Übungen zur Vorlesung Mathematischen Logik II **Blatt 5**

Prof. Dr. P. Schroeder-Heister **SS 2011**

Die Aufgaben 16-19 sind aus *Logic and Structure* von Dirk van Dalen. Alle Aufgaben beziehen sich auf den Kalkül des natürlichen Schließens für die Intuitionistische Logik.

Aufgabe 16

Eliminieren Sie das Schnitt-Segment $\sigma \vee \tau$ aus

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}D_1\\ \exists y\phi_1(y)\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}D_2\\ \exists x\phi_2(x)\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}D_3\\ \sigma\end{matrix}}{\sigma\vee\tau}}{\sigma\vee\tau}}{\sigma\vee\tau} \qquad \begin{matrix}[\sigma]\\ D_4\\ \rho\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\tau]\\ D_5\\ \rho\end{matrix}}{\rho}$$

Aufgabe 17

Zeigen Sie, dass es keine Formel ϕ gibt, in der $\vee$ nicht vorkommt und deren atomare Teilformeln p und q sind, so dass $\vdash \psi \leftrightarrow (p \vee q)$ gilt. (Das heißt also, dass $\vee$ nicht durch die anderen Konnektive definierbar ist.)

Aufgabe 18

Zeigen Sie: Wenn ϕ das Konnektiv $\to$ nicht enthält, dann $\nvdash \phi$.
Folgern Sie daraus, dass $\to$ nicht durch die anderen Konnektive definierbar ist.

Aufgabe 19

Zeigen Sie, dass eine Formel $\phi \bumpeq (Q_1x_1)\,....\,(Q_nx_n)\,\varphi$ in pränexer Normalform dann und nur dann beweisbar ist, wenn es eine quantorenfreie Formel ψ gibt, die man aus φ erhält und die beweisbar ist.
Was folgt daraus für die Umformbarkeit von Formeln in pränexe Normalform in der intuitionistischen Logik? Beachten Sie, dass die Intuitionistische Prädikatenlogik unentscheidbar ist.

Aufgabe 20

Gegeben sei die intuitionistische Junktorenlogik basierend auf den Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\to$ und $\neg$ (d.h. wir haben $\neg$ statt $\bot$ als Grundzeichen). Die Regeln für $\neg$ lauten wie folgt:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\phi]\\ \psi\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\phi]\\ \neg\psi\end{matrix}}{\neg\phi}\ (\neg\mathrm{I})$$

$$\dfrac{\phi \quad \neg\phi}{\psi}\ (\neg\mathrm{E})$$

Definieren Sie geeignete Begriffe wie maximales Segment für diesen Kalkül und beweisen Sie den Normalisierungssatz. "Geeignet" heißt, dass aus dem Normalisierungssatz das Teilformelprinzip folgt.
Hinweis: Beachten Sie, dass die Regel $(\neg\mathrm{I})$ zu Segmenten besonderer Art Anlaß gibt.