λ-Kalkül und Kombinatorische Logik – Übungen — Blatt 4

Dr. Michael Arndt — **WS 2010/11**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Definieren Sie unter Verwendung des Rekursionsoperators R Kombinatoren $+, \times, \#$ für Addition, Multiplikation und Exponentiation von Church-Ziffern. Es soll also gelten:

$$+\underline{m}\,\underline{n} =_\beta \underline{m+n}$$

$$\times\underline{m}\,\underline{n} =_\beta \underline{m \cdot n}$$

$$\#\underline{m}\,\underline{n} =_\beta \underline{m^n}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Normalformen der folgenden Terme:

(a) $\underline{2}\,\underline{3}$

(b) $\lambda x.\underline{2}(\underline{3}x)$

(c) $\lambda xy.(\underline{2}x)((\underline{3}x)y)$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Geben Sie alternative Definitionen für die Kombinatoren $+, \times, \#$ an, in denen kein Rekursionsoperator vorkommt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Geben Sie einen Kombinator ! an, der die Fakultätsfunktion auf Church-Ziffern realisiert. Es soll also gelten:

$$!\underline{n} =_\beta \underline{n!}$$

Bemerkung: Theorem 1.37 liefert nur bei *exakter* Verwendung der erlaubten Schemata zur Definition primitiv-rekursiver Funktionen den richtigen λ-Term zu einer gegebenen Funktion. Sie sollten daher bei den Aufgaben 1 und 4 intuitive Definitionen der rekursiven Funktionen dringend vermeiden und stattdessen die korrekten Schemata verwenden!

Beispiel: Betrachten Sie folgende Definitionen der (zahlentheoretischen) charakteristischen Funktion $\mathbf{even} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ des Prädikats "ist gerade". Dabei sei **diff** die Differenzfunktion.

Intuitive Definition:	$\mathbf{even}(0)$	$=$	1	
	$\mathbf{even}(n+1)$	$=$	$\mathbf{diff}(1, \mathbf{even}(n))$	(also "$1 - \mathbf{even}(n)$")
Exakte Definition:	$\mathbf{even}(0)$	$=$	$1_0()$	
	$\mathbf{even}(n+1)$	$=$	$\mathbf{diff}(1_2(n, \mathbf{even}(n)), \pi^2_2(n, \mathbf{even}(n)))$	

Da die definierte Funktion **even** 1-stellig ist, muß die definierende Grundfunktion g 0-stellig sein. Die 1 kann also nicht die Zahl 1, sondern muß die konstante Funktion 1_0 sein! Die Funktion h muß 2-stellig sein. Zudem muß aber beachtet werden, daß h nach Schema stets das Tupel $(n, \mathbf{even}(n))$ als Argument erhält. Daher muß h die zusammengesetzte Funktion $\mathbf{diff} \circ [1_2; \pi^2_2]$ sein, wobei 1_2 die konstante Funktion ist, die bei Angabe eines Argumentpaares die 1 ergibt.