PD. Dr. Klaus Reinhardt **Universität Tübingen, WS 09/10**

Übungen zur Mathematischen Logik I

Blatt 8

Aufgabe 32: Es soll in einer formalen Sprache $\mathcal{L}$ über Strukturen gesprochen werden, in denen zwei 2-stellige Funktionen $+$ und $\times$, eine 3-stellige Funktion min und zwei 2-stellige Relationen $\leq$ und $|$ (teilt) sowie 3 Konstanten ausgezeichnet sind.

Definieren Sie geeignete Indexmengen I, K und L und geben Sie eine geeignete Signatur an; geben sie dann alle nichtlogischen Zeichen der Sprache $\mathcal{L}$ (wie definiert) an.

Definieren Sie zudem zwei geeignete Strukturen zu dieser Sprache $\mathcal{L}$ über dem Grundraum $\mathbb{N}$ an. Dabei soll in der ersten Struktur die Interpretation der nichtlogischen Zeichen kanonisch sein, in der zweiten nicht.

Aufgabe 33: Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{G'}$ die erweiterte Sprache der Gruppentheorie (S.50, Skript). Geben Sie an, ob die folgenden Zeichenreihen Terme von $\mathcal{L}$ sind. Falls es sich um einen Term handelt, geben Sie jeweils die Menge der offenen Variablen an und prüfen Sie, ob der Term offen ist. Begründen Sie ihre Antwort.

(a)	x	(b)	$\forall x : x$
(c)	$x\dot{+}\dot{1}$	(d)	$\dot{0}\dot{-}\dot{0}$
(e)	$x\dot{\leq}x\dot{+}y$	(f)	$\dot{-}(0\dot{+}\dot{(}x\dot{+}\dot{-}\dot{y}))$

Aufgabe 34: Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{G'}$ wie oben. Geben Sie an, ob die folgenden Zeichenreihen Formeln von $\mathcal{L}$ sind. Falls es sich um eine Formel handelt, geben Sie die Menge der offenen und gebundenen Variablen an, und prüfen Sie, ob sie eine Aussage ist. Geben Sie zudem den Wirkungsbereich von Quantoren an, indem Sie die entsprechenden Teilformeln unterstreichen. Begründen Sie ihre Antwort.

(a)	$x \bumpeq 0 \vee x \not\bumpeq 0$	(b)	$x \wedge y \rightarrow 0$
(c)	$x = 0 \not\bumpeq x \neq 0$	(d)	$\forall x : x \neq 0 \wedge \exists y : x \neq y$
(e)	$\forall x(\forall x \exists x(x \neq x) \wedge \exists x \leq x)$	(f)	$\forall x \exists y \forall z(x = y \rightarrow x \leq (y + x))$

Aufgabe 35: Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{G'}$ wie oben und $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, +, -, \leq, 1 \rangle$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Dabei ist die Funktion $x - y$ für $x \geq y$ wie üblich definiert, ansonsten ist $x - y = 0$. Die anderen ausgezeichneten Objekte sind wie üblich. Sei zudem $v : \mathrm{VAR} \rightarrow \mathbb{N} : x_k \mapsto k^2$ eine Belegung der Variablen.

Werten Sie die folgenden Terme und Formeln schrittweise in $\mathfrak{A}$ unter der Belegung v aus:

(a)	$((0 + 0) + x_2) + x_3$	(b)	$-(x_3 + 0) + (-x_2)$
(c)	$(x_3 \leq x_4 \rightarrow x_2 \leq x_3) \rightarrow \neg(0 \leq x_1)$	(d)	$0 \leq x_0$
(e)	$\forall x(0 \leq x)$	(f)	$\exists x(0 \leq x)$

Abgabe der Aufgaben am Do. 17.12.2009 nach der Vorlesung