formeln sind.

(a) $(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ (2 Punkte)

(b) $((\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ (2 Punkte)

(c) $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_3) \rightarrow (p_2 \vee p_3))$ (4 Punkte)

(Folgen Sie beim Aufbau der Wahrheitstabellen bitte den Beispielen im Skript; beachten Sie insbesondere die systematische Reihenfolge der Zeilen.)

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei $\text{PROP}_{\wedge, \vee}$ die Menge aller Formeln, in denen als Junktoren nur \wedge und \vee vorkommen können.

(a) Geben Sie eine induktive Definition der Menge $\text{PROP}_{\wedge, \vee}$ an. (2 Punkte)

(b) Geben Sie zwei Belegungen v bzw. w an, so dass alle Formeln aus $\text{PROP}_{\wedge, \vee}$ mit 0 bzw. mit 1 bewertet werden. Zeigen Sie dies mit dem zugehörigen Induktionsprinzip. (2 Punkte)

(c) Welche Formeln aus $\text{PROP}_{\wedge, \vee}$ sind erfüllbar, welche kontingent, welche kontradiktorisch und welche tautologisch? (2 Punkte)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie:

(a) Wenn $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \sigma$, dann $\varphi \models \sigma$. (2 Punkte)

(b) $\llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket_v = 1$ genau dann, wenn $\llbracket \varphi \rrbracket_v \leq \llbracket \psi \rrbracket_v$. (2 Punkte)

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Zeigen Sie: $\varphi \wedge \psi \models (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$.