Übungen zur Mathematischen Logik I Blatt 12

Prof. Schroeder-Heister
René Gazzari

Wintersemester 2017/18
Universität Tübingen

Aufgabe 45: Zeigen Sie, dass die Nebenbedingungen der Schlussregeln für den All-Quantor notwendig sind. Geben Sie also für jede Nebenbedingung eine möglichst einfache "Ableitung" an, in der diese nicht eingehalten wird. Geben Sie anschließend eine kurze semantisch Begründung, warum diese "Ableitung" nicht korrekt ist.

Aufgabe 46: Sei $\mathcal{L}$ eine formale Sprache und $M \neq \varnothing$ eine nicht-leere Menge von $\mathcal{L}$-Strukturen. Zudem bezeichne $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \{\phi \in \mathcal{L};\ \phi \text{ ist Aussage mit } \mathfrak{A} \models \phi\}$ die in einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ gültigen Aussagen. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\Gamma \;=\; \bigcap_{\mathfrak{A} \in M} \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$$

eine Theorie ist. Zeigen Sie zudem, dass die Menge

$$\Delta \;=\; \bigcup_{\mathfrak{A} \in M} \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$$

im Allgemeinen keine Theorie ist.

Zusatzaufgabe: Prüfen Sie, ob sich etwas an obiger Situation ändert, wenn je zwei Strukturen in M vergleichbar sind? Wenn also für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in M$ gilt:

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \;\subseteq\; \mathrm{Th}(\mathfrak{B}) \quad \text{oder} \quad \mathrm{Th}(\mathfrak{B}) \;\subseteq\; \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$$

Aufgabe 47: Sei $\mathcal{L}$ die formale Sprache mit genau zwei nichtlogischen Zeichen, nämlich mit den beiden Konstanten $\dot{c}$ und $\dot{d}$. Geben Sie eine Formel $\psi \in \mathcal{L}$ an, die in einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ genau dann gültig ist, wenn das Universum aus zwei Elementen besteht. Sei zudem $\Gamma = \{\psi, \dot{c} \neq \dot{d}\}$.

Prüfen Sie, ob die Formelmenge $T = \{\phi \in \mathcal{L};\ \phi \text{ ist eine Aussage mit } \Gamma \models \phi\}$ eine Henkin-Theorie ist.

Aufgabe 48: Verwenden Sie den Kompaktheitssatz (Korollar 12.17 zum Vollständigkeitssatz) und zeigen Sie, dass es Modelle der Arithmetik gibt (also $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-Strukturen $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ mit $\mathfrak{A} \models \mathrm{PA}$), in denen es "unendlich ferne" Punkte gibt. Letzteres bedeutet, dass es ein Element $a \in A$ gibt, das nicht durch beliebig häufige Anwendungen der Nachfolger-Funktion $N^{\mathfrak{A}}$ von $0^{\mathfrak{A}} \in A$ aus erreicht werden kann.

Erweitern Sie dazu zunächst die Sprache $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ um eine Konstante $\dot{a}$. Geben Sie eine geeignete Formelmenge Γ an, die die intendierte Eigenschaft von a axiomatisiert. Zeigen Sie, dass $\mathrm{PA} + \Gamma$ endlich erfüllbar ist. Sie dürfen dabei verwenden, dass das kanonische Modell $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0, N, +, \cdot \rangle$ von PA tatsächlich ein Modell von PA ist.

Abgabe der Aufgaben montags bis 17:30 Uhr (Internet) bzw. in der Vorlesung.