

Übungen zur Vorlesung λ -Kalkül und kombinatorische Logik

Aufgabe 1

(a) Berechnen Sie die Normalformen der folgenden Terme: [3]

i) $\lambda x. \lambda y. ((\underline{2}x)((\underline{3}x)y))$

ii) $\lambda x. \underline{2}(\underline{3}x)$

iii) $\underline{3}\underline{2}$

(b) Zeigen Sie: $[1+2+2]$

i) $\lambda x. \lambda y. ((\underline{m}x)((\underline{n}x)y)) =_{\beta} \underline{m+n}$

ii) $\lambda x. \underline{m}(\underline{n}x) =_{\beta} \underline{m \cdot n}$

iii) $\underline{n}\underline{m} =_{\beta} \underline{m^n}$

(c) Geben Sie entsprechende Kombinatoren $+$, $*$ und $\#$ für die Addition, Multiplikation und Exponentiation von Church-Ziffern an. D.h. es soll gelten: [1]

$$+ \underline{m}\underline{n} =_{\beta} \underline{m+n}, \quad * \underline{m}\underline{n} =_{\beta} \underline{m \cdot n}, \quad \# \underline{m}\underline{n} =_{\beta} \underline{m^n}$$

(d) Geben Sie Definitionen für diese Funktionen unter Zuhilfenahme des Rekursionskombinatoren R an. [3]

Aufgabe 2 [3]

Geben Sie einen Kombinator $!$ der Fakultätsfunktion für Church-Ziffern an. D.h. es soll gelten:

$$! \underline{m} =_{\beta} \underline{m!}$$

Aufgabe 3 [6 Zusatzpunkte]

Sei

$$[M, N] := \lambda z. zMN$$

$$I := \lambda x. x$$

$$T := \lambda xy. x$$

$$\bar{0} := I$$

$$F := \lambda xy. y$$

$$\overline{n+1} := [F, \bar{n}]$$

Geben Sie Kombinatoren N' , V' und Z' an, so daß gilt

$$N' \overline{n} =_{\beta} \overline{n+1}$$

$$V' \overline{n+1} =_{\beta} \bar{n}$$

$$Z' \bar{0} =_{\beta} T \quad Z' \overline{k+1} =_{\beta} F$$