

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Seien $\varphi, \psi \in \text{PROP}$. Zeigen Sie:

- (a) Wenn $\varphi \models \psi$, dann $\varphi \vee \psi \models \psi$. (2 Punkte)
- (b) Wenn $\models \varphi$, dann $\varphi \wedge \psi \models \psi$. (2 Punkte)
- (c) Wenn $\models \varphi$, dann $\neg\varphi \vee \psi \models \psi$. (2 Punkte)

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ eine beliebige Menge von Aussagen, $\text{Cn}(\Gamma) := \{\varphi \in \text{PROP} : \Gamma \models \varphi\}$ die Menge aller Konsequenzen aus Γ und $\text{Taut} := \{\varphi \in \text{PROP} : \models \varphi\}$ die Menge aller tautologischen Aussagen.

Zeigen Sie, dass Cn die folgenden Eigenschaften hat:

- (a) $\text{Cn}(\perp) = \text{PROP}$ (1 Punkt)
- (b) $\text{Cn}(\top) = \text{Taut}$, für das *Verum* $\top := \perp \rightarrow \perp$. (1 Punkt)
- (c) Wenn $\Gamma \subseteq \Delta$, dann $\text{Cn}(\Gamma) \subseteq \text{Cn}(\Delta)$ (Monotonie) (1 Punkt)
- (d) $\text{Cn}(\Gamma) = \text{Cn}(\text{Cn}(\Gamma))$ (Abgeschlossenheit) (1 Punkt)
- (e) Zeigen Sie außerdem, dass $\text{Cn}(\Gamma[p/q]) = \text{Cn}(\Gamma)[p/q]$ *nicht* allgemein gilt.
Dabei ist $\Gamma[p/q] := \{\varphi[p/q] : \varphi \in \Gamma\}$. (1 Punkt)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Geben Sie eine exakte rekursive Definition der simultanen Substitution an, d. h. definieren Sie rekursiv: $\varphi[\psi_1/p_{k_1}, \dots, \psi_n/p_{k_n}]$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Beweisen Sie: Wenn $\varphi_1 \models \varphi_2$, dann $\varphi_1[\psi/p] \models \varphi_2[\psi/p]$.