Prof. Schroeder-Heister **Sommersemester 2014**
René Gazzari **Universität Tübingen**

Mathematische Logik I

Blatt 10

Aufgabe 36: Formen Sie die folgende Formel schrittweise in eine PNF um. Geben Sie dabei an, welche logischen Äquivalenzen Sie verwenden.

$$\neg\big(\exists x\phi(x,y) \wedge (\forall y\psi(y) \to \phi(x,x)) \to \exists x\forall y\sigma(x,y)\big)$$

Aufgabe 37: Formulieren Sie zunächst ein Überführungslemma für Terme analog zum Überführungslemma (Skript, Satz 10.10). Setzen Sie (ohne Beweis) das Überführungslemma für Terme voraus und beweisen Sie des Überführungslemma für Formeln.
Setzen Sie dafür formale Sprachen mit genau den Junktoren $\to$ und $\perp$, dem einzigen Quantor $\forall$ und beliebiger Signatur voraus.

DEF (Arithmetik): Die folgenden Axiome definieren die Arithmetik:

1. *Anordnung:*
   (O_1): $\forall x : 0 \neq N(x)$
   (O_2): $\forall x, y : (N(x) = N(y) \to x = y)$
2. *Addition:*
   (A_1): $\forall x : x + 0 = x$
   (A_2): $\forall x, y : (x + N(y) = N(x + y))$
3. *Multiplikation:*
   (M_1): $\forall x : x \times 0 = 0$
   (M_2): $\forall x, y : (x \times N(y) = x \times y + x)$
4. *Induktionsschema:* Für alle Formeln ϕ mit $\mathrm{FV}(\phi) = \{x\}$:
   (IS): $\phi(0) \wedge \forall x(\phi(x) \to \phi(N(x))) \to \forall x : \phi(x)$

Wir bezeichnen $\mathrm{PA}_0 = \{O_1, O_2, IS\}$ als das Axiomensystem der *einfachen Arithmetik* und $\mathrm{PA} = \{O_1, O_2, A_1, A_2, M_1, M_2, IS\}$ als das Axiomensystem der *Arithmetik*.

Aufgabe 38: Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

1. Definieren Sie möglichst einfache, aber geeignete Sprachen $\mathfrak{L}_0$ für die einfache Arithmetik und $\mathfrak{L}_1$ für die Arithmetik, indem Sie die entsprechenden Signaturen angeben.
2. Geben Sie Interpretationsfunktionen Ω_0 und Ω_1 an, so dass $\mathfrak{A}_0 = \langle \mathbb{N}, \Omega_0 \rangle$ und $\mathfrak{A}_1 = \langle \mathbb{Z}, \Omega_1 \rangle$ jeweils eine $\mathfrak{L}_1$-Struktur sind.
3. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A} := \langle \mathbb{Z}, 0, x \mapsto x + 1 \rangle$ eine $\mathfrak{L}_0$-Struktur ist. Ist sie auch ein Modell von PA_0? Prüfen Sie also, ob $\mathfrak{A} \models \mathrm{PA}_0$.

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, dem 2. Juli.

4. Finden Sie eine Interpretation Ω_3 der nichtlogischen Zeichen von $\mathfrak{L}_0$ in $\mathbb{Z}$, sodass die Struktur $\mathfrak{A}_3 = \langle \mathbb{Z}, \Omega_3 \rangle$ ein Modell von (O_1) und (O_2) ist. Können Sie beweisen, ob das Induktionsschema in $\mathfrak{A}_3$ gültig ist? Falls nicht, dann geben Sie an, wo Sie Schwierigkeiten sehen.

Aufgabe 39 (Zusatzaufgabe): Seien zwei Mengen wie folgt definiert:

$$U_0 := \{\frac{n}{n+1};\ n \in \mathbb{N}\} \cong \mathbb{N} \quad ; \quad U_1 := \{2 \pm x;\ x \in U_0\} \cong \mathbb{Z}$$

Skizzieren Sie beide Mengen am Zahlenstrahl. Finden Sie zwei Interpretationen Ω_0 und Ω_1 der nichtlogischen Zeichen von $\mathfrak{L}_1$, sodass die beiden geordneten Paare $\mathfrak{A}_0 = \langle U_0, \Omega_0 \rangle$ und $\mathfrak{A}_1 = \langle U_1, \Omega_1 \rangle$ jeweils $\mathfrak{L}_1$-Strukturen sind, die das Folgende erfüllen:

1. $\mathfrak{A}_1 \models O_1, O_2, A_1, A_2, M_1, M_2$
2. $\mathfrak{A}_2 \models \neg O_1, O_2, A_1, A_2, M_1, M_2$

Können Sie prüfen, ob die beiden Strukturen Modell des Induktionsschemas sind? Falls nicht, wo liegt die Schwierigkeit dabei?

Abgabe der Lösungen am Mittwoch, dem 2. Juli.