Übungen zur Mathematischen Logik I — Blatt 5

Prof. Schroeder-Heister — **Wintersemester 2017/18**
René Gazzari — **Universität Tübingen**

DEF (Theorie): Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ Formelmenge. $\mathrm{Th}(\Gamma) = \{\phi \in \mathrm{PROP};\ \Gamma \vdash \phi\}$ ist die von Γ induzierte Theorie.

Aufgabe 17: Zeigen Sie, dass Th die folgenden Eigenschaften hat:

1. *extreme Werte:* $\mathrm{Th}(\bot) = \mathrm{PROP}$
2. *reflexiv und abgeschlossen:* $\Gamma \subseteq \mathrm{Th}(\Gamma) = \mathrm{Th}(\mathrm{Th}(\Gamma))$
3. *monoton:* $\Delta \subseteq \Gamma \;\Rightarrow\; \mathrm{Th}(\Delta) \subseteq \mathrm{Th}(\Gamma)$
4. *kompakt:* Falls $\bot \in \mathrm{Th}(\Gamma)$, dann gibt es endliche Menge $\Delta \subseteq \Gamma$ mit $\bot \in \mathrm{Th}(\Delta)$.

Aufgabe 18: Beweisen Sie die folgenden Aussagen im Kalkül des natürlichen Schließens:

1. $\phi \wedge (\psi \vee \sigma) \vdash (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \sigma)$ und $(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \sigma) \vdash \phi \wedge (\psi \vee \sigma)$
2. $\vdash \phi \vee \neg\phi$
3. $\vdash ((\phi \to \psi) \to \phi) \to \phi$

Aufgabe 19: Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{PROP}$ beliebig. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen.

1. Γ ist konsistent; es gilt also $\Gamma \nvdash \bot$.
2. Es gibt keine Formel $\phi \in \mathrm{PROP}$ mit $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$.

Aufgabe 20: Geben sei der λ-Term $\lambda xy.z(xy)$. Geben Sie einen Typ für diesen Term an, und weisen Sie nach, dass der λ-Term diesen Typ hat. Geben Sie zudem eine Ableitung im Kalkül des natürlichen Schließens für die diesem Typ entsprechende Formel an.

Abgabe der Aufgaben montags bis 17:30 Uhr (Internet) bzw. in der Vorlesung.