

# Kapitel 2

## Dynamik eines Massenpunktes

### 2.1 Vektoren und Koordinatensysteme

Wir wollen uns zunächst mit der Bewegung von einzelnen Partikeln befassen. Diese Bewegung wird mathematisch dadurch beschrieben, dass man zu jedem Zeitpunkt  $t$  die Position des Partikels, also den entsprechenden Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  angibt. Zur eindeutigen Definition dieses Ortsvektors benötigen wir ein Bezugs- oder Koordinatensystem. Dies bedeutet insbesondere, dass man einen **Koordinatenursprung** definiert, so dass die jeweilige Position des betrachteten Partikels durch den Ortsvektor bezogen auf diesen Koordinatenursprung eindeutig definiert ist. Dieser Positionsvektor ist der Relativvektor, der von dem Koordinatenursprung zum Aufenthaltsort des Partikels zeigt.

Zur Beschreibung dieses Ortsvektors benötigen wir eine Basis für den dreidimensionalen Vektorraum der Ortsvektoren. Für viele Anwendungen ist es geschickt, drei orthonormale Basisvektoren  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$  und  $\hat{e}_z$  zu nehmen. Orthonormale Basisvektoren bedeutet ja, dass diese jeweils senkrecht aufeinander stehen und auf die Länge 1 normiert sind. Für das Skalarprodukt von jeweils zwei dieser Basisvektoren gilt also

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

In dieser Gleichung haben wir auch das Symbol  $\delta_{ij}$ , das Kroneckersche Deltasymbol eingeführt und definiert. Ausserdem soll das System der Basisvektoren **rechtshändig** sein. Dies bedeutet, dass die Basisvektoren für die  $x$ ,  $y$  und  $z$  Richtung geometrisch in die Richtung der gespreizten Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger einer rechten Hand zeigen.

Den Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  unseres Partikels können wir nun eindeutig durch die Koordinaten in Richtung der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse definieren. Anschaulich bedeutet das, dass wir, um vom Koordinatenursprung zum Ort des Partikels zu gelangen, zunächst eine Entfernung  $x$  (das entspricht gerade der  $x$ -Koordinate) in Richtung der Achse  $\hat{e}_x$  dann eine Strecke  $y$  in Richtung  $\hat{e}_y$  und schliesslich  $z$  in Richtung  $\hat{e}_z$  zurücklegen (siehe Figur 2.1). Mathematisch formuliert:

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z,$$

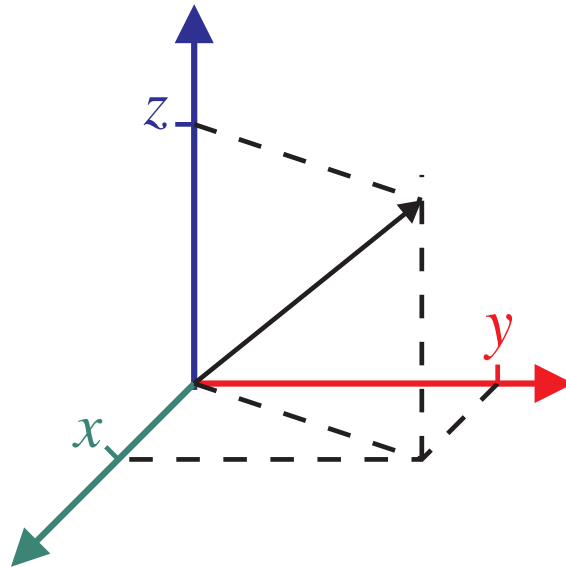


Abbildung 2.1: Darstellung eines Ortsvektors in Kartesischen Koordinaten (siehe Diskussion im Text)

beziehungsweise, wenn wir die Basisvektoren durch entsprechende Spaltenvektoren darstellen

$$\hat{e}_x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

kann man (2.1) auch umschreiben:

$$\vec{r} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Es sollen an dieser Stelle nicht alle Regeln des Rechnen mit Vektoren aufgeführt werden, es sei aber daran erinnert, dass das Produkt eines Vektors  $\vec{r}$  mit einer positiven Zahl (einem Skalar) zum Vektor führt, der in die gleiche Richtung weist, dessen Länge aber um den Faktor  $a$  vergrößert ( $a > 1$ ) oder auch verkleinert ( $a < 1$ ) ist. Ist  $a$  negativ, so steht der Ergebnisvektor  $a\vec{r}$  antiparallel (also parallel aber in umgekehrter Richtung) zum Ausgangsvektor  $\vec{r}$ . Rechnerisch ergibt sich dieses Skalarprodukt in der Schreibweise der Spaltenvektoren zu

$$a\vec{r} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}.$$

Die Addition zweier Vektoren  $\vec{r}_1$  (mit Koordinaten  $x_1, y_1$  und  $z_1$ ) und  $\vec{r}_2$  (mit Koordinaten  $x_2, y_2$  und  $z_2$ ) erfolgt rechnerisch durch

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

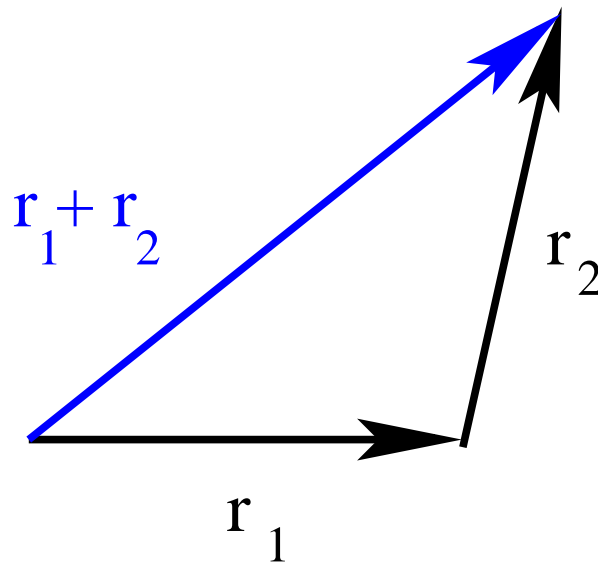


Abbildung 2.2: Die Summe zweier Vektoren (siehe Diskussion im Text)

Geometrisch ist diese Vektoraddition in Figur 2.2 dargestellt.

Ausserdem ist noch ein Skalarprodukt zweier Vektoren definiert. Am Beispiel der Vektoren  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  liefert dieses Skalarprodukt den Wert

$$\vec{r}_1 \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 .$$

Das Ergebnis ist also ein Skalar, eine Zahl. Geometrisch ergibt sich der Wert dieses Skalarproduktes auch aus dem Produkt der Längen der beiden Vektoren  $|\vec{r}_i|$  und dem Kosinus des Winkels  $\varphi$ , der von den Vektoren eingeschlossen wird (siehe Figur 2.3):

$$\vec{r}_1 \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| |\vec{r}_2| \cos(\varphi)$$

Damit ergibt sich für die Länge oder auch den Betrag eines Vektors  $\vec{r}_1$

$$|\vec{r}_1| = \sqrt{r_1^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} .$$

Schliesslich ist auch ein Vektorprodukt zweier Vektoren definiert, bei dem das Ergebnis eben ein Vektor ist. Die Länge des Vektors  $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$  ergibt sich zu

$$|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = |\vec{r}_1| |\vec{r}_2| \sin(\varphi) ,$$

also geometrisch die Fläche des Parallelogramms, das durch  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  aufgespannt ist. Der Vektor  $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$  steht senkrecht zur Fläche, die durch  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  aufgespannt ist entsprechend der rechten Hand Regel. In der Sprache der Spaltenvektoren ergibt sich für das Vektor- oder Kreuzprodukt:

$$|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix} .$$

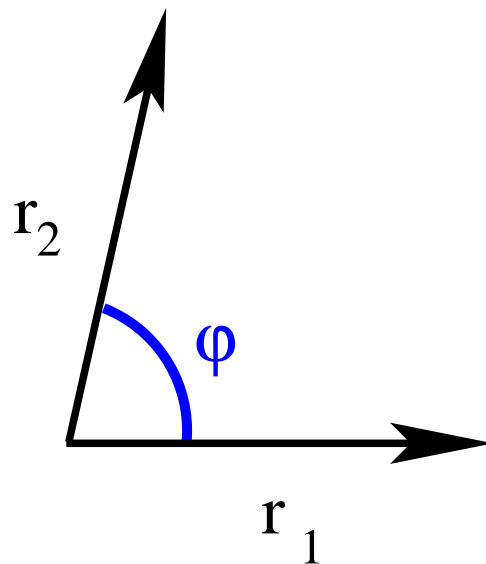


Abbildung 2.3: Das Skalarprodukt zweier Vektoren (siehe Diskussion im Text)

Dies besagt aber auch, dass für das Vektorprodukt der Basisvektoren gilt

$$\hat{e}_x \times \hat{e}_y = \hat{e}_z$$

gilt. Man bezeichnet ein solches rechtshändiges orthonormales Basissystem auch als ein **Kartesisches Koordinatensystem**.

Mit diesem Basissystem kann man jeden Ortsvektor eines Partikels eindeutig durch die Angabe der Entwicklungskoeffizienten für diese Basisvektoren, den Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$ , (vergleiche Gleichung 2.1) identifizieren. Die Bewegung eines solchen Partikels wird dann durch die Angabe der Koordinaten als Funktion der Zeit,  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$  beschrieben.

Die Geschwindigkeit berechnet sich als Quotient aus der Ortsvektors in einem Zeitabschnitt  $\Delta t$  und eben dieser Zeitdifferenz

$$\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Die Geschwindigkeit ist also ebenfalls ein Vektor, der in die Richtung der Bewegung des Partikels zeigt. Der Betrag dieses Vektors entspricht der üblichen Geschwindigkeitsmessung. Diese Definition einer Geschwindigkeit (nach 2.1) macht Sinn, wenn die Richtung der Bewegung und der Betrag der Geschwindigkeit sich über einen längeren Zeitraum (der größer als  $\Delta t$  sein sollte) nicht ändert. Da wir aber auch Vorgänge behandeln wollen, bei denen sich Geschwindigkeiten schnell ändern können, definiert man die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Die Geschwindigkeit berechnet sich also als Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit. Zur Berechnung einer solchen Ableitung eines Vektors merken wir an, dass die Basisvektoren

$\hat{e}_i$  in dem kartesischen Koordinatensystem unabhängig von der Zeit sind. Dami gilt (siehe Gl.2.1)

$$\begin{aligned}\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dx}{dt}\hat{e}_x + \frac{dy}{dt}\hat{e}_y + \frac{dz}{dt}\hat{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{2.1}$$

wobei wir für die Zeitableitung die übliche Abkürzung

$$\dot{x} := \frac{dx}{dt}$$

eingeführt haben. An diesem Beispiel haben wir gesehen, wie man die Ableitung eines Vektors (hier den Ortsvektor) nach einem Skalar (hier die Zeit) berechnen kann. Insbesondere ergab sich, dass das Ergebnis dieser Ableitung wiederum einen Vektor (hier die Geschwindigkeit) ergibt.

In der Regel wird aber auch die Geschwindigkeit eines Teilchens  $\vec{v}$  von der Zeit abhängen. Dann ist von Interesse, wie sich die Geschwindigkeit pro Zeiteinheit ändert. Ein Maß dafür ist die Beschleunigung, die wir definieren durch

$$\vec{a} := \frac{d\vec{v}}{dt},$$

was bedeutet, dass auch die Beschleunigung  $\vec{a}$  als Vektor definiert ist.

Nachdem wir gelernt haben einen Vektor abzuleiten, wollen in einem nächsten Schritt die Integration eines Vektors diskutieren. Wir betrachten dazu das einfache Wegintegral

$$\begin{aligned}\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} d\vec{r} &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} (\hat{e}_x dx + \hat{e}_y dy + \hat{e}_z dz) \\ &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \\ &= \int_{x_A}^{x_E} \hat{e}_x dx + \int_{y_A}^{y_E} \hat{e}_y dy + \int_{z_A}^{z_E} \hat{e}_z dz \\ &= \hat{e}_x(x_E - x_A) + \hat{e}_y(y_E - y_A) + \hat{e}_z(z_E - z_A) \\ &= \vec{r}_E - \vec{r}_A.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Dieses Wegintegral über die Funktion  $f = 1$  beginnt am Startvektor (untere Integrationsgrenze)  $\vec{r}_A$  und endet am Ort  $\vec{r}_E$ . Wie die einfache Rechnung zeigt, ist das Ergebnis wiederum ein Vektor: der Differenzvektor  $\vec{r}_E - \vec{r}_A$ . Nun wird ein solches Wegintegral mit einem komplizierteren Integranden aber im Allgemeinen davon abhängen, wie wir den Weg von A nach B zurücklegen. Wir müssen dazu diesen Weg **parametrisieren**, indem wir den aktuellen Ortsvektor als Funktion einer skalaren Variablen  $s$  oder  $t$  darstellen. Anschaulich können wir uns unter dieser skalaren Größe die Zeit  $t$  vorstellen, so dass die Parametrisierung des Weges  $\vec{r}(t)$  angibt, wie sich das Teilchen vom Startpunkt  $\vec{r}_A$  zur

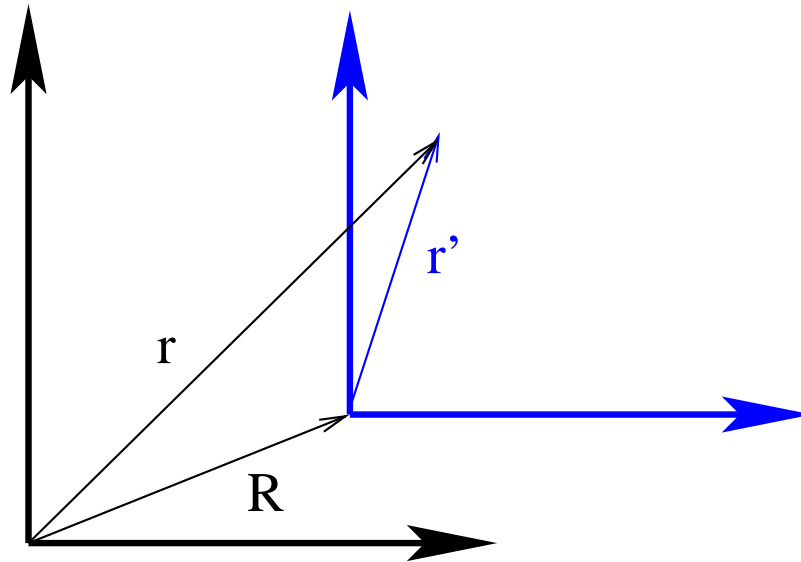


Abbildung 2.4: Transformation zwischen Koordinatensystemen (siehe Diskussion im Text)

Zeit  $t_A$  zum Endpunkt  $\vec{r}_E$ , den es zur Zeit  $t_E$  erreicht bewegt. Damit können wir das Wegintegral von (2.2) schreiben

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_E} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_E} \vec{v}(t) dt.$$

Als ein Beispiel wollen wir nun einen Weg betrachten, bei dem das Teilchen mit einer Geschwindigkeit  $v_0$  am Punkt  $\vec{r}_A$  startet und dann seine Geschwindigkeit mit einer konstanten Beschleunigung  $\vec{a}$  verändert, bis es schliesslich zur Zeit  $t_E$  bei  $\vec{r}_E$  ankommt. Setzen wir also

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_A)$$

in (2.1) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} d\vec{r} &= \vec{v}_0 \int_{t_A}^{t_E} dt + \vec{a} \int_{t_A}^{t_E} (t - t_A) dt \\ &= \vec{v}_0(t_E - t_A) + \frac{1}{2} \vec{a}(t_E - t_A)^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Berücksichtigen wir nun noch (2.2) so ergibt sich für den Vektor des Endpunktes

$$\vec{r}_E = \vec{r}_A + \vec{v}_0(t_E - t_A) + \frac{1}{2} \vec{a}(t_E - t_A)^2.$$

Wir sind bis zu diesem Punkt immer davon ausgegangen, dass wir nur einen Koordinatenursprung haben. Häufig ist es jedoch geschickt einen weiteren Koordinatenursprung einzuführen, der im ersten Koordinatensystem durch den Ortsvektor  $\vec{R}$  gekennzeichnet ist. Die Position unseres Punktteilchens werde im ersten Koordinatensystem durch den Ortsvektor  $\vec{r}$  im zweiten durch  $\vec{r}'$  so gilt die Beziehung (siehe Abb. 2.4)

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

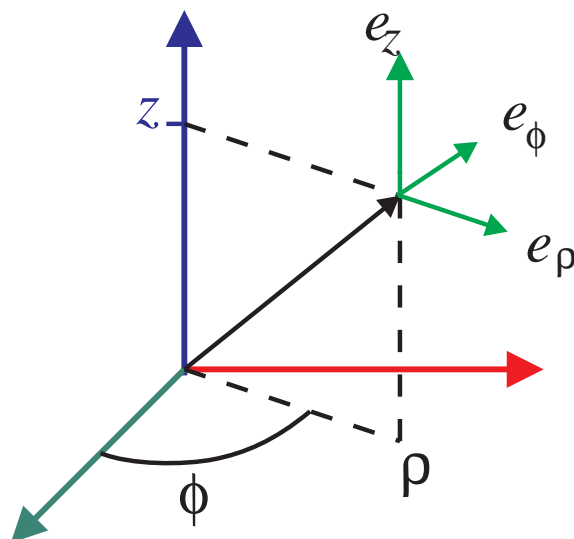


Abbildung 2.5: Darstellung eines Ortsvektors in Zylinderkoordinaten (siehe Diskussion im Text)

Bewegt sich der Koordinatenursprung des zweiten Koordinatensystems relativ zum ersten, ist also  $\vec{R}$  zeitabhängig, so sind die Geschwindigkeiten in den beiden Koordinatensystemen unterschiedlich

$$\vec{v} = \frac{d(\vec{R} + \vec{r}')}{dt} = \vec{V}_0 + \vec{v}'$$

Dies gilt für die Berechnung aber auch für die Messungen von Geschwindigkeiten. Bewegen wir uns z.B. in einem Zug, der mit der Geschwindigkeit  $\vec{V}_0$  durch die Gegend fährt, so wird eine Messung der Geschwindigkeit durch einen Beobachter, der auch im Zug sitzt, ein Ergebnis  $\vec{v}'$  liefern, das anders ist als das Ergebnis  $\vec{v}$  des Beobachters, der ausserhalb des Zuges steht. Die Geschwindigkeiten auch dieser Messungen sind über (2.1) miteinander verknüpft. Bewegt sich der zweite Koordinatenursprung mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{V}_0$  so bezeichnet man die Koordinatentransformation als **Galileitransformation**.

### 2.1.1 Zylinderkoordinaten

In vielen Fällen ist es jedoch geschickter die Ortsvektoren nicht durch die kartesischen Koordinaten sondern durch andere Koordinaten zu beschreiben. Bewegt sich etwa ein Punktteilchen auf der Oberfläche eines Kreises oder eines Zylinders mit dem Radius  $R$ , so empfiehlt es sich ein Koordinatensystem einzuführen, bei dem die  $z$ -Achse parallel zur Symmetrieachse des Zylinders ist. Entsprechend der Darstellung in Abb. 2.5 kann man den Ortsvektor  $\vec{r}$  eindeutig festlegen durch die Angabe der  $z$ -Koordinate sowie des Abstandes des Aufenthaltsortes von der  $z$ -Achse  $\rho$  und des Winkels  $\phi$ , den die Projektion des Ortsvektors auf die  $xy$ -Ebene mit der  $x$ -Achse bildet. Die Koordinaten  $\rho$ ,  $\phi$  und  $z$  lassen

sich aus den kartesischen Koordinaten berechnen

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty] \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x} \in [0, 2\pi] \\ z &= z \in [-\infty, \infty]\end{aligned}\tag{2.4}$$

es existiert aber auch die Umkehrtransformation

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi\end{aligned}\tag{2.5}$$

Für das Beispiel des Punktteilchens, das sich auf dem Mantel eines Zylinders bewegt, vereinfacht sich nun die Beschreibung der Bewegung dadurch, dass die Radialkoordinaten  $\rho(t) = R$  und damit eine Konstante der Bewegung ist.

Die Zylinderkoordinaten sind ein Beispiel für **Krummlinige Koordinaten**. Diese Bezeichnung basiert auf den Eigenschaften der zugehörigen Koordinatenlinien. Beschreibt man einen Vektor durch Koordinaten  $q_i$  ( $i=1,2,3$ ), so sind z.B. die Koordinatenlinien für die Koordinate  $q_3$  definiert

$$\mathcal{L}_{q_3}(q_1, q_2) := \{\text{Linie aus den Punkten mit } q_1 \text{ und } q_2 \text{ fest}\}$$

Bei den Kartesischen Koordinaten,  $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$  sind z.B. die Koordinatenlinien  $\mathcal{L}_z$  Geraden parallel zur  $z$ -Achse. Auch die Koordinatenlinien  $\mathcal{L}_x$  und  $\mathcal{L}_y$  sind jeweils Geraden. Andererseits ist aber im Fall der Zylinderkoordinaten  $\mathcal{L}_\phi$  ein Kreis. Koordinatensysteme, bei denen nicht alle Koordinatenlinien geradlinig sind, bezeichnet man als Krummlinige Koordinaten.

Natürlich kann man nach wie vor die kartesischen Basisvektoren  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$  und  $\hat{e}_z$ , beziehungsweise die entsprechenden Spaltenvektoren benutzen um auch unter Benutzung von Zylinderkoordinaten die Vektoren darzustellen. Wegen (2.4) gilt ja

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix}.$$

Häufig ist es aber effizienter, mit den gewählten Koordinaten  $q_i$  auch die zugehörigen Basisvektoren  $\hat{e}_{q_i}$  zu benutzen. Für einen Punkt  $P$  im Ortsraum, bezeichnet  $\hat{e}_{q_i}$  den Einheitsvektor, der tangential zur Koordinatenlinie  $\mathcal{L}_{q_i}$  am Punkt  $P$  verläuft und dabei in Richtung der anwachsenden Koordinate  $q_i$  weist. Aus dieser geometrischen Definition, ergibt sich die folgende Regel zur Berechnung<sup>1</sup>

$$\hat{e}_{q_i} = a \frac{\partial \vec{r}(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_i}$$

---

<sup>1</sup>Wir führen an dieser Stelle die Bezeichnung  $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$  für die partielle Ableitung der Funktion  $f$  nach der Variablen  $x$  ein. Dies bedeutet, dass bei der Ableitung der Funktion  $f$ , die von verschiedenen Variablen  $x, y, z$  abhängen soll, nur die Ableitung nach der Variablen  $x$ , so wie sie explizit vorkommt, berechnet wird. Die Variablen  $y$  und  $z$  werden bei dieser Ableitung konstant gehalten.



wobei die Normierungskonstante so zu bestimmen ist, dass  $|\hat{e}_{q_i}| = 1$  ist. Man kann leicht verifizieren, dass für das Beispiel der Zylinderkoordinaten gilt

$$\begin{aligned}\hat{e}_\rho &= \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{e}_\phi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.6)$$

Diese 3 Vektoren bilden ebenfalls ein orthogonales Basissystem, ändern sich aber mit dem jeweiligen Punkt  $P$  beziehungsweise dem zugehörigen Ortsvektor. Andererseits vereinfacht sich aber die Schreibweise des Ortsvektors in dieser Basis zu

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z.$$

Bei der Berechnung der Geschwindigkeit muss in dieser Darstellung beachtet werden, dass die Basisvektoren  $\hat{e}_\rho$  und  $\hat{e}_\phi$  sich mit dem Ortsvektor ändern. Bei der Bewegung eines Punktteilchens gilt also für die zeitliche Änderung des jeweiligen Basisvektors  $\hat{e}_\rho$

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\phi} \hat{e}_\phi$$

Damit ergibt sich für die Geschwindigkeit als Ableitung von  $\vec{r}$  aus (2.1.1) nach der Zeit

$$\vec{v} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z.$$

Die Geschwindigkeitskomponente in Richtung  $\hat{e}_\rho$  bezeichnet man häufig als Radialgeschwindigkeit und die in Richtung  $\hat{e}_\phi$  als Azimuthalgeschwindigkeit. Ganz entsprechend berechnet sich die Beschleunigung als Zeitableitung dieses Geschwindigkeitsvektors zu

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{[\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2]}_{\text{Radial-}} \hat{e}_\rho + \underbrace{[2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}]}_{\text{Azimuthalbeschl.}} \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z.$$

Ein weiteres häufig benutztes Beispiel für krummlinige Koordinaten sind die Kugelkoordinaten oder Polarkoordinaten  $r$ ,  $\theta$  und  $\phi$ . Dabei bezeichnet  $r$  die Länge des Vektors,  $\theta$  den Winkel mit der  $z$ -Achse und  $\phi$ , analog zu den Zylinderkoordinaten, den Azimuthwinkel. Es gilt also die Transformation

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta\end{aligned}\quad (2.7)$$

mit den Definitionsbereichen

$$r \in [0, \infty] \quad \theta \in [0, \pi] \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

Mit dem Einheitsvektor

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

gilt

$$\vec{r} = r \hat{e}_r.$$



## 2.2 1. und 2. Newton'sches Axiom; schwere und träge Masse

Im letzten Abschnitt haben Sie einige Begriffe wie Vektoren, Koordinatensysteme, Ort, Geschwindigkeit oder Beschleunigung kennengelernt, die ganz allgemein bei der Beschreibung der Bewegung von Massenpunkten wichtig sind.

Wir wollen uns jetzt der Bewegung einzelner Massenpunkte zuwenden, wie sie tatsächlich in der Natur realisiert sind.

Der einfachste "Bewegungs"-Zustand eines Massenpunktes (z. B. eines Balls) ist der ruhende Zustand, in dem der Ball auf einer Unterlage (z. B. Boden des Hörsaals) ruht. Wir können diesen Zustand dadurch beschreiben, dass wir dem Ball eine feste Koordinate eines (z. B. kartesischen) Koordinatensystems zuordnen, das seinerseits fest mit dem Boden des Hörsaals verbunden ist .

Als nächstes können wir den Ball über den Boden rollen lassen. Wir stellen fest, dass sich der Ball geradlinig fortbewegt und nach einer gewissen Strecke zur Ruhe kommt.

Wie können wir diese Bewegung interpretieren?

**Vermutung 1** wäre, dass eine Kraft notwendig ist, um den Ball geradlinig fortzubewegen. Diese Vorstellung geht auf Aristoteles zurück und blieb bis ins Mittelalter aktuell. Die entsprechende Kraft wurde "vis viva" genannt. Im Rahmen der Vermutung 1 ist ein ganz spezielles Bezugssystem ausgezeichnet, nämlich das, in dem der Ball ruht. In einem mittelalterlichen Weltbild, in dem die ruhende Erde den Mittelpunkt des Weltalls bildet und sich alles um die Erde dreht, war dies sehr vernünftig. Im Gegensatz dazu steht

**Vermutung 2:**

"Alle Körper verharren im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn keine äußeren Einflüsse vorhanden sind"

Diese Vermutung ist das **1. Newtonsche Axiom**, auch "**Trägheitsgesetz**" genannt.

Wenn das Trägheitsgesetz gültig ist, müssen wir erklären, warum der Ball nach einiger Zeit zur Ruhe kommt. Der Grund besteht darin, dass eine **Reibungskraft** zwischen dem Boden und dem Ball wirkt, die den Ball allmählich abbremsst.

Wir können die Reibungskraft im Versuch dadurch minimieren, dass wir anstelle des Balls eine Dose auf einem Luftkissen über eine glatte Unterlage gleiten lassen. Die Dose bewegt sich sehr lange weiter, wobei sie jeweils am der Begrenzung des Tisches reflektiert wird. Um das Luftkissen zu erzeugen, befindet sich im Innern der Dose ein Behälter mit flüssigem Stickstoff. Dieser siedet bei einer Temperatur von 77 Kelvin (-196 °C) und entwickelt dabei ständig gasförmigen Stickstoff, der durch ein Loch im Boden der Dose entweicht und so das Luftkissen aufbaut.

Das Trägheitsgesetz ist das erste von drei "Newtonschen Axiomen", auf denen die klassische Mechanik aufgebaut ist.

Wir können den Begriff der **Kraft** nun dadurch einführen, dass wir sagen, dass die Kraft die **Ursache für die Änderung des Bewegungszustands eines Körpers** ist.

Nach Newton können wir dies wie folgt definieren (**Zweites Newtonsches Axiom** oder "**Aktionsprinzip**"):

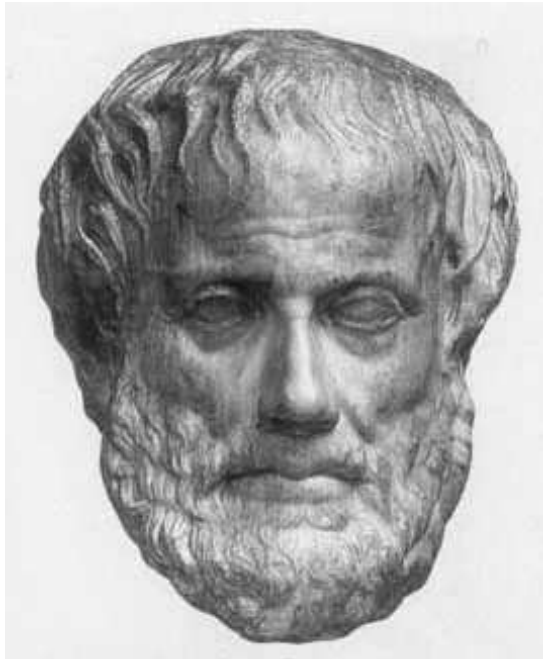


Abbildung 2.6: Aristoteles, 384-322 v. Chr. (links), Sir Isaac Newton, 1643-1727 (rechts) (aus: <http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/BiogIndex.html>; hier findet man auch die Biographien sehr vieler Physiker und Mathematiker)

”Wenn eine Kraft  $\vec{F}$  auf einen Körper wirkt, dann beschleunigt sie ihn mit:

$$\vec{F} = m_t \vec{a} \quad (2.8)$$

Hierbei ist  $m_t$  die ”träge Masse”, die durch das Aktionsprinzip definiert wird. Die Größe  $\vec{a}$  ist der Beschleunigungsvektor. Die träge Masse ist ein Skalar. Damit ist offensichtlich auch die Kraft  $\vec{F}$  ein Vektor<sup>2</sup>.

Wir können an dieser Stelle ebenfalls den **Impuls**  $\vec{p}$  einführen:

$$\vec{p} = m_t \vec{v} \quad (2.9)$$

Damit schreibt sich das Aktionsprinzip:  $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$  mit:  $\dot{\vec{p}} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}$ . (Das Zeichen ” $\equiv$ ” bedeutet ”identisch”).

Die Einführung des Impulses  $\vec{p}$  ergibt an dieser Stelle im Grunde nicht mehr als die Einsparung des Symbols  $m_t$ . Der Impuls bekommt aber erheblich mehr Bedeutung, sobald wir uns Problemen zuwenden, die mehr als einen beweglichen Massenpunkt involvieren.

Wir müssen nun einige Kräfte explizit einführen. Eine erste Kraft - die Reibungskraft - hatten wir bereits im Zusammenhang mit dem rollenden Ball kurz angesprochen. Reibungskräfte werden wir etwas später genauer diskutieren.

<sup>2</sup>Wir werden die Vektoreigenschaften der Kraft noch an einigen Beispielen demonstrieren.

Die Kraft, die wir an dieser Stelle betrachten wollen, ist die **Gewichtskraft**  $\vec{F}_g$  wie sie auf der Erdoberfläche wirkt und Massenpunkte "nach unten", d. h. in Richtung des Erdmittelpunktes zieht.

Wir wollen diese Kraft zunächst mit Hilfe einer Spiralfeder charakterisieren, an die wir unterschiedliche Objekte hängen. Wir stellen fest:

1. wenn wir Körper gleichen Materials und gleichen Volumens an die Feder hängen, wird diese jeweils gleich weit "nach unten" ausgedehnt.
2. wenn wir  $N$  Körper gleichen Materials und gleichen Volumens an die Feder hängen, wird diese proportional zu  $N$  ausgedehnt.
3. Körper gleichen Volumens, aber unterschiedlichen Materials dehnen die Feder i. allg. unterschiedlich weit aus

Auf der Basis dieser Beobachtung können wir nun die "schwere Masse"  $m_s$  eines Körpers dadurch definieren, dass wir sagen, Körper gleicher Masse sollen die Spiralfeder um gleiche Abstände in Richtung des Erdmittelpunktes ausdehnen. Die Gewichtskraft ist also proportional zu  $m_s$ . Wenn wir  $m_s$  die gleiche Einheit wie für die träge Masse geben, so hat der Proportionalitätsfaktor, den wir  $g$  nennen wollen, die Dimension einer Beschleunigung. Wir bezeichnen  $g$  als die "Erdbeschleunigung".

Wir haben also:

$$\text{Gewichtskraft:} \quad \vec{F}_g = m_s \vec{g} \quad (2.10)$$

Hierbei zeigen  $\vec{F}_g$  und  $\vec{g}$  in Richtung Erdmittelpunkt.

Die **SI-Einheit** der schweren bzw. trägen Masse ist 1 **Kilogramm**.

1 kg war ursprünglich definiert durch die Masse von 1 dm<sup>3</sup> Wasser bei 4°C und 1 bar Druck und ist jetzt definiert durch das "Archivkilogramm", einem in Paris aufbewahrten Platin-Iridium-Zylinder.

Mit der Einheit m/s<sup>2</sup> für Beschleunigungen erhalten wir als **SI-Einheit der Kraft**: 1 **Newton** (1 N = 1 kg m/s<sup>2</sup>)

Im im **cgs-System** ist die **Einheit der Kraft** 1 **dyn** = 1 gcm/s<sup>2</sup> = 10<sup>-5</sup> N.

Wir wollen nun die schwere und die träge Masse eines Körpers experimentell vergleichen. Hierzu lassen wir zunächst Körper verschiedenen Materials und unterschiedlicher schwerer Masse aus einer Höhe  $h$  auf den Boden fallen.

Die Körper sind:

- eine Stahlkugel
- eine gleich große Holzkugel, die deutlich leichter ist als die Stahlkugel
- eine (sehr leichte) Vogelfeder

Die Stahlkugel und die Holzkugel treffen praktisch gleichzeitig am Boden auf, was zur Vermutung führt, Körper unterschiedlicher schwerer Masse fallen gleich schnell. Die wesentlich größere Fallzeit der Feder scheint allerdings dagegen zu sprechen. Um zu sehen, ob dies auf Reibungskräfte zurückzuführen ist, bringen wir eine Stahlkugel und eine Daunenfeder in ein Rohr, evakuieren dieses und lassen Stahlkugel und Feder eine Strecke von 1 m fallen. Wir beobachten, dass beide Objekte gleichzeitig aufschlagen (die Fallzeit beträgt ca. 0.45 s).

Wir stellen fest: Die Fallzeit von Körpern ist unabhängig von ihrer schweren Masse. Damit scheint die Beschleunigung, die auf die Körper wirkt, für alle Massenpunkte die gleiche zu sein.

Diese Beobachtung wollen wir mit Hilfe des Aktionsprinzips quantitativ auswerten:

Es gilt:

$$\vec{F} = m_t \vec{a} \quad (\text{Aktionsprinzip}) \quad (2.11)$$

Wir setzen jetzt  $\vec{F} = \vec{F}_g$  und erhalten:  $m_s \vec{g} = m_t \vec{a}$  Hieraus folgt

$$\vec{a} = \frac{m_s}{m_t} \vec{g}. \quad (2.12)$$

Da  $\vec{a}$  aber für alle Körper gleich ist, folgt hieraus, dass das Verhältnis  $\frac{m_s}{m_t}$  für alle Körper gleich ist. **Schwere und träge Masse sind also äquivalent**; wir können ohne weitere Einschränkung  $\mathbf{m}_s = \mathbf{m}_t \equiv m$  setzen.

Nun wollen wir den Fall von Stahlkugel und Daunenfeder weiter auswerten:

Wir integrieren die Bewegungsgleichung  $m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \ddot{\vec{x}}$ ,

die wir, wenn wir den Einheitsvektor  $\vec{e}_z$  entgegen der Fallrichtung "nach oben" zeigen lassen, auch ohne Vektorpfeile als

$$m \cdot g = -m \cdot \ddot{z} \quad \text{bzw. als} \quad \ddot{z} = -g \quad (2.13)$$

schreiben können. Die Gleichung wird gelöst durch:

$$z(t) = z(0) - v(0) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.14)$$

Hierbei messen wir die Zeit  $t$  von dem Moment, in dem wir den Körper fallen lassen. Die Startgeschwindigkeit  $v(0)$  sei null, die Höhe  $z(0)$ , aus der der Körper fällt, sei  $h$  und der Aufschlagpunkt habe die Koordinate  $z = 0$ . Damit erhalten wir für den Aufschlagpunkt:

$$0 = h - \frac{1}{2}gt_a^2 \quad (2.15)$$

wobei  $t_a$  die Aufschlagszeit ist. Hieraus ergibt sich  $g = \frac{2h}{t_a^2}$ . Beim Fall der Stahlkugel und der Daunenfeder war  $h = 1$  m und  $t_a = 0.45$  s, woraus sich  $g$  zu  $9.9 \frac{m}{s^2}$  bestimmt.

Der Literaturwert beträgt:  $\mathbf{g = 9.81 \frac{m}{s^2}}$  für einen Ort auf dem 50. Breitengrad (es stellt sich heraus, dass  $g$  leicht vom Breitengrad abhängt. Am Pol ist  $g = 9.83 \frac{m}{s^2}$ , am Äquator  $9.78 \frac{m}{s^2}$ ).

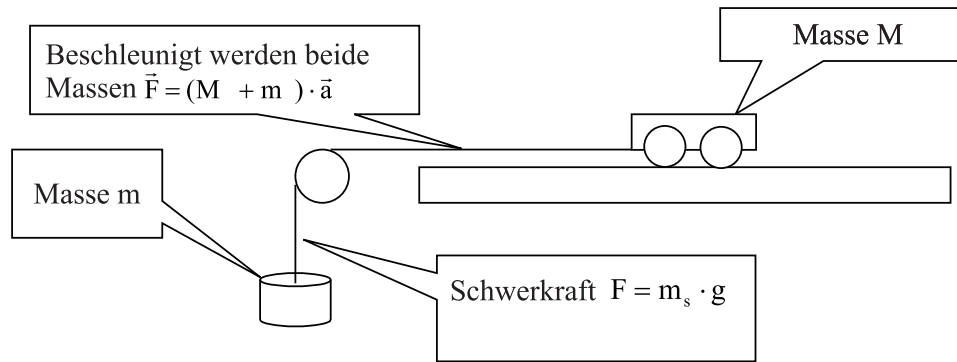


Abbildung 2.7: Wagen der Masse  $M$  auf einer Luftkissenfahrbahn, der nahezu reibungsfrei durch eine Masse  $m$  gezogen wird. Die symbolisch gezeichneten Räder des Wagens sind im Versuch nicht vorhanden. Statt dessen hebt ein von der Fahrbahn ausgehender Luftstrom den Wagen an (Zeichnung nach: Skript Ihringer).

In einem weiteren Versuch vergleichen wir nun das Verhältnis von träger zu schwerer Masse unterschiedlicher Körper. Hierzu wird ein Wagen der Masse  $M$  auf einer **Luftkissenfahrbahn** so gut wie reibungsfrei von einer Masse  $m$  gezogen (s. Abb. 2.7).

Auf die Masse  $m$  wirkt nun die Gewichtskraft  $\vec{F}_g = m_s \vec{g}$ . Diese wird durch die Rolle umgelenkt und zieht den Wagen. Beschleunigt werden die Massen  $m_t$  und  $M_t$ . Es gilt also:

$$(M_t + m_t) \cdot a = m_s \cdot g \quad (2.16)$$

Im Versuch ist zunächst  $M \approx 192$  g und  $m \approx 4,6$  g. Wir haben, da  $M \gg m$  ist:

$$a = \frac{m_s}{M_t + m_t} \cdot g \approx \frac{m_s}{M_t} \cdot g \quad (2.17)$$

d. h. wir vergleichen jetzt das Verhältnis schwere/träge Masse *verschiedener* Körper

Zur Startzeit  $t = 0$  ist die Geschwindigkeit des Wagens  $v(0) = 0$ . Wir erhalten für eine Laufstrecke  $\Delta x$ :

$$\Delta x = x(t_1) - x(0) = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \approx \frac{1}{2} \frac{m_s}{M_t} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \quad (2.18)$$

Man sieht im Experiment:

- Bei einer Änderung der Laufstrecke  $\Delta x$  von 30 cm auf 1.2 m verdoppelt sich (ungefähr) die Laufzeit  $\Delta t$
- erhöht man für  $\Delta x = 1.2$  m die Masse  $M$  um einen Faktor 4, verdoppelt sich ebenfalls ungefähr die Laufzeit
- erhöht man für  $\Delta x = 1.2$  m sowohl  $M$  als auch  $m$  um einen Faktor 4, erhält man die gleiche Laufzeit

Auch das Verhältnis träge/schwere Masse unterschiedlicher Körper lässt also keinen Unterschied zwischen schwerer und träger Masse erkennen.

## 2.3 Arbeit und Energie

Wenn sich ein Massenpunkt in einem Kraftfeld bewegt so wird er entweder beschleunigt oder abgebremst. Man sagt auch an ihm wird vom Kraftfeld eine gewisse Arbeit geleistet, die dann zu einer größeren Geschwindigkeit führt. Etwas präziser formuliert, definieren wir die Arbeit, die an einem Körper geleistet wird, wenn er in einem Kraftfeld  $\vec{F}$  die Wegstrecke  $\Delta\vec{r}$  zurücklegt durch

$$\Delta W = \vec{F} \Delta\vec{r}.$$

Zur weiteren Veranschaulichung dieser Definition machen wir die folgenden Bemerkungen:

- Bezeichnet  $\varphi$  den Winkel zwischen der Richtung der Kraft  $\vec{F}$  und der Richtung der Bewegung des Körpers  $\Delta\vec{r}$ , so können wir (2.3) auch in der Form schreiben:

$$\Delta W = |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos \varphi.$$

Die übertragene Arbeit ist also maximal, wenn  $\varphi = 0$ , also die Richtung der Kraft und die Bewegungsrichtung parallel zueinander stehen. In diesem Fall ist  $\Delta W$  positiv, der Körper wird beschleunigt. Die Beschleunigung beziehungsweise die zugeführte Arbeit wächst proportional zur Stärke der Kraft  $|\vec{F}|$  und zur Länge des Wegstückes  $|\Delta\vec{r}|$ .

- Ist die Richtung der Bewegung  $\Delta\vec{r}$  antiparallel zu  $\vec{F}$ , so ist die am Körper geleistete Arbeit negativ, der Körper wird abgebremst.
- Stehen die Vektoren  $\vec{F}$  und  $\Delta\vec{r}$  unter einem beliebigen Winkel zueinander, so können wir (2.3) entweder so interpretieren, dass nur der Anteil  $|\vec{F}| \cos \varphi$ , also der Anteil von  $\vec{F}$ , der parallel zu  $\Delta\vec{r}$  steht, auf den Körper wirkt oder dass lediglich die Wegstrecke  $|\Delta\vec{r}| \cos \varphi$  zurückgelegt wird.
- Die Arbeit wird angegeben in Einheiten einer Kraft mal den Einheiten einer Länge. Wir definieren dafür die Einheiten **Joule**, beziehungsweise **Newton-Meter [Nm]**, durch

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1 \text{ Nm}.$$

Ändert sich das Kraftfeld als Funktion des Ortes oder ist der Weg, den der Massenpunkt zurücklegt nicht gradlinig, so müssen wir die Definition der Arbeit in (2.3) auf differenziell kleine Wegstrecken  $d\vec{r}$  zurückführen und für den entsprechenden differenziell kleinen Beitrag der Arbeit  $dW$  schreiben

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Die Arbeit, die insgesamt an dem Körper geleistet wird, wenn er sich in dem Kraftfeld von einem Punkt  $\vec{r}_1$  nach einem Punkt  $\vec{r}_2$  entlang eines Weges bewegt, errechnet sich dann als die Summe dieser Elemente  $dW$ , beziehungsweise als Integral

$$W = \int_{\vec{r}_1, \text{Weg}}^{\vec{r}_2} dW = \int_{\vec{r}_1, \text{Weg}}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Wie berechnet man aber ein solches **Linien-** oder **Wegintegral**? Wie kann ich mathematisch beschreiben über welchen Weg ich mich von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  bewege?



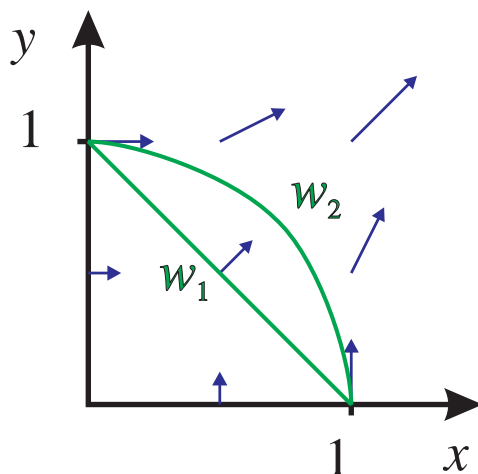


Abbildung 2.8: Beispiel für Berechnung von Wegintegralen

### 2.3.1 Berechnung von Wegintegralen

In diesem Abschnitt soll die Berechnung von Weg- oder Linienintegralen dargestellt und veranschaulicht werden. Als konkretes Beispiel wollen wir das Wegintegral

$$\int_{\vec{r}_1, \text{Weg}}^{\vec{r}_2} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r}$$

des Vektorfeldes  $\vec{A}(\vec{r})$  vom Startpunkt  $\vec{r}_1$  zum Endpunkt  $\vec{r}_2$  über einen bestimmten Weg betrachten. In unserem Beispiel seien

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} ay \\ ax \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

so wie in Abb. 2.8 dargestellt. Als ersten Weg soll die direkte Verbindungslinie von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  betrachtet werden. Diese Gerade wird parameterisiert in der Form

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t \\ &= \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

wobei man sich den Parameter  $t$  als Zeitparameter veranschaulichen kann und  $\vec{r}(t)$  als den Aufenthaltsort zur Zeit  $t$ . Man realisiert leicht, dass die Funktion  $\vec{r}(t)$  genau die Verbindungsgerade beschreibt, wobei wir zur Zeit  $t = 0$  am Startpunkt und zur Zeit  $t = 1$  am Endpunkt des Weges angelangt sind. Damit berechnet sich das Wegintegral

über diesen Weg  $W1$  zu

$$\begin{aligned}
 \int_{\vec{r}_1, W1}^{\vec{r}_2} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{A}(\vec{r}(t)) \frac{d\vec{r}}{dt} dt \\
 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} at \\ a(1-t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
 &= \int_0^1 (-2at + a) dt = 0
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Als Alternativweg  $W2$  betrachten wir den Kreisbogen in Abb. 2.8, der parameterisiert wird durch die Vektorfunktion

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} t \\ \sin \frac{\pi}{2} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit berechnet sich das entsprechende Wegintegral

$$\begin{aligned}
 \int_{\vec{r}_1, W2}^{\vec{r}_2} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} a \sin \frac{\pi}{2} t \\ a \cos \frac{\pi}{2} t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t \\ \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{a\pi}{2} \left( -\sin^2 \frac{\pi}{2} t + \cos^2 \frac{\pi}{2} t \right) dt
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Auch in diesem Fall ergibt die Auswertung des Integrals (nach etwas längerer Rechnung) den Wert 0. Der Wert des Integrals ist also in diesem Fall unabhängig davon, ob man entlang des Weges  $W1$  oder entlang des Weges  $W2$  integriert. Wir werden weiter unten sehen, dass dieses Ergebnis kein Zufall ist.

### 2.3.2 Gradient eines Skalarfeldes

Bei der Beschreibung von physikalischen Phänomenen werden häufig **Skalarfelder** oder auch **Vektorfelder** benutzt. Wir wollen diese Begriffe zunächst definieren und durch Beispiele konkretisieren.

**Definitionen:**

- Mathematisch gesehen ist ein Skalarfeld eine Abbildung,  $\Phi(\vec{r})$ , die jedem Ortsvektor  $\vec{r}$  des 3-dimensionalen Raumes einen Skalar, also eine Zahl  $\Phi$  zuordnet.
- Dementsprechend ist ein Vektorfeld  $\vec{A}(\vec{r})$  eine Abbildung des 3-dimensionalen Raumes nach  $\mathfrak{R}^3$ , jedem Ortsvektor  $\vec{r}$  wird eine Vektor  $\vec{A}$  zugeordnet.

Als ein Beispiel für ein Skalarfeld mit physikalischer Bedeutung kann man das Temperaturfeld  $T(\vec{r})$  betrachten: an jedem Punkt im Raum,  $\vec{r}$ , kann man die lokale Temperatur feststellen und so die gesamte Temperaturverteilung angeben. Als ein Beispiel für eine mathematisch definiertes Skalarfeld sei die Funktion

$$\Phi(\vec{r}) = |\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

aufgeführt.

Betrachtet man andererseits die Strömung eines fließenden Gewässers oder auch der uns umgebenden Luft, so können wir jedem Ortsvektor die lokale Strömung an diesem Ort, also die Richtung und den Betrag der jeweiligen mittleren Geschwindigkeiten der Wasser- oder Luftmoleküle angeben. Dieses Geschwindigkeitsfeld  $\vec{V}(\vec{r})$  ist ein Beispiel für ein Vektorfeld. Ein weiteres Beispiel für ein Vektorfeld ist das Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r})$ , das angibt, welche Kraft auf ein Testteilchen an einem gegebenen Ort  $\vec{r}$  wirkt.

Für ein beliebiges Skalarfeld  $\Phi(\vec{r})$  können wir nun den Gradienten dieses Skalarfeldes an einem Punkt  $\vec{r}_0$  definieren. Die geometrisch anschauliche Definition definiert diesen Gradienten von  $\Phi$  am Ort  $\vec{r}_0$ ,  $\text{Grad } \Phi(\vec{r}_0)$ , als den Vektor, der in die Richtung weist, in der das skalare Feld  $\Phi$  am Punkt  $\vec{r}_0$  am stärksten ansteigt. Die Länge dieses Vektors entspricht dem Betrag dieses stärksten Anstiegs.

Wir werden nun zeigen, dass aus dieser Definition folgt:

- Mit dem Gradienten Operator können wir das totale Differenzial  $d\Phi$  des Skalarfeldes umschreiben in das Skalarprodukt:

$$d\Phi = \text{Grad } \phi \cdot d\vec{r}$$

wobei  $d\vec{r}$  der infinitesimale Vektor ist mit den kartesischen Komponenten  $dx$ ,  $dy$  und  $dz$

- In der kartesischen Darstellung kann man den Gradienten einfach berechnen zu

$$\text{Grad } \Phi = \vec{\nabla} \Phi = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \Phi$$

wobei wir hier und im folgenden die Abkürzung benutzen

$$\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$$

Zum Beweis dieser Behauptungen betrachten wir die Änderung des Skalarfeldes  $\Phi(\vec{r})$ , wenn man sich um ein kleines Stück  $\Delta\vec{r}$  vom Referenzpunkt  $\vec{r}_0$  fortbewegt. Wenn der Differenzvektor  $\Delta\vec{r}$  sehr klein ist, kann man den Wert des Skalarfeldes  $\Phi$  an der Stelle  $\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}$  durch eine Taylorentwicklung von  $\Phi$  am Punkte  $\vec{r}_0$  bestimmen. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\vec{r}_0) &= \Phi(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) - \Phi(\vec{r}_0) \\ &= \Phi(\vec{r}_0) + \underbrace{\partial_x \Phi}_{=\Delta x} (x - x_0) + \partial_y \Phi \Delta y + \partial_z \Phi \Delta z + \dots - \Phi(\vec{r}_0) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dabei haben wir die Terme in zweiter und höherer Ordnung in den Verschiebungen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\Delta z$  der kartesischen Koordinaten von  $\Delta\vec{r}$  nicht explizit aufgeführt (dargestellt durch ...), da wir für kleine Verschiebungen  $\Delta\vec{r}$  diese nicht linearen Terme vernachlässigen können.

Die Differenzialform einer Funktion  $f(x_i)$ , die von Parametern  $x_i$  abhängt ist definiert als

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Aus dem Vergleich dieser Definition mit der Darstellung von  $\Delta\Phi$  in (2.22) sieht man also, dass die Differenzialform  $d\Phi$  (wobei  $\Phi$  von den Variablen  $x_i = x, y, z$  abhängt) gerade dem Grenzfall von  $\Delta\Phi$  entspricht mit  $\Delta x \rightarrow dx$ ,  $\Delta y \rightarrow dy$  und  $\Delta z \rightarrow dz$ . In diesem Grenzfall infinitesimaler Verschiebungen gilt insbesondere, dass die nichtlinearen Term in den Verschiebungen vernachlässigbar sind. Damit können wir also  $d\Phi$  interpretieren als die Änderungen von  $\Phi$  wenn eine infinitesimale Verrückung, dargestellt durch

$$d\vec{r} = \hat{e}_x dx + \hat{e}_y dy + \hat{e}_z dz,$$

vorgenommen wird. Man kann also schreiben

$$\begin{aligned} d\Phi &= \partial_x \Phi dx + \partial_y \Phi dy + \partial_z \Phi dz \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x \Phi \\ \partial_y \Phi \\ \partial_z \Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \\ &= \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} \\ &= |\vec{\nabla} \Phi| |d\vec{r}| \cos \alpha \end{aligned} \tag{2.23}$$

wobei der Winkel  $\alpha$  in der letzten Zeile gerade dem Winkel zwischen den Vektoren  $\vec{\nabla} \Phi$  und  $d\vec{r}$  bezeichnet. Bei dem Übergang zur letzten Zeile wurde also benutzt, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren sich als Produkt der Beträge multipliziert mit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels berechnet. Die Änderung des Skalarfeldes  $\Phi$ ,  $d\Phi$ , ist also dann maximal, wenn der Winkel  $\alpha = 0$  ist, wir also eine Änderung des Ortsvektors  $d\vec{r}$  betrachten, die in Richtung des Vektors  $\vec{\nabla} \Phi$  verläuft. Damit ist also der Vektor  $\vec{\nabla} \Phi$  parallel zum Vektor Grad  $\Phi$ . Ausserdem sind auch die Beträge identisch, denn für  $\cos \alpha = 1$  gilt ja

$$\frac{d\Phi}{|d\vec{r}|} = |\vec{\nabla} \Phi| = |\text{Grad } \Phi|$$

Damit ist also (2.22) bewiesen. Gleichzeitig können wir aber auch aus der dritten Zeile von (2.23) den Beweis von (2.3.2) ablesen.

Als einfaches Beispiel für die Berechnung des Gradienten nach (2.22) betrachten wir das Skalarfeld aus (2.3.2). Der Gradient berechnet sich in diesem Fall

$$\text{Grad } \Phi = \vec{\nabla} \Phi = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2\vec{r}.$$

Der Gradient kann aber natürlich in anderen Koordinaten als den kartesischen Koordinaten berechnet werden. Als Beispiel soll hier der Gradient in Zylinderkoordinaten und in Kugelkoordinaten (auch Polarkoordinaten genannt) angegeben werden.

In Zylinderkoordinaten stellt sich der Gradient dar in der Form

$$\vec{\nabla} \Phi = O_\rho \hat{e}_\rho + O_\phi \hat{e}_\phi + O_z \hat{e}_z.$$

Dabei sind die Vektoren  $\hat{e}_\rho$ ,  $\hat{e}_\phi$  und  $\hat{e}_z$  die Basisvektoren für die Zylinderkoordinaten, die wir im Abschnitt 1.1 eingeführt haben. Die Operatoren in (2.3.2) sind gegeben durch

$$\begin{aligned} O_\rho &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \\ O_\phi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \\ O_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Im Fall der Kugelkoordinaten soll der Gradient dargestellt werden in der Form

$$\vec{\nabla} \Phi = O_r \hat{e}_r + O_\theta \hat{e}_\theta + O_\varphi \hat{e}_\varphi.$$

Dabei sind  $O_r$ ,  $O_\theta$  und  $O_\varphi$  Ausdrücke, die wir im folgenden bestimmen werden. Die Einheitsvektoren für die Kugelkoordinaten sind gegeben durch

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zunächst bestimmen wir die Differenzialform für den Ortsvektor  $d\vec{r}$  (vergleiche dazu (2.3.2), hier angewandt auf die Komponenten des Vektors  $\vec{r}$ )

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= \hat{e}_r dr + r \hat{e}_\theta d\theta + r \sin \theta \hat{e}_\varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Das vollständige Differenzial für  $\Phi$ , hier als Funktion der Kugelkoordinaten, schreibt sich

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} \\ &= (O_r \hat{e}_r + O_\theta \hat{e}_\theta + O_\varphi \hat{e}_\varphi) \cdot (\hat{e}_r dr + r \hat{e}_\theta d\theta + r \sin \theta \hat{e}_\varphi d\varphi) \\ &= O_r dr + O_\theta r d\theta + O_\varphi r \sin \theta d\varphi. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dabei haben wir in der zweiten Zeile die Eigenschaft (2.3.2) ausgenutzt und in den folgenden Zeilen die Schreibweisen in (2.3.2) und (2.25). Aus dem Koeffizientenvergleich der letzten mit der ersten Zeile in (2.26) werden die in (2.3.2) gesuchten Koeffizienten bestimmt zu

$$O_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad O_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad O_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}.$$

Damit können wir nun den folgenden Integralsatz formulieren:

Kann man ein Vektorfeld  $\vec{A}$  als Gradienten eines Skalarfeldes  $\Phi$  schreiben

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \Phi,$$

so ist das Wegintegral über dieses Vektorfeld unabhängig vom aktuellen Weg und lässt sich berechnen zu

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1).$$

Der Beweis dieses Satzes ist nach den geleisteten Vorarbeiten sehr einfach. Nach (2.3.2) gilt nämlich

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} \\ &= \int d\Phi = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1). \end{aligned}$$

Als Anwendung dieses Integralsatzes verifizieren wir, dass das Vektorfeld aus (2.3.1) dem Gradienten des Skalarfeldes

$$\Phi = axy$$

entspricht. Damit ist das entsprechende Wegintegral (2.3.1) unabhängig vom gewählten Weg und berechnet sich zu

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1) = a * 0 * 1 - a * 1 * 0 = 0,$$

was wir ja auch in (2.20) und (2.21) auf etwas mühsamerer Art gefunden haben.

### 2.3.3 Konservative Kraftfelder

Mit diesen mathematischen Hilfsmitteln kehren wir nun wieder zu den physikalischen Themen zurück und definieren ein **Konservatives Kraftfeld**. Ein Kraftfeld soll konservativ heissen, wenn es sich aus einem Skalarfeld, dem **Potenzial**  $V(\vec{r})$  berechnen lässt gemäss

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}).$$

Für ein solches konservatives Kraftfeld gilt insbesondere:

1. Die Arbeit, die von einem konservativen Kraftfeld an einem Massenpunkt geleistet wird, wenn dieser sich von  $\vec{r}_A$  nach  $\vec{r}_E$  bewegt ist unabhängig vom Weg und gegeben durch

$$\Delta W = V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_B).$$

2. Bei der Bewegung eines Massenpunktes der Masse  $m$  in einem konservativen Kraftfeld bleibt die Summe aus der potenziellen Energie, das ist der Wert des Potentials an dem Ort, an dem sich der Massenpunkt befindet, und seiner kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2}mv^2,$$

wobei  $v$  die aktuelle Geschwindigkeit bezeichnet, erhalten. Wegen dieser Energierhaltung heisst eben dieses Kraftfeld auch konservativ.

Der Punkt 1 lässt sich mit (2.3.2) leicht beweisen durch

$$\begin{aligned}\Delta W &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} \vec{F} d\vec{r} \\ &= - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_E} \vec{\nabla} V d\vec{r} \\ &= - [V(\vec{r}_E) - V(\vec{r}_A)] .\end{aligned}\tag{2.27}$$

Zum Beweis des Punktes 2 nehmen wir an, dass sich der Massenpunkt entlang eines bestimmten Weges  $\vec{r}(t)$  bewegt und berechnen die zeitliche Änderung der potenziellen Energie zu

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \vec{\nabla} V \vec{v} = -\vec{F} \vec{v} .\end{aligned}\tag{2.28}$$

Andererseits berechnet sich die zeitliche Änderung der kinetischen Energie

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} [v_x^2 + v_y^2 + v_z^2] \\ &= \frac{1}{2} m \left[ 2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt} + 2v_z \frac{dv_z}{dt} \right] \\ &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} = \vec{F} \vec{v} ,\end{aligned}\tag{2.29}$$

wobei wir in der letzten Zeile die Newtonsche Bewegungsgleichung eingesetzt haben. Addiert man die Ergebnisse von (2.28) und (2.29), so ergibt sich

$$\frac{d}{dt} [T + V] = 0$$

was wir ja beweisen wollten.

Als ein Beispiel für ein konservatives Kraftfeld wollen wir die Gravitationskraft auf der Erdoberfläche anführen. Unser Koordinatensystem sei so orientiert, dass die  $z$ -Achse senkrecht zur Erdoberfläche nach oben weist, und ein Potenzial definiert durch

$$V = m g z$$

wobei  $m$  die angezogene Masse sein soll und  $g$  für die Beschleunigung der Erdanziehung steht. Mit dem Gradient Operator in kartesischen Koordinaten aus (2.22) ergibt sich für die Kraft

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -m g \hat{e}_z$$

was ja der Erdanziehung entspricht.

Zur Verdeutlichung der Energierhaltung bei der Bewegung in diesem Kraftfeld nehmen wir an, dass bei dem Start der Bewegung die Masse  $m$  sich in Ruhe auf einer Höhe  $h$  oberhalb der Erdoberfläche befindet. Am Ende der Bewegung fällt der Massenpunkt  $m$  mit der Geschwindigkeit  $v$  bei  $z = 0$ . Es gilt also

$$T + V = 0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg0$$

Daraus ergibt sich für die Endgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh}.$$



## 2.4 Fall, Wurf und Federkräfte

Sie haben jetzt die Begriffe Arbeit, potentielle und kinetische Energie, sowie die Energieerhaltung kennengelernt. Wir wollen nun einige Versuche zum Thema Fall und Wurf durchführen. Hiermit soll der Umgang mit der Newtonschen Bewegungsgleichung und mit den oben genannten Begriffen vertieft werden.

### 2.4.1 Fall und Wurf

Betrachten wir zunächst die Energieerhaltung beim **Fall einer Stahlkugel** aus einer Höhe  $h$  auf eine Stahlplatte oder eine Aluminiumunterlage (s. Abb. 2.9).

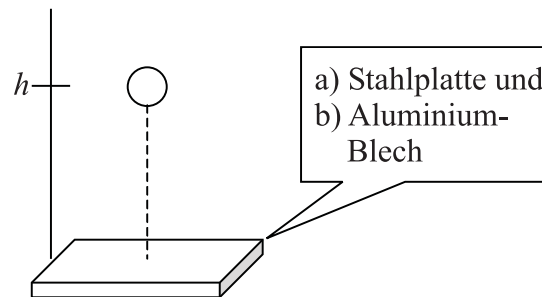


Abbildung 2.9: Eine Stahlkugel fällt auf eine Stahlplatte oder ein Aluminium-Blech (Zeichnung: Skript Ihringer)

Die potentielle Energie der Kugel in der Höhe  $h$  beträgt  $E_{pot} = mgh$ . Die Startgeschwindigkeit der Kugel ist 0, daher ist  $E_{pot}$  gleich der Gesamtenergie  $E$ .

Beim Aufschlag ist  $E_{pot} = 0$ , dafür hat die Kugel eine kinetische Energie  $E_{kin} = \frac{1}{2}mv_{auf}^2$ . Den Wert der Aufschlagsgeschwindigkeit  $v_{auf}$  können wir unter Benutzung der Energieerhaltung sofort angeben, da während des gesamten Falls  $E = E_{pot} + E_{kin} = const. = mgh$  gilt. Wir haben damit beim Aufschlag:  $E = \frac{1}{2}mv_{auf}^2 = mgh$ , woraus sofort  $v_{auf} = \sqrt{2gh}$  folgt. Interessant ist nun, was nach dem Aufschlag passiert:

- Beim Fall auf die Stahlplatte springt die Kugel nahezu wieder auf die Anfangshöhe  $h$  zurück; die kinetische Energie kurz nach dem Aufschlag ist also nahezu so groß wie kurz vorher; lediglich die Richtung bzw. der Impuls der Kugel hat sich umgekehrt. Man spricht in diesem Zusammenhang auch davon, dass die Kugel einen *elastischen Stoß* mit der Stahlplatte gemacht hat.
- Beim Fall auf die Aluminiumplatte bleibt die Kugel einfach liegen. Offensichtlich ist die Energie  $E$  der Kugel in der Platte geblieben (Tatsächlich wurde die Platte beim Aufschlag verformt und schließlich etwas erwärmt). Wir sprechen hier von einem vollkommen inelastischen Stoß.

Im nächsten Versuch wollen wir nun die Fallgesetze nutzen, um herauszufinden, von welchen Höhen wir eine Serie von **N Massen fallen** lassen müssen, so dass sie in zeitgleichen Intervallen am Boden aufschlagen (s. Abb. 2.10).

Die  $n$ -te Masse befinde sich auf der Höhe  $z_n$ . Diese Masse benötigt nun nach den Newtonschen Bewegungsgleichungen eine Zeit  $\Delta t_n = \sqrt{\frac{2z_n}{g}}$ , um am Boden aufzuschlagen. Wir wollen, dass die Kugeln dies in gleichen Zeitabständen auftreffen, d. h. wir verlangen  $\Delta t_n = n \cdot \Delta t_1$ . Einsetzen liefert:

$$\frac{2}{g} \cdot \sqrt{z_n} = n \cdot \frac{2}{g} \cdot \sqrt{z_1} \quad (2.30)$$

oder  $z_n = n^2 z_1$ . Das Verhältnis  $z_n/z_1$  muss also quadratisch anwachsen. Wir demonstrieren den Effekt dadurch, dass wir ein Seil von der Decke fallen lassen, an dem in diesem Abstandsverhältnis Stahlmuttern angebracht sind. Man hört die Aufschläge in zeitgleichen Abständen.

Die Energie der  $n$ -ten Kugel war beim Start  $E = E_{pot} = mgz_n = mgn^2 z_1$ , wächst also quadratisch mit  $n$ .

Beim Aufschlag gilt:  $v_n = \sqrt{2gz_n} = n \cdot \sqrt{2gz_1}$ . Die Aufschlagsgeschwindigkeit nimmt also proportional zu  $n$  zu.

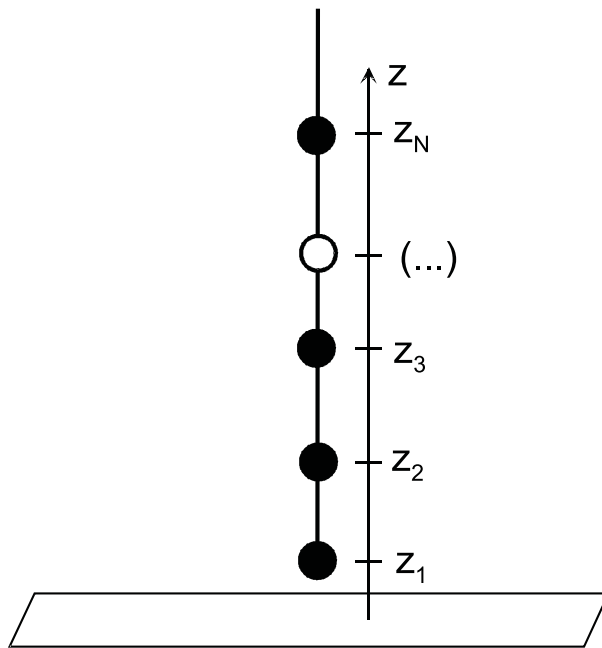


Abbildung 2.10:  $N$  fallende Massen

Im nächsten Versuch vergleichen wir den **freien Fall** und den **waagrechten Wurf** zweier Kugeln (s. Abb. 2.11). Kugel 1 wird aus einer Höhe  $h = 1,5$  m fallengelassen. Zeitgleich wird Kugel 2 aus einer Abschussvorrichtung mit einer Startgeschwindigkeit  $v_x = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  waagrecht abgeschossen.

Man hört beide Kugeln zeitgleich aufschlagen, obwohl Kugel 2 einen weiteren Weg zurückgelegt hat. Wir wollen die Bewegung beider Kugeln nun quantitativ nachvollziehen:

- Kugel 1 fällt senkrecht herunter, wobei gilt:  $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ . Die Fallzeit beträgt  $\Delta t = \sqrt{2h/g}$ , was für  $h = 1,5$  m einen Wert von ca. 0,55 s ergibt.

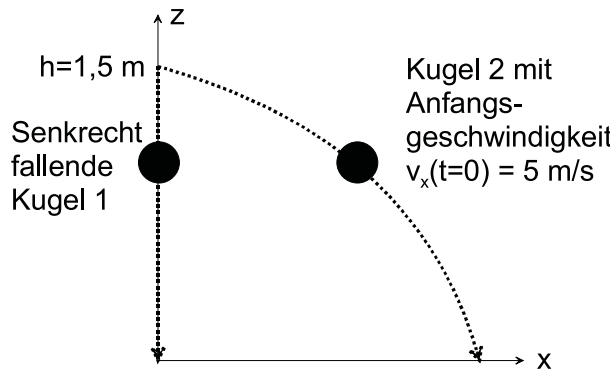


Abbildung 2.11: Senkrechter Fall und waagrechter Wurf

- Kugel 2 wird in z-Richtung mit der Gewichtskraft  $-mg$  beschleunigt und fällt genauso wie Kugel 1:  $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ , Fallzeit  $\Delta t = \sqrt{2h/g}$ .

Die Bewegung in x-Richtung ist (nach dem Abschuss) unbeschleunigt mit  $v_x(t) = v_x(t=0)$ . Man beachte, hierbei, dass sich insgesamt die Bewegungen in x- und z-Richtung überlagern. Die resultierende Bahnkurve der Kugel 2 können wir wie folgt bestimmen: Für die Bewegung in x-Richtung gilt:  $x(t) = v_x(t=0) \cdot t$ . Nach  $t$  aufgelöst und in  $z(t)$  eingesetzt ergibt dies:

$$z(t) = h - \frac{1}{2}g \left( \frac{x}{v_x(0)} \right)^2 = h - \frac{g}{2v_x^2(0)}x^2 \quad (2.31)$$

Wie haben also eine parabelförmige Bahnkurve.

Wir geben auch noch die Energien und Geschwindigkeiten der beiden Kugeln für  $t = 0$  und beim Aufschlag an:

- Kugel 1 hat beim Start  $E_{pot} = mgh$ ,  $E_{kin} = 0$  und daher eine Gesamtenergie  $E = E_{pot}$ . Die Geschwindigkeit beim Aufschlag ist  $v = v_z = \sqrt{2gh}$ , was für  $h = 1.5$  m einen Wert von 5.4 m/s ergibt.
- Kugel 2 hat beim Start  $E_{pot} = mgh$ ,  $E_{kin} = \frac{1}{2}mv_x^2(0)$  und daher eine Gesamtenergie

$$E = E_{pot} + E_{kin} = mgh + \frac{1}{2}mv_x^2(0) \quad (2.32)$$

Beim Aufschlag ist  $E_{pot} = 0$  und  $E_{kin} = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}m(v_x^2(0) + 2gh)$ . Die Geschwindigkeit der Kugel beträgt beim Aufschlag also  $v = \sqrt{v_x^2(0) + 2gh}$  ( $\approx 7.4$  m/s)

Im nächsten **Versuch** wollen wir die Bahnkurve untersuchen, die sich beim **schrägen Wurf** ergibt, d. h. wenn ein Massenpunkt mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  unter einem Winkel  $\varphi$  (wie in Abb. 2.12 gezeichnet) geworfen wird. An Stelle eines einzelnen Massenpunktes betrachten wir allerdings einen **Wasserstahl**, der die entsprechende Bahnkurve kontinuierlich darstellt.

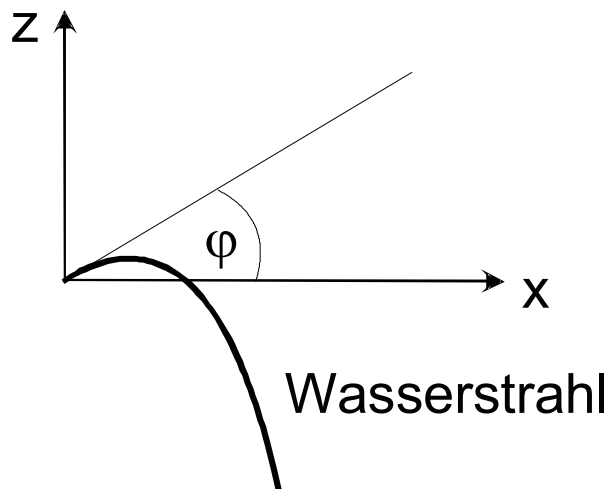


Abbildung 2.12: An einem Wasserstrahl wird die Parabelform für unterschiedliche Richtungen des "Wurfs" gezeigt

Zunächst gilt für die Anfangsgeschwindigkeit:

$$\vec{v}(\vec{0}) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos \varphi \\ 0 \\ v_0 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Die Bewegungsgleichung ist:  $\vec{F} = -m\vec{g} = m\vec{a}$ , woraus folgt:

$$\begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos \varphi \cdot t \\ 0 \\ v_0 \cdot \sin \varphi \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Wir lösen  $x(t)$  nach  $t$  auf und setzen in  $z(t)$  ein:

$$z = v \cdot \sin \varphi \frac{x}{v_0 \cos \varphi} - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \varphi} = x \cdot \tan \varphi - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} x^2 \quad (2.36)$$

Wir haben auch hier eine "Wurfparabel" vorliegen, die wir nun noch etwas genauer analysieren wollen:

In Abb. 2.13 ist zunächst die Wurfparabel für den waagrechten Wurf, d. h für  $\varphi = 0$  gezeigt. Wir messen diese Parabel dadurch aus, dass wir eine Reihe von Stäben entlang der x-Achse anbringen (s. Abb. 2.13 (links)). In Abb. 2.13 (rechts) ist einer dieser Stäbe an der Position  $x_0$  gezeichnet. Die z-Koordinate des Wasserstrahls hat hier den Wert  $-gx_0^2/2v_0^2$ , die Länge des Stabes also den Wert  $gx_0^2/2v_0^2$ . Man beachte außerdem, dass man bei vorgegebenen Stäben, die in Abständen  $x_n$  angebracht sind und die Länge  $L_n = ax_n^2$  haben, die "richtige" Parabel dadurch einstellen kann, dass man die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  so wählt, dass  $a = g/2v_0^2$  gilt.

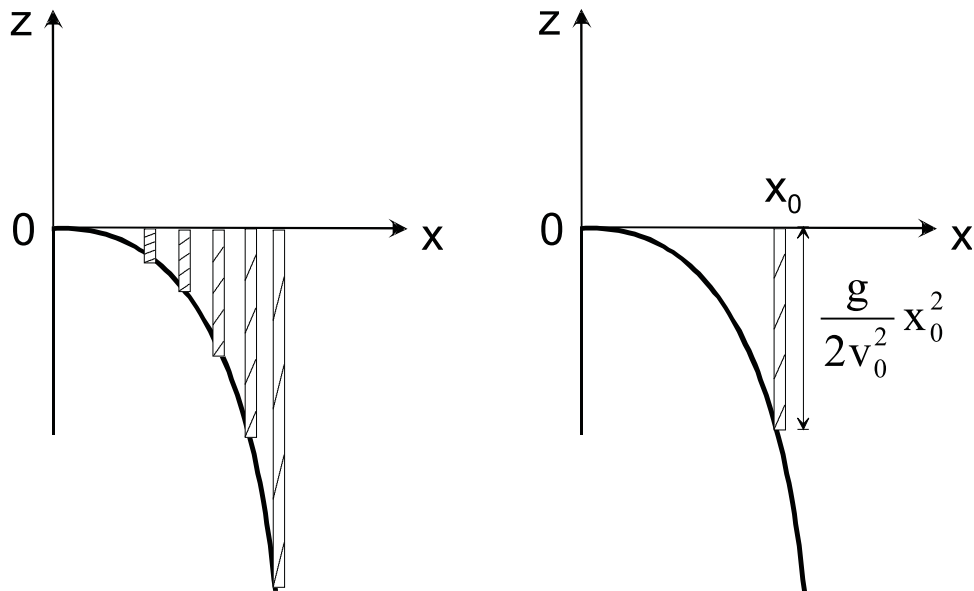


Abbildung 2.13: Ein waagrecht austretender Wasserstrahl wird durch eine Reihe von Stäben ausgemessen.

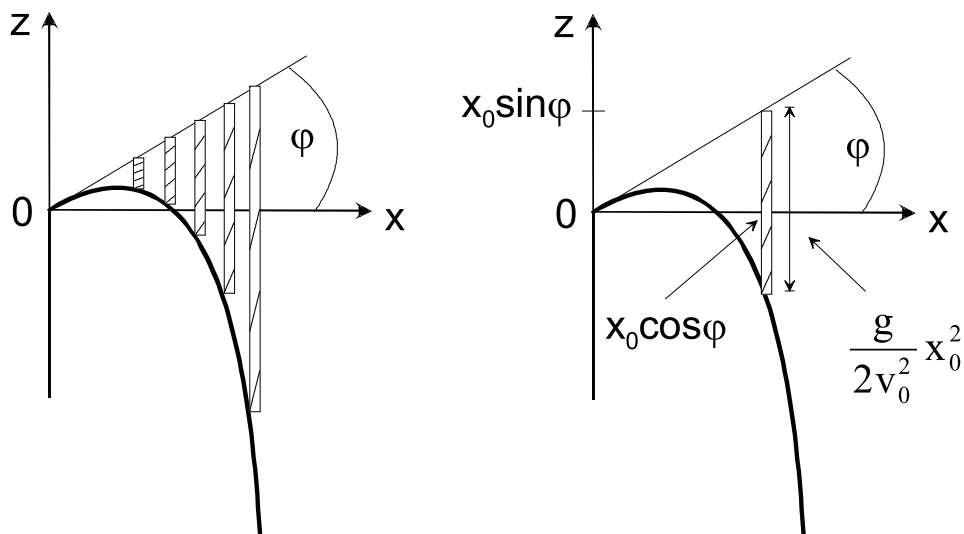


Abbildung 2.14: Der Wasserstrahl und die Messtäbe aus Abb. 2.13 werden um den Winkel  $\varphi$  gekippt.

Wir kippen nun den Wasserstrahl so, dass  $\vec{v}_0$  mit der x-Achse den Winkel  $\varphi$  einschließt. Gleichzeitig kippen wir die Aufhängungspunkte der Stäbe (d. h. die ehemalige x-Achse) um den gleichen Winkel  $\varphi$  (s. Abb. 2.14).

Dabei bekommt der Aufhängungspunkt des Stabes bei  $x_0$  die neuen Koordinaten  $x = x_0 \cos \varphi$  und  $z = x_0 \sin \varphi$ . Der Wasserstrahl wird ganz allgemein durch die Gleichung  $z(x) = x \tan \varphi - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} x^2$  beschrieben. Wir setzen hier für  $x$  den Wert  $x_0 \cos \varphi$  ein und

erhalten:

$$z(x_0) = (x_0 \cos \varphi) \tan \varphi - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} (x_0 \cos \varphi)^2 = x_0 \sin \varphi - \frac{g}{2v_0^2 x_0^2}. \quad (2.37)$$

Die Länge des Stabes war  $gx_0^2/2v_0^2$ . Der neue Aufhängungspunkt liegt bei  $z = x_0 \sin \varphi$ . Vergleichen wir dies mit obigem Ausdruck für  $z(x_0)$ , so sehen wir, dass das untere Ende des Stabes wiederum die Wasserstrahlparabel berührt. Wir können also mit unseren Stäben die Wasserstrahlparabel für alle Winkel  $\varphi$  ausmessen. Genau dies ist in Abb. 2.14 gezeigt.

## 2.4.2 Vektoreigenschaften von Kräften

Wir betrachten dazu ein zunächst **Stahlseil**, das wie in Abb.2.15 (links) gezeichnet zwischen zwei Wänden eingespannt ist. In das Seil ist eine Feder eingebaut, die Zugkraft im Seil misst. Hängt man nun in die Mitte des Seils eine Masse  $m$ , so wird das Seil wie in Abb. 2.15 (rechts) gezeigt um einen Winkel  $\varphi$  ausgelenkt.

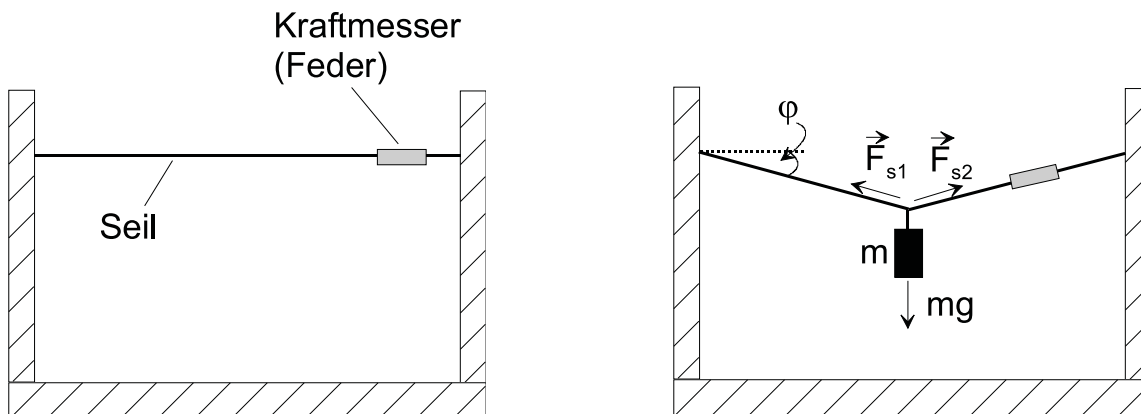


Abbildung 2.15: *Stahlseil, an das eine Masse  $m$  gehängt wird.*

In den beiden Hälften des Seils wirken nun die Kräfte  $\vec{F}_{s1}$  bzw.  $\vec{F}_{s2}$ , die wie in Abb. 2.15 (rechts) gezeigt parallel zu den Seilstücken gerichtet sind. Aus Symmetriegründen sind die Beträge dieser Kräfte gleich;  $|\vec{F}_{s1}| = |\vec{F}_{s2}| = F_s$ . Nur die Anteile  $F_s \cdot \sin \varphi$  wirken der Gewichtskraft  $mg$  entgegen.

Wir haben also  $2 \cdot F_s \cdot \sin \varphi = mg$ , oder  $F_s = mg/(2 \sin \varphi)$ .

Man beachte hierbei, dass  $F_s$  für  $\varphi \rightarrow 0$  ins Unendliche wächst. Wollten wir also das Seil wieder waagrecht spannen, würde dies nicht gelingen, sondern das Seil würde schlicht irgendwann reißen.

Eine quantitative Auswertung für verschiedene Massen  $m$  ist in Tab. 2.1 angegeben.

Die Abb. 2.16 zeigt die Funktion  $1/(2 \sin \varphi)$ , die das Verhältnis  $F_s/mg$  angibt. Für  $\varphi = 90^\circ$  ist die Funktion gleich  $1/2$ ; jede Seilhälfte kompensiert  $mg/2$ . Für einen Winkel von  $30^\circ$  ist  $1/(2 \sin \varphi)$  gleich 1, für  $5^\circ$  bereits 5.7.

In einem zweiten Versuch betrachten wir die **Kräfte**, die eine Masse  $M$  **auf der schiefen Ebene** erfährt. Die Ebene ist um den Winkel  $\varphi$  geneigt (s. Abb. 2.17). Auf  $M$  wirkt in  $-z$ -Richtung die Gewichtskraft  $Mg$ . Die Kraftkomponente senkrecht zur Ebene ist  $M \cdot g \cdot \cos \varphi$ ,

m [kg]	z [cm]	$F_s/g$ [kg]	$\sin \varphi \approx \varphi \approx z/L$	$mL/z$ [kg]
1	6.5	7.5	0.13	7.5
2	9.5	9.5	0.20	10.2
5	16	16	0.33	16.25

Tabelle 2.1: Verschiedene Massen  $m$  am Stahlseil der Abb. 2.15. Die Länge des Seils ist  $2L = 97.5$  cm. Die Auslenkung aus der Horizontalen ist  $z$ ; entsprechend  $\sin \varphi \approx \varphi \approx z/L$

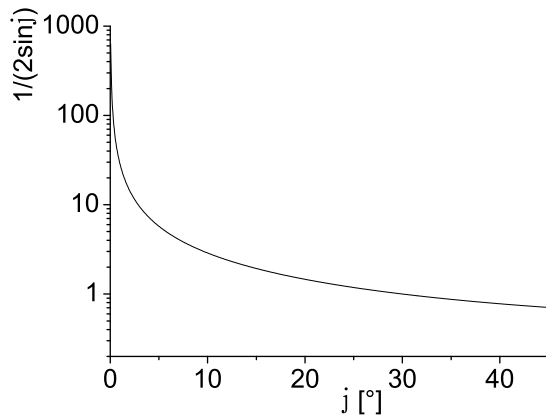


Abbildung 2.16: Funktion  $1/(2 \sin \varphi)$  für Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$

die Komponente parallel zur Ebene ist  $M \cdot g \cdot \sin \varphi$  (Hangabtriebskraft). Die Masse  $M$  ist mit einer zweiten Masse  $m$  über eine Umlenkrolle verbunden. Durch diese Masse wirkt eine Kraft  $m \cdot g$  auf  $M$ , die der Tangentialkomponente  $M \cdot g \cdot \sin \varphi$  entgegengerichtet ist. Man findet nun, dass für das Verhältnis  $\frac{M}{m} = \frac{2}{1}$  Kräftegleichgewicht herrscht, wenn  $\varphi = 30^\circ$  ist, d. h. für  $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ .

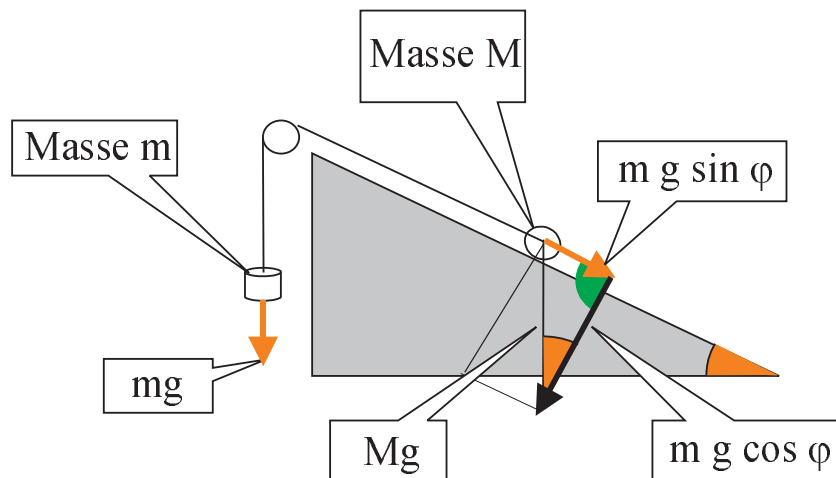


Abbildung 2.17: Masse  $M$  auf der schiefen Ebene. (aus Skript Ihringer)

Es sei hier angemerkt, dass die Kraftkomponente  $M \cdot g \cdot \cos \varphi$  durch die "Zwangskraft" kompensiert wird, die  $M$  auf der Auflage, d. h. der schiefen Ebene hält.

### 2.4.3 Federkräfte; Hooksches Gesetz

Wir hatten Federn bzw. Federkräfte ja bereits bei der Einführung der schweren Masse kurz kennengelernt. Hier hatten wir gesehen, dass eine Feder, die durch die Gewichtskraft  $mg$  belastet war, um eine Strecke  $\Delta z$  gedehnt wurde, die proportional zur angehängten Masse  $m$  war.

Wir können die Federkraft nun etwas genauer fassen:

$$F_{\text{Feder}} = C \cdot \Delta z \quad (2.38)$$

Dies ist das **Hooke'sche Gesetz**. Die Kraft, die eine Feder auf einen Massenpunkt ausübt, wächst proportional zur Dehnung der Feder. Die "Proportionalitätskonstante  $C$  ist die Federkonstante".

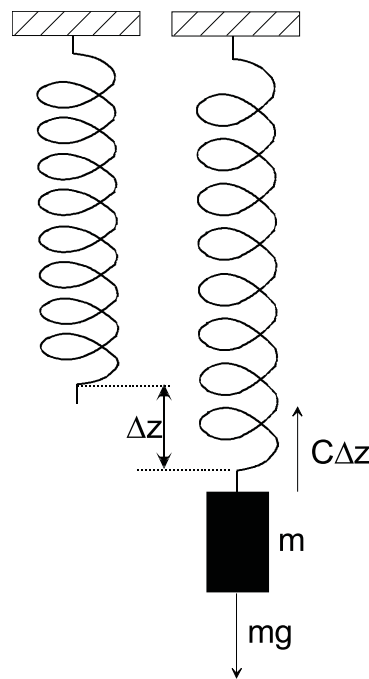


Abbildung 2.18: Zum Hookeschen Gesetz

Im Kräftegleichgewicht gilt also:  $mg = C \cdot \Delta z$

#### Parallel- und Reihenschaltungen von Federn

Wenn wir an eine Masse  $m$  zwei gleiche Federn parallel hängen, beobachten wir, dass die Auslenkung  $\Delta z$  lediglich halb so groß ist wie im Fall einer Feder gleicher Federkonstante. Wenn wir dagegen die zwei Federn hintereinander hängen, dann verdoppelt sich die Auslenkung (Abb. 2.19).

Wir können auch sagen, dass die beiden parallelen Feder sich wie *eine* Feder verhalten, die die *doppelte* Federkonstante  $2C$  hat. Die Reihenanordnung der beiden Federn entspricht ganz analog *einer* Feder mit der *halben* Federkonstanten  $\frac{C}{2}$ .

Im Fall der parallel geschalteten Federn gilt:  $F_{\text{Feder},1} + F_{\text{Feder},2} = mg$ , d. h.  $C\Delta x + C\Delta x = mg$  bzw.  $2C\Delta x = mg$ .



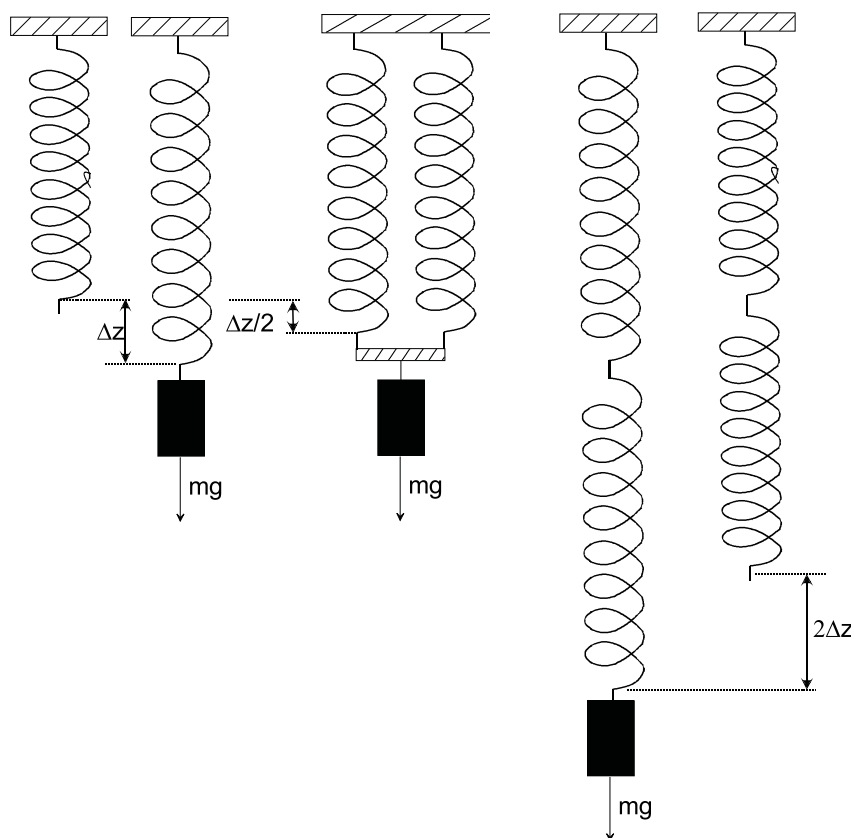


Abbildung 2.19: Parallel- und Reihenschaltungen von Federn gleicher Federkonstante  $C$ . Von links nach rechts: unbelastete Feder; eine Feder mit Masse  $m$  belastet; 2 parallele Federn mit Masse  $m$  belastet; zwei Federn in Reihe mit mit Masse  $m$  belastet.

Hieraus folgt:  $\Delta z = \frac{mg}{2C}$

Wir können dies auch sofort auf  $N$  Federn mit unterschiedlichen Federkonstanten  $C_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) verallgemeinern:

$$mg = \sum_{k=1}^N C_k \Delta z \quad \text{oder} \quad \Delta z = mg / \left( \sum_{k=1}^N C_k \right) \quad (2.39)$$

**Bei parallelgeschalteten Federn summieren sich also die Federkonstanten** der einzelnen Federn.

Im Fall der Reihenschaltung greift an jeder der beiden Federn die Kraft  $mg$  an (gilt auch allgemein bei  $N$  Federn). Jede der Federn wird also gemäß dem Hookeschen Gesetz um  $\Delta z_k = mg/C_k$  ausgelenkt. Die Gesamtauslenkung beträgt

$$\Delta z = \sum_{k=1}^N \Delta z_k = mg \sum_{k=1}^N \frac{1}{C_k}. \quad (2.40)$$

Die **Federkonstanten** sind also **bei Reihenschaltungen reziprok zu addieren**. Bei zwei Federn mit gleichen Federkonstanten  $C$  ergibt dies

$$\frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C} \quad (2.41)$$

Wir wollen zum Abschluss noch die **Energie einer Feder** mit der Federkonstanten  $C$  berechnen. Wenn wir die Feder um die infinitesimale Länge  $dz$  auslenken, verrichten wir die Arbeit  $F(z) \cdot dz$ . Bei Auslenkung von 0 auf  $\Delta z$  beträgt die gesamte Arbeit:

$$W = \int_0^{\Delta z} D \cdot dz = \int_0^{\Delta z} Cz \cdot dz = C \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{\Delta z} = \frac{C}{2} (\Delta z)^2. \quad (2.42)$$

Diese Arbeit ist (bei Vernachlässigung von Reibungseffekten) als innere Energie in Feder gespeichert. Die Energie der Feder beträgt damit

$$E_{\text{pot}} = \frac{C}{2} (\Delta z)^2 \quad (2.43)$$

wächst also quadratisch mit der Auslenkung  $\Delta z$ .

## 2.5 Federpendel, mathematisches Pendel und Uhren

### 2.5.1 Das Federpendel

Wir haben im letzten Abschnitt Federn betrachtet, die *statisch* an unterschiedlichen Federanordnungen hingen. In diesem Abschnitt wollen wir einen Schritt weitergehen und untersuchen, auf welche Weise sich diese Masse  $m$  bewegt, wenn sie aus ihrer Ruhelage ausgelenkt und dann losgelassen wird.

Wir beobachten, dass die Masse symmetrisch um diese Ruhelage  $z_0$  auf und ab schwingt (s. Abb. 2.20 (links)), wobei sie nach einiger Zeit wieder zur Ruhe kommt. Die Auslenkung aus der Ruhelage sei anfänglich  $\pm\Delta z(0)$ . Tragen wir die  $z$ -Koordinate der Masse als Funktion der Zeit auf, so ergibt sich qualitativ die in Abb. 2.20 (rechts)) gezeigte Kurve.

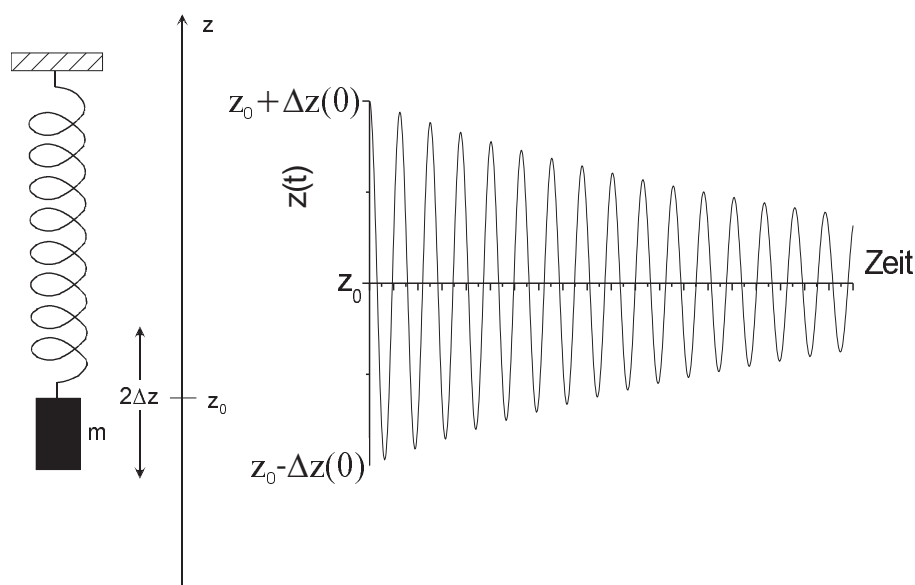


Abbildung 2.20: An einer Feder schwingende Masse  $m$ : (links) Schemazeichnung; (rechts) Position  $z(t)$  der Masse als Funktion der Zeit  $t$ .

Wir wollen nun die Beobachtungen auf der Basis der Newtonschen Gleichungen grob<sup>3</sup> analysieren.

Wir stellen zunächst die **Bewegungsgleichung** auf, wobei wir den Einfluss von **Reibung vernachlässigen**.

Zunächst wurde die unbelastete Feder ( $z$ -Koordinate des Aufhängepunkts der unbelasteten Feder:  $z = 0$ ) durch Anhängen der Masse  $m$  gemäß dem Hooke'schen Gesetz gedehnt, bis die Ruhelage  $z_0$  erreicht wurde. Diese Ruhelage bestimmt sich aus dem Kräftegleichgewicht  $mg = Cz_0$ . Lenken wir die Feder um eine Distanz  $-\Delta z$  nach unten aus, so *vergrößert* sich die Federkraft auf  $C(z_0 + \Delta z)$ . Die Summe aus Gewichtskraft und Federkraft wirkt also in Richtung  $+z$ . Lenken wir umgekehrt die Masse um  $\Delta z$  nach oben, so *verringert* sich die Federkraft auf  $C(z_0 - \Delta z)$ . Die Summe aus Gewichtskraft  $mg$  und Federkraft wirkt in Richtung  $-z$ .

<sup>3</sup>Eine genaue theoretische Beschreibung finden Sie in den Theorie-Abschnitten 2.8 bis 2.9.

Generell erhalten wir:

$$m\ddot{z} = F_{\text{Feder}} - mg = -C \cdot z - mg \quad (2.44)$$

Wenn die Masse  $m$  ruht, ist  $\ddot{z} = 0$  und wir erhalten die Ruhelage  $z_0$  aus  $0 = -Cz_0 - mg$ . Wir können nun  $mg$  aus Gleichung 2.44 unter Benutzung von  $mg = -Cz_0$  eliminieren und erhalten<sup>4</sup>:

$$m\ddot{z} = -C \cdot (z - z_0) \quad (2.45)$$

Unterstellen wir, dass das Pendel auf Grund von Reibungseffekten - die wir in Gleichung 2.45 vernachlässigt haben - wieder zur Ruhe kommt, dann legt die beobachtete Bewegung der Masse  $m$  nahe, einen

$$\textbf{Ansatz 1:} \quad \mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_0 + \Delta \mathbf{z} \cdot \cos \omega t \quad (2.46)$$

zu versuchen. Setzen wir dies in Gleichung 2.45 ein, so erhalten wir mit  $\dot{z} = -\Delta z \cdot \omega \sin \omega t$ ,  $\ddot{z} = -\Delta z \cdot \omega^2$ :

$$-m \cdot \Delta z \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t = -C \cdot \Delta z \cdot \cos \omega t \quad (2.47)$$

Wir kürzen  $\Delta z \cdot \cos \omega t$  und erhalten:

$$\omega^2 = \frac{C}{m} \quad \text{oder} \quad \omega = \sqrt{\frac{C}{m}} \quad (2.48)$$

Offensichtlich hat also  $\omega$  einen ganz bestimmten, durch  $C$  und  $m$  bestimmten Wert, die "Eigenfrequenz" des Pendels.

Hätten wir einen **Ansatz 2:**  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_0 + \Delta \mathbf{z} \cdot \sin \omega t$  gewählt, so hätte auch dieser die Bewegungsgleichung Gleichung 2.45 gelöst, wobei wir wiederum  $\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$  erhalten hätten. Ebenso hätten wir einen **Ansatz 3:**  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_0 + \Delta \mathbf{z}_1 \cdot \sin \omega t + \mathbf{z}_2 \cdot \cos \omega t$  oder einen **Ansatz 4:**  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_0 + \Delta \mathbf{z}_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$  machen können. Es stellt sich also die Frage, wie viele Ansätze Gleichung 2.45 lösen.

Es zeigt sich (Näheres siehe Abschnitt 2.6):

Eine "lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung" wie die Gleichung Gleichung 2.45 besitzt genau zwei unabhängige Lösungen, z. B. Ansatz 1 und Ansatz 2. Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination aus diesen beiden Lösungen, etwa in der Form des Ansatzes 3. Der Ansatz 4 lässt sich in diese Linearkombination umrechnen.

Die Linearkombination des Ansatzes 3 enthält zwei<sup>5</sup> noch nicht näher bestimmte Parameter  $\Delta z_1$  und  $\Delta z_2$ . Diese können wir durch Anfangsbedingungen für  $z(t=0)$  und für  $\dot{z}(t=0)$  festlegen.

Es sei beispielsweise  $t=0$  am oberen Umkehrpunkt. Wir haben dann:  $z(t=0) = z_0 + \Delta z(0)$  und  $\dot{z}(t=0) = 0$ .

Ansatz 3 liefert:  $z(t=0) = z_0 + \Delta z_2$ , sowie  $\dot{z}(t=0) = \omega \Delta z_1$ .

Wegen  $\dot{z}(t=0) = 0$  ist  $\Delta z_1 = 0$  und wegen  $z(t=0) = z_0 + \Delta z(0)$  ist  $\Delta z_2 = \Delta z(0)$ .

Im **Experiment** überprüfen wir einige Eigenschaften des Federpendels:

<sup>4</sup>Es liegt an dieser Stelle nahe, den Koordinatenursprung nach  $z_0$  zu verlegen. Wir wollen hier aber darauf verzichten.

<sup>5</sup>Die Ruhelage  $z_0$  ist kein freier Parameter, sondern durch  $z_0 = -mg/C$  gegeben.

1. Die Unabhängigkeit der Schwingungsdauer  $T$  bzw der Kreisfrequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  von der Amplitude
2. Die Wirkung unterschiedlicher Federkonstanten; Überprüfung  $\omega \propto \sqrt{C}$
3. Der Einfluss unterschiedlicher Massen; Überprüfung  $\omega \propto \sqrt{\frac{1}{m}}$

Zum Abschluss dieses Abschnittes über die ungedämpfte Schwingung eines Federpendels wollen wir einige **Betrachtungen zur Energie des Pendels** anstellen.

Abb. 2.21 stellt zunächst die Energie  $mgz + \frac{1}{2}Cz^2$  des Federpendels graphisch dar (genauer gesagt die normierte Energie  $\frac{E_{pot}}{mg|z_0|} = \frac{z}{|z_0|} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_0}\right)^2$ .) Die Energie wächst quadratisch vom Minimum bei  $z_0 = -mg/C$  (bzw.  $z/|z_0| = -1$ ) aus an. Genau in diesem Minimum ist die Ruhelage der belasteten Feder. Wenn die Masse schwingt, wächst die Energie symmetrisch um  $z_0$  herum an; man erkennt sofort, dass die Schwingung symmetrisch um  $z_0$  sein wird.

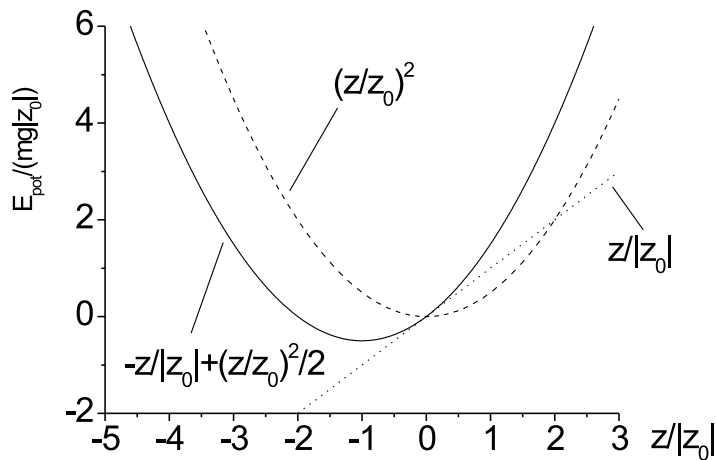


Abbildung 2.21: Normierte Energie  $\frac{E_{pot}}{mg|z_0|} = \frac{z}{|z_0|} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_0}\right)^2$  eines mit einer Masse  $m$  belasteten Federpendels zusammen mit den beiden Summanden  $z/|z_0|$  und  $(z/z_0)^2/2$ .

Betrachten wir nun "zu Fuß" die Energien, die auftreten, wenn wir die Masse  $m$  an die ungelastete Feder hängen und dann loslassen:

- Zunächst müssen wir die Masse  $m$  eine gewisse Höhe  $h$  (von Tisch bis zum Aufhängepunkt  $z = 0$  hochheben, was die potentielle Energie der Masse erhöht.
- Wir hängen jetzt die Masse an die Feder und lassen sie los. Die Masse "fällt" dann über die Ruhelage  $z_0$  hinaus bis zum unteren Umkehrpunkt  $z_0 - \Delta z$ . Hierbei wird verliert die Masse die potentielle Energie<sup>6</sup>  $-mg(z_0 - \Delta z)$  und spannt dabei die

<sup>6</sup>Man beachte, dass  $z_0 - \Delta z$  eine negative Zahl ist.

Feder, deren Energie um  $\frac{1}{2}C \cdot (z - \Delta z)^2$  anwächst. Am unteren Umkehrpunkt ist die kinetische Energie der Masse gleich null, so dass gilt:

$$-mg(z_0 - \Delta z) = \frac{1}{2}C \cdot (z_0 - \Delta z)^2 \quad (2.49)$$

oder  $z_0 - \Delta z = -2 \cdot \frac{mg}{C}$ , was gerade  $2z_0$  ist.

- Die Masse schwingt dann zurück. Bei  $z = z_0$  ist die Energie der Feder  $\frac{1}{2}Cz_0^2$ , und der Verlust an potentieller Energie im Gravitationsfeld gegenüber  $z = 0$  beträgt  $-mgz_0$ . Die Differenz  $-mgz_0 - \frac{1}{2}Cz_0^2$  tritt jetzt als kinetische Energie der Masse  $m$  auf. Mit  $z_0 = -mg/C$  erhalten wir  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}Cz_0^2$ .  $E_{\text{kin}}$  ist bei  $z = 0$  also genauso groß wie die in der Feder gespeicherte Energie.

## 2.6 Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung für den Harmonischen Oszillator

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0,$$

ist ein Beispiel für eine Differenzialgleichung, bei der eine Funktion  $x(t)$  gesucht wird, die eben genau diese leichung erfüllt. Zur Klassifikation von verschiedenen Typen von Differenzialgleichungen führen wir die folgenden Definitionen ein:

- Eine Differenzialgleichung für eine gesuchte Funktion  $f(t)$  heisst **Differenzialgleichung n-ter Ordnung**, wenn in dieser Gleichung Ableitungen der Funktion  $f$  nach der Variablen  $t$  bis zur Ordnung  $n$  vorkommen. In unserem Beispiel (2.6) treten Ableitung der Funktion  $x$  nach der Zeit in nullter (das ist einfach die Funktion  $x(t)$  selbst) und zweiter Ordnung auf, es handelt sich also um einen Differenzialgleichung zweiter Ordnung nach der Zeit.
- Eine Differenzialgleichung heisst **linear** genau dann, wenn in jedem Term (Summand) die gesuchte Funktion oder eine ihre Ableitung linear auftritt. Eine Gleichung vom Typ

$$\frac{df}{dt} - \sqrt{f(t)} = 0$$

wäre also ein Beispiel für eine nicht lineare Differenzialgleichung, da die gesuchte Funktion in einer Wurzel auftritt.

- Eine Differenzialgleichung heisst **homogen**, wenn alle Terme in dieser Differenzialgleichung die gesuchte Funktion oder eine ihrer Ableitungen enthält. Ein Beispiel für eine nicht lineare Differenzialgleichung ist durch

$$\frac{df}{dt} = \alpha$$

gegeben. Häufig schreibt man alle Terme, die  $f$  und ihre Ableitungen enthalten auf die eine Seite der Gleichung und die übrigen, die  $f$  nicht enthalten, die sogenannten Inhomogenitäten, auf die andere Seite.

Nach diesen Kriterien ist das Beispiel (2.6) also eine lineare, homogene Differenzialgleichung zweiter Ordnung. Eine etwas allgemeinere Schreibweise für eine solche lineare, homogene Differenzialgleichung zweiter Ordnung ergibt sich durch

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \alpha \frac{df(t)}{dt} + \beta f(t) = 0.$$

Nehmen wir nun an, dass wir bereits 2 Lösungen  $f_1(t)$  und  $f_2(t)$  für diese Gleichung gefunden haben. (Wir werden später sehen, dass es für eine solche Differenzialgleichung zweiter Ordnung stets 2 voneinander unabhängige Lösungen gibt.) In diesem Fall ist auch die Linearkombination

$$f(t) = A f_1(t) + B f_2(t),$$

mit zwei Konstante  $A$  und  $B$ , die nicht von der Zeit  $t$  abhängen, eine Lösung der Differenzialgleichung (2.6). Zum Beweis dieser Behauptung berechnen wir die erste und zweite Ableitung von  $f$  nach der Zeit:

$$\frac{df(t)}{dt} = A \frac{df_1(t)}{dt} + B \frac{df_2(t)}{dt}, \quad (2.50)$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = A \frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} + B \frac{d^2 f_2(t)}{dt^2}. \quad (2.51)$$

Multipliziert man nun die Gleichung (2.50) mit  $\alpha$ , Gleichung (2.6) mit  $\beta$  und addiert diese beiden Gleichungen zu (2.51), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \alpha \frac{df(t)}{dt} + \beta f(t) &= \\ &= A \frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} + B \frac{d^2 f_2(t)}{dt^2} + \alpha \left[ A \frac{df_1(t)}{dt} + B \frac{df_2(t)}{dt} \right] \\ &\quad + \beta [A f_1(t) + B f_2(t)] \\ &= A \left[ \frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} + \frac{df_1(t)}{dt} + f_1(t) \right] + B \left[ \frac{d^2 f_2(t)}{dt^2} + \frac{df_2(t)}{dt} + f_2(t) \right] \\ &= A 0 + B 0 = 0, \end{aligned} \quad (2.52)$$

was bedeutet, dass die auch die in (2.6) definierte Funktion  $f(t)$  eine Lösung der Gleichung (2.6) ist. (Bei dem Übergang zur letzten Zeile in (2.52) wurde ausgenutzt, dass die Funktion  $f_i$  Lösungen der Gleichung (2.6) sind).

Dieses Ergebnis lässt sich natürlich sofort erweitern auf lineare homogene Differenzialgleichungen einer beliebigen Ordnung  $n$ .

Dieses allgemeine Ergebnis, dass die Überlagerung von Lösungen homogener linearer Differenzialgleichungen, wiederum eine Lösung dieser Gleichung liefern, wollen wir nun auf das Beispiel der Bewegungsgleichung (2.6) anwenden. Wir wissen oder können uns leicht davon überzeugen, dass die Funktionen

$$x_1(t) = \sin(\omega t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = \cos(\omega t)$$

Lösungen für die Bewegungsgleichung des Harmonischen Oszillators sind. Damit ist aber auch

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t),$$

eine Lösung. Da es für Differentialgleichung der Ordnung  $n = 2$  genau 2 unabhängige Lösung gibt, ist dies die allgemeine Form der Lösung. Zur Bestimmung der “richtigen” Lösung, denn nur eine eindeutige Lösung können wir zur Beschreibung zulassen, müssen wir noch die Konstanten  $A$  und  $B$  bestimmen. Es reicht also nicht aus, die Bewegungsgleichung für ein Problem zu formulieren, wir müssen auch noch 2 Zusatzinformationen liefern, damit die Lösung eindeutig ist. Diese Zusatzinformationen können wir z.B. durch 2 Aussagen über den Zustand des Systems zur Zeit  $t = 0$  machen, etwa in der Form, dass das Teilchen zur Zeit  $t = 0$  sich an der Stelle  $x_0$  befindet mit einer Geschwindigkeit von null:

$$x(0) = x_0 \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dt}(t = 0) = 0$$

Leiten wir (2.6) nach der Zeit ab und fordern diese Startbedingung

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t) \\ \underbrace{\quad}_{t=0} A\omega &= 0, \end{aligned} \tag{2.53}$$

so ergibt sich daraus sofort  $A = 0$ . Setzen wir dieses Ergebnis in (2.6) ein und berechnen  $x(t = 0)$ , so erhalten wir

$$x_0 = B \cos(\omega 0) = B$$

womit also die beiden Unbekannten  $A$  und  $B$  in (2.6) durch die Startbedingungen (2.6) festgelegt worden sind.

An diesem Beispiel sollte demonstriert werden wie man allgemein an die Bestimmung der gesuchten Koordinatenfunktion  $x(t)$  für die Bewegung eines Teilchens herangehen sollte in den folgenden Schritten:

- Stelle die Bewegungsgleichung für die gesuchte Funktion  $x(t)$  auf. Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit. Handelt es sich um eine Bewegung in 3 Raumrichtungen gibt es ein System von 3 gekoppelten Differentialgleichungen für die Koordinaten  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$ .
- Finde Lösungen dieser Differentialgleichungen: Dabei existieren stets 2 voneinander unabhängige Lösungen.
- Zur Bestimmung einer eindeutigen Lösung, müssen noch 2 zusätzliche Informationen geliefert werden. Dies sind z.B. die Startbedingungen, also etwa der Ort und die Geschwindigkeit des Teilchens zur Zeit  $t = 0$ .
- Sind die Bewegungsgleichungen homogen und linear, so kann die allgemeine Lösung in Form einer Linearkombination vom Typ (2.6) angesetzt werden und die Unbekannten aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich auch, dass die Bewegung eines Teilchens eindeutig für alle Zeiten bestimmt ist, wenn die Bewegungsgleichungen bekannt sind und Ort und Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt vorgegeben sind. Man bezeichnet diese Angabe von Ort und Geschwindigkeit auch als Position des Teilchens im **Phasenraum**, der durch Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten aufgespannt ist.



### 2.6.1 Mathematisches Pendel, Uhren und andere schwingende Systeme

Neben dem Federpendel existieren eine Vielzahl weiterer schwingender Systeme wie etwa das in Abb. 2.22 skizzierte mathematische Pendel, das um die Ruhelage  $\varphi = 0$  schwingt.

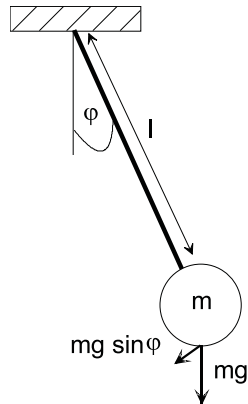


Abbildung 2.22: *Mathematisches Pendel*

Falls  $\varphi$  klein genug ist, so dass  $\sin \varphi \approx \varphi$  ist die Schwingung harmonisch, mit einer Frequenz  $\omega = \sqrt{g/l}$  (Details: siehe Abschnitt 2.6.2). Bei bekannter Länge  $l$  lässt sich aus der Schwingungsdauer  $T = 2\pi/\omega$  gut die Konstante  $g$  bestimmen. Umgekehrt kann die Länge  $l$  - etwa durch Verschieben der Masse  $m$  so eingestellt werden, dass die Periode  $T$  einen ganz bestimmten Wert - beispielsweise 1 s hat.

Dies wird bei der **Pendeluhr** ausgenutzt. Abb. 2.23 zeigt das Prinzip.

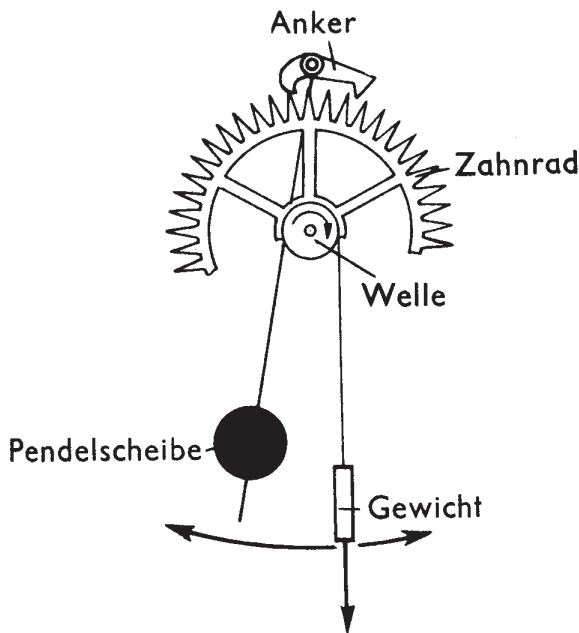


Abbildung 2.23: *Prinzip der Pendeluhr* (aus: "Wie funktioniert das? Bibliographisches Institut, Mannheim, 1963; Überlassung durch Hrn. Henne).

An der Welle greift ein Gewicht an, so dass das Zahnrad sich drehen müsste. Die Drehbewegung wird jedoch durch den Anker blockiert. Würde dieser sich periodisch heben und

senken, so würde sich das Zahnrad in jeder Periode um einen Zahn weiterdrehen und über weitere Zahnräder die Uhrzeiger antreiben. Diese periodische Bewegung des Ankers wird durch ein Pendel erreicht, das starr mit dem Anker verbunden ist. Hat das Pendel seinen größten Ausschlag erreicht, gibt der Anker einen Zahn frei und sperrt dann wieder. Bei der Freigabe des Zahns bekommt das Pendel gleichzeitig einen Stoß, was den Energieverlust des Pendels durch Reibung kompensiert.

Abb. 2.24 zeigt, wie die Bewegung des treibenden Zahnrads auf die Zeiger übertragen wird. Das Minutenrad inkl. Minutenzeiger wird vom Triebwerk in einer Stunde um  $360^\circ$  gedreht. Über das Wechselrad und den Wechseltrieb wird dabei das Stundenrad und der Stundenzeiger nur um  $1/12$  seines Umfangs weitergedreht.

Abb. 2.25 zeigt das Prinzip der Taschenuhr. Hier sorgt ein an einer Spiralfeder angebrachtes oszillierendes Rad (die Unruh) für die periodische Bewegung. Auch das Triebrad wird durch eine Spiralfeder (Aufzugsfeder) angetrieben.

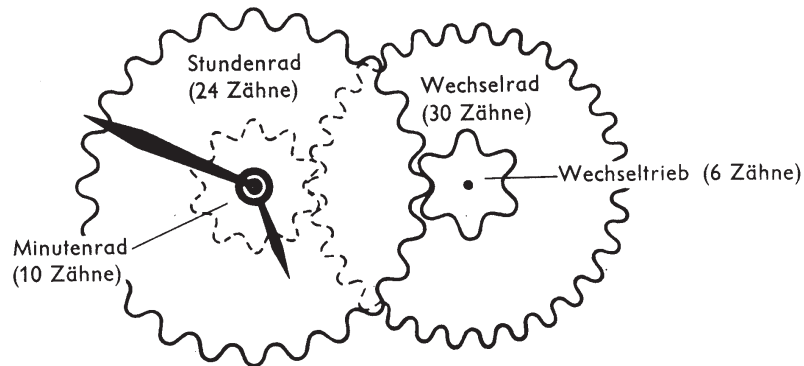


Abbildung 2.24: Bewegung des Minuten- und Stundenzeigers (aus: "Wie funktioniert das? Bibliographisches Institut, Mannheim, 1963; Überlassung durch Hrn. Henne).

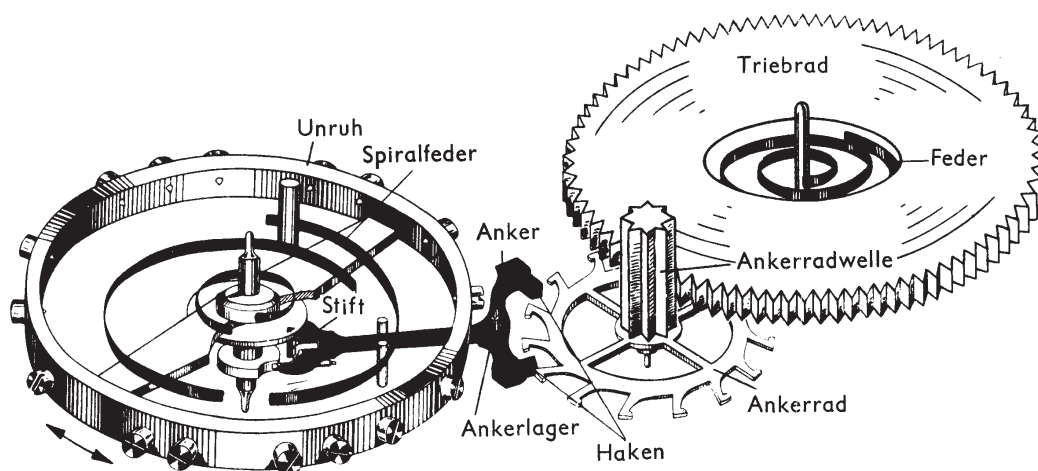


Abbildung 2.25: Antriebssystem einer Taschenuhr (aus: "Wie funktioniert das? Bibliographisches Institut, Mannheim, 1963; Überlassung durch Hrn. Henne).

Im folgenden listen wir einige Daten zur (europäischen) Geschichte der Uhr auf (aus: <http://hometown.aol.com/Reveille26/GeschUhr.html>; hier sind noch wesentlich mehr Daten zu finden)

um 1000

Der Mönch Gerbert aus Aurillac / Frankreich, der spätere Papst Silvester II, soll auf den Gedanken gekommen sein, eine Räderuhr zu bauen oder bauen zu lassen.

1240

Villard de Honnecourt beschreibt ein Objekt, das später als die Hemmung einer mechanischen Vorrichtung gedeutet wird.

1269

Der Begriff "Uhrmacher" taucht erstmals in einem Dokument auf.

1345

Die Stunde wird spätestens ab diesem Jahr in 60 Minuten, und diese in 60 Sekunden eingeteilt.

1410

In Montpellier wird der Turmwächter wegen wiederholter Trunkenheit seines Amtes enthoben und durch eine Uhr mit Schlagwerk ersetzt. Damit wird zum ersten Mal der Ersatz eines Menschen durch eine Maschine urkundlich erwähnt.

um 1511

Der Nürnberger Schlosser Peter Henlein baut sehr beliebte tragbare Uhren, die 40 Stunden gehen. Vermutlich gab es aber bereits zuvor tragbare Uhren.

1641 (nach anderen Quellen 1636, 1637)

Der italienische Astronom Galileo Galilei entwickelt die Idee einer Pendeluhr, unternimmt Versuche und erstellt Zeichnungen, setzt diese aber nicht in die Praxis um (vgl. Abb. 2.26). Angeblich soll Galileis Sohn Vincenzo diese Uhr gebaut und in einem wahnhaften Anfall wieder zerstört haben.

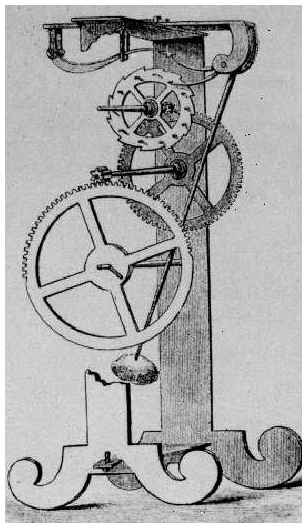


Abbildung 2.26: *Galileis Entwurf einer Pendeluhr*, Quelle: F. Balck, TU Clausthal;

<http://www.pe.tu-clausthal.de/AGBalck/vorlesung/server/mess2001/>

1645

(nach anderer Quelle 1656) Christiaan Huygens baut die erste Uhr mit Pendel (vg. Abb. 2.27). Nach einer Quelle sind ihm die Erkenntnisse Galileis bekannt, nach anderer Quelle hingegen nicht. 1657 meldet Huygens diese Uhr zum Patent an.

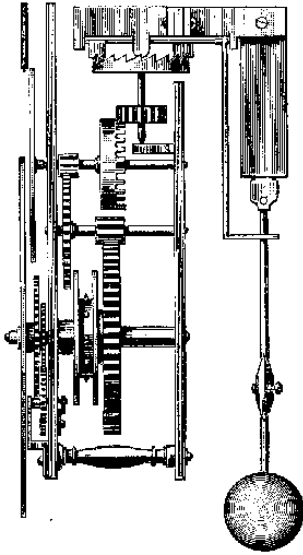


Abbildung 2.27: *Pendeluhr von Huyghens; aus Skript Ihringer; Quelle: Meyers Großes Konversationslexikon, 1908.*

1691

Clement baut die erste Pendeluhr mit Ankerhemmung.

1730

Anton Ketterer aus Schönwald im Schwarzwald baut die erste Kuckucksuhr.

um 1765

Im Schwarzwald werden die ersten Pendeluhren gebaut anstelle der bis dahin gebräuchlichen Waaguhren.

1927

W. A. Marrison entwickelt in den USA die erste Quarzuhr.

*(hier wird durch den sog. piezoelektrischen Effekt eine Art "Stimmgabel" aus Quarz durch Anlegen einer Wechselspannung zum Schwingen angeregt und elektronisch geregelt.*

## 2.6.2 Mathematisches Pendel

Als ein Pendel bezeichnet man eine Masse  $m$ , die über einen Faden oder eine Stange der Länge  $l$  im Schwerfeld der Erde aufgehängt und dort frei schwingen kann. Unter dem Begriff "Mathematisches Pendel" versteht man ein Pendel, bei dem man die Masse als eine punktförmige Masse beschreiben kann und die Masse des Fadens oder der Stange für die Aufhängung gegenüber  $m$  vernachlässigen kann. Zur Behandlung des Mathematischen Pendels, das in Abb. 2.22 dargestellt ist, benutzen wir Zylinderkoordinaten und zwar in der Form, dass der Koordinatenursprung mit dem Aufhängepunkt des Pendels definiert ist, und die  $z$ -Achse senkrecht zur Schwingungsebene, das ist die Ebene der Darstellung in Abb. 2.22, steht. Die  $x$ -Achse zeigt vom Aufhängepunkt nach unten, so dass der Azimutwinkel  $\varphi$  mit dem Winkel für die Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage identifiziert wird.

Da wir nur eine Bewegung in der Schwingungsebene betrachten wollen, können wir die  $z$ -Komponente aller Vektoren ausser Acht lassen. So ergibt sich also für die Kraft, die auf

den Massenpunkt wirkt, die Zerlegung

$$\vec{F} = F_\rho \hat{e}_\rho + F_\varphi \hat{e}_\varphi, \quad (2.54)$$

wobei  $\hat{e}_\rho$  und  $\hat{e}_\varphi$ , die Basisvektoren für die entsprechenden Zylinderkoordinaten sind. Die Kraft  $\vec{F}$  ist die Kraft durch die Erdbeschleunigung, die den Betrag  $mg$  besitzt und senkrecht nach unten weist. Hinzu kommt aber noch die Kraft, mit der der Massenpunkt auf seiner Kreisbahn um den Aufhängepunkt gehalten wird. Diese Zusatzkraft bezeichnet man auch als Zwangskraft  $\vec{Z}$ , da sie den Massenpunkt auf die Kreisbahn mit konstantem Abstand  $\rho = l$  zum Aufhängepunkt (gleichzeitig der Koordinatenursprung) hält. Diese Zwangskraft hat nur eine Komponente in Richtung  $\hat{e}_\rho$ , die wir mit  $Z_\rho$  bezeichnen. Daraus ergeben sich die Komponenten

$$\begin{aligned} F_\rho &= mg \cos(\varphi) + Z_\rho \\ F_\varphi &= -mg \sin(\varphi). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Die Newtonsche Bewegungsgleichung liefert dann

$$\vec{F} = F_\rho \hat{e}_\rho + F_\varphi \hat{e}_\varphi = m(a_\rho \hat{e}_\rho + a_\varphi \hat{e}_\varphi), \quad (2.56)$$

mit den Komponenten des Beschleunigungsvektors  $a_\rho$  und  $a_\varphi$ . Multipliziert man diese Gleichung mit dem Basisvektor  $\hat{e}_\rho$ , so erhält man wegen der Orthogonalität der Basisvektoren die Komponente der Bewegungsgleichung in radialer Richtung

$$mg \cos(\varphi) + Z_\rho = m a_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2), \quad (2.57)$$

wobei wir den Ausdruck für die radiale Beschleunigung aus (2.1.1) übernommen haben. Für die Masse gilt  $\rho = l$  also auch  $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ . Damit können wir (2.57) umformen nach

$$Z_\rho = -mg \cos(\varphi) - ml\dot{\varphi}^2. \quad (2.58)$$

Multipliziert man Gleichung (2.56) mit dem Basisvektor  $\hat{e}_\varphi$ , so erhält man die zweite Komponente der Bewegungsgleichung

$$-mg \sin(\varphi) = ma_\varphi = m(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) = ml\ddot{\varphi},$$

die wir umschreiben in

$$l\ddot{\varphi} = -g \sin(\varphi) = -g \left\{ \varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 + \dots \right\}, \quad (2.59)$$

wobei der Ausdruck in den geschweiften Klammern die ersten 3 Glieder der Taylorreihe für die Sinusfunktion darstellt. Für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage, also kleine Winkel  $\varphi$  ist es eine akzeptable Näherung nur das erste Glied dieser Taylorreihe zu berücksichtigen. Dies führt uns zu

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2.60)$$

Eine allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung lautet

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t + \delta).$$

Die Konstanten in dieser Lösung,  $A$  und  $\delta$  werden durch die Randbedingungen ( $\varphi$  und  $\dot{\varphi}$  zur Startzeit  $t = 0$ ) festgelegt. Für diese Funktion  $\varphi(t)$  können wir dann die Winkelgeschwindigkeiten

$$\dot{\varphi} = \omega A \cos(\omega t + \delta)$$

bestimmen und daraus mit (2.58) die Stärke der Zwangskraft.



## 2.7 Reibungskräfte

Nach diesem Exkurs über Uhren wollen wir uns wieder etwas näher mit der Physik der Schwingungsvorgänge befassen und als nächstes verschiedene Arten von **Reibungskräften** vorstellen:

Je nach Art des sich bewegenden Körpers und des Mediums, das seine Oberfläche berührt werden unterschiedliche Formen von Reibung beobachtet:

- liegt ein fester Körper auf einer Unterlage auf haben wir zunächst die **Haftreibung**. Ihr Betrag ist proportional zur Kraft ("Normalkraft"), mit der der Körper senkrecht auf die Unterlage drückt:  $\mathbf{F}_H = \mu_H \mathbf{F}_N$ , mit  $\mu_H \ll 1$ : **Haftreibungskoeffizient**

Die Haftreibung wirkt offensichtlich der Kraft entgegen, mit der man an dem Körper parallel zur Unterlage zieht. Setzt sich der Körper über eine trockene Unterlage in Bewegung, dann spricht man von "**trockener Reibung**" oder "**Coulomb-Reibung**". Der Körper kann gleiten ("**Gleitreibung**") oder rollen ("**Rollreibung**"). Auch hier gilt:  $\mathbf{F}_R = \mu \mathbf{F}_N$ , wobei  $\mu < \mu_H$  ist.

Die Coulomb-Reibung ist weitgehend von der Geschwindigkeit unabhängig, mit der sich der Körper über die Unterlage bewegt.

*Wir demonstrieren die Haft- und Gleitreibung im Versuch: Ein an einer Federwaage befestigter Körper wird auf ein Rollband gelegt und dieses dann mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegt.*

- bewegt sich ein Körper durch ein "Fluid" (Gas oder Flüssigkeit) so liegt
  - **Stokes'sche Reibung** vor, solange sich der Körper nicht zu schnell bewegt und nicht zu groß ist.  
Es gilt:  $F_r = \text{const.} \cdot v$ ,  
wobei  $\text{const.} = 6\pi\eta r$  für eine **Kugel mit Radius r**;  $\eta$  ist hierbei die "Viskosität" des Fluids
  - "**Newton'sche Reibung**" vor, wenn sich ein größerer Körper schnell bewegt. Diese Reibungskraft ist proportional zu  $v^2$ :

$$F_r = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2 \quad (2.61)$$

mit:  $\rho$ : Dichte des Fluids;

$A$ : Querschnitt des Körpers in Bewegungsrichtung;

$c_w$ : Widerstandsbeiwert

Die Stokes- und der Newton-Reibung gelten bei unterschiedlichen Strömungsvorgängen. Im Fall der Stokes-Reibung ist die Strömung laminar, bei der Newton-Reibung turbulent. Es sei außerdem angemerkt, dass es neben den obigen Reibungsmechanismen noch eine Reihe anderer Reibungsgesetze gibt. So ist die beispielsweise die Reibungskraft zwischen geölten oder geschmierten Flächen proportional zu  $\sqrt{v}$ .

Im Folgenden wird (im Abschnitt 2.8) die **Stokes'sche Reibung bei der Beschreibung des gedämpften Pendels** (ohne und mit äußerem Antrieb) angewendet.

## 2.8 Kleine Schwingungen

In der Theoretischen Physik betrachtet man häufig das Beispiel eines Massenpunktes, der sich im Potenzial des Harmonischen Oszillators

$$U(x) := \frac{1}{2}kx^2,$$

bewegt. Ein Grund für die Beliebtheit dieses Beispiels ist die Tatsache, dass man die Lösungen für die Bewegungsgleichungen in diesem Oszillatorpotenzial sowohl in der Mechanik als auch in der Quantenmechanik relativ einfach analytisch bestimmen kann. Ein zweiter Grund für die häufige Betrachtung dieses Beispiels ist aber die Tatsache, dass das Potenzial in vielen Fällen eine ganz gute Näherung für ein komplizierteres Problem darstellt.

Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir die Eigenschaften eines Potenzials eines zweiatomigen Moleküls als Funktion des Abstandes zwischen den beiden Atomen. Bei sehr großen Atomabständen,  $r = |\vec{r}|$ , spüren die Atome nichts voneinander, die potenzielle Energie ist eine Konstante, für die wir den Wert  $V(r) = 0$ , vereinbaren können. Bringt man die Atome näher zusammen, so gewinnt das System Energie, das Potenzial wird negativ, so wie das auch in der Abb. 2.28 bei mittleren und großen Abständen dargestellt ist. Bei sehr kleinen Abständen stoßen sich die positiven Ladungen der Atomkerne, die bei diesen Abständen nicht mehr durch die Elektronen abgeschirmt sind, ab. Diese repulsive Kraft wird durch ein Potenzial beschrieben was mit kleinerem Abstand  $r$  immer stärker ansteigt, so dass

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} > 0$$

die Kraft also in Richtung größerer Abstände wirkt. Dies führt schliesslich für kleine Abstände zu einer positiven potenziellen Energie (siehe auch Abb. 2.28). Die Atome ‐leben‐ es nicht so nahe zusammen zu sein, man muss deshalb eine Energie zuführen, um sie so nahe zusammenzubringen. Dies ist genau so wie wenn man eine Masse  $m$  im Schwerfeld der Erde auf eine größere Höhe transportiert. Auchh dazu muss Energie aufgebracht werden, was zu einer größeren potenziellen Energie der Masse  $m$  führt.

Dieses Verhalten des molekularen Potenzials bei sehr großen und sehr kleinen Abständen impliziert aber, dass es einen mittleren Relativabstand  $r_0$  gibt, bei dem das Potenzial minimal ist. Bei diesem Punkt gilt also

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r}(r_0) &= 0 \quad \text{und} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(r_0) &= k > 0. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Befinden sich die Atome bei diesem Abstand  $r_0$  so wirkt also keine Kraft, da ja die Ableitung des Potenzials nach dem Abstand verschwindet. Bei jeder Auslenkung aus dieser Ruhelage wirkt eine Kraft, die die Atome auf den optimalen Abstand  $r_0$  zurückzuführen versucht. Eine solche Auslenkung, die z.B. durch die Einstrahlung einer elektromagnetischen Welle verursacht werden könnte, würde also zu einer Schwingung des Moleküls um diesen Gleichgewichtsabstand  $r_0$  führen.



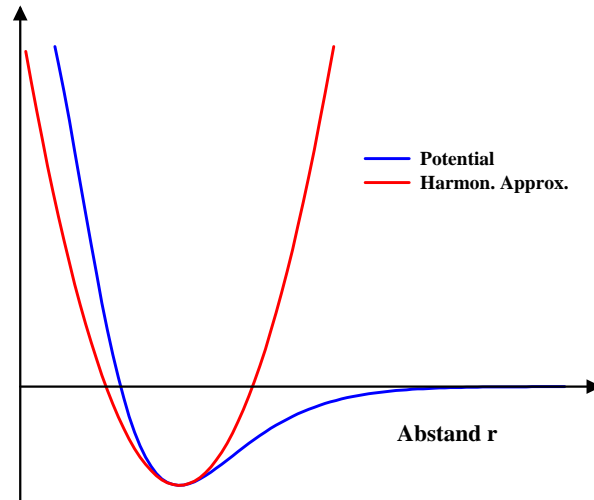


Abbildung 2.28: Schematische Darstellung für das Potenzial eines zweiatomigen Moleküls als Funktion des Relativabstandes und die Harmonische Näherung

Die Berechnung dieser Molekülschwingung kann bei komplizierten Potenzialformen  $V(r)$  recht aufwendig sein. Wenn jedoch die Störung des Moleküls nur zu kleinen Auslenkungen aus der Ruhelage führt, kann man versuchen das exakte Potenzial  $V(r)$  in der Nähe des Minimums durch die Taylorreihe zu entwickeln

$$\begin{aligned} V(r) &= V(r_0) + \frac{\partial V}{\partial r}(r_0)[r - r_0] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(r_0)[r - r_0]^2 + \dots \\ &\approx \text{Konst.} + \frac{1}{2} k [r - r_0]^2. \end{aligned} \quad (2.63)$$

In der zweiten Zeile haben wir die Terme dritter und höherer Ordnung vernachlässigt, was ja bei kleinen Abständen  $r - r_0$  gerechtfertigt ist. Ausserdem haben wir die Eigenschaften des Minimums aus (2.62) übernommen und finden so, dass das Potenzial für kleine Auslenkungen aus dem Minimum durch das Potenzial eines Harmonischen Oszillators approximiert wird, da ja eine Konstante im Potenzial irrelevant ist. Diese Harmonische Oszillatornäherung ist auch in Abb. 2.28) dargestellt.

Die Kraft auf ein Teilchen im Potenzial des Harmonischen Oszillators (2.8) berechnet sich als negativer Gradient des Potentials. Identifizieren wir nun die Auslenkung aus der Ruhelage mit

$$x = r - r_0$$

und betrachten den Fall einer Bewegung in dieser radialen Raumrichtung  $x$ , so erhalten wir für die Kraft:

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x} = -k x.$$

Die Kraft ist also linear in der Auslenkung aus der Ruhelage  $x$  und wirkt der Auslenkungsrichtung entgegen: bei positiven Werten von  $x$  wirkt die Kraft in die Richtung der negativen  $x$ -Achse, bei negativen Werten von  $x$  zieht sie das Teilchen parallel zur  $x$ -Achse. Dies entspricht dem Hookeschen Gesetz bei der Feder.

## 2.9 Gedämpfter Harmonischer Oszillator

In diesem Abschnitt wollen wir die Bewegung eines Massenpunktes betrachten, der sich in einer Raumrichtung  $x$  in einer Harmonischen Schwingung um die Ruhelage  $x = 0$  bewegen, beziehungsweise schwingen kann. Dies kann ein Massenpunkt sein, der an einer Feder hängt. Es kann aber auch ein Pendeln sein, von dem wir ja gesehen haben, dass wir bei kleinen Auslenkung aus der Ruhelage eine Bewegungsgleichung für den Winkel  $\varphi$  bekommen, die genau dem der Federschwingung entspricht. In jedem Fall haben wir eine lineare Rückstellkraft

$$F = -\frac{\partial V_{HO}}{\partial x} = -C x, \quad \text{mit} \quad V_{HO} = \frac{1}{2} C x^2.$$

Dabei steht  $x$  also z.B. für die Auslenkung der Feder aus der Ruhelage oder aber für den Winkel des Pendels oder auch für eine ganz andere Koordinate für die wir kleine Auslenkungen aus der Ruhelage betrachten. Wir sprechen in diesem Fall vom Problem des **Harmonische Oszillators** und bezeichnen das Potenzial  $V_{HO}$  als Harmonisches Oszillatorpotenzial. Die Kraft ist linear in der Auslenkung aus der Ruhelage  $x$  und wirkt der Auslenkungsrichtung entgegen: bei positiven Werten von  $x$  wirkt die Kraft in die Richtung der negativen  $x$ -Achse, bei negativen Werten von  $x$  zieht sie das Teilchen parallel zur  $x$ -Achse.

Wir wollen neben dieser Rückstellkraft des Harmonischen Oszillatorpotenzials auch noch eine Kraft berücksichtigen, die eine Reibung simuliert. Diese Kraft soll, was ja typisch für die Stokesche Reibung ist, mit der Geschwindigkeit zunehmen: Bei positiven Geschwindigkeiten, also Geschwindigkeiten in Richtung der  $x$ -Achse, soll die Kraft bremsend d.h. antiparallel zur  $x$ -Achse wirken, bei negativen Geschwindigkeiten entsprechend parallel. Dies erreicht man durch eine einfache Darstellung der Reibungskraft, der sogenannten Stokeschen Reibung

$$F_{\text{Reibung}} := -\alpha \dot{x}$$

Setzt man die Summe aus der Rückstellkraft des Harmonischen Oszillators (2.9) und dieser Stokeschen Reibung in die Newtonsche Bewegungsgleichung ein, so ergibt sich für ein Teilchen mit der Masse  $m$  die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -C x - \alpha \dot{x}.$$

Zur Lösung dieser Differenzialgleichung betrachten wir den Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Setzt man diesen Ansatz in die Bewegungsgleichung (2.9) ein, so ergibt sich

$$\{m\lambda^2 + C + \alpha\lambda\} e^{\lambda t} = 0.$$

Da die Exponentialfunktion von Null verschieden ist, muss der Ausdruck in der geschweiften Klammer identisch null sein, was zu der quadratischen Gleichung für die Unbekannte  $\lambda$  führt

$$\lambda^2 + \frac{\alpha}{m}\lambda + \frac{C}{m} = 0$$

mit den bekannten Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \frac{C}{m}}.$$

Zunächst wollen wir den Fall ohne Reibung betrachten, für den wir ja bereits 2 Lösungen

$$x_1(t) = \sin(\omega_0 t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = \cos(\omega_0 t) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}},$$

geraten haben, was dann ja zu der allgemeinen Lösung

$$x(t) = B_1 \sin(\omega_0 t) + B_2 \cos(\omega_0 t)$$

führt, wobei die Konstanten  $B_1$  und  $B_2$  durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind.

Der Fall ohne Reibung bedeutet, dass wir in (2.9)  $\alpha = 0$  zu setzen haben. In diesem Fall ist

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega_0.$$

Eine Lösung der Bewegungsgleichung erhält man also, wenn man den Wert  $\lambda_1 = i\omega_0$  in den Ansatz (2.9) einsetzt, eine weitere wenn man  $\lambda_2 = -i\omega_0$  benutzt. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung kann als Linearkombination dieser beiden Lösungen dargestellt werden und ergibt sich in der Form

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 \exp -i\omega_0 t.$$

Auf dem ersten Blick erscheint es etwas abwegig zu sein, dass wir die Auslenkung  $x(t)$  durch eine Funktion beschreiben wollen, die komplex ist. Bevor wir aber diese Lösung verwerfen, wollen wir uns zunächst in einem Einschub mit einigen Eigenschaften der komplexen Zahlen beschäftigen.

### 2.9.1 Einige Rechenregeln für komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl  $c$  kann in allgemeiner Form geschrieben werden

$$c = a + ib \quad \text{mit} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Dabei bezeichnet sind  $a$  und  $b$  reelle Zahl. Die Zahl  $a$  bezeichnet man als den **Realteil** von  $c$ ,  $b$  als den **Imaginärteil**. Ist  $b = 0$ , so ist  $c = a$  eine gewöhnliche reelle Zahl. Ist andererseits  $a = 0$ , so ist  $c = ib$  eine rein imaginäre Zahl.

Im Folgenden wollen wir die Addition und Multiplikation zweier komplexer Zahlen  $c_1$  und  $c_2$  betrachten, die jeweils durch die Realteile  $a_1, a_2$  und die Imaginärteile  $b_1, b_2$  definiert sind. Bei der Addition ergibt sich

$$c_1 + c_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

Der Realteile der Summe der komplexen Zahl  $c_1$  und  $c_2$  ist also gleich der Summe der Realteile  $a_1 + a_2$ . Entsprechendes gilt für den Imaginärteil. Bei der Multiplikation erhalten wir

$$\begin{aligned} c_1 c_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) &= a_1 a_2 + ib_1 a_2 + a_1 ib_1 + i^2 b_1 b_2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_2 b_1). \end{aligned} \tag{2.64}$$

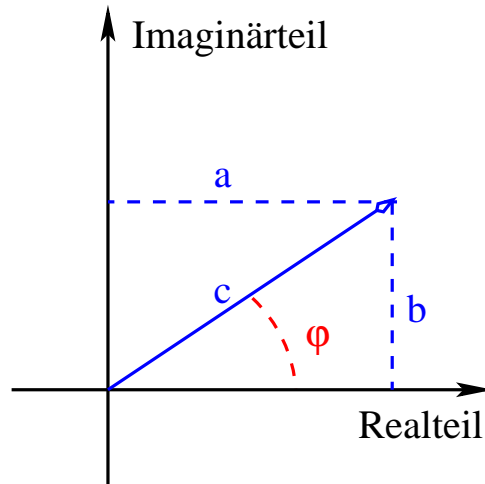


Abbildung 2.29: Darstellung einer komplexen Zahl durch Real- und Imaginärteil beziehungsweise in der Polardarstellung

Beim Übergang zur zweiten Zeile in dieser Gleichung haben wir ausgenutzt, dass  $i^2 = -1$  und die Terme nach Real- und Imaginärteil geordnet. Wir definieren nun die zu  $c$  **komplex konjugierte Zahl**  $c_*$  dadurch, dass sie den gleichen Realteil wie  $c$  besitzt aber einen Imaginärteil mit umgekehrtem Vorzeichen. Es gilt also für

$$c = a + ib \quad \text{ist} \quad c^* = a - ib.$$

Damit ist auch klar, dass die zu  $c^*$  komplex konjugierte Zahl  $c$  ist. Das Produkt

$$cc^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

ergibt eine positive reelle Zahl und wir bezeichnen deshalb

$$|c| = \sqrt{cc^*} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

als  $|c|$  Betrag der komplexen Zahl  $c$ . Die Bedeutung dieses Begriffes Betrag von  $c$  wird vielleicht aus der Skizze der Abbildung 2.29 deutlich. In dieser Darstellung wird jede komplexe Zahl durch einen Punkt in der Ebene, der Ebene der komplexen Zahlen, dargestellt. Die horizontale Koordinate repräsentiert den Realteil, die vertikale den Imaginärteil. Jede komplexe Zahl entspricht also einem Vektor in dieser Ebene, den wir entweder durch horizontale und vertikale Koordinate oder aber auch durch die Länge des Vektors und seine Richtung definieren können. Diese Richtung ist eindeutig definiert durch den Winkel  $\varphi$  des Vektors mit der horizontalen Achse (siehe Abb. 2.29). Wie man aus dieser Zeichnung auch entnehmen kann ist die Länge des Vektors zur Darstellung von  $c$  gerade der in (2.9.1) definierte Betrag und für den Winkel  $\varphi$  gilt:

$$\sin(\varphi) = \frac{b}{|c|} = \frac{\text{Imag}(c)}{|c|} \quad \text{und} \quad \cos(\varphi) = \frac{a}{|c|} = \frac{\text{Real}(c)}{|c|}.$$

Diese Beziehungen können wir aber auch umschreiben in der Form

$$c = a + ib = |c| (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)).$$

Eine elegantere Darstellung ergibt sich hierfür, wenn wir die **Eulersche Formel** benutzen:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi).$$

Zum Beweis dieser Eulerschen Formel betrachten wir die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

für das rein imaginäre Argument  $x = i\varphi$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} \\ &= 1 + i\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots \\ &= \left( \underbrace{1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots}_{=\cos \varphi} \right) + i \left( \underbrace{\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots}_{=\sin \varphi} \right). \end{aligned}$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile dieser Gleichung haben wir die Potenzen  $i^n$  ausmultipliziert und die ersten charakteristischen Glieder der Reihe explizit angegeben. In der dritten Zeile sind diese Glieder dann nach Real- und Imaginärteil geordnet, wobei man dann sieht, dass diese eingeklammerten Summen gerade den Reihenentwicklungen für die Kosinus- bzw. die Sinusfunktion entsprechen.

Mit dieser Eulerschen Formel ergibt sich die für die komplexe Zahl  $c$  in (2.9.1) die sogenannte Polardarstellung

$$c = |c|e^{i\varphi}.$$

Diese Polardarstellung ist gerade für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen sehr geschickt:

$$c_1 c_2 = (|c_1|e^{i\varphi_1}) (|c_2|e^{i\varphi_2}) = |c_1||c_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

## 2.9.2 Bearbeitung der komplexen Lösung

Mit diesem mathematischen Werkzeug können wir zur eigentlichen Aufgabe zurückkehren und die Lösung der Bewegungsgleichung für den Harmonischen Oszillator ohne Dämpfung in (2.9 weiter behandeln. Wir müssen lediglich noch die beiden Konstanten  $A_1$  und  $A_2$  bestimmen, die wir als komplexe Zahlen der Form

$$A_j = \beta_j + i\gamma_j$$

ansetzen. Diese Konstanten bestimmen wir aus den Anfangsbedingungen der betrachteten Bewegung, d.h. den Werten für die Position und die Geschwindigkeit des Teilchens zur Zeit  $t = 0$ , die mit  $x_0$  und  $v_0$  bezeichnet sein sollen. Setzt man  $t = 0$  in (2.9) ein, so ergibt sich

$$x_0 := x(t = 0) = A_1 + A_2 = (\beta_1 + i\gamma_1) + (\beta_2 + i\gamma_2)$$

Da die Position  $x_0$  eine reelle Zahl ist erhalten wir

$$\gamma_2 = -\gamma_1 \quad \text{und} \quad \beta_1 + \beta_2 = x_0.$$

Leitet man (2.9) nach der Zeit ab und setzt dann  $t = 0$  so ergibt sich als zweite Gleichung aus den Anfangsbedingungen

$$v_0 := v(t = 0) = i\omega_0 A_1 - i\omega_0 A_2 = i\omega_0(\beta_1 - \beta_2) - \omega_0(\gamma_1 - \gamma_2).$$

Da auch  $v_0$  reell ist bedeutet dies

$$\beta_1 - \beta_2 = 0 \quad \text{und} \quad \omega_0(\gamma_1 - \gamma_2) = v_0.$$

Zusammengefasst ergibt sich also aus (2.9.2) und (2.9.2)

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{x_0}{2} \quad \text{und} \quad -\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{v_0}{2\omega_0}$$

was eingesetzt in (2.9) zu der allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) + \frac{v_0}{2i\omega_0} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) \\ &= x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned} \tag{2.65}$$

Die Position des Teilchens  $x(t)$  wird also durch eine Kosinus beziehungsweise Sinusfunktion beschrieben. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  ist über (2.9) durch die Oszillatorkonstante  $k$  und die Masse  $m$  bestimmt. Die Amplitude und Startphase,  $\varphi$  der Schwingung sind durch die Anfangsbedingungen,  $x_0$  und  $v_0$ , festgelegt.

Dieser Startpunkt bezeichnet einen Punkt im (in diesem Fall) zweidimensionalen Phasenraum mit den Koordinaten  $x_0$  und  $v_0$ . Zu jedem anderen Zeitpunkt ist die Bewegung des Teilchens ebenfalls durch die Koordinaten  $x(t)$  aus (2.65) und der zugehörigen Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} v(t) &= -x_0 \omega \sin(\omega_0 t) + v_0 \cos(\omega_0 t) \\ &= -\omega_0 \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \sin(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned} \tag{2.66}$$

festgelegt. Die Bewegung des Teilchens beschreibt also eine Bahn oder Trajektorie im Phasenraum. Im Fall des ungedämpften Harmonischen Oszillators ist diese Trajektorie eine Ellipse oder, wenn die Skalierung auf den Achsen geeignet gewählt ist, ein Kreis (siehe Abb. 2.30), der bei der dort gewählten Anordnung der Koordinaten im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Durch den Startpunkt der Trajektorie ist die ganze Bahn eindeutig festgelegt. Dieses Prinzip gilt nicht nur für den hier behandelten Fall sondern ganz allgemein für die Lösung der Bewegungsgleichung. Die Bewegungsgleichung ist ja eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit, beziehungsweise ein System von solchen Differenzialgleichungen,

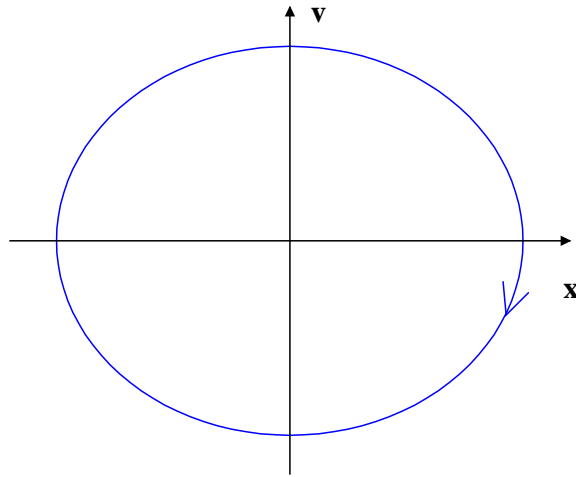


Abbildung 2.30: *Trajektorie des ungedämpften Harmonischen Oszillators im Phasenraum*

wenn wir mehr als eine Koordinate betrachten. Für eine solche Differenzialgleichung zweiter Ordnung existieren zwei linear unabhängigen Lösungen. Die allgemeine Lösung ist die entsprechende Linearkombination (wie in (2.9)). Die Koeffizienten der Überlagerung sind durch den Wert der Koordinate und der zugehörigen Geschwindigkeit zur Startzeit  $t = 0$  festgelegt. Bei  $N$  Koordinaten besitzt der Phasenraum die Dimension  $2N$  und man benötigt entsprechend  $2N$  Startwerte für die Koordinaten und Geschwindigkeiten.

### 2.9.3 Schwache Dämpfung

Im nächsten Schritt behandeln wir nun eine schwache Dämpfung, d.h. wir nehmen an, dass für den Koeffizienten  $\alpha$ , der ja in (2.9) die Stärke der Reibungskraft definiert, gilt:

$$\frac{\alpha^2}{4m^2} = \delta^2 < \frac{C}{m}.$$

In diesem Fall haben die Lösungen in der Gleichung (2.9) die Gestalt

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\frac{C}{m} - \delta^2} = -\delta \pm i\omega_1,$$

wobei die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  natürlich kleiner ist als die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  der ungedämpften Schwingung in (2.9). Mit dieser Darstellung der Konstanten  $\lambda$  ergibt sich die allgemeine Lösung für die Ortskoordinate analog zu (2.9) zu

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{(-\delta+i\omega_1)t} + A_2 e^{(-\delta-i\omega_1)t} \\ &= e^{-\delta t} A \cos(\omega_1 t + \varphi). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Dabei sind die Konstanten  $A_i$  beziehungsweise  $A$  und  $\varphi$  wieder durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Die Schwingung entspricht also einer eventuell phasenverschobenen Kosinusfunktion, deren Amplitude exponentiell mit der Zeit abnimmt. Dieses Zeitverhalten ist in Abb. 2.31 dargestellt.

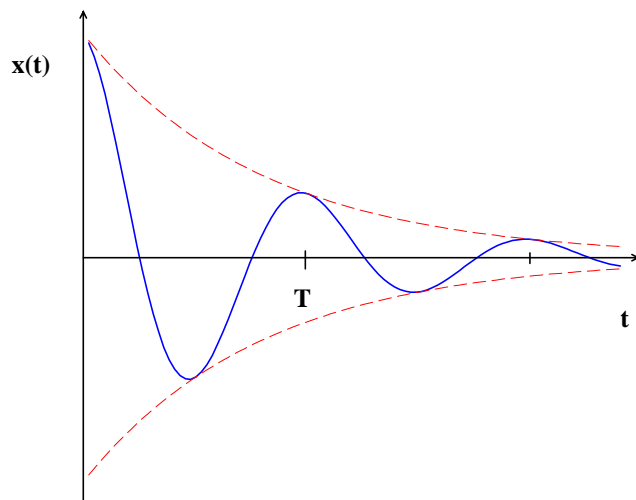


Abbildung 2.31: Ortskoordinate des schwach gedämpften Oszillators nach (2.67) zusammen mit der exponentiell abfallenden Amplitude

Durch die Ableitung dieser Funktion nach der Zeit ergibt sich die Geschwindigkeit zu

$$v(t) = -\delta e^{-\delta t} A \cos(\omega_1 t + \varphi) - \omega_1 e^{-\delta t} A \sin(\omega_1 t + \varphi).$$

Damit kann man auch die zugehörige Trajektorie im Phasenraum bestimmen, so wie sie in Abb. 2.32 skizziert ist. In diesem Fall erhält man keine geschlossene Kurve. Die Trajektorie läuft in einer Spiralforn auf den Koordinatenursprung zu. Dies reflektiert das Verhalten des gedämpften Oszillators. Mit zunehmender Zeit  $t$  nimmt die jeweilige maximale Auslenkung einer Schwingung ab, genau so wie die Geschwindigkeiten bei der Position  $x = 0$ . Dies wird fortgesetzt bis das Pendel schliesslich am Phasenraumpunkt  $x = 0$  und  $v = 0$  zur Ruhe kommt. Natürlich bleibt bei dieser gedämpften Bewegung die Energie des Pendels nicht erhalten.

## 2.9.4 Starke Dämpfung

Im Fall sehr starker Dämpfung gilt im Gegensatz zu (2.9.3)

$$\frac{\alpha^2}{4m^2} = \delta^2 > \frac{k}{m}.$$

In diesem Fall erhalten wir die Konstanten  $\lambda_i$  nach (2.9) in der Form

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \phi$$

womit sich für die Koordinate und die Geschwindigkeit der allgemeinen Lösung ergibt:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{(-\delta+\phi)t} + A_2 e^{(-\delta-\phi)t} \\ v(t) &= A_1 (-\delta + \phi) e^{(-\delta+\phi)t} + A_2 (-\delta - \phi) e^{(-\delta-\phi)t}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

In diesem Fall entwickelt sich also keine Schwingung, sondern die Koordinate als Funktion der Zeit wird durch Exponentialfunktionen beschrieben. Die Konstanten  $A_i$  können nun z.B. so gewählt werden, dass die Geschwindigkeit  $v$  oder auch die Position des Teilchens  $x$  zur Zeit  $t = 0$  identisch 0 sind. Die daraus resultierenden Funktionen  $x(t)$  und die entsprechenden Trajektorien im Phasenraum sind in Abb. 2.33 abgebildet.



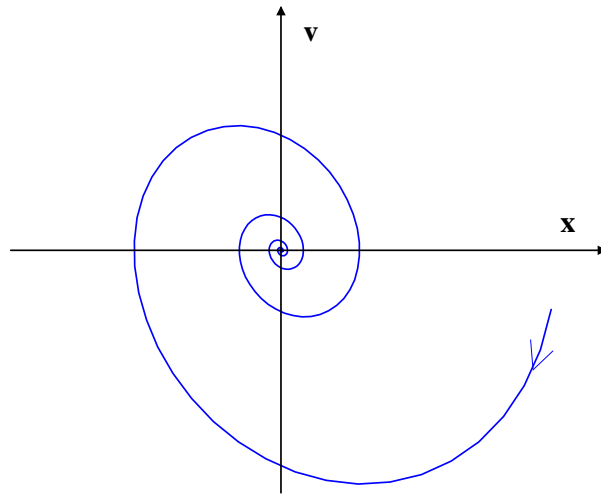


Abbildung 2.32: *Trajektorie des schwach gedämpften Harmonischen Oszillators im Phasenraum*

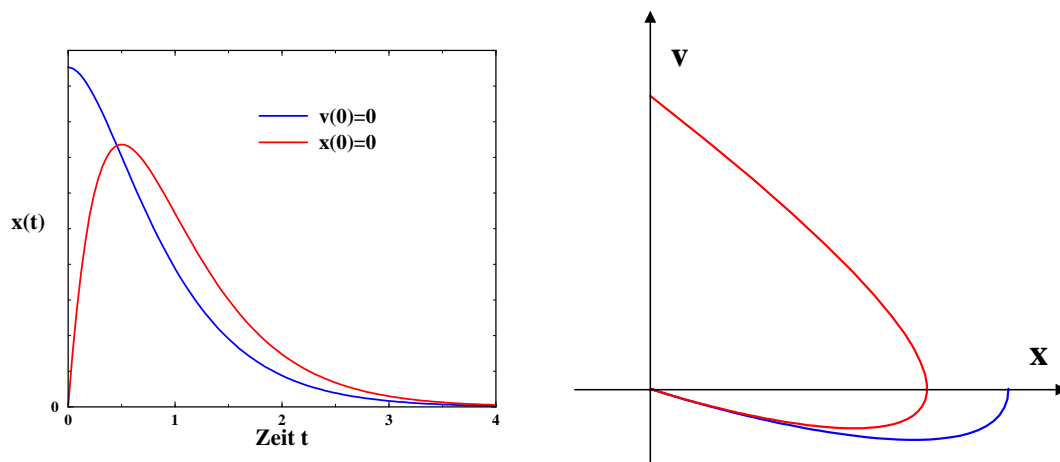


Abbildung 2.33: *Koordinaten und Trajektorie im Phasenraum im Fall des stark gedämpften Harmonischen Oszillators*

## 2.10 Angetriebener Harmonische Oszillator

Wir können der Bewegungsgleichung des Harmonischen Oszillators aus dem vorhergehenden Abschnitt auch noch eine externe Kraft hinzufügen. Sehen wir die Harmonische Näherung z.B. wieder als Modell für die Schwingung der Atome eines Moleküls um den Gleichgewichtsabstand an, so kann diese externe Kraft durch ein elektromagnetisches Wechselfeld gegeben sein. Die Kraft fluktuiert also als Funktion der Zeit in Form einer Kosinus Schwingung mit der vorgegebenen Frequenz  $\Omega$ . Eine andere Realisierung ist aber auch das Federpendel, das in der Vorlesung über einen Motor angetrieben wurde. Die Bewegungsgleichung für den Massenpunkt  $m$  erhält mit einer solchen antreibenden Kraft die Form

$$m\ddot{x} = -Cx - \alpha \dot{x} + F_0 \cos(\Omega t).$$

Dies ist die Differentialgleichung für den Harmonischen Oszillator mit Dämpfung und externer Kraft  $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ ; man spricht auch vom angetriebenen Harmonischen Oszillator. Wenn wir diese Gleichung durch die Masse  $m$  dividieren, und ausnutzen, dass

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}}$$

die Winkelgeschwindigkeit des freien Oszillators, definiert erhalten wir die Gleichung (2.10) in der Form

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{\alpha}{m} \dot{x} = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t).$$

Dabei wurden die Terme so angeordnet, dass auf der linken Seite der Gleichung alle Terme mit der gesuchten Funktion  $x(t)$  und deren Ableitungen stehen, während auf der rechten Seite der Term steht, der unabhängig von dieser Funktion  $x(t)$  ist. Ist dieser Term auf der rechten Seite von 0 verschieden, so bezeichnet man eine solche Differentialgleichung als **inhomogene Differentialgleichung**. Die rechte Seite bezeichnet man als Inhomogenität und die Differentialgleichung ohne diese Inhomogenität als zugehörige homogene Differentialgleichung. In unserem Fall ist also die zu (2.10) zugehörige homogene Differentialgleichung gegeben durch

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{\alpha}{m} \dot{x} = 0.$$

Ist  $x_0(t)$  irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung (2.10) und  $x_1(t)$  eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung (2.10), so ist die Linearkombination

$$x_2(t) = x_0(t) + \alpha x_1(t)$$

eine weitere Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.10). Zum Beweis setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \frac{\alpha}{m} \dot{x}_2 &= \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \frac{\alpha}{m} \dot{x}_0 + \alpha \underbrace{\left( \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \frac{\alpha}{m} \dot{x}_1 \right)}_{=0 \text{ wg. (2.10)}} \\ &= \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t), \end{aligned}$$

was ja gerade zeigt, dass  $x_2(t)$  Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung ist. Es gilt aber noch mehr: Die inhomogene Differenzialgleichung ist in unserem Fall eine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung, sie besitzt also 2 linear unabhängige Lösungen. Dies gilt aber auch für die zugehörige homogene Differenzialgleichung. Damit ist gezeigt, dass (2.10) auch bereits die allgemeine Lösung für die inhomogene Differenzialgleichung darstellt. Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differenzialgleichung lässt sich darstellen als die Summe aus einer beliebigen Lösung der inhomogenen Gleichung plus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung.

Wir werden also zur Lösung unseres Problems zunächst einmal eine Lösung der inhomogenen Gleichung (2.10) suchen und schreiben sie dazu um in die Form

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z + \frac{\alpha}{m} \dot{z} = \frac{F_0}{m} e^{-i\Omega t}.$$

bei der wir komplexe Funktionswerte für die gesuchte Funktion  $z(t)$  zulassen und auch die rechte Seite der Gleichung eine komplexwertige Funktion enthält. Beachte, dass der Realteil der rechten Seite dieser Gleichung gerade die Kosinusfunktion ergibt also die Inhomogenität der Gleichung (2.10). Die Differenzialgleichung (2.10) entspricht also gerade dem Realteil der Gleichung (2.10). Wir benutzen die komplexe Erweiterung lediglich, weil viele Rechenoperationen in der komplexen Darstellung einfacher sind. Für die gesuchte Funktion  $z(t)$  betrachten wir den Ansatz:

$$z(t) = A e^{-i\Omega t},$$

mit einer komplexwertigen Amplitude  $A$ . Setzt man diesen Ansatz in die zu lösende Gleichung (2.10) ein, ergibt sich

$$\left\{ A \left( -\Omega^2 + \omega_0^2 - i \frac{\alpha}{m} \Omega \right) - \frac{F_0}{m} \right\} e^{-i\Omega t} = 0.$$

Da diese Gleichung für alle Zeiten  $t$  erfüllt sein muss, ist also der Ausdruck in der geschweiften Klammer gleich Null und es ergibt sich für die komplexe Amplitude

$$\begin{aligned} A &= \frac{F_0}{m \left[ \omega_0^2 - \Omega^2 - i \frac{\alpha}{m} \Omega \right]} \\ &= |A| e^{i\varphi}. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Für den Betrag der Amplitude  $A$  gilt damit

$$|A| = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\alpha^2 \Omega^2}{m^2}}}$$

und

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Real}(A)}{|A|} = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\alpha^2 \Omega^2}{m^2}}}.$$

Damit ist die gesuchte Lösung, der Realteil des Ansatzes von (2.10)

$$x(t) = \operatorname{Real}(z(t)) = |A| \cos(\Omega t - \varphi),$$

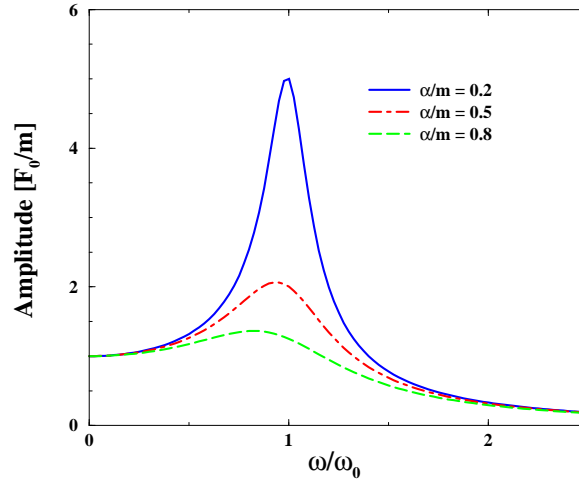


Abbildung 2.34: Amplitude der Schwingung des angetriebenen Harmonischen Oszillators als Funktion der Frequenz  $\omega$  der antreibenden Kraft für verschiedene Dämpfungen  $\alpha$  (siehe (2.10)).

gegeben in der Form

$$x(t) = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\alpha^2 \Omega^2}{m^2}}} \cos(\Omega t - \varphi).$$

Die allgemeine Form der Lösung für den angetriebenen Harmonischen Oszillator erhält man also dadurch, dass man zu dieser Lösung eine beliebige Lösung von (2.10) hinzuaddiert, also eine Lösung des Harmonischen Oszillators mit Dämpfung aber ohne externe Kraft. Die Parameter in dieser allgemeinen Lösung können dann so angepasst werden, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind.

Dies soll uns aber jetzt gar nicht interessieren, denn wir wissen ja aus der obigen Diskussion, dass die Lösungen des gedämpften Harmonischen Oszillators ohne externen Antrieb nach einer gewissen Zeit gegen Null gehen. Für solche Zeiten verbleibt also nur noch die Lösung in (2.10). Das ist eine Harmonische Schwingung mit der Frequenz  $\Omega$  der antreibenden Kraft. Die Amplitude  $|A|$  dieser Schwingung ist als Funktion der Frequenz  $\Omega$  für verschiedene Werte der Dämpfungskonstante  $\alpha$  in Abb. 2.34 dargestellt. Man sieht aus dieser Darstellung, dass die Amplitude maximal ist, wenn die Dämpfung gering ist und die Frequenz  $\Omega$  nahe an der charakteristischen Frequenz  $\omega_0$  des nicht angetriebenen Systems ist.

Nehmen wir als Beispiel wieder die Schwingung der Atome eines Moleküls, auf das eine elektromagnetisches Wechselfeld wirkt, so sehen wir, dass das Molekül besonders dann zu Schwingungen angetrieben wird, wenn die Frequenz der Strahlung  $\omega$  mit der charakteristischen Frequenz des Moleküls  $\omega_0$  übereinstimmt. Die antreibende Kraft ist dann resonant mit dem System.

Die Schwingung des angetriebenen Oszillators ist im Allgemeinen nicht genau in Phase mit der antreibenden Kraft. Die Phasendifferenz ist durch  $\varphi$  gegeben. Zur Diskussion dieser Phase  $\varphi$  betrachten wir noch einmal die komplexe Amplitude  $A$  aus (2.69) und zwar

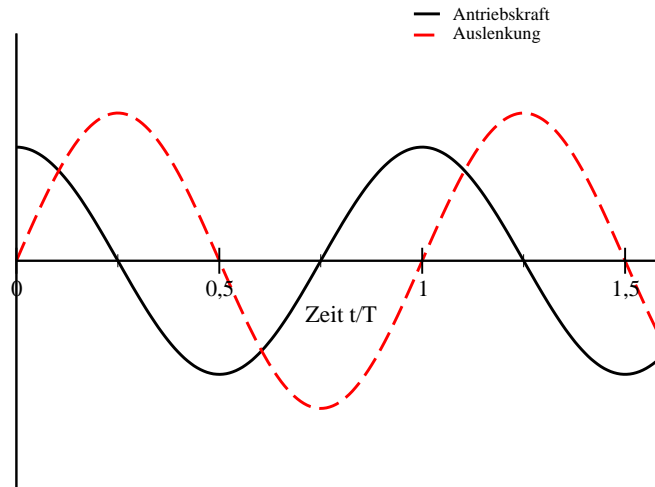


Abbildung 2.35: Schwingung des angetriebenen Harmonischen Oszillators und Antriebskraft als Funktion der Zeit für den Fall der Resonanz  $\Omega = \omega_0$ .

sowohl in der Polardarstellung als auch in der Darstellung über Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned}
 A &= |A|e^{i\varphi} \\
 &= \frac{F_0}{m \left[ (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\alpha^2 \Omega^2}{m^2} \right]} \left\{ (\omega_0^2 - \Omega^2) + i \frac{\alpha \Omega}{m} \right\}. \quad (2.70)
 \end{aligned}$$

Ist also die Winkelgeschwindigkeit der antreibenden Kraft  $\Omega$  identisch mit der Frequenz  $\omega_0$  des ungedämpften Oszillators, so ist der Realteil von  $A$  identisch 0 und der Phasenwinkel  $\varphi = \pi/2$ . Dies bedeutet nach (2.10), dass die Auslenkung  $x(t)$  der Amplitude um diesen Winkel  $\pi/2$  hinterherhinkt (siehe Abb. 2.35). Zu dem Zeitpunkt zu der die Auslenkung des Massenpunktes aus der Ruhelage 0 ist, ist die Antriebskraft in Richtung der Bewegung maximal. Wenn die Auslenkung maximal ist, durchläuft die Antriebskraft gerade den Nullpunkt um anschliessend in die neue Richtung anzutreiben. Es ist klar, dass bei dieser Phasenlage der Kraftübertrag von der antreibenden Kraft auf den Massenpunkt optimal ist.

Ist die Frequenz des Antriebs  $\Omega$  größer als die Frequenz  $\omega_0$ , so wird der Massenpunkt der optimalen Antriebsphase nachlaufen. Mathematisch äussert sich das darin, dass der Realteil von  $A$  in (2.70) negativ ist, was einem Phasenwinkel  $\varphi > \pi/2$  entspricht. Bei Antriebsgeschwindigkeiten  $\Omega$  kleiner als  $\omega_0$  ist der Realteil von  $A$  größer als Null. Dies entspricht einer Phase  $\varphi < \pi/2$ . Physikalisch interpretiert bedeutet dies, dass die Eigenfrequenz des Oszillators zu schnell ist für den Antrieb. Im Grenzfall  $\Omega=0$  verschwindet der Imaginärteil von  $A$  und es gilt  $\varphi = 0$ .

## 2.11 Zur numerischen Lösung der Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichung für ein mechanisches System, wie z.B. für den angetriebenen Harmonischen Oszillator, hat die allgemeine Form

$$\ddot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t), t).$$

Es handelt sich also um eine Differenzialgleichung 2. Ordnung in der Zeit, bei der die gesuchte Funktion  $x(t)$ , deren Zeitableitung  $\dot{x}(t)$  und im allgemeinen Fall auch noch ein inhomogener Anteil (also unabhängig von  $x$  oder  $\dot{x}$ ), der eine explizite Zeitanhängigkeit enthalten kann, auftreten. Bisher haben wir einfache Probleme behandelt, bei denen eine analytische Lösung dieser Bewegungsgleichung recht leicht zu erzielen war. In vielen Fällen wird man jedoch keine analytische Lösung finden können und man kann versuchen die Differenzialgleichung (2.11) mit rein numerischen Methoden zu lösen. An dieser Stelle sollen einige einfache Methoden für eine solche numerische Lösung vorgestellt werden. Wir werden dazu zwei Schritte vornehmen:

- In einem ersten Schritt wird die Differenzialgleichung zweiter Ordnung umgeformt in ein System von 2 Differenzialgleichungen erster Ordnung.
- Im zweiten Schritt werden wir eine einfache Methode für die numerische Lösung eines solchen Systems von Differenzialgleichungen erster Ordnung vorstellen.

Für die Umformung der Differenzialgleichung (2.11) definieren wir die Funktionen

$$\begin{aligned} y_1(t) &:= x(t) \\ y_2(t) &:= \dot{x}(t). \end{aligned} \tag{2.71}$$

Damit können wir die Differenzialgleichung (2.11) umschreiben auf die Form

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2(t) = f_1(y_1, y_2, t), \\ \dot{y}_2(t) &= f_2(y_1, y_2, t). \end{aligned} \tag{2.72}$$

Dabei ist die Funktion  $f_2$  identisch mit der Funktion  $f$  aus (2.11). Wir haben also so ein System von zwei Differenzialgleichungen erster Ordnung in der Zeit für die 2 gesuchten Funktionen  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$ . Dabei sind die Ableitung der gesuchten Funktionen  $y_i(t)$  nach der Zeit durch Funktionen  $f_i$  gegeben sind, die von allen  $y_j(t)$  und im Fall von inhomogenen Differenzialgleichungen auch noch explizit von der Zeit  $t$  abhängen können. Zur Lösung der Differenzialgleichung für  $y_1$  muss  $y_2$  bekannt sein und entsprechendes gilt umgekehrt für die Lösung der Differenzialgleichung für  $y_2$ . Wir sprechen deshalb von einem System von zwei gekoppelten Differenzialgleichungen erster Ordnung.

Man kann dieses Verfahren direkt verallgemeinern und aus einer Differenzialgleichung  $n$ -ter Ordnung für eine gesuchte Funktion  $y_1(t)$  ein System von  $n$  gekoppelten Differenzialgleichungen erster Ordnung für entsprechende  $n$  Funktionen  $y_1$  bis  $y_n$  generieren.

Wie löst man nun solche Differenzialgleichungen erster Ordnung mit rein numerischen Methoden. Ziel ist es dabei, die unbekanntenen Funktionen  $y_i(t)$  durch ihren Wert an diskreten Stützstellen der Zeit

$$t_k := k * h \quad \text{für} \quad k = 0 \dots N,$$

zu bestimmen. Das gesamte uns interessierende Zeitintervall  $[t_0 = 0, t_F = N * h]$  ist so in äquidistante Teilintervalle aufgeteilt. Die Schrittweite  $h$  soll dabei so klein gewählt sein, dass die Information über die Werte der Funktion  $y_i$  an diesen Stützstellen  $t_k$  ausreicht um die Funktion zu charakterisieren.

Die einfachste Möglichkeit für eine numerische Lösung der Gleichungen (2.72) bietet das sogenannte **Euler Verfahren**. Dazu nimmt man an, dass die Schrittweite  $h$  so klein gewählt ist, dass man bei der Taylor Entwicklung der gesuchten Funktionen

$$y_i(t+h) = y_i(t) + h \left. \frac{dy_i}{dt} \right|_t + \mathcal{O}(h^2)$$

die Terme von quadratischer Ordnung in  $h$  und höheren Potenzen getrost vernachlässigen kann. Das Verfahren enthält also Fehler von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^2)$ . In dieser Näherung kann man die Zeitableitungen von  $y_i$  gemäß (2.72) ersetzen und erhält

$$y_i(t+h) = y_i(t) + h f_i(y_1(t), y_2(t), t).$$

Ausserdem können wir davon ausgehen, dass die Werte der gesuchten Funktionen  $y_i$  am Anfang der zu beschreibenden Bewegung bekannt sind. Dies sind ja gerade die Randbedingungen  $y_1(0) = x(0)$  und  $y_2(0) = v(0)$ , die auch bei einer analytischen Lösung vorgegeben werden müssen. Daraus können wir dann mit Hilfe von (2.11) berechnen

$$\begin{aligned} x(t_1) &= y_1(t_1) = y_1(0) + h f_1(y_1(0), y_2(0), 0) \\ v(t_1) &= y_2(t_1) = y_2(0) + h f_2(y_1(0), y_2(0), 0). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Damit sind Ort und Geschwindigkeit an der nächsten Stützstelle in der Zeit  $t_1$  berechnet und man kann das gleiche Verfahren benutzen um damit die gesuchten Funktionswerte an der nächsten Stützstelle  $t_2$  zu bestimmen. Nach  $N$  Schritten ist man dann am Endpunkt angekommen.

Um dieses Verfahren konkret vorzuführen ist in Abb. 2.36 das Protokoll einer MAPLE Sitzung dargestellt, in der mit dem Euler Verfahren zu Testzwecken die Differenzialgleichungen für den Harmonischen Oszillator ohne Dämpfung berechnet wird. Zunächst wurde dabei eine Prozedur *harmoni* definiert, die als Input die Größen Schrittweite  $h$ , Zahl der Stützstellen  $n$  und die Anfangswerte  $x_0$  und  $v_0$  benötigt. Die Prozedur berechnet dann die Werte für  $x$ ,  $v$  und  $t$  an den Stützstellen  $t_i = i * h$  aus und speichert sie als Elemente eines Vektors  $x[i]$ ,  $v[i]$  beziehungsweise  $t[i]$ . In der Prozedur werden durch die lokalen Variablen  $\omega = 1$  und  $\alpha = \beta = 0$  die Eigenschaften des Beispiels festgelegt. Nach dem Aufruf der Prozedur mit den Werten  $x_0 = 0$ ,  $v_0 = 1$ ,  $h = 0.01$  und  $n = 700$  werden die Ergebnisse für  $x(t)$  und  $v(t)$  beziehungsweise die zugehörige Trajektorie geplottet. Die entsprechenden Ergebnisse sind in Abb. 2.37 dargestellt.

Man sieht insbesondere bei der Trajektorie im Phasenraum, dass das Ergebnis nicht sehr zufriedenstellend ist. Die Trajektorie schliesst sich nicht genau zu einer Ellipse. Die Ursache dafür ist die Ungenauigkeit des benutzten Verfahrens. Man könnte nun die Ergebnisse dadurch verbessern, dass die Schrittweite  $h$  verringert wird. Dies führt in der Tat zu gewissen Verbesserungen, jedoch wird der numerische Aufwand entsprechend größer. Bei komplizierteren Systemen von Differenzialgleichungen kann eine solche Erhöhung der Zahl der Stützstellen (also Verkleinerung von  $h$ ) schliesslich dazu führen, dass die Zahl

```

Maple V -- vor2.ms
File Edit View Options Help
Input Interrupt Pause
> v[j]:=v[i-1]-(x[i-1]*ww+v[i-1]*bet)*h;
> od
> end;

harmo1 := proc(x0,v0,h,n,x,v,t)
    local i,ww,bet;
    ww := 1. ;
    bet := 0;
    x[0] := x0;
    v[0] := v0;
    t[0] := 0;
    for i to n do
        t[i] := t[i-1]+h;
        x[i] := x[i-1]+v[i-1]*h;
        v[i] := v[i-1]-(x[i-1]*ww+v[i-1]*bet)*h
    od
end

> harmo1(0,1,0.01,700,x,v,t);
.7809133941

> plot([seq([t[j*10],x[j*10]],j=1..70)],[seq([t[i*10],v[i*10]],i=1..70)]),0..7,-1.2..1.2,style=point);
> plot([seq([x[j*10],v[j*10]],j=1..70)],-1.2..1.2,-1.2..1.2,style=line,color=blue);
>
Maple Memory: 831K Maple CPU Time: 0.2 sec Interface Memory: 16.0K

```

Abbildung 2.36: MAPLE Protokoll für Das Euler Verfahren, siehe Diskussion im Text

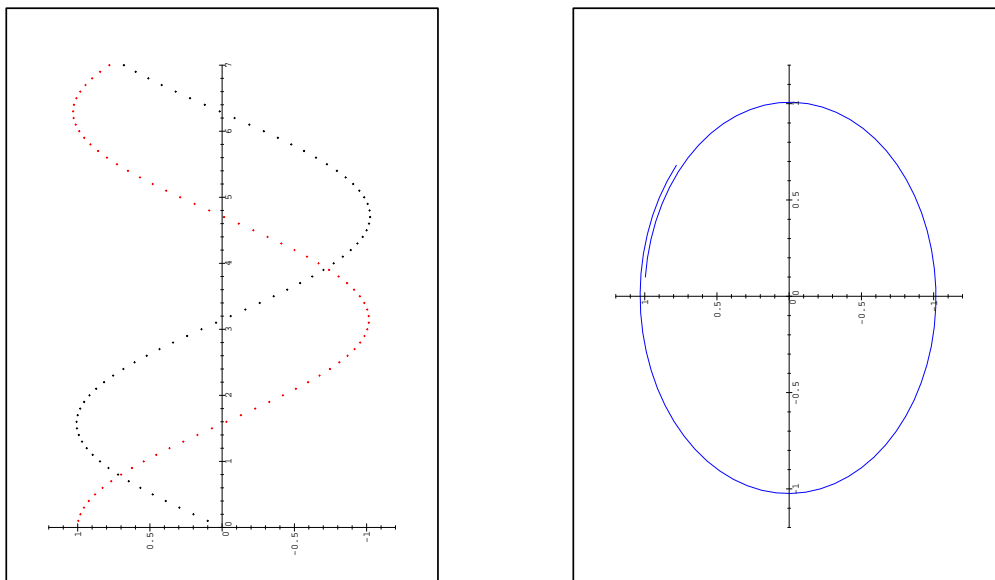


Abbildung 2.37: Ergebnisse für die numerische Berechnung des Harmonischen Oszillators mit dem Euler Verfahren nach Abb. 2.36, links  $x(t)$  und  $v(t)$ , rechts die Trajektorie im Phasenraum.



der benötigten Rechenoperationen so groß wird, dass die Berechnung durch numerische Rundungsfehler ungenau wird.

Es lohnt sich also offensichtlich den Algorithmus zur numerischen Lösung der Differenzialgleichungen zu verbessern. Wir wollen an dieser Stelle eine erste Verbesserung des Euler Verfahrens diskutieren, das **Runge-Kutta Verfahren 2.Ordnung**. Im Gegensatz zum Euler Verfahren (2.11) berücksichtigt man dabei auch die Terme quadratischer Ordnung in der Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} y_i(t+h) &= y_i(t) + h \frac{dy_i}{dt} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2y_i}{dt^2} + \mathcal{O}(h^3) \\ &= y_i(t) + h \frac{dy_i}{dt} + \frac{h^2}{2} \frac{df_i}{dt} + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \quad (2.74)$$

Bei der Berechnung der Zeitableitung der Funktion  $f_i$  nach der Zeit macht man nun wieder die lineare Näherung und ersetzt

$$\begin{aligned} \frac{df_i}{dt} &\approx \frac{f_i[y_j(t+h)] - f_i[y_j(t)]}{h} \\ &\approx \frac{f_i[y_j(t) + hf_j[y_k(t)]] - f_i[y_j(t)]}{h}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Insgesamt macht man in diesem Fall nur Fehler der Ordnung  $h^3$ , die Terme bis zur 2.Ordnung in  $h$  werden korrekt behandelt. Deshalb heisst dieses Verfahren auch ein Verfahren 2.Ordnung. Mit den Gleichungen (2.74) und (2.75) kann man nun eine schrittweise Lösung der Differenzialgleichungen durchführen ganz analog zum oben diskutierten Euler Verfahren. Natürlich kann man die Verfahren weiter verbessern. Als Beispiel sei die MAPLE Prozedur für ein Runge-Kutta Verfahren 4.Ordnung angegeben <sup>7</sup>.

```
harmo2 := proc(x0,v0,h,n,x,v,t)
  local i,ww,bet,k1,k2;
  ww := 1.
  bet := .1 ;
  x[0] := x0;
  v[0] := v0;
  t[0] := 0;
  for i to n do
    t[i] := t[i-1]+h;
    k1[1] := h*v[i-1];
    k2[1] := -h*(x[i-1]*ww+v[i-1]*bet);
    k1[2] := h*(v[i-1]+.5*k2[1]);
    k2[2] := -h*((x[i-1]+.5*k1[1])*ww+(v[i-1]+.5*k2[1])*bet);
    k1[3] := h*(v[i-1]+.5*k2[2]);
    k2[3] := -h*((x[i-1]+.5*k1[2])*ww+(v[i-1]+.5*k2[2])*bet);
    k1[4] := h*(v[i-1]+k2[3]);
```

---

<sup>7</sup>Eine Übersicht über verschiedene numerische Methoden zur Lösung von Differenzialgleichungen und deren Umsetzung in Programmiersprachen findet man z.B. in W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling: *Numerical Recipes, the art of scientific computing*. Dort ist auch dieses Runge Kutta Verfahren näher beschrieben.

```
k2[4] := -h*((x[i-1]+k1[3])*ww+(v[i-1]+k2[3])*bet);  
x[i] := x[i-1]+1/6*k1[1]+1/3*k1[2]+1/3*k1[3]+1/6*k1[4];  
v[i] := v[i-1]+1/6*k2[1]+1/3*k2[2]+1/3*k2[3]+1/6*k2[4]  
od  
end
```

Diese verbesserten Verfahren sind sehr viel zuverlässiger als das Euler Verfahren. Die Testrechnung am Beispiel des Harmonischen Oszillators, die wir in Abb. 2.36 mit dem Euler Verfahren diskutiert haben, führte bei einer Schrittweite von  $h = 0.01$  nur zu bedingt zufriedenstellenden Ergebnissen. Eine entsprechende Rechnung mit dem Runge-Kutta Verfahren 4.Ordnung liefert sogar bei einer sehr viel größeren Schrittweite von  $h = 0.1$  eine nahezu perfekte ellipsenförmige Trajektorie im Phasenraum.

## 2.12 Zentrale Kraftfelder

In diesem Abschnitt sollen die Eigenschaften von **Zentralen Kraftfeldern** betrachtet werden. Unter einem zentralen Kraftfeld versteht man eine Kraft, die stets in die Richtung eines zentralen Punktes, dem Kraftzentrum wirkt. Auf jedes Probelteilchen wirkt also eine Kraft, die versucht dieses Teilchen in die Richtung des Kraftzentrums zu bewegen. In diesem Fall spricht man von einer attraktiven Zentralkraft. Eine Zentralkraft kann aber auch repulsiv sein. In diesem Fall weist die Kraft stets in die Richtung vom Kraftzentrum weg.

Als Beispiel für eine solche Zentralkraft kennen wir die Kraft, die von einer elektrischen Punktladung auf eine Probeladung ausgeübt wird. In diesem Fall entspricht die Position der Punktladung dem Kraftzentrum. Wenn Punktladung und Probeladung unterschiedliches Vorzeichen besitzen, so ist die Zentralkraft auf die Probeladung attraktiv. Im Falle von Ladungen mit gleichem Vorzeichen ist die Kraft repulsiv. Insbesondere ist also die Kraft, die ein Atomkern mit  $Z$  Protonen auf ein Elektron ausübt, eine solche attraktive Zentralkraft.

Betrachtet man das Koordinatensystem, das sich in natürlicher Weise anbietet, nämlich das, bei dem der Koordinatenursprung mit dem Kraftzentrum zusammenfällt, so schreibt sich diese Coulombkraft in der Form

$$\vec{F} = -\frac{Ze^2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

wobei  $e$  für den Betrag der Elementarladung steht, die ja bis auf das Vorzeichen der Ladung des Elektrons wie auch der Ladung des Protons entspricht.  $\vec{r}$  ist der Ortsvektor des Elektrons und  $r$  der Betrag dieses Ortsvektors also gerade der Abstand zwischen dem Elektron und dem Atomkern im Koordinatenursprung.

Allgemein ist also ein **Zentrales Kraftfeld** so definiert, dass es in einem Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung im Kraftzentrum die Form besitzt

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r})\vec{r}.$$

Dabei ist  $f(\vec{r})$  ein Skalarfeld, also eine reellwertige Funktion, deren Funktionswert, die Stärke der Kraft, sowohl vom Abstand  $|\vec{r}|$  als aber im allgemeinen Fall auch von der Richtung des Vektors  $\vec{r}$  abhängen kann.

Handelt es sich bei dem zentralen Kraftfeld ausserdem noch um ein konservatives Kraftfeld, so hängt die Stärke der Kraft nur vom Abstand  $|\vec{r}|$  ab. Es gilt also

$$\vec{F} \text{ zentral und konservativ} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)\vec{r}.$$

Zum Beweis dieser Behauptung betrachten wir die Darstellung der Vektoren in Kugelkoordinaten (mit dem Koordinatenursprung im Kraftzentrum). Da  $\vec{F}$  konservativ sein soll, kann man  $\vec{F}$  als Gradient eines Potentials  $U$  schreiben (2.3.3)

$$\begin{aligned} \vec{F}(r, \theta, \phi) &= -\vec{\nabla}U(r, \theta, \phi) \\ &= -\frac{\partial U}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\hat{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}\hat{e}_\phi. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile dieser Gleichung wurde die Darstellung des Gradienten in Kugelkoordinaten von (2.3.2) übernommen. Da  $\vec{F}$  ausserdem eine Zentralkraft sein soll, also lediglich eine Komponente parallel zu  $\hat{e}_r$  besitzt, gilt

$$\vec{F}(r, \theta, \phi) = f(r, \theta, \phi)r\hat{e}_r,$$

die Komponenten des Kraftfeldes in Richtung der Einheitsvektoren  $\hat{e}_\theta$  und  $\hat{e}_\phi$  sind demnach identisch null. Aus der Darstellung von  $\vec{F}$  in (2.76) folgt

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0 \end{array} \right\} \text{ also } U(r, \theta, \phi)$$

das Potenzial  $U$  hängt nur vom Abstand  $r$  ab. Dies gilt dann natürlich auch für die Ableitung von  $U$  nach  $r$  und der Vergleich von (2.76) mit (2.12) zeigt

$$f = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Dadurch ist also gezeigt, dass die Stärke des konservativen zentralen Kraftfeldes nur vom Abstand vom Kraftzentrum  $r$  abhängt, womit (2.12) bewiesen ist.

Eine konservative Zentralkraft  $\vec{F}$  ist also dadurch gekennzeichnet, dass es ein entsprechendes Potenzial  $U(r)$  gibt, das nur vom Abstand  $r$  abhängt. Es gilt

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}\hat{e}_r.$$

Man bezeichnet ein solches Potenzial,  $U(r)$ , auch häufig als **Zentralpotenzial**.

Natürlich kann man sich zentrale Kraftfelder vorstellen, die nicht konservativ sind, und bei denen sie Stärke der Kraft nicht nur vom Abstand zum Kraftzentrums sondern auch von der Richtung des Ortsvektors abhängt.

Bei der Beschreibung einer Bewegung von Massenpunkten in konservativen Kraftfeldern ist es nützlich, den Drehimpuls des bewegten Massenpunktes zu definieren. Der **Drehimpuls**,  $\vec{l}$ , eines Teilchens der Masse  $m$  am Ort  $\vec{r}$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ist definiert durch

$$\vec{l} := m\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p},$$

mit  $\vec{p}$ , dem Impuls des Teilchens. Es ist klar, dass dieser Drehimpuls von dem Koordinatensystem anhängt, in dem die Bewegung des Teilchens beschrieben wird: Bewegt sich ein Teilchen im Koordinatenursprung eines Koordinatensystems, so ist der Drehimpuls des Teilchens zu diesem Zeitpunkt  $\vec{l} = 0$ , da ja  $\vec{r} = 0$ . In einem Koordinatensystem mit einem anderen Ursprung ist aber  $\vec{r}' \neq \vec{0}$ , so dass hier auch der Drehimpuls  $\vec{l}'$  im Allgemeinen von Null verschieden sein wird.

Hier soll die Bewegung in einem zentralen Kraftfeld betrachtet werden und deshalb werden wir im Folgenden ein natürliches Koordinatensystem betrachten, bei dem der Koordinatenursprung im Kraftzentrum liegt. In diesem Fall gilt:

Bei der Bewegung eines Teilchens in einem zentralen Kraftfeld bleibt der Drehimpuls des Teilchens, bezogen auf ein Koordinatensystem mit Ursprung im Kraftzentrum, erhalten

Zum Beweis dieses Satzes betrachten wir die Ableitung des Drehimpulsvektors nach der Zeit

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{l}}{dt} &= m \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) \\
 &= m \underbrace{(\vec{v} \times \vec{v})}_{=0} + m \left( \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \\
 &= \left( \vec{r} \times \vec{F} \right) \\
 &= f(\vec{r}) (\vec{r} \times \vec{r}) = \vec{0}.
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Damit ist also gezeigt, dass der Drehimpuls eine Konstante der Bewegung ist.

Aus der dritten Zeile dieser Gleichung lesen wir ausserdem ab, dass für jedes Kraftfeld gilt

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \left( \vec{r} \times \vec{F} \right) = \vec{N}.$$

Die Änderung des Drehimpulses ist danach gegeben durch das Vektorprodukt aus dem Ortsvektor des Teilchens  $\vec{r}$  und der wirkenden Kraft  $\vec{F}$ . Man bezeichnet diese Größe als das **Drehmoment**, das auf das Teilchen wirkt.

Ist aber der Vektor  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$  während des ganzen Bewegungsablaufes konstant, so bedeutet das ja auch, dass sowohl der Ortsvektor  $\vec{r}$  wie auch der Impulsvektor  $\vec{p}$  zu jeder Zeit senkrecht zu diesem konstanten Vektor  $\vec{l}$  stehen müssen. Das bedeutet aber, dass sich die Bewegung in einer Ebene abspielt und der Drehimpulsvektor steht senkrecht auf dieser Ebene. Identifizieren wir also die Richtung des Drehimpulses mit der  $z$ -Achse des Koordinatensystems, so ist der Ortsvektor des Teilchens eindeutig durch die  $x$  und  $y$ -Koordinate beziehungsweise auch durch die Zylinderkoordinaten  $\rho$  und  $\phi$  definiert. Ja es gilt sogar, dass die  $z$ -Koordinate identisch null sein muss, die Ebene, in der die Bewegung abläuft enthält also den Koordinatenursprung, das Kraftzentrum. Wäre nämlich die  $z$ -Komponente von  $\vec{r}$  ungleich null, so hätte die Kraft, die ja in Richtung  $\vec{r}$  zeigt eine Komponente, die das Teilchen aus der Ebene herausziehen würde, was aber im Widerspruch zur Drehimpulserhaltung stünde.

So werden die Bewegungsgleichung, die ja im Allgemeinen drei Differenzialgleichungen für die Bestimmung von den drei Koordinaten des Teilchens als Funktion der Zeit sind, im Fall eines zentralen Kraftfeldes reduziert auf zwei Differenzialgleichungen für die zwei unbekannt Funktionen der Teilchenkoordinaten in einer Ebene.

Die Bewegungsgleichungen werden noch weiter reduziert, wenn die Bewegung in einem zentralen konservativen Kraftfeld abläuft. Dazu schreiben wir die Newtonschen Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten und legen das Koordinatensystem so, dass der Koordinatenursprung mit dem Kraftzentrum übereinstimmt und die  $z$ -Achse parallel zum Drehimpuls des Teilchens liegt. Damit verläuft die Bewegung ausschliesslich in der  $xy$ -Ebene und wird durch die Zylinderkoordinaten  $\rho$  und  $\phi$  ( $z=0$ ) beschrieben. Die Ausdrücke für den Ortsvektor  $\vec{r}$ , die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und die Beschleunigung  $\vec{a}$  reduzieren sich damit von (2.1.1) - (2.1.1) auf

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= \rho \hat{e}_\rho \\
 \vec{v} &= \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi \\
 \vec{a} &= \left[ \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \right] \hat{e}_\rho + \left[ 2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi} \right] \hat{e}_\phi
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

Daraus können wir direkt den Drehimpuls berechnen zu

$$\begin{aligned}\vec{l} &= m\vec{r} \times \vec{v} = m\rho\hat{e}_\rho \times \left[ \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi \right] \\ &= m\rho^2\dot{\phi}\hat{e}_z\end{aligned}\quad (2.79)$$

Damit wird noch einmal bestätigt, dass bei dem hier gewählten Koordinatensystem der Drehimpuls parallel zur  $z$ -Achse liegt und der Betrag des Drehimpulses,  $|\vec{l}|$  durch  $m\rho^2\dot{\phi}$  gegeben ist. Da wir die Bewegung in einem konservativem Zentralkraftfeld beschreiben wollen berechnet sich die Kraft  $\vec{F}$  als Gradient eines Potentials  $U(\rho)$ , das nur vom Abstand vom Kraftzentrum und damit in der  $z = 0$ -Ebene lediglich von der Zylinderkoordinate  $\rho$  abhängt.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\rho) = -\frac{\partial U}{\partial \rho}\hat{e}_\rho$$

Aus dieser Gleichung zusammen mit der Darstellung der Beschleunigung in (2.78) erhalten wir also für die Komponente der Newtonschen Bewegungsgleichung  $\vec{F} = m\vec{b}$ , in Richtung von  $\hat{e}_\rho$

$$\begin{aligned}-\frac{\partial U}{\partial \rho} &= m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 \\ &= m\ddot{\rho} + \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{|\vec{l}|^2}{2m\rho^2}.\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man umschreiben auf die Form

$$\begin{aligned}m\ddot{\rho} &= -\frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{|\vec{l}|^2}{2m\rho^2} \\ &= -\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \rho} \quad \text{mit} \quad U_{\text{eff}} = U(\rho) + \frac{|\vec{l}|^2}{2m\rho^2}.\end{aligned}\quad (2.80)$$

Die Differenzialgleichung für die radiale Koordinate entspricht also der Bewegungsgleichung eines Teilchens in einer Raumdimension mit einem effektiven Potenzial, das neben dem Potenzialterm, der die wirkende Kraft darstellt,  $U(\rho)$ , noch einen sogenannten Zentrifugalterm enthält, der proportional zum Quadrat des Betrages des Drehimpulses  $\vec{l}$  ist. Eine solche Summe aus attraktivem Potenzial und dem Zentrifugalterm zu einem effektiven Potenzial ist beispielhaft in Abb. 2.38 dargestellt.

Zum Verständnis der Ursache dieses Zentrifugalterms in der radialen Bewegungsgleichung (2.80) betrachten wir die Energie des Teilchens, die ja in dem vorliegenden konservativen Kraftfeld während der Bewegung erhalten bleibt:

$$\begin{aligned}E &= \frac{m}{2}\vec{v}^2 + U(\rho) \\ &= \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{m}{2}\rho^2\dot{\phi}^2 + U(\rho) \\ &= \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \underbrace{\frac{|\vec{l}|^2}{2m\rho^2}}_{=U_{\text{eff}}} + U(\rho).\end{aligned}\quad (2.81)$$

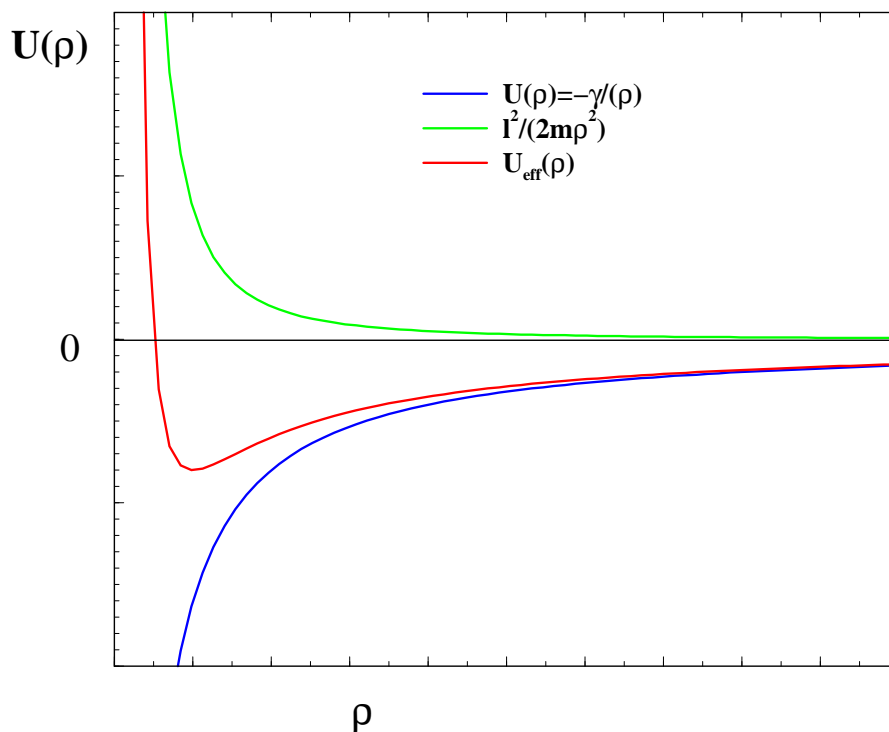


Abbildung 2.38: *Effektives Potenzial als Summe von Potenzial und Zentrifugalpotenzial*

Der Zentrifugalterm hat also seinen Ursprung in der kinetischen Energie des Teilchens. Nähert sich ein Teilchen in einem zentralen Kraftfeld dem Kraftzentrum, so muss die Azimutalkomponente der kinetischen Energie erhöht werden, damit der Betrag des Drehimpulses bei kleiner werdendem  $\rho$  konstant bleibt. Diese Erhöhung der kinetischen Energie wirkt in der Bewegungsgleichung für die Abstandskoordinate  $\rho$  wie ein repulsiver Beitrag zum Potenzial.





## 2.13 Newton'sches Gravitationsgesetz, Planetenbewegung und Kepler'sche Gesetze

### 2.13.1 Das Newton'sche Gravitationsgesetz

Bislang hatten wir die Schwerkraft, die auf eine Masse  $m$  nahe der Erdoberfläche wirkt, in der Form  $\vec{F} = -m\vec{g}$  betrachtet. Die Frage ist nun, wie sich dieses Gesetz ändert, wenn wir die Masse  $m$  sehr weit von der Erdoberfläche entfernen. Naheliegender ist, dass die Gravitationskraft gegen Null geht, wenn wir uns unendlich weit von der Erdoberfläche entfernen.

Gesucht ist also ein allgemeineres Gravitationsgesetz, das zum einen die Abhängigkeit vom Abstand  $r$  der beiden anziehenden Massen (Masse  $m$  und Erde) wiedergibt, aber auch die Abhängigkeit von der Erdmasse enthält.

Betrachten wir zunächst die **Abstandsabhängigkeit**. Mit der naheliegenden Annahme  $F_g \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$  können wir einen **Ansatz**  $F_g = \text{const.} \cdot \frac{m}{r^\alpha}$  versuchen. Es liegt außerdem nahe, dass  $F_g$  in Richtung des Verbindungsvektors  $\vec{r}$  zwischen der Erde und  $m$  wirkt, so dass wir schreiben können:

$$\vec{F}_g = -\text{const.} \cdot \frac{m}{r^\alpha} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (2.82)$$

Vergleichen wir dies mit  $\vec{F} = -m\vec{g}$ , so erhalten wir:  $g = \frac{\text{const.}}{r_E^\alpha}$ , wobei  $r_E$  der Erdradius ist.

Um  $\alpha$  zu bestimmen, vergleichen wir den Wert von  $F_g$  auf der Erdoberfläche mit dem Wert von  $F_g$  auf der Mondbahn. Der Mond läuft im Abstand  $r_{MB}$  um die Erde. Nähern wir eine Bahn durch eine Kreisbahn (tatsächlich handelt es sich um eine Ellipsenbahn, wie wir später sehen werden), so erhalten wir aus dem Kräftegleichgewicht zwischen  $F_g$  und der Zentripetalkraft  $m\omega^2 r_{MB}$ :

$$\text{const.} \cdot \frac{m}{r^\alpha} = m\omega^2 r_{MB}. \quad (2.83)$$

Die Beschleunigung  $a_{MB}$  des Mondes ist:  $a_{MB} = \omega^2 r_{MB} = \left(\frac{2\pi}{T_{MB}}\right)^2 \cdot r_{MB}$ .

Die Umlaufzeit  $T_{MB}$  des Mondes beträgt 28 Tage =  $2.4 \cdot 10^6$  s

Der Radius  $r_{MB}$  beträgt ca.  $3.8 \cdot 10^8$  m  $\approx 60 r_E$

Wir erhalten hieraus:  $a_{MB} \approx 2.6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx \frac{g}{3770} \approx \frac{g}{(60)^2}$ .

Entsprechend unserem Ansatz für  $F_g$  können wir das Verhältnis  $\frac{a_{MB}}{g}$  schreiben:

$$\frac{a_{MB}}{g} = \frac{1/(r_{MB})^\alpha}{1/(r_E)^\alpha} = \left(\frac{r_E}{r_{MB}}\right)^\alpha \quad (2.84)$$

Wir haben also mit  $r_{MB} \approx 60r_E$ :  $\left(\frac{r_E}{r_{MB}}\right)^\alpha \approx \left(\frac{1}{60}\right)^\alpha$ , woraus sich mit unserer Abschätzung  $a_{MB} \approx \frac{g}{(60)^2}$  unmittelbar  $\alpha \approx 2$  ergibt.

Wir vermuten deshalb ein **quadratisches Abstandsgesetz**.

Es bleibt noch die Abhängigkeit von der Erdmasse  $M$  zu untersuchen. Hierzu folgendes Gedankenexperiment (s. Abb. 2.39):

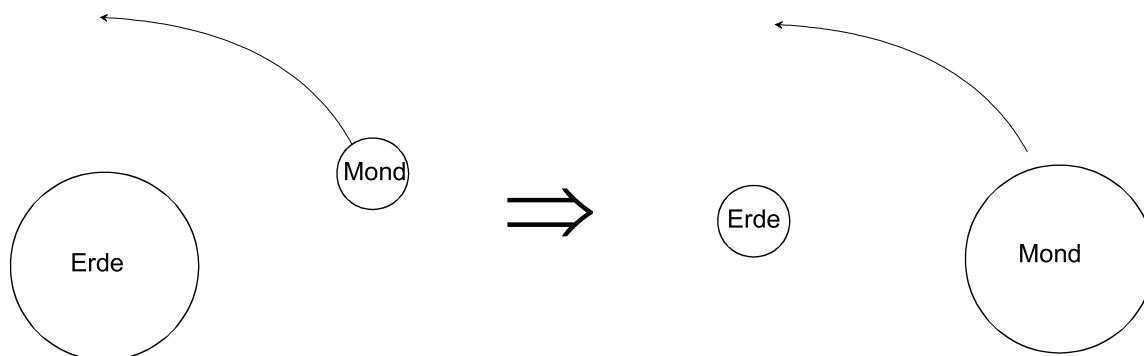


Abbildung 2.39: Gedankenexperiment zur Abhängigkeit des Gravitationsgesetzes von der Erdmasse: Vergrößern des Mondes und Verkleinern der Erde zur

Wir vergrößern den Mond auf die Größe und Masse der Erde und verkleinern die Erde auf die Größe und die Masse des Mondes. Mond und Erde haben dann völlig symmetrisch ihre Rollen vertauscht, was sich auch in der Kraft zwischen den beiden widerspiegeln sollte

Es liegt also nahe, dass  $m$  und  $M$  symmetrisch in gleicher Form in  $F_g$  eingehen, d. h. als Produkt  $m \cdot M$ . Wir haben damit endgültig das

$$\text{Newton'sche Gravitationsgesetz: } \vec{F}_g = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.85)$$

mit der noch unbekanntenen **Gravitationskonstanten  $G$** .

Historisch gesehen hat Newton das Gravitationsgesetz auf der Basis von Kepler's Gesetzen über die Planetenbewegungen gefunden. Wir werden hierauf etwas später eingehen. Insbesondere sei hier aber darauf hingewiesen, dass sich  **$G$**  ähnlich wie die Vakuumlichtgeschwindigkeit als eine **universelle Konstante** erweist, die für alle Massen die gleiche ist.

Wüssten wir an dieser Stelle die Masse der Erde, so könnten wir  $G$  aus der Kenntnis von  $g$  und  $r_E$  sofort angeben. Um  $G$  tatsächlich zu bestimmen, muss die Gravitationskraft zwischen zwei bekannten Massen  $M$  und  $m$  gemessen werden.

Ein irdischer **Versuch zur Bestimmung der Gravitationskraft zwischen zwei Massen  $m$  und  $M$**  und damit auch der Bestimmung von  $G$  wurde bereits 1798 von **Cavendish** durchgeführt. Ein derartiges Experiment ist keineswegs trivial. Man bedenke, dass es der Masse der ganzen Erde benötigt, um eine Gravitationsbeschleunigung  $g$  von eben  $9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  auf der Erdoberfläche zu erreichen.

Dass ein Experiment zur Messung von  $\vec{F}_g$  bei relativ moderaten Massen im kg-Bereich dennoch gelingen kann, liegt daran, dass man den Messaufbau so wählen kann, dass die Gravitationskraft, die die Erde auf die Massen ausübt, keinen Einfluss auf das Experiment hat. Der Aufbau ist in Abb. 2.40 skizziert.

An einem sehr dünnen Draht (Durchmesser  $10 \mu\text{m}$ ) hängen leicht drehbar zwei Massen  $m = 50 \text{ g}$  wie in Abb. 2.40 (links) in der Seitenansicht gezeichnet. Der vertikale Abstand der beiden Massen beträgt ca.  $25 \text{ cm}$ . An diese beiden Massen können zwei fest verankerte

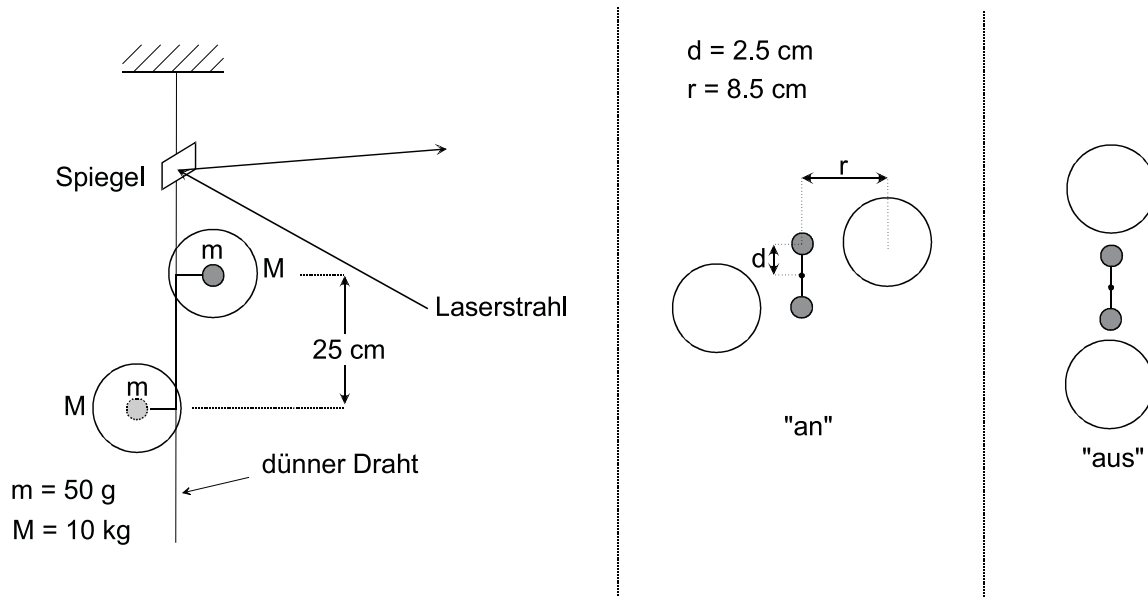
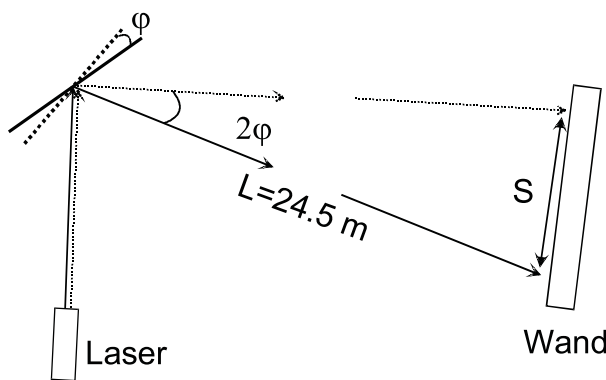


Abbildung 2.40: Schematischer Aufbau des Cavendish-Versuchs

Massen  $M = 10 \text{ kg}$  auf den relativen Abstand  $r = 8.5 \text{ cm}$  zwischen den Kugelmittelpunkten herangebracht werden, wie in der mittleren Abbildung in der Aufsicht gezeichnet. Der Abstand der Mittelpunkte der kleinen Massen beträgt  $2d = 5 \text{ cm}$ .

In der im mittleren Bild gezeichneten Konfiguration "an" ist die Gravitationskraft zwischen den Massen in azimuthaler Richtung gerichtet und wird dazu führen, dass sich die kleinen Massen in Richtung der großen Massen drehen. In der Stellung "aus" erfolgt dagegen keine Drehung.

Um die Drehbewegung der kleinen Massen bzw. des Drahtes nachzuweisen, ist am Draht ein kleiner Spiegel befestigt, der von einem Laserstrahl beleuchtet wird. Drehen sich die Massen  $m$  und damit der Draht um den Winkel  $\varphi$ , dann wird der Laserstrahl um den Winkel  $2\varphi$  abgelenkt, wie man sich an Hand von Abb. 2.41 klarmachen kann.

Abbildung 2.41: Abbildung der Drehung der Massen  $m$  mittels des Spiegels

Bevor wir hier weitermachen, wollen wir zunächst eine Anmerkung über die Gravitationskraft zwischen zwei Massen endlicher Ausdehnung machen. Die Massen  $m$  und  $M$  sind ja relativ nahe beieinander, so dass wir deren Ausdehnung sicher nicht ignorieren können.

Nun zeigt sich aber (die genaue Rechnung werden Sie etwas später kennenlernen), dass zwischen homogenen kugelförmigen Massenverteilungen die **Gravitationskraft** genau so **wirkt, als sei die Masse im Mittelpunkt der Kugeln vereinigt**. Damit können wir unsere Massen doch wieder als Punktteilchen auffassen.

Im Experiment bringen wir nun zunächst die Massen  $M$  von der Position "aus" in die Position "an". Die Massen  $m$  werden durch die Gravitationskraft zwischen  $m$  und  $M$  an die Massen  $M$  herangezogen, wodurch sich der Draht etwas verdreht. Der Draht übt seinerseits eine rückstellende Kraft auf die Massen aus, die (analog zum Hooke'schen Gesetz) proportional zum Auslenkwinkel  $\varphi$  ist:  $F_D = -\kappa\varphi$ .

Im Gleichgewicht haben wir  $F_D = 2 \cdot F_g$ , wobei der Faktor 2 daher rührt, dass zwei Massen den Draht drehen. Hierbei vernachlässigen wir die Gravitationskraft zwischen der tiefer (höher) gelegenen Masse  $M$  und der höher (tiefer) angebrachten Masse  $m$ . Wir bezeichnen die Differenz der Auslenkwinkel in den Ruhelagen "an" und "aus" als  $\varphi_0$ . Dieser Winkel ergibt sich aus der Beziehung

$$\kappa\varphi_0 = 2G \frac{mM}{r^2}. \quad (2.86)$$

Aufgelöst nach  $G$  ergibt sich:

$$G = \frac{\kappa\varphi_0 r^2}{2mM}. \quad (2.87)$$

Nun ist die Drehbewegung der Massen  $m$  um die Drahtachse nur sehr schwach gedämpft. Wie wir gleich sehen werden, führen diese Massen deshalb eine Drehschwingung um die Drahtachse aus. Die Frequenz bzw. Periode dieser Schwingung können wir nutzen, um die uns unbekannte Größe  $\kappa$  zu eliminieren.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung für die Drehschwingung betrachten wir nochmals die Anordnung des Fadenpendels, die Sie schon kennengelernt haben (Abb.2.42).

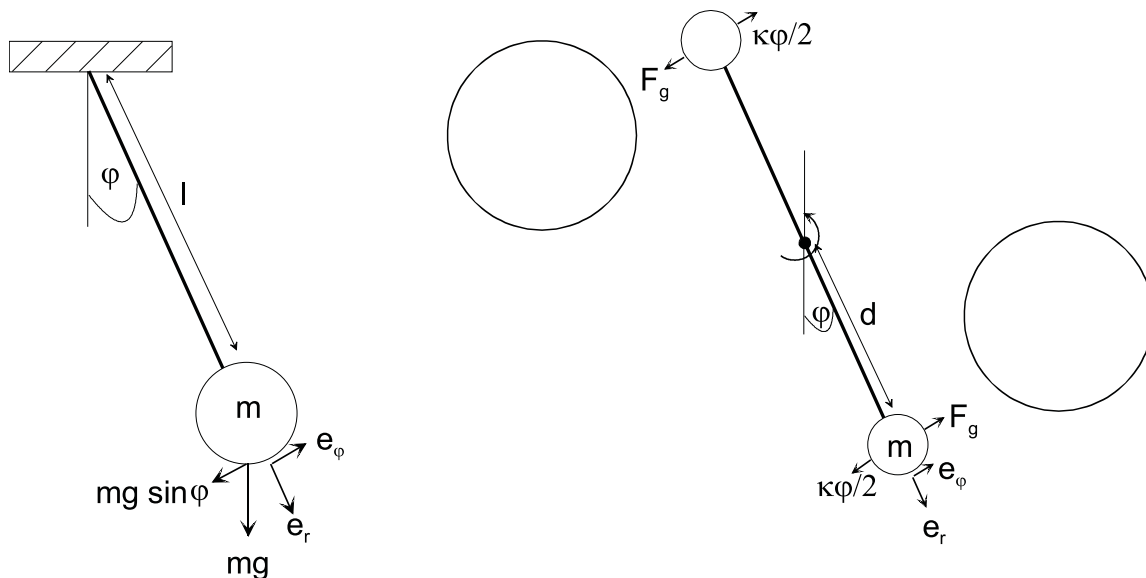


Abbildung 2.42: links: Fadenpendel; rechts: schwingende Massen beim Cavendish-Versuch

Beim Fadenpendel hatten wir zunächst Zylinderkoordinaten eingeführt und dann die auf die Masse  $m$  wirkende Schwerkraft in einen radialen und einen azimuthalen Anteil zerlegt.

Für die Beschleunigung in azimuthaler Richtung ergab sich für eine konstante Länge  $l$  des Fadenpendels:  $a_\varphi = l \cdot \ddot{\varphi} = \frac{F_\varphi}{m} = -g \cdot \sin \varphi$ .

Wir können dieses Resultat nun unmittelbar übernehmen, um die Drehschwingung der beiden Massen  $m$  zu behandeln. Hierbei ist:  $F_\varphi = -\frac{\kappa}{2}\varphi$ . Ersetzen wir noch die Länge  $l$  des Fadenpendels durch den halben Abstand  $d$  der beiden Massen, so erhalten wir bei Vernachlässigung von Dämpfungstermen:

$$m \cdot d \cdot \ddot{\varphi} + \frac{\kappa}{2}\varphi = 0 \quad (2.88)$$

was eine Schwingungsgleichung für  $\varphi$  ist.

Die Eigenfrequenz dieser Drehschwingung beträgt

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\kappa}{2md}}. \quad (2.89)$$

Mit diesem Ergebnis können wir in Gleichung 2.87 die Größe  $\kappa$  eliminieren und erhalten:

$$G = \frac{r^2 d}{M} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \varphi_0. \quad (2.90)$$

Für den Auslenkwinkel  $\varphi_0$  betrage die Auslenkung des Laserstrahls an der Wand  $S_0$  (s. Abb. 2.41). Der Abbildung entnimmt man:  $2\varphi_0 \approx S_0/L$ , so dass wir schließlich  $G$  aus

$$G = \frac{r^2 d}{M} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{S_0}{2L} \quad (2.91)$$

bestimmen können. Für die Oszillationsperiode messen wir  $T = 7.5 \text{ min} = 450 \text{ s}$ . Das System schwingt dabei um die Ruhelage  $S_0 = 1 \text{ m}$ .

Einsetzen aller Zahlenwerte in 2.91 liefert:  $G \approx 7.2 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}}{\text{kg}^2}$ .

Der Literaturwert beträgt:  $\mathbf{G} \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}}{\text{kg}^2}$ .

Unsere Messung ist also nicht allzu weit von diesem Ergebnis entfernt.

Es lohnt hier, nochmals eine genauere Fehlerabschätzung vorzunehmen.

Wir hatten  $G$  als Funktion der 6 Messgrößen  $r, d, M, T, S_0$  und  $L$  bestimmt. Jede dieser Größen hat einen endlichen (zufälligen) Messfehler. Nach den Regeln der Fehlerfortpflanzung haben wir allgemein für eine Größe  $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ :

$$(\delta f)^2 = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \delta x_n \right)^2. \quad (2.92)$$

Hierbei ist  $\frac{\partial f}{\partial x_n}$  die partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_n$  (alle anderen Variablen  $x_k, k \neq n$ , sehen wir als fest an) und  $\delta x_n$  ist der Messfehler von  $x_n$ . Angewendet auf  $G(r, d, M, T, S_0, L)$  ergibt dies:

$$(\delta G)^2 = G^2 \cdot \left\{ \left(2\frac{\delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\delta S_0}{S_0}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{L}\right)^2 + \left(2\frac{\delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 \right\} \quad (2.93)$$

Nehmen wir an, dass wir jede der Größen auf 3% genau bestimmt haben, so addiert sich der zufällige relative Fehler zu  $\delta G/G = 0.03 \cdot \sqrt{8} \approx 10\%$ .

Wir wollen außerdem zwei systematische Fehler diskutieren:

- Wir hatten den Einfluss der diagonal gegenüberliegenden Masse  $M$  vernachlässigt. Der Mittelpunkt dieser Kugel hat von der Masse  $m$  einen Abstand  $z_0$  in z-Richtung von ca. 25 cm, ist also um den Abstandsvektor  $r_2 = \sqrt{z_0^2 + r^2 + (2d)^2} \approx 27$  cm von  $m$  entfernt. Das Verhältnis  $r_1/r_2$  beträgt ca. 0.3. Die durch die zweite Masse  $M$  auf  $m$  ausgeübte Gravitationskraft  $F_{g2}$  ist also vom Betrag her etwa  $(0.3)^2 \approx 0.1$  der Gravitationskraft  $F_{g1}$  durch die nahe benachbarte Masse  $M$ . Davon ist der Anteil  $F_{g2} \sin(r_1/r_2) \approx 0.3F_{g2} \approx 0.03F_{g1}$  antiparallel zu  $F_{g1}$  gerichtet. Er führt zu einer Überschätzung von  $G$  um etwa 3%.
- Bei der Berechnung der Schwingungsdauer  $T$  hatten wir nur die Massen  $m$  der beiden kleinen Kugeln berücksichtigt, aber nicht die Masse der Aufhängung selbst. Diese Masse führt zu einer leichten Erhöhung von  $T$  und damit zu einer Unterschätzung von  $G$ . Der systematische Fehler beträgt hier 5-10%.

Wir haben damit einen zufälligen Fehler von ca. 10 % und einen systematischen Fehler von ca. 5%. Unser Ergebnis wich um ca. 7% vom Literaturwert ab, liegt also innerhalb der Fehlergrenzen.

Wir wollen uns nun der **Planetenbewegung** zuwenden und zunächst einige **historische Anmerkungen** geben.

- bereits im 4. Jh. v.Chr beschäftigten sich die Babylonier mit den Sternen. Die Vorstellung war, dass "Sphären" um die Erde kreisen, an denen die Sterne bzw. Planeten angebracht waren.
- dieses geozentrische Weltbild wurde im 2. Jh. v.Chr. von Ptolemäus (85-165, Ägypten) nochmals verfeinert, der die Bewegung der Planeten auf den Sphären durch zusätzliche "Epizyklen" beschrieb.
- im 16. Jh. stellte Kopernikus (1473-1543) die Vermutung auf, Erde und Planeten kreisten auf Kreisbahnen um die Sonne. Dieses heliozentrische Weltbild lieferte allerdings zunächst deutlich schlechtere Vorhersagen als das geozentrische Bild von Ptolemäus.
- im 17. Jh. führte der dänische Astronom Tycho Brahe (1546-1601) zahlreiche Stern- und Planetenbeobachtungen durch. Eine seiner Beobachtungen war, dass keine Bewegung der Sterne durch den Effekt der Parallaxe zu erkennen war. Um dies zu erklären, musste entweder die Erde ruhen, oder es mussten die Sterne extrem weit entfernt sein. Brahe schloss das letztere aus; die Erde musste also ruhen.
- 1610/1611 wurden durch Galilei und Kepler die ersten Fernrohre konstruiert.
- bereits 1610 erkannte Galilei mit seinem Fernrohr, dass Monde um den Jupiter kreisen (Galilei erkannte 4 Monde). Die Monde kreisten dabei "hinter" dem Jupiter hindurch, was im Bild der Sphären sehr problematisch ist.

In der Folgezeit setzte sich trotz heftiger Widerstände mehr und mehr das heliozentrische Weltbild durch. Ein wesentlicher Meilenstein waren hierbei

- die Kepler'schen Gesetze (s. unten), die 1609 bzw. 1619 formuliert wurden.

Auf ihrer Basis fand schließlich eine Generation später

- 1666 Isaac Newton das nach ihm benannte Gravitationsgesetz.

### 2.13.2 Die Kepler'schen Gesetze

1. "Die Planeten durchlaufen Ellipsenbahnen, wobei die Sonne in einem der Brennpunkte steht" (1609, s. Abb. 2.43).

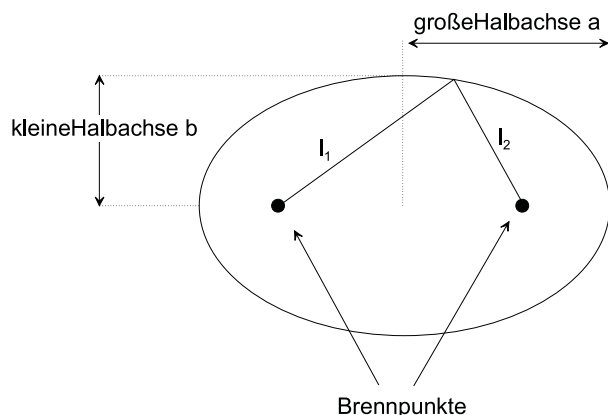


Abbildung 2.43: Zur Geometrie der Ellipse; auf dem gesamten Umfang gilt:  $l_1 + l_2 = \text{const} = 2a$

2. "Der 'Fahrstrahl' von der Sonne zu den Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen" (1609, s. Abb. 2.44).

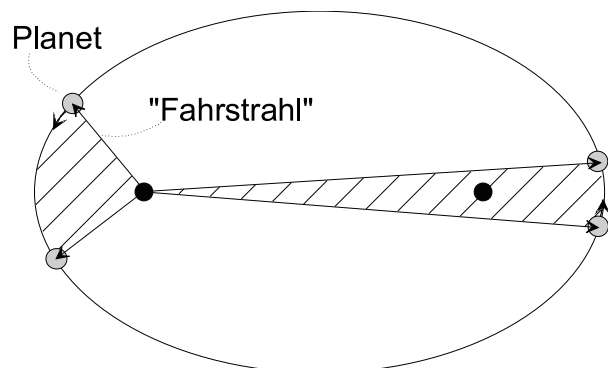


Abbildung 2.44: Zum 2. Kepler'schen Gesetz. Die beiden schraffierten Flächen, die ein Planet in gleichen Zeiten durchläuft, sind gleich groß.

3. "Das Verhältnis der Kuben der großen Halbachse  $a$  zum Quadrat der Umlaufzeit  $T$  ist für alle Planeten das gleiche", d. h.  $a^3/T^2 = \text{const.}$  (1619).

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie aus den drei Kepler'schen Gesetzen die Newton'sche Gravitationskraft folgt.

Mit Aufbauten wie dem Cavendish-Experiment können wir die Gravitationskraft, die eine der fundamentalen Naturkräfte ist, auf Längenskalen cm bis m testen (im Prinzip können wir die Massen  $m$  und  $M$ , und den Abstand  $r$  variieren). Die Planetenbewegung liefert uns Messdaten auf der Größenskala des Sonnensystems. Wesentlich schwieriger oder gar unmöglich werden solche Tests aber, wenn wir zu extremen Skalen gehen.

- Bei atomaren oder subatomaren Abständen überwiegen andere Kräfte (wie etwa die elektrostatische Kraft zwischen den Elektronen und dem Atomkern) die Gravitationskraft um viele Größenordnungen. Bis heute ist es nicht gelungen, die Gravitationskraft bei sehr kleinen Abständen mit den übrigen Wechselwirkungen in Einklang zu bringen. Spätestens bei Abständen im von Bereich  $10^{-35}$  m (der Planck-Skala) versagt die heutige Theorie.
- Große Massenansammlungen bewirken eine Änderung der Struktur von Raum und Zeit, die im Rahmen von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie verstanden werden kann. Sie liefert ein über das Newton'sche Gravitationsgesetz bzw. die Newton'sche Mechanik hinausgehene Beschreibung von Raum, Zeit und Gravitation, die wichtig wird, wenn wir Effekte der Gravitation in der Nähe sehr großer Massen oder auf der Größenskala von Galaxien beschreiben wollen.

### 2.13.3 Theorie: Keplersche Gesetze

Die Lebensgeschichte von Johannes Kepler ist in besonderer, wenn auch nicht immer für ihn erfreulichen Weise mit der Universität Tübingen verbunden (siehe Kurzbiographie in 2.45). Weltweit ist er auch heute noch bekannt wegen der Keplerschen Gesetze, mit denen er sehr präzise die Planetenbahnen beschrieb. In einer freien Übersetzung dieser natürlich ursprünglich in Latein formulierten Gesetze lauten diese:

#### Keplersche Gesetze:

- 1) Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
- 2) Der von der Sonne zum Planeten gerichtete Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
- 3) Das Verhältnis  $a^3/T^2$ , wobei  $a$  die große Halbachse der Ellipsenbahn und  $T^3$  die Umlaufzeit ist, ist für alle Planeten gleich.

Die Gesetze 1) und 2) wurden 1609 in dem Werk "Astronomia Nova" veröffentlicht, das dritte Gesetz erst im Jahr 1619 in "Harmonices Mundi".

Die Ellipsenbahn eines Planeten ist in der Abbildung 2.46 dargestellt. Die Ellipse ist charakterisiert durch die große Halbachse  $a$  und die kleine Halbachse  $b$ , beziehungsweise den daraus abgeleiteten Größen Halbparameter  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} := \frac{b^2}{a}, \quad \text{und} \quad \varepsilon := \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \text{ Exzentrizität}$$

Sind die Halbachsen  $a$  und  $b$  identisch, so wird die Exzentrizität  $\varepsilon = 0$  und die Ellipse zu einem Kreis mit dem Radius  $P = a = b$ . Wir wollen die Planetenbahn in Zylinderkoordinaten beschreiben, wobei der Brennpunkt der Ellipse, in dem die Sonne steht, mit dem Koordinatenursprung identifiziert werden soll die Planetenbahn in der Ebene mit  $z = 0$  liegt und die  $x$ -Achse in die Richtung des sonnenfernsten Punktes der Bahn zeigt. Mit



### Kurzbiographie Johannes Kepler

- 1571: Geboren am 27.12. in Weil der Stadt
- 1587: Studium der Astronomie und Mathematik an der “Artistenfakultät” (Schüler des Astronomen Michael Maestlin) in Tübingen, Studium der Protestantischen Theologie, anschliessend als Mathematiklehrer nach Graz
- 1600: geht auf Einladung Tycho Brahes nach Prag, die Keplerschen Gesetze basieren auf den Beobachtungsdaten von Tycho Brahe, der selbst allerdings das heliozentrische Weltbild des Kopernikus ablehnte. Nach dem Tode Tycho Brahes übernimmt Kepler seine Stelle als Kaiserlicher Mathematiker
- 1609: Veröffentlichung *Astronomia Nova* (Erstes und Zweites Keplersches Gesetz)
- 1611: Konstruktionsprinzip des “Keplerschen Fernrohrs”
- 1613: Landvermesser in Linz; er bewirbt sich auf eine Professur nach Tübingen
- 1619: Veröffentlichung *Harmonices Mundi* (Drittes Keplersches Gesetz)
- 1620: nach langem Hin und Her wird die Bewerbung Keplers nach Tübingen wegen theologischer Differenzen endgültig abgelehnt.
- 1628: Astrologe Wallensteins
- 1630: stirbt am 15.11. in Regensburg



Abbildung 2.45: Kurzbiographie und Bild von Johannes Kepler

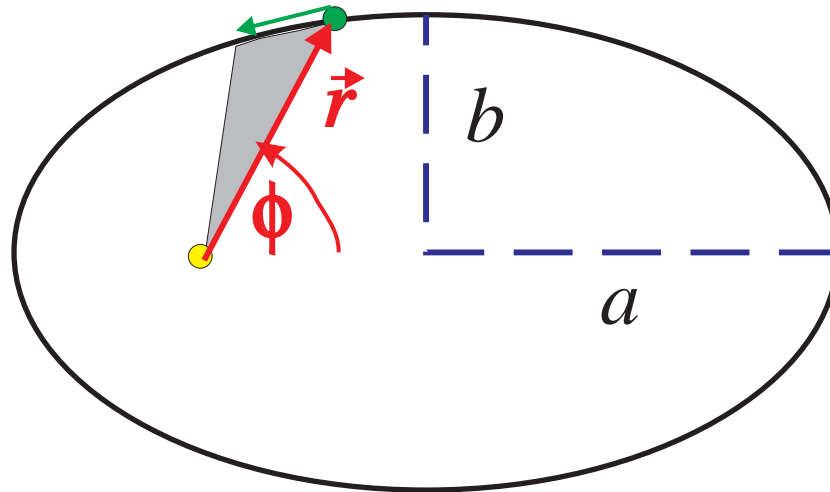


Abbildung 2.46: *Ellipse als Planetenbahn, die graue Fläche entspricht der vom Fahrstrahl überstrichenen Fläche, wenn der Planet die Strecke zurückgelegt hat, die durch den grünen Pfeil angedeutet ist*

dieser Wahl des Koordinatensystems ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen der Radiuskoordinate  $\rho$  und dem Azimutwinkel  $\varphi$  des Ortsvektors für den Planeten

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\mathcal{P}}{1 - \varepsilon \cos(\varphi)} \\ \vec{r} &= \rho \hat{e}_\rho.\end{aligned}\quad (2.94)$$

Neben der Darstellung des Ortsvektors  $\vec{r}$  in den Zylinderkoordinaten benötigen wir auch die entsprechenden Ausdrücke für die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und die Beschleunigung  $\vec{a}$ . Nach unseren Rechnungen im Abschnitt über die Zylinderkoordinaten sind diese gegeben durch

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \hat{e}_\varphi.\end{aligned}\quad (2.95)$$

Dabei haben wir bereits berücksichtigt, dass bei der Planetenbewegung in der Ebene  $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$  gilt.

Wenn der Planet eine Wegstrecke  $d\vec{r}$  zurückgelegt hat (siehe den grünen Pfeil in der Skizze von Abb. 2.46), so ist die vom “Fahrstrahl überstrichene Fläche”,  $dF$ , die im zweiten Keplerschen Gesetz erwähnt wird, gerade die Hälfte der Fläche des Parallelogramms, das durch die Vektoren  $\vec{r}$  und  $d\vec{r}$  aufgespannt wird. Damit gilt also für die überstrichene Fläche pro Zeiteinheit  $dt$

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \\ &= \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m\vec{v}| \\ &= \frac{1}{2m} |\vec{l}|.\end{aligned}\quad (2.96)$$

Beim Übergang zur letzten Zeile haben wir die Definition des Bahndrehimpulse  $\vec{l}$  übernommen. Andererseits können wir nun aber auch die Ausdrücke für den Ortsvektor  $\vec{r}$  und

die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  aus (2.94) und (2.95) übernehmen was zu dem Ausdruck führt

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \frac{1}{2}|(\rho\hat{e}_\rho) \times (\dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi)| \\ &= \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi} \\ &= \frac{1}{2m}|\vec{l}|.\end{aligned}\quad (2.97)$$

Das zweite Keplersche Gesetz entspricht also der Beobachtung, dass die Drehimpulse der Bewegung der Planeten, bezogen auf ein Koordinatensystem mit der Sonne im Koordinatenursprung, erhalten bleiben. Daraus können wir also schon schliessen, dass die Planetenbewegung in einem zentralen Kraftfeld erfolgt mit der Sonne als Kraftzentrum. Andererseits können wir aus (2.97, dass der Betrag dieses Drehimpulses durch  $|\vec{l}| = m\rho^2\dot{\varphi}$  gegeben ist. Die Erhaltung des Drehimpulses bedeutet aber auch, dass

$$\frac{d\rho^2\dot{\varphi}}{dt} = 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho^2\ddot{\varphi} = 0.$$

Dies entspricht aber gerade der Azimutalkomponente der Beschleunigung (vergleiche 2.95), womit wiederum gezeigt ist, dass bei der Planetenbewegung eine Beschleunigung ausschließlich in radialer Richtung also in Richtung auf die Sonne erfolgt. Diese Beschleunigung ergibt sich zu

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2.$$

Für die Berechnung dieser Beschleunigung greifen wir auf die Parametrisierung der Ellip-senbahn in (2.94) zurück und berechnen

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\dot{\varphi} \\ &= -\frac{\mathcal{P}\varepsilon\sin\varphi}{(1-\varepsilon\cos\varphi)^2}\dot{\varphi} \\ &= -\frac{\varepsilon\sin\varphi}{\mathcal{P}}\rho^2\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon\sin\varphi}{\mathcal{P}}\frac{|\vec{l}|}{m},\end{aligned}\quad (2.98)$$

wobei ja die Masse des Planeten  $m$  und sein Bahndrehimpuls  $|\vec{l}|$  während der Bewegung konstant bleiben. Damit erhält man

$$\ddot{\rho} = -\frac{\varepsilon\cos\varphi}{\mathcal{P}}\frac{|\vec{l}|}{m}\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon\vec{l}^2}{\mathcal{P}\rho^2m^2}\cos\varphi.$$

Eingesetzt in (2.13.3) ergibt sich damit für die radiale Beschleunigung

$$\begin{aligned}a_\rho &= -\frac{\varepsilon\vec{l}^2}{\mathcal{P}\rho^2m^2}\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\vec{l}^2}{m^2\rho^2} \\ &= -\frac{\vec{l}^2}{m^2\rho^2}\left(\frac{\varepsilon\cos\varphi}{\mathcal{P}} + \frac{1-\varepsilon\cos\varphi}{\mathcal{P}}\right) \\ &= -\frac{\vec{l}^2}{m^2\mathcal{P}}\frac{1}{\rho^2}.\end{aligned}\quad (2.99)$$

Bei dem Übergang zur dritten Zeile wurde  $1/\rho$  nach (2.94) ersetzt. Bahndrehimpuls  $\vec{l}$ , Masse  $m$  und Halbparameter  $\mathcal{P}$  der Planetenbahn sind Konstanten der Planetenbewegung. Aus (2.99) wird also deutlich, dass die radiale Beschleunigung und damit die Kraft, die von der Sonne auf den Planeten wirkt eine konservative Zentralkraft ist, die proportional zum Quadrat des Abstandes Planet - Sonne abfällt.

Das dritte Keplersche Gesetz verknüpft nun die Daten der verschiedenen Planetenbahnen miteinander. Nach dem zweiten Keplerschen Gesetz ist die pro Zeiteinheit vom Fahrstrahl überstrichene Fläche konstant. Diese Geschwindigkeit ist natürlich berechenbar als die Gesamtfläche innerhalb der Ellipsenbahn,  $F = \pi ab$  dividiert durch die Umlaufzeit  $T$ . Andererseits gilt aber nach (2.97)

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2m} |\dot{\vec{l}}| = \frac{\pi ab}{T}.$$

Mit dieser Gleichung können wir den Quotienten des dritten Keplerschen Gesetzes umschreiben

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{T^2} &= \frac{a^3 \vec{l}^2}{(2m\pi ab)^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\vec{l}^2}{m^2 \mathcal{P}}, \end{aligned} \quad (2.100)$$

(siehe Definition des Halbparameters  $\mathcal{P}$  in (2.13.3)). Der Quotient  $a^3/T^2$  ist also bis auf den Faktor  $4\pi^2$  identisch mit der Konstanten in der radialen Beschleunigung des jeweiligen Planeten (2.99). Das dritte Keplersche Gesetz sagt also aus, dass die radiale Beschleunigung für alle Planeten von der Form

$$a_\rho = -\frac{\text{const}}{\rho^2}$$

ist. Das dritte Keplersche Gesetz ist also eine historisch vorweggenommene Bestätigung für die anziehende Gravitationskraft der Sonne auf die Planeten mit

$$\begin{aligned} F_\rho &= ma_\rho = -m \frac{\text{const}}{\rho^2} \\ &= -\gamma \frac{m M_S}{\rho^2}, \end{aligned} \quad (2.101)$$

wobei  $M_S$  für die Masse der Sonne steht und  $\gamma$  die Konstante der Gravitationskraft bezeichnet.

Wir haben also hier gezeigt, dass wir aus der experimentellen Beobachtung, die zu den Keplerschen Gesetzen führte, die Form der Kraft herleiten konnten, die die Planeten auf ihrer Umlaufbahn hält. Dabei wurde nicht nur gezeigt, dass es sich hier um ein zentrales Kraftfeld mit dem Kraftzentrum Sonne handelt. Darüber hinaus konnten wir auch zeigen, dass diese Kraft die Form der Newtonschen Gravitationskraft hat also mit  $1/\rho^2$  beziehungsweise  $1/r^2$  abfällt.

### 2.13.4 Trajektorien im Gravitationsfeld

In diesem Abschnitt wollen wir nun zeigen welche Bahnen (Trajektorien) Massenpunkte zurücklegen, wenn sie sich in einem zentralen Kraftfeld der Form

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^3}\vec{r} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r.$$

Ist die Konstante  $\alpha$  positiv, so handelt es sich hier um ein attraktives Kraftfeld, in dem die Massenpunkte zum Kraftzentrum hingezogen werden. Beispiele hierfür sind die Gravitationskraft aber auch die elektrostatische Anziehung, die Coulombkraft, mit der z.B. Elektronen (mit ihrer negativen Ladung) von einem positiv geladenen Atomkern im Kraftzentrum angezogen werden. Bei negativen Werten von  $\alpha$  liegt eine abstoßende Kraft vor. Ein entsprechendes Beispiel ergibt sich durch die Repulsion, die ein elektrisch positiv geladenes Proton durch einen ebenfalls positiv geladenen Atomkern erfährt.

Für ein solches Kraftfeld betrachten wir die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = -\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}.$$

Hier und im folgenden steht  $\vec{p} = m\vec{v}$  für den Impuls des Teilchens. Da es sich bei  $\vec{F}$  um ein zentrales Kraftfeld handelt, ist der Drehimpuls  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$  eine Konstante der Bewegung und wir können die Gleichung (2.13.4) von rechts mit diesem Drehimpuls multiplizieren:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} \times \vec{l} &= -\frac{\alpha}{r^3} [\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{p})] \\ &= \frac{\alpha}{r^3} [r^2\vec{p} - \vec{r}(\vec{r}\vec{p})]. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile haben wir die allgemein gültige Vektorrelation

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}),$$

ausgenutzt und  $\vec{r}\vec{r} = r^2$  eingesetzt. Zur weiteren Berechnung bestimmen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{|\vec{r}|} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \dot{x} + \frac{d}{dy} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \dot{y} + \frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \dot{z} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \dot{x} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \dot{y} - \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \dot{z} \\ &= -\frac{\vec{r}\vec{v}}{r^3} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für

$$\frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{v}}{r} - \vec{r} \frac{\vec{r}\vec{v}}{r^3}$$

Damit ergibt sich für die rechte Seite der Gleichung (2.102) (letzte Zeile):

$$\frac{\alpha}{r^3} [r^2\vec{p} - \vec{r}(\vec{r}\vec{p})] = \alpha m \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Für die linke Seite haben wir aber

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{l}) = \dot{\vec{p}} \times \vec{l} + \vec{p} \times \dot{\vec{l}} = \dot{\vec{p}} \times \vec{l},$$

da ja  $\vec{l}$  konstant ist. Setzt man diese beiden Seiten der Gleichung (2.102) zusammen, ergibt sich

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{l}) = \frac{d}{dt} \left( \alpha m \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right)$$

beziehungsweise

$$\vec{p} \times \vec{l} = \alpha m \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} - \vec{C}.$$

wobei der Vektor  $\vec{C}$ , der sogenannte **Lenz'sche Vektor** konstant, sein muss. Man kann sich nun davon überzeugen, dass dieser Lenz'sche Vektor senkrecht zu  $\vec{l}$  steht und damit also in der Ebene der Bewegung liegt. Dazu multiplizieren wir die Gleichung (2.13.4) skalar mit dem Vektor  $\vec{l}$

$$\underbrace{\vec{l} (\vec{p} \times \vec{l})}_{=0} = \alpha m \underbrace{\frac{\vec{l}\vec{r}}{|\vec{r}|}}_{=0} - \vec{l}\vec{C}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist identisch Null, da der Vektor  $\vec{p} \times \vec{l}$  senkrecht zu  $\vec{l}$  steht. Der erste Term auf der rechten Seite ist Null, da der Ortsvektor  $\vec{r}$  in der Ebene der Bewegung liegt, die senkrecht zu  $\vec{l}$  ist. Daraus folgt also  $\vec{l}\vec{C} = 0$ , was ja bedeutet, dass der Lenz'sche Vektor  $\vec{C}$  in der Bewegungsebene liegt.

Für die weitere Rechnung multiplizieren wir die Gleichung (2.13.4) skalar mit  $\vec{r}$

$$\vec{r}(\vec{p} \times \vec{l}) = \alpha m \frac{r^2}{r} - \vec{r}\vec{C}.$$

Mit der allgemeinen Vektorbeziehung

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}),$$

können wir (2.13.4) umschreiben

$$\begin{aligned} \vec{l}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{l}^2 &= \alpha m r - \vec{r} \times \vec{C} \\ &= \alpha m r - r \left| \vec{C} \right| \cos(\varphi), \end{aligned} \quad (2.103)$$

wobei  $\varphi$  den Winkel zwischen  $\vec{r}$  und  $\vec{C}$  bezeichnet. Da der Lenz'sche Vektor  $\vec{C}$  in der Ebene der Bewegung des Teilchens liegt, können wir  $\vec{C}$  als die  $x$ -Achse für diese Ebene annehmen und  $\varphi$  beziehungsweise  $r = \rho$  als Zylinderkoordinaten in der Ebene interpretieren. Damit ergibt sich aus (2.103) die Beziehung

$$\rho = \frac{l^2}{\alpha m \left( 1 - \frac{C}{\alpha m} \cos(\varphi) \right)} = \frac{\mathcal{P}}{1 - \varepsilon \cos(\varphi)},$$

also die Gleichung der Ellipsenbahn (2.94) mit

$$\mathcal{P} = \frac{l^2}{\alpha m} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{C}{\alpha m}.$$

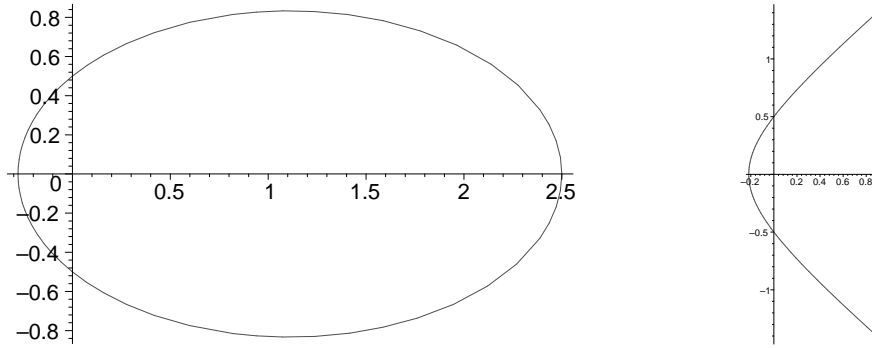


Abbildung 2.47: *Ellipse und Hyperbel als Trajektorie eines Massenpunktes im Gravitationsfeld. Die Ellipse im linken Teil der Figur hat eine Exzentrizität von  $\varepsilon = 0.8$ , die Hyperbel  $\varepsilon = 1.4$ . Solche Plots können z.B. mit dem MAPLE Kommando “`plot([0.5/(1-0.8*cos(phi)),phi,phi=0..2*Pi], coords=polar)`” generiert werden. Dabei Achtung mit der Winkelkkordinate  $\phi$  bei einer Parabel oder Hyperbel*

Diese Parametrisierung der Trajektorie (2.13.4) steht aber nicht nur für eine Ellipse. Es gilt vielmehr allgemein, dass für

$$\begin{aligned}
 \varepsilon = 0 &: && \text{ein Kreis,} \\
 0 < \varepsilon < 1 &: && \text{eine Ellipse,} \\
 \varepsilon = 1 &: && \text{eine Parabel,} \\
 1 < \varepsilon &: && \text{eine Hyperbel,}
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

beschrieben wird. Die Form der Trajektorie hängt also von der Exzentrizität  $\varepsilon$  und damit wegen (2.13.4) vom Betrag des Lenz’schen Vektors  $C$  ab. Beispiele für eine Ellipsenbahn ( $\varepsilon = 0.8$ ) und eine Hyperbel ( $\varepsilon = 1.4$ ) sind in Abb. 2.47 gegeben.

Was ist also nun die physikalische Bedeutung dieses Lenz’schen Vektors? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir die Gleichung (2.13.4) zur Definition von  $\vec{C}$  und berechnen

$$C^2 = (\vec{p} \times \vec{l})^2 + \alpha^2 m^2 - 2\alpha m \frac{\vec{r}}{r} (\vec{p} \times \vec{l}) .$$

Der Geschwindigkeits- und damit auch der Vektor des Impulses  $\vec{p} = m\vec{v}$  sind in der Ebene der Bewegung und damit senkrecht zum Vektor des Drehimpulse  $\vec{l}$  (das ergibt sich natürlich auch schon aus der Definition des Drehimpulses  $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ ). Damit ist der Betrag des Vektors  $\vec{p} \times \vec{l}$  gleich dem Produkt der Beträge  $p$  und  $l$ . Für das Vektorprodukt im letzten Term dieser Gleichung benutzen wir die Beziehung (2.13.4) in der Form

$$\vec{r} (\vec{p} \times \vec{l}) = \vec{l} (\vec{r} \times \vec{p}) = l^2 .$$

Damit erhalten wir für (2.13.4)

$$C^2 = p^2 l^2 + \alpha^2 m^2 - \frac{2\alpha m l^2}{r}$$

und mit (2.13.4) ergibt sich

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &= 1 + \frac{2l^2}{\alpha^2 m} \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} \right) \\ &= 1 + \frac{2l^2}{\alpha^2 m} E.\end{aligned}\tag{2.105}$$

In der Klammer in der ersten Zeile dieser Gleichung steht nämlich mit  $p^2/(2m)$  gerade die kinetische Energie des Teilchens und mit  $-\alpha/r$  die jeweilige potenzielle Energie, die als Summe die Energie  $E$  ergeben. Für negative Werte der Energie kann das Teilchen dem attraktiven Potenzial nicht entfliehen: Für  $r \rightarrow \infty$  geht ja das Potenzial gegen Null und damit wäre eine negative kinetische Energie erforderlich um die Energieerhaltung zu bewahren. Dies ist aber wegen der Positivität der kinetischen Energie ( $mv^2/2$ ) nicht möglich. In diesem Fall negativer Energien liefert (2.105) eine Exzentrizität  $\varepsilon < 1$ , was bedeutet, dass die Trajektorie eine Ellipse ist.

Für positive Energien ist aber die kinetische Energie so groß, dass das Masseteilchen sich auch beliebig weit von dem Kraftzentrum entfernen kann. In diesem Fall wird das Teilchen am Kraftzentrum gestreut und durchläuft die Trajektorie einer Hyperbel. Beispiele für solche Hyperbelbahnen finden sich in der Astronomie, wenn z.B. ein Satellit mit ausreichender Geschwindigkeit an einem Planeten vorbeifliegt. Die gleichen Trajektorien erhält man aber auch, wenn man die Streuung eines Elektrons an einem Atomkern beschreibt. In diesem Fall ist das attraktive Zentralfeld durch die Coulomb Anziehung zwischen dem elektrisch positiv geladenen Atomkern und dem Elektron gegeben. Die Bahnen der gebundenen Elektronen wären auch hier Ellipsen. Man muss jedoch beachten, dass zur Beschreibung der Phänomene bei diesen extrem kleinen Abständen die Effekte der Quantenmechanik zu berücksichtigen sind.