

**Musterlösung von Aufgabe 2a), Blatt 7:**

$$\forall x(\phi \rightarrow \psi), \forall x\phi \vdash \forall x\phi \quad (\text{P2})$$

$$\forall x(\phi \rightarrow \psi), \forall x\phi \vdash \forall x\phi \rightarrow \phi(x/x) \quad (\text{P1:Q4})$$

$$\forall x(\phi \rightarrow \psi), \forall x\phi \vdash \phi(x/x) \quad (\text{P4})$$

$$\forall x(\phi \rightarrow \psi), \forall x\phi \vdash \forall x(\phi \rightarrow \psi) \quad (\text{P2})$$

$$\forall x(\phi \rightarrow \psi), \forall x\phi \vdash \forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)(x/x) \quad (\text{P1:Q4})$$

$$\forall x(\phi \rightarrow \psi), \forall x\phi \vdash (\phi \rightarrow \psi)(x/x) \quad (\text{P4})$$

$$\forall x(\phi \rightarrow \psi), \forall x\phi \vdash \psi(x/x) \quad (\text{P4})$$

$$\forall x(\phi \rightarrow \psi), \forall x\phi \vdash \forall x\psi \quad (\text{P6})$$

Dabei ist  $\phi(x/x) \simeq \phi$ ,  $(\phi \rightarrow \psi)(x/x) \simeq (\phi \rightarrow \psi) \simeq (\phi(x/x) \rightarrow \psi(x/x))$  und  $\psi(x/x) \simeq \psi$ .

Mit Hilfe des Deduktionstheorems folgt dann:

$$\vdash \forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\phi \rightarrow \forall x\psi)$$