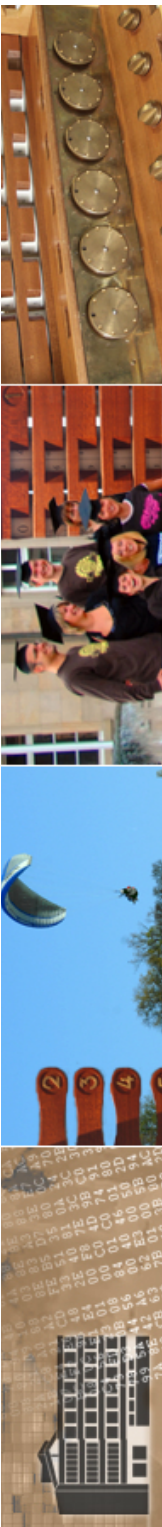




Taschenbuch der Mathematik Bronstein - Semendjajew

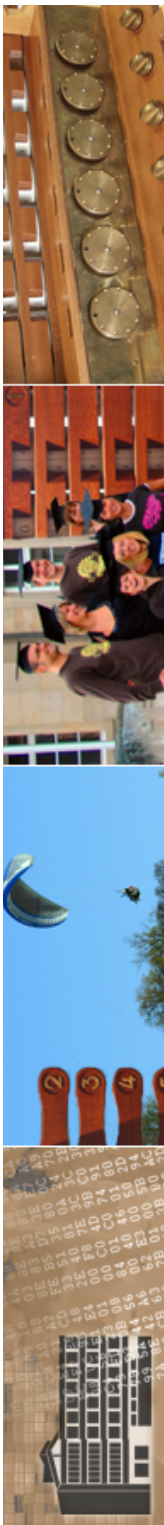
17.07.2017





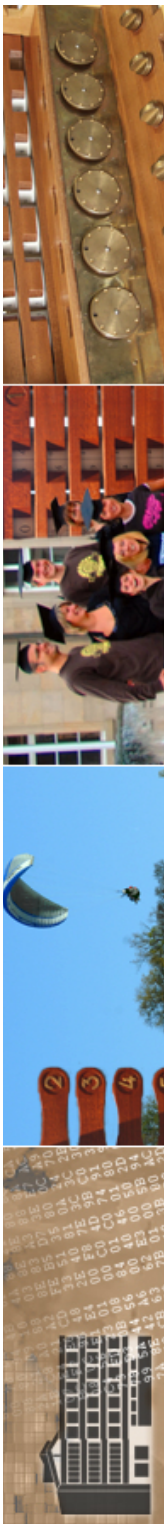
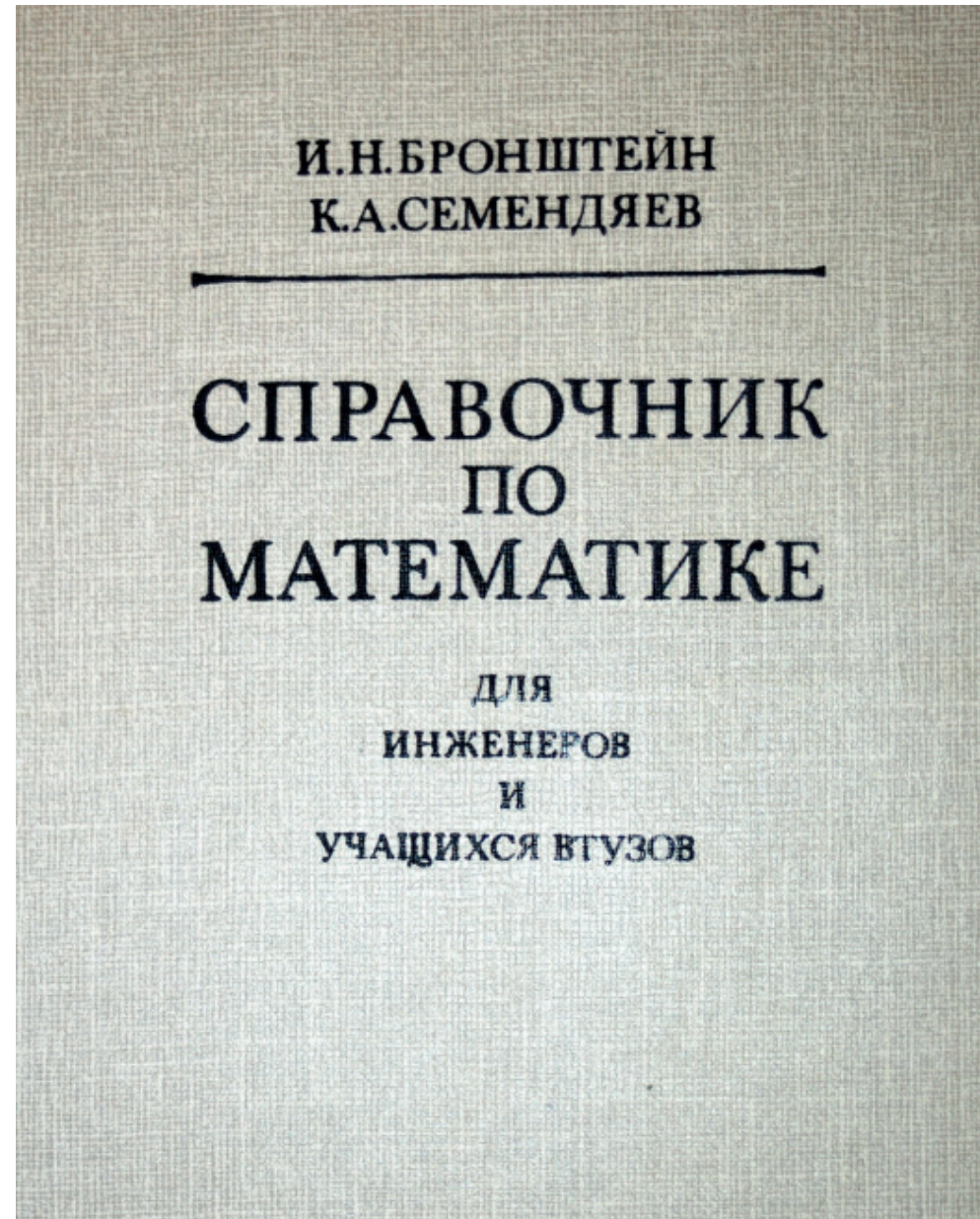
Das „Taschenbuch der Mathematik“

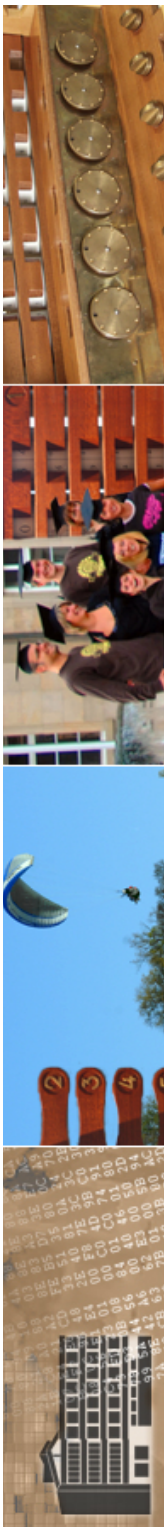
- Ilja Nikolajewitsch Bronstein (1903 - 1976)
- Konstantin Adolfowitsch Semendjajew (1908-1988)
- sowjetische Erstausgabe 1939/1940





13. russische Ausgabe, 1986





21. deutsche Ausgabe, 1984

17.07.17

I. N. BRONSTEIN † • K. A. SEMENDJAJEW

Taschenbuch der Mathematik

21. Auflage

herausgegeben von

G. Grosche, V. Ziegler † und D. Ziegler

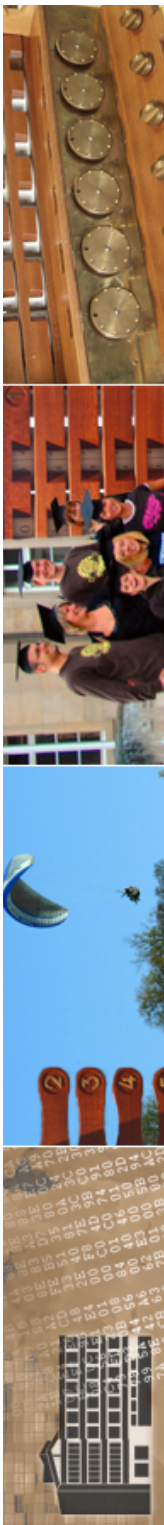
VERLAG HARRI DEUTSCH
THUN UND FRANKFURT/MAIN

Bron



das besondere

- ...ist eine (nahezu) vollständige Auflistung aller analytisch auflösbaren Integrale
- Tabelle mit 515 Einträgen!



1.1.3.3. Tabelle der unbestimmten Integrale

Allgemeine Hinweise

1. Die Integrationskonstante ist stets weggelassen; eine Ausnahme bilden lediglich die Fälle, in denen das Integral in verschiedenen Formen mit verschiedenen beliebigen Konstanten darstellbar ist.

2. In allen Formeln, in denen in der Stammfunktion ein Ausdruck in $\ln f(x)$ auftritt, ist stets darunter $\ln |f(x)|$ zu verstehen; das Zeichen des absoluten Betrages ist überall der Einfachheit halber weggelassen.

3. In allen den Fällen, in denen die Stammfunktion durch eine Potenzreihe dargestellt ist, läßt sich die Funktion nicht elementar integrieren.

Integrale rationaler Funktionen

Integrale, die $ax + b$ enthalten

Bezeichnung: $X = ax + b$

$$1. \int X^n dx = \frac{1}{a(n+1)} X^{n+1} \quad (n \neq -1; \text{ für } n = -1 \text{ siehe Nr. 2}).$$

$$2. \int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a} \ln X.$$

$$3. \int x X^n dx = \frac{1}{a^2(n+2)} X^{n+2} - \frac{b}{a^2(n+1)} X^{n+1} \quad (n \neq -1, \neq -2; \text{ für } n = -1, = -2 \text{ siehe Nr. 5 und 6}).$$

$$4. \int x^m X^n dx = \frac{1}{a^{m+1}} \int (X-b)^m X^n dX$$

(wird für $m < n$ oder bei ganzzahligem m und gebrochenem n angewandt; in diesen Fällen wird $(X-b)^m$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt, vgl. 2.2.2.1.)

($n \neq -1, \neq -2, \dots, \neq -m$),

$$5. \int \frac{x dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln X.$$

$$6. \int \frac{x dx}{X^2} = \frac{b}{a^2 X} + \frac{1}{a^2} \ln X.$$

$$7. \int \frac{x dx}{X^3} = \frac{1}{a^2} \left(-\frac{1}{X} + \frac{b}{2X^2} \right).$$

$$8. \int \frac{x dx}{X^n} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{-1}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)X^{n-1}} \right) \quad (n \neq 1, \neq 2).$$

$$9. \int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{1}{a^3} \left(\frac{1}{2} X^2 - 2bX + b^2 \ln X \right).$$

$$10. \int \frac{x^2 dx}{X^2} = \frac{1}{a^3} \left(X - 2b \ln X - \frac{b^2}{X} \right).$$

$$11. \int \frac{x^2 dx}{X^3} = \frac{1}{a^3} \left(\ln X + \frac{2b}{X} - \frac{b^2}{2X^2} \right).$$

$$12. \int \frac{x^2 dx}{X^n} = \frac{1}{a^3} \left[\frac{-1}{(n-3)X^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2)X^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1)X^{n-1}} \right] \quad (n \neq 1, \neq 2, \neq 3).$$

$$13. \int \frac{x^3 dx}{X} = \frac{1}{a^4} \left(\frac{X^3}{3} - \frac{3bX^2}{2} + 3b^2X - b^3 \ln X \right).$$

$$14. \int \frac{x^3 dx}{X^2} = \frac{1}{a^4} \left(\frac{X^2}{2} - 3bX + 3b^2 \ln X + \frac{b^3}{X} \right).$$

$$15. \int \frac{x^3 dx}{X^3} = \frac{1}{a^4} \left(X - 3b \ln X - \frac{3b^2}{X} + \frac{b^3}{2X^2} \right).$$





$$16. \int \frac{x^3 dx}{X^4} = \frac{1}{a^4} \left(\ln X + \frac{3b}{X} - \frac{3b^2}{2X^2} + \frac{b^3}{3X^3} \right).$$

$$17. \int \frac{x^3 dx}{X^n} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{-1}{(n-4)X^{n-4}} + \frac{3b}{(n-3)X^{n-3}} - \frac{3b^2}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{b^3}{(n-1)X^{n-1}} \right] \\ (n \neq 1, n \neq 2, n \neq 3, n \neq 4).$$

$$X = ax + b$$

$$18. \int \frac{dx}{xX} = -\frac{1}{b} \ln \frac{X}{x}.$$

$$19. \int \frac{dx}{xX^2} = -\frac{1}{b^2} \left(\ln \frac{X}{x} - \frac{b}{X} \right) = \frac{1}{b^2} \left(\ln \frac{X}{x} + \frac{ax}{X} \right).$$

$$20. \int \frac{dx}{xX^3} = -\frac{1}{b^3} \left(\ln \frac{X}{x} + \frac{2ax}{X} - \frac{a^2x^2}{2X^2} \right).$$

$$21. \int \frac{dx}{xX^n} = -\frac{1}{b^n} \left[\ln \frac{X}{x} - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \frac{(-a)^i x^i}{iX^i} \right] \quad (n \geq 1).$$

$$22. \int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \frac{X}{x}.$$

$$23. \int \frac{dx}{x^2X^2} = -a \left[\frac{1}{b^2X} + \frac{1}{abxX} - \frac{2}{b^3} \ln \frac{X}{x} \right].$$

$$24. \int \frac{dx}{x^2X^3} = -a \left[\frac{1}{2b^2X^2} + \frac{2}{b^3X} + \frac{1}{ab^3x} - \frac{3}{b^4} \ln \frac{X}{x} \right].$$

$$25. \int \frac{dx}{x^2X^n} = -\frac{1}{b^{n+1}} \left[-\sum_{i=2}^n \binom{n}{i} \frac{(-a)^i x^{i-1}}{(i-1)X^{i-1}} + \frac{X}{x} - na \ln \frac{X}{x} \right] \quad (n \geq 2).$$

$$26. \int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{b^3} \left[a^2 \ln \frac{X}{x} - \frac{2aX}{x} + \frac{X^2}{2x^2} \right].$$

$$27. \int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{b^4} \left[3a^2 \ln \frac{X}{x} + \frac{a^3x}{X} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{3aX}{x} \right].$$

$$28. \int \frac{dx}{x^3X^3} = -\frac{1}{b^5} \left[6a^2 \ln \frac{X}{x} + \frac{4a^3x}{X} - \frac{a^4x^2}{2X^2} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{4aX}{x} \right].$$

$$29. \int \frac{dx}{x^3X^n} = -\frac{1}{b^{n+2}} \left[-\sum_{i=3}^{n+1} \binom{n+1}{i} \frac{(-a)^i x^{i-2}}{(i-2)X^{i-2}} + \frac{a^2X^2}{2x^2} - \frac{(n+1)aX}{x} + \frac{n(n+1)a^2}{2} \ln \frac{X}{x} \right] \quad (n \geq 3).$$

$$30. \int \frac{dx}{x^mX^n} = -\frac{1}{b^{m+n-1}} \sum_{i=0}^{m+n-2} \binom{m+n-2}{i} \frac{X^{m-i-1} (-a)^i}{(m-i-1)X^{m-i-1}}$$

(wenn der Nenner des Gliedes unter dem Summenzeichen verschwindet, so ist ein solches Glied durch das folgende zu ersetzen: $\binom{m+n-2}{m-1} (-a)^{m-1} \ln \frac{X}{x}$).

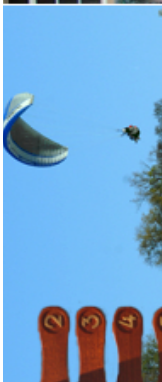
Bezeichnung: $\Delta = bf - ag$

$$31. \int \frac{ax + b}{fx + g} dx = \frac{ax}{f} + \frac{1}{f^2} \ln (fx + g).$$

$$32. \int \frac{dx}{(ax + b)(fx + g)} = \frac{1}{\Delta} \ln \frac{fx + g}{ax + b} \quad (\Delta \neq 0).$$

$$33. \int \frac{x dx}{(ax + b)(fx + g)} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{b}{a} \ln (ax + b) - \frac{g}{f} \ln (fx + g) \right] \quad (\Delta \neq 0).$$

$$34. \int \frac{dx}{(ax + b)^2 (fx + g)} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{ax + b} + \frac{f}{\Delta} \ln \frac{fx + g}{ax + b} \right) \quad (\Delta \neq 0).$$



17.07.17



$$35. \int \frac{x \, dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b}{(a-b)(b+x)} - \frac{a}{(a-b)^2} \ln \frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$$

$$36. \int \frac{x^2 \, dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b^2}{(b-a)(b+x)} + \frac{a^2}{(b-a)^2} \ln(a+x) + \frac{b^2 - 2ab}{(b-a)^2} \ln(b+x) \quad (a \neq b).$$

$$37. \int \frac{dx}{(a-x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} \right) + \frac{2}{(a-b)^3} \ln \frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$$

$$38. \int \frac{x \, dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{1}{(a-b)^2} \left(\frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+x} \right) + \frac{a+b}{(a-b)^3} \ln \frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$$

$$39. \int \frac{x^2 \, dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2} \left(\frac{a^2}{a+x} + \frac{b^2}{b+x} \right) + \frac{2ab}{(a-b)^3} \ln \frac{a+x}{b+x} \quad (a \neq b).$$

Integrale, die $ax^2 + bx + c$ enthalten

Bezeichnungen: $X = ax^2 + bx + c$; $\Delta = 4ac - b^2$

$$40. \int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} \quad (\text{für } \Delta > 0).$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{artanh} \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln \frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}} \quad (\text{für } \Delta < 0).$$

$$41. \int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta} \int \frac{dx}{X} \quad (\text{siehe Nr. 40}).$$

$$42. \int \frac{dx}{X^3} = \frac{2ax+b}{\Delta} \left(\frac{1}{2X^2} + \frac{3a}{\Delta X} \right) + \frac{6a^2}{\Delta^2} \int \frac{dx}{X} \quad (\text{siehe Nr. 40}).$$

$$43. \int \frac{dx}{X^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)\Delta X^{n-1}} + \frac{(2n-3)2a}{(n-1)\Delta} \int \frac{dx}{X^{n-1}}.$$

$$44. \int \frac{x \, dx}{X} = \frac{1}{2a} \ln X - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X} \quad (\text{siehe Nr. 40}).$$

$$45. \int \frac{x \, dx}{X^2} = -\frac{bx+2c}{\Delta X} - \frac{b}{\Delta} \int \frac{dx}{X} \quad (\text{siehe Nr. 40}).$$

$$46. \int \frac{x \, dx}{X^n} = -\frac{bx+2c}{(n-1)\Delta X^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{(n-1)\Delta} \int \frac{dx}{X^{n-1}}.$$

$$47. \int \frac{x^2 \, dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \ln X + \frac{b^2 - 2ac}{2a^2} \int \frac{dx}{X} \quad (\text{siehe Nr. 40}).$$

$$48. \int \frac{x^2 \, dx}{X^2} = \frac{(b^2 - 2ac)x + bc}{a\Delta X} + \frac{2c}{\Delta} \int \frac{dx}{X} \quad (\text{siehe Nr. 40}).$$

$$49. \int \frac{x^2 \, dx}{X^n} = \frac{-x}{(2n-3)aX^{n-1}} + \frac{c}{(2n-3)a} \int \frac{dx}{X^n} - \frac{(n-2)b}{(2n-3)a} \int \frac{x \, dx}{X^n} \quad (\text{siehe Nr. 43 u. 46}).$$

$$50. \int \frac{x^m \, dx}{X^n} = -\frac{xc^{-1}}{(2n-m-1)aX^{n-1}} + \frac{(m-1)c}{(2n-m-1)a} \int \frac{x^{m-2} \, dx}{X^n} - \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)a} \int \frac{x^{m-1} \, dx}{X^n}$$

$(m \neq 2n-1; \text{ für } m = 2n-1 \text{ siehe Nr. 51}).$

$$51. \int \frac{x^{2n-1} \, dx}{X^n} = \frac{1}{a} \int \frac{x^{2n-3} \, dx}{X^{n-1}} - \frac{c}{a} \int \frac{x^{2n-3} \, dx}{X^n} - \frac{b}{a} \int \frac{x^{2n-2} \, dx}{X^n}.$$

$$52. \int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2c} \ln \frac{x^2}{X} - \frac{b}{2m} \int \frac{dx}{X} \quad (\text{siehe Nr. 40}).$$



$$504. \int \frac{\arctan \frac{x}{a} dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \arctan \frac{x}{a} + \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)} \quad (n \neq 1).$$

$$505. \int \operatorname{arccot} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2+x^2).$$

$$506. \int x \operatorname{arccot} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2) \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2}.$$

$$507. \int x^2 \operatorname{arccot} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6} \ln(a^2+x^2).$$

$$508. \int x^n \operatorname{arccot} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{a^2+x^2} \quad (n \neq -1).$$

$$509. \int \frac{\operatorname{arccot} \frac{x}{a} dx}{x} = \frac{\pi}{2} \ln x - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3^2 a^3} - \frac{x^5}{5^2 a^5} + \frac{x^7}{7^2 a^7} - \dots$$

$$510. \int \frac{\operatorname{arccot} \frac{x}{a} dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2+x^2}{x^2}.$$

$$511. \int \frac{\operatorname{arccot} \frac{x}{a} dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \operatorname{arccot} \frac{x}{a} - \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)} \quad (n \neq 1).$$

Integrale der inversen Hyperbelfunktionen

$$512. \int \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arsinh} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2+a^2}.$$

$$513. \int \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arcosh} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2-a^2}.$$

$$514. \int \operatorname{artanh} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{artanh} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2-x^2).$$

$$515. \int \operatorname{arcoth} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arcoth} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(x^2-a^2).$$

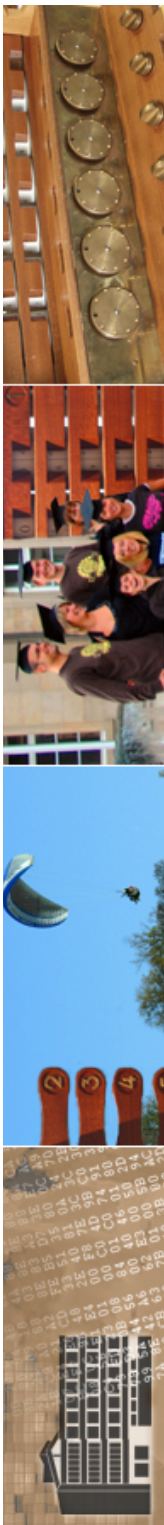
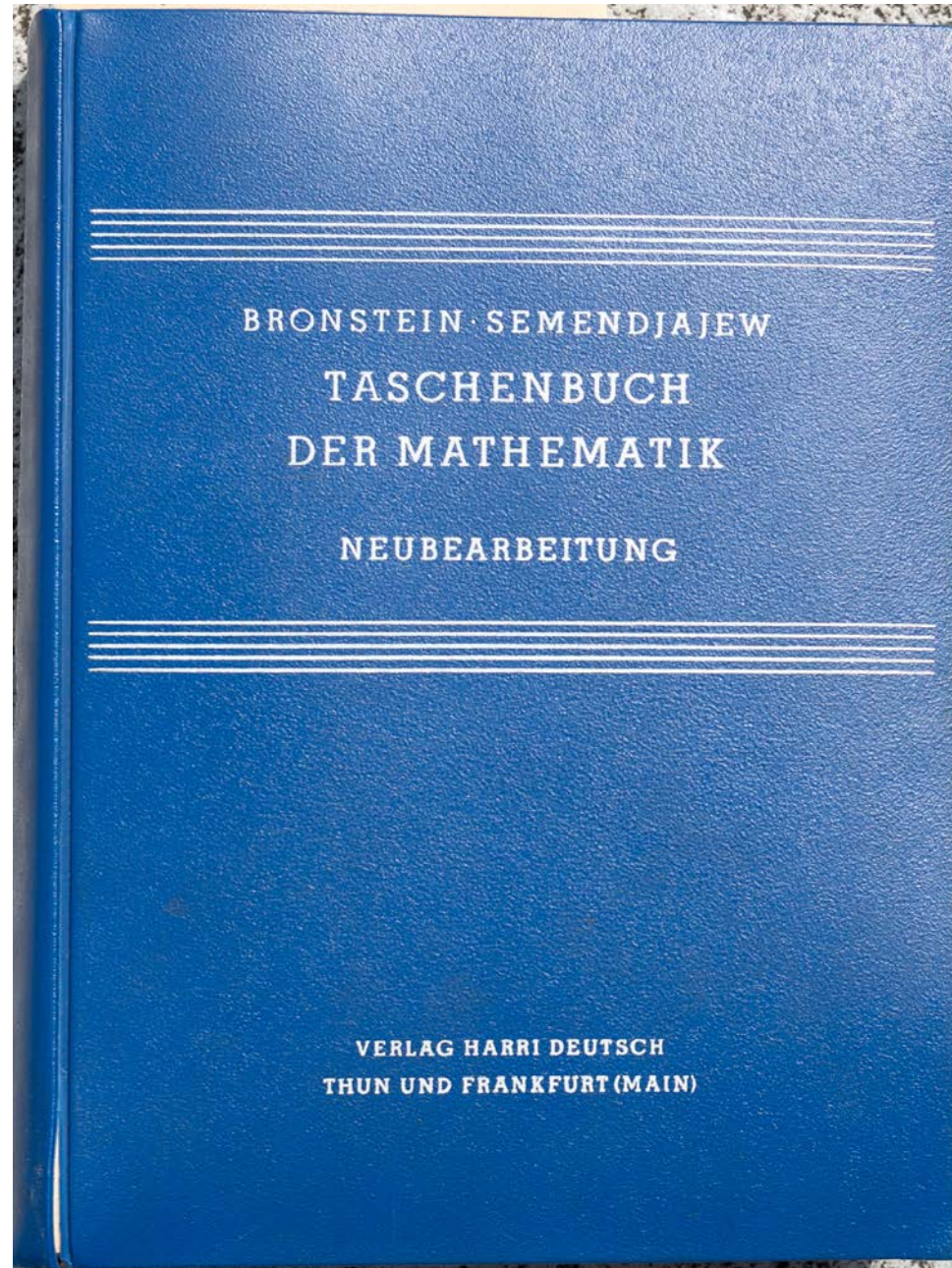
1.1.3.4. Tabelle einiger bestimmter Integrale

Integrale von Exponentialfunktionen

(kombiniert mit algebraischen, trigonometrischen und logarithmischen Funktionen)

$$1. \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n > -1.$$

Insbesondere ist dieses Integral für ein ganzzahliges $n > 0$ gleich $\frac{n!}{a^{n+1}}$.



17.07.17

Bronstein-Semendjajew



10



...und heute?



Bronstein-Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik

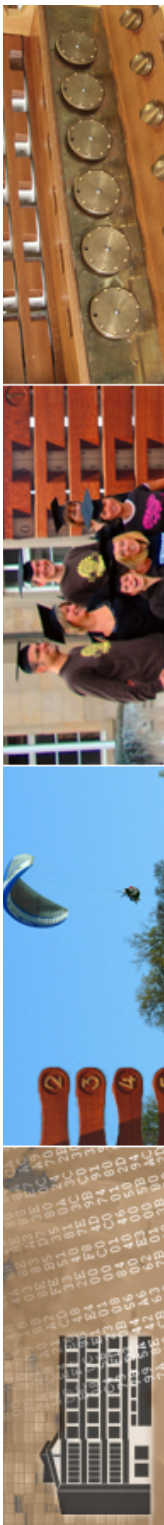
Beispiel Nr. 515 aus der Tabelle der 515 Stammfunktionen

Integrate $[\text{ArcCoth}[x/a], x]$

[integriere] [Areakotangens Hyperboli]

$$x \text{ArcCoth} \left[\frac{x}{a} \right] + \frac{1}{2} a \text{Log} [a^2 - x^2]$$





17.07.17

Bronstein-Semendjajew



12