

Lisa HILKEN & Carla CEDERBAUM, Tübingen

Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen: Ein Seminar für Lehramtsstudierende mit konstruktiven, instruktiven und praktischen Anteilen

Im Folgenden beschreiben wir zunächst Inhalte, Ablauf und Methoden des Seminars. Anschließend berichten wir von Erfahrungen von der Durchführung des Seminars. Zum Schluss gehen wir noch kurz auf die Beforschung des Seminars ein.

Das Seminar

Das Mathematikseminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ richtet sich an Studierende des gymnasialen Lehramts. Inhaltlich befasst sich das Seminar mit elementarer Differentialgeometrie, d.h. mit Krümmung von ebenen Kurven und Raumkurven, dem Flächeninhalt gekrümmter Flächen, Gauß- und mittlerer Krümmung, Geodäten, Längen-, Flächen- und Winkeltreue u.a.

Das Seminar umfasst 2SWS. Es findet nicht wöchentlich sondern alle zwei Wochen statt. Dementsprechend dauert jeder Termin vier Unterrichtsstunden. Die TeilnehmerInnen arbeiten in festen Gruppen von drei bis vier Personen zusammen.

Das Seminar unterteilt sich in vier große Abschnitte, die alle gleich ablaufen. Zunächst werden Fragestellungen verteilt und die Gruppen fangen in der Seminarstunde an, ihre Fragestellung zu bearbeiten. In den folgenden zwei Wochen arbeiten sie zuhause weiter. In der nächsten Sitzung bekommen sie kleine Zusatzfragen. Weitere zwei Wochen später präsentieren sie ihre Ergebnisse. Nach den Präsentationen werden neue Themen verteilt. Jede/r TeilnehmerIn präsentiert einmal im Semester die Ergebnisse seiner Gruppe und schreibt zweimal die Ergebnisse mit einem weiteren Gruppenmitglied als Skriptbeitrag auf.

Bei der Ausgestaltung des Seminars stehen vier Methoden im Vordergrund. Jedes Thema wird von praktischen **Hands-on-Aktivitäten** eingeleitet oder begleitet. Den TeilnehmerInnen werden konkrete Objekte zur Verfügung gestellt oder Aktivitäten vorgeschlagen, mit denen sie ausprobieren und „spielen“ können, um ihre Intuition zu schulen und erste Ideen zu entwickeln oder zu überprüfen. Mit Hilfe der Hands-on-Aktivitäten entwickeln die Gruppen selbst Mathematik, d.h. sie beschäftigen sich auf **konstruktive** Art mit Mathematik. Während der konstruktiven Phasen erhalten die Gruppen Hilfe von den Dozentinnen. Als Abschluss werden die Ergebnisse

mündlich präsentiert und in einem Skriptbeitrag ausformuliert. Dies sind **instruktive Elemente**. Zudem schreiben die TeilnehmerInnen im Rahmen des Seminars drei Texte, in denen sie das Gelernte **reflektieren**.

Die vier methodischen Elemente werden im Folgenden am Beispiel der ersten Themeneinheit veranschaulicht. Bei dieser Einheit ist das Ziel, eine Definition für die Krümmung ebener Kurven zu finden. Die vier methodischen Elemente sind wie folgt ausgestaltet. Die Gruppen durchlaufen zunächst einen praktischen Lernzirkel. Bei diesem können sie beispielsweise mit dem Fahrrad oder Cityroller auf den Boden gemalte Kurven abfahren. Dabei können sie erfahren, wie sich Wendepunkte beim Fahren bemerkbar machen oder dass Krümmung eine lokale Eigenschaft einer Kurve ist. Um die Erfahrungen möglichst greifbar zu machen, bekommen die Gruppen ein Arbeitsblatt mit einigen Fragen zu den verschiedenen Stationen (**Handson-Aktivitäten**).

Anschließend bekommen die Gruppen ein Arbeitsblatt mit verschiedensten Kurven sowie ein paar hinführenden Fragen, z.B. „Wäre die zweite Ableitung einer Funktion ein gutes Maß für die Krümmung ihres Graphen? Warum (nicht)?“ Letztendlich brauchen sie aber selbst eine Idee, was Krümmung sein könnte (**konstruktiv**). Während die Gruppen dieses Blatt bearbeiten, gehen die Dozentinnen von Gruppe zu Gruppe und geben Tipps, wenn es irgendwo hakt. In der übernächsten Seminarsitzung werden die Ergebnisse der Gruppen präsentiert. Dabei werden nicht nur die Formeln angegeben, sondern vor allem die Wege zur Definition und ggf. auch mancher Irrweg erläutert (**instruktiv**).

Um die TeilnehmerInnen dazu anzuregen, Verbindungen zu Themen in der Schule zu suchen und das Gelernte unter einem anderen Gesichtspunkt zu betrachten, schreiben sie einen Text, wie sie Krümmung ebener Kurven in der Schule (Unterstufe/Oberstufe) erklären würden (**reflexiv**).

Erfahrungen

Das Seminar wurde bisher einmal im WS17/18 durchgeführt. Wir haben insgesamt sehr gute Erfahrungen gemacht, von denen wir einige hier festhalten.

- Verschiedene Gruppen gehen verschiedene Wege. Obwohl bei der ersten Themeneinheit alle die gleiche Aufgabe hatten, wurden vier verschiedene Grundideen und Wege präsentiert.
- Die Vortragenden stellten ihre Themen auf verständliche Weise vor und konnten auf Fragen gute Antworten geben. Auch die Skriptbeiträge waren durchdacht und gut zu lesen.

- Die Hands-on-Materialien wurden gut angenommen. Die TeilnehmerInnen hatten keine Scheu, die Materialien zu benutzen, und ließen sich draußen auch nicht von verwunderten Passanten irritieren.
- Mehrere TeilnehmerInnen kritisierten, dass der Zeitaufwand sehr hoch sei. Allerdings ist nicht klar, bei wie vielen dies objektiv stimmt. Einige dachten wohl zu Anfang, dass die Erarbeitung der Themen ganz im Seminar geschähe. Wie bei traditionellen Mathematikseminaren war aber auch bei diesem Heimarbeit vorgesehen.
- Durch die Wahl der elementaren Differentialgeometrie als Themengebiet konnte das Verständnis der Grundvorlesungen Lineare Algebra und Analysis in einigen Punkten gefestigt oder erneuert werden. Beispielsweise betrachtet man bei Raumkurven zur Bestimmung der Krümmung sogenannte Schmiegeebenen. Den Gruppen, die dieses Thema bearbeiteten, rieten wir, einen Basiswechsel von der Standardbasis in eine zur Schmiegeebene passende Basis durchzuführen. Dies war für einige eine Erneuerung vergessenen Wissens und als sie sahen, wie der Basiswechsel die weitere Arbeit erleichtert, kommentierten manche: „Dafür ist der Basiswechsel also gut!“
- Die TeilnehmerInnen hatten viele eigene Ideen. Eine Gruppe setzte sich gegen Ende mit Rotationsflächen auseinander. Die Aufgabe war, Rotationsflächen allgemein zu parametrisieren und sich deren Flächeninhalt anzuschauen. Sie führten dies durch und stellten sich von selbst die Frage, wie der verbleibende Integrand in der Formel für den Flächeninhalt geometrisch interpretiert werden könnte. Auch die Antwort fanden sie selbst: Nähert man den Flächeninhalt der Rotationsfläche mit Kegelstümpfen an und führt einen Grenzwertprozess durch, so erhält man genau den Integranden. Außerdem verglich die Gruppe die Bestimmung des Flächeninhaltes von selbst mit der Bestimmung des Volumens von Rotationskörpern, wie sie in der Schule vorkommt. Das Volumen kann über Zylinderscheiben angenähert werden, die Oberfläche nicht.

In Bezug auf die vier Methoden lassen sich unsere Erfahrungen kurz wie folgt zusammenfassen:

Die **Hands-on-Aktivitäten** unterstützten die Kommunikation innerhalb der Gruppen. Zu Beginn eines Themas ist die spezifische Sprache dafür noch nicht entwickelt, aber mittels konkreter Objekte oder Aktivitäten konnten Ideen durch Zeigen übermittelt werden. Auch die Ideen- und Vermutungsfindung wurde unterstützt.

Die TeilnehmerInnen **konstruierten** selbst Mathematik. Zwar erhielten sie dabei immer wieder von uns Hilfe, aber die meisten Ideen stammten von den TeilnehmerInnen selbst. Mehrere berichteten, dass ihnen der Prozess der Entstehung von Mathematik deutlich geworden sei.

Die Präsentationen der TeilnehmerInnen waren sehr gut. Oft wurden Ergebnisse oder Vorgehensweisen anderer Gruppen aufgegriffen, was für einen Erfolg der **instruktiven Elemente** spricht.

Den **reflexiv** angelegten Texten, die die TeilnehmerInnen zu schreiben hatten, sind die folgenden Zitate und Zusammenfassungen entnommen.

- „Während der Erarbeitungs-Phasen kommt man auch oft an einen Punkt, an dem man einfach nicht mehr weiterweiß. Auch das haben Schüler sehr oft und ich glaube, dass ich mich da jetzt nach dem Seminar besser einfühlen kann.“
- Mehrere TeilnehmerInnen fassten Mut, in der Schule mit solch offenen oder praktischen Aufgaben zu arbeiten, wie sie es im Seminar erlebt hatten.
- „Ein schöner Nebeneffekt ist der Stolz auf die eigenen Fähigkeiten und die sich daraus entwickelnde intrinsische Motivation.“
- „Im Seminar habe ich gelernt, wie man an mathematische Fragestellungen und Probleme herangehen kann.“
- „Außerdem hat mir das Seminar nochmals deutlich gezeigt, dass Mathematik sehr viel mehr ist als trockene Rechnungen oder Beweise. Mathematik kann aktiv erlebt werden. Dies finde ich eine sehr wichtige Erfahrung, welche ich auch SuS weitergeben möchte.“

Begleitforschung

Das Seminar wird im Rahmen einer Dissertation beforscht. Dabei wird untersucht, ob sich das Bild von Mathematik bei den TeilnehmerInnen verändert, welche Verbindungen die TeilnehmerInnen zur Mathematik in der Schule sehen und ob sich Lineare Algebra und Analysis bei ihnen besser vernetzen. Dazu gibt es einerseits einen Fragebogen als Vor- und Nachtest. Andererseits werden die Texte, die die TeilnehmerInnen geschrieben haben, analysiert. Sobald Ergebnisse vorliegen, können sie unter <http://www.-math.uni-tuebingen.de/arbeitsbereiche/gadr/personen/lisa-hilken-1> nachgelesen werden.