

Kapitel 7

Spezielle Relativitätstheorie

7.1 Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

In diesem Abschnitt wollen wir uns damit beschäftigen, wie sich elektromagnetische Wellen, also z.B. das sichtbare Licht, ausbreiten. Zum Vergleich betrachten wir noch einmal die Ausbreitung von Schallwellen. Bei der Ausbreitung von Schallwellen in der Luft handelt es sich um Druckschwankungen, also Abweichungen des Druckes an einem bestimmten Ort \vec{r} zu einem bestimmten Zeitpunkt t vom Normaldruck, die wir durch eine Funktion $p(\vec{r}, t)$ beschreiben (siehe hierzu das Kapitel 7 der Vorlesung Physik I). Wird eine solche Schallwelle zur Zeit $t = 0$ am Koordinatenursprung $\vec{r} = 0$ ausgesendet, so entwickelt sich diese Schallwelle in Form einer Kugelwelle der Form

$$p(\vec{r}, t) = \frac{p_0}{r} \cos(kr - \omega t) . \quad (7.1)$$

Das Maximum dieser Schwingungsamplitude, das sich zur Zeit $t = 0$ am Koordinatenursprung $r = 0$ befindet, breitet sich also in Form einer Kugelschale aus, wobei zwischen Radius der Kugel r und der Zeit t der Zusammenhang

$$kr - \omega t = 0 \quad \rightarrow \quad r = \frac{\omega}{k}t = c_S t$$

besteht. Die Schallwelle breitet sich mit der Schallgeschwindigkeit $c_S = \omega/k$ aus. Diese Schallgeschwindigkeit ist eine Eigenschaft des Mediums (hier Luft), in dem sich der Schall ausbreitet, und allgemein gilt für die Ausbreitung von Schall, der zur Zeit $t = t_0$ and der Stelle $\vec{r} = \vec{r}_0$ emittiert wird, die folgende Gleichung für den Ort \vec{r} , an dem man den Schall zur Zeit t empfängt

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 - c_S^2 (t - t_0)^2 = 0 . \quad (7.2)$$

Diese Beziehung gilt natürlich nur für ein Koordinatensystem, das relativ zum Ausbreitungsmedium ruht. Betrachten wir einen Beobachter, beziehungsweise ein Koordinatensystem, das mit diesem Beobachter verbunden ist, der sich mit einer Geschwindigkeit \vec{v} relativ zum Medium bewegt. Bezeichnet man die Vektoren in diesem bewegten Koordinatensystem mit \vec{r}' , so gilt zwischen den Vektoren des ruhenden Koordinatensystems \vec{r} und des bewegten Systems entsprechend der Galilei Transformation

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t , \quad (7.3)$$

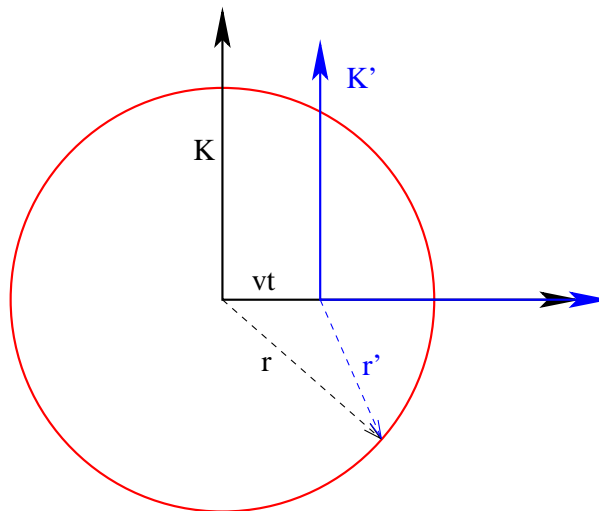


Abbildung 7.1: Schallausbreitung für verschiedene Beobachter

wenn wir annehmen, dass zur Zeit $t = t_0 = 0$ die beiden Koordinatenursprünge am gleichen Ort waren. Setzen wir außerdem voraus, dass zur Zeit $t = t_0 = 0$ an diesem gemeinsamen Koordinatenursprung eine Schallwelle emittiert wird, so gilt für die Ausbreitung aus der Sicht des bewegten Koordinatensystems an Stelle von (7.2) die Beziehung

$$(\vec{r}' + \vec{v}t)^2 - c_s^2 t^2 = 0. \quad (7.4)$$

Aus der Sicht dieses bewegten Beobachters breitet sich der Schall also nicht auf Kugelschalen aus sondern in der einen Richtung (parallel zu \vec{v}) langsamer als in andere (antiparallel zu \vec{v} , siehe Abbild 7.1). Außerdem kann der Beobachter dem Schall davon laufen, wenn er sich mit Überschallgeschwindigkeit, $v > c_s$ bewegt.

In welchem Medium breiten sich elektromagnetische Wellen aus? Zunächst können wir festhalten, dass sich elektromagnetische Wellen offensichtlich auch im Vakuum ausbreiten. Dies wird aus der Sicht der Theorie dadurch belegt, dass wir auch im Vakuum eine Ausbreitungsgeschwindigkeit für die elektromagnetischen Wellen der Form

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad (7.5)$$

definieren können. Aber auch der experimentelle Befund, dass uns z.B. das Licht der Sonne als elektromagnetische Welle über das im Weltraum existierende Vakuum hier auf der Erde erreicht, ist ein deutlicher Beleg dafür, dass elektromagnetische Wellen im Gegensatz etwa zu Schallwellen sich auch im Vakuum ausbreiten.

Bis zum Jahre 1900 zweifelte kaum jemand daran, dass es auch für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen ein Medium gibt, das man allgemein als Äther bezeichnete. Erst der Versuch von **Michelson** zeigte dann, dass es keinen solchen Äther gibt und sich elektromagnetische Wellen unabhängig von einem Medium ausbreiten. Zum Verständnis dieses Michelson Versuches wollen wir zunächst einmal annehmen, dass es einen Äther gibt, der sich relativ zu unserem im Labor verankerten Koordinatensystem mit einer Geschwindigkeit \vec{v} bewegt. Was passiert nun, wenn wir Licht einmal parallel zu der Geschwindigkeit des Äthers emittieren und ein anderes mal senkrecht dazu.

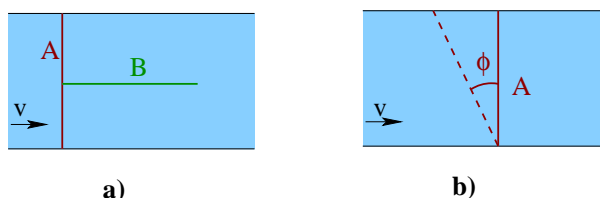


Abbildung 7.2: Schwimmer im Fluss, siehe Diskussion im Text

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir ein entsprechendes Beispiel aus unserer Alltagserfahrung. Wir betrachten zwei Schwimmer, die gleich schnell mit einer Geschwindigkeit c schwimmen. Diese Geschwindigkeit gilt relativ zum Wasser, das für die Schwimmer die gleiche Rolle übernimmt, wie der Äther für die Ausbreitung von Lichtwellen. Die Schwimmer sollen in einem Fluss schwimmen, der sich relativ zu uns mit einer Geschwindigkeit \vec{v} bewegt. Der Schwimmer (A) überquert den Fluss der Breite L und schwimmt dann wieder zum Ausgangspunkt zurück. Der Schwimmer (B) schwimmt zunächst in Flussrichtung die Strecke L und kehrt dann gegen die Strömung zum Ausgangspunkt zurück (siehe Abb. 7.2a). Beide Schwimmer legen die Strecke $2L$ zurück und wir stellen die Frage: Wer ist schneller an seinem Ausgangspunkt zurück?

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir zunächst einmal die Aufgabe des Schwimmers A. Damit er direkt gegenüber am anderen Flussufer ankommt, muss er in eine Richtung schwimmen, die relativ zur direkten Verbindungslinie einen Winkel ϕ bildet (siehe Abb. 7.2b). Wenn er in die gewählte Richtung mit seiner Geschwindigkeit c eine gewisse Zeit t schwimmt, so trägt ihn der Fluss in dieser Zeit eine Strecke vt flussabwärts. Er schwimmt also auf der Ideallinie, der direkten Verbindungslinie, wenn gilt

$$\sin \phi = \frac{vt}{ct} = \frac{v}{c}. \quad (7.6)$$

Von seiner Geschwindigkeit c bringt ihn aber nur die Komponente $c \cos \phi$ in die Richtung des gegenüberliegenden Ufers. Er benötigt deshalb für die Strecke L bis zum anderen Ufer die Zeit

$$t = \frac{L}{c \cos \phi} = \frac{L}{c \sqrt{1 - \sin^2 \phi}} = \frac{L}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Die gleiche Zeit benötigt er für den Rückweg, so dass der Schwimmer A insgesamt die Zeit

$$T_A = \frac{2L}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (7.7)$$

benötigt. Der Schwimmer B schwimmt auf dem Hinweg mit der Strömung und hat also relativ zum Ufer die Geschwindigkeit $c + v$. Auf dem Rückweg aber dafür nur die Geschwindigkeit $c - v$. Insgesamt benötigt er also für die gesamte Strecke die Zeit

$$T_B = \frac{L}{c + v} + \frac{L}{c - v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}. \quad (7.8)$$

Daraus ergibt sich das Verhältnis

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c^2 - v^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (7.9)$$

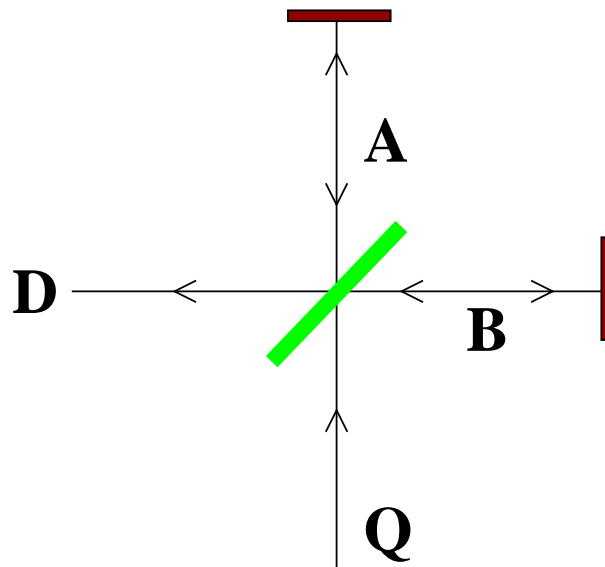


Abbildung 7.3: Schematische Darstellung des Michelson Interferometers, siehe Diskussion im Text

der Schwimmer B benötigt also etwas mehr Zeit als der Schwimmer A.

Analog zu diesem Beispiel der Schwimmer A und B wollen wir nun in einem Gedankenexperiment zwei elektromagnetische Wellen auf Hin- und Rückreise senkrecht zur Bewegungsrichtung des Äthers und parallel beziehungsweise antiparallel zum Äther schicken. Dies geschieht mit dem in der Abbildung 7.3 schematisch dargestellten Michelson Interferometer.

Von einer Lichtquelle Q wird Licht durch einen halbdurchlässigen Spiegel zum Teil durchgelassen in Richtung A, dann an einem festen Spiegel reflektiert und über den halbdurchlässigen Spiegel in Richtung des Beobachters (Detektor D) abgelenkt. Ein anderer Teil wird ausgehend von der Quelle Q über den halbdurchlässigen Spiegel in Richtung B ausgelenkt, reflektiert und ebenfalls in Richtung D durchgelassen.

Die total reflektierenden Spiegel können nun so justiert werden, dass die Lichtwellen, die über den Weg A zum Detektor D kommen genau in Phase sind mit denen, die den Weg B nehmen. Das bedeutet, dass die Zeiten, die das Licht für den Weg A und den Weg B benötigt so aufeinander eingestellt sind, dass die Zeitdifferenz gerade ein ganzes Vielfaches der Schwingungsperiode des benutzten Lichts ist. Wird nun die Apparatur gedreht, so ändert sich die Richtung der Wege A und B relativ zur Geschwindigkeit des Äthers. Das bedeutet aber, dass die Justierung der Phasen bei einer solchen Drehung gestört würde.

Der Versuch zeigte, dass eine solche Phasenverschiebung nicht eintritt. Dies bedeutet also entweder, dass die Relativgeschwindigkeit des Äthers relativ zum Labor, in dem der Versuch stattfindet gleich Null ist (eine Annahme, die unter Berücksichtigung der Bewegungen, die ein Punkt auf der Erde durch die Rotation der Erde, der Bewegung der Erde um die Sonne, der Bewegung des Sonnensystems in unserer Galaxie usw. nicht sehr plausibel ist) oder aber kein Äther existiert.

Wenn es aber keinen Äther, kein Medium, gibt, in dem sich das Licht ausbreitet, so muss die Gleichung für die Ausbreitung eines Lichtblitzes, der zur Zeit $t_0 = 0$ im Koordina-

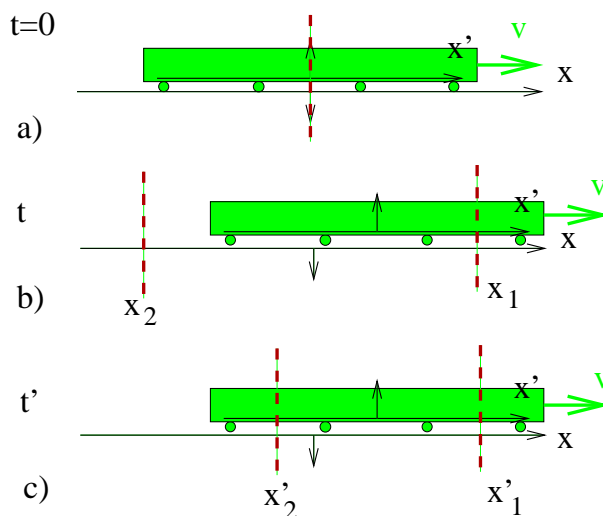


Abbildung 7.4: Gedankenexperiment: Zug mit Geschwindigkeit v nahe der Lichtgeschwindigkeit, siehe Diskussion im Text

tenursprung gezündert wurde

$$\vec{r}^2 - c^2 t^2 = 0, \quad (7.10)$$

in jedem Koordinatensystem gelten, dessen Koordinatenursprung zur Zeit t_0 am Emissionspunkt des Lichtes war.

Vergegenwärtigen wir uns die Konsequenz dieses experimentellen Ergebnisses noch in einem weiteren Gedankenexperiment. Wir stellen uns vor, dass wir zwei Koordinatensysteme haben, die sich mit einer Geschwindigkeit v relativ zueinander bewegen, aber zur Zeit $t_0 = 0$ den Koordinatenursprung am selben Ort haben. Dies könnte so realisiert sein, dass ein Koordinatensystem an den Schienen der Bahnstrecke Rottenburg - Reutlingen angebracht ist, ein zweites in einem Eisenbahnzug, der mit der Geschwindigkeit v durch den Bahnhof Tübingen saust. Dies bedeutet, dass wir eine Schar von Messknechten haben, die sich mit aufeinander abgestimmten Uhren an den Messstellen des Bahngleises aufstellen. Eine zweite Schar von Messknechten ist, ebenfalls mit aufeinander abgestimmten Uhren im Zug positioniert. Zur Zeit, $t_0 = 0$, befindet sich der Koordinatenursprung des Zugsystems am Koordinatenursprung des Schienensystems (das ist natürlich der Tübinger Hauptbahnhof) und es werde an diesem gemeinsamen Koordinatenursprung ein Lichtblitz gezündet (siehe Abb. 7.4 a).

Nach einer gewissen Zeit t stellt sich die Situation der Abb. 7.4 b) ein: Der Koordinatenursprung des Zuges hat sich um die Strecke vt vom Koordinatenursprung des Schienensystems entfernt und der Lichtblitz kommt für die Beobachter des Schienensystems gleichzeitig an den Stellen $x_1 = ct$ und $x_2 = -ct$ an. Wie stellt sich aber die gleiche Situation für die Beobachter des Zugsystems dar? Natürlich wird sich der Messknecht des Zugsystems der dem Kollegen des Schienensystems an der Stelle x_1 gerade gegenübersteht mit diesem darüber verständigen können, dass der Lichtblitz angekommen ist. Für das Mitglied des Zugsystems gilt aber, dass das Licht erst die Strecke $x'_1 = x_1 - vt$ zurückgelegt hat. Da aber auch für das Zugsystem die gleiche Beziehung (7.10) für die Ausbreitung

des Lichtes gilt, wird er auf seiner Uhr ablesen, dass das Licht erst die Zeit

$$t' = \frac{x'_1}{c}$$

unterwegs ist. Aus der Sicht des Zugteams stellt sich die Situation aber auch wie in Abb. 7.4 c) dargestellt dar: Zur Zeit t' kommt der ausgesandte Lichtblitz gleichzeitig an der Stelle $x'_2 = -x'_1$ an. Die Ereignispunkte, die für die Zugfahrer gleichzeitig erscheinen (die von Abb. 7.4 c), sind offensichtlich andere als die für das Schienenteam (siehe Abb. 7.4 b).

Diese merkwürdigen Ergebnisse resultieren aus der Beobachtung, dass die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in allen zueinander bewegten Bezugssystemen durch die gleiche Gleichung (7.10) beschrieben wird. Die Situation ist anders bei der Ausbreitung des Schalls. In diesem Fall gilt eine Ausbreitungsgleichung vom Typ (7.10) nur im Ruhesystem des Ausbreitungsmediums, also z.B. der Luft.

Wir fassen als erste Konsequenzen dieser Überlegungen zur Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen zusammen:

- Es gibt kein ausgezeichnetes Referenzsystem (das Ruhesystem des Äthers).
- Da die Gleichung (7.10) für die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in allen Bezugssystemen, auch solchen die sich relativ zueinander bewegen, gilt, muss die Bestimmung einer Zeitdifferenz (z.B. zwischen Aussenden eines Lichtblitzes und Empfang) vom Koordinatensystem abhängen. Die Messknechte im Zug ermitteln andere Ankunftszeiten für den Lichtblitz als die an den Schienen.
- Zwei Ereignispunkte, die in einem Koordinatensystem gleichzeitig sind, sind dies im Allgemeinen nicht auch in anderen Bezugssystemen.
- Man kann elektromagnetische Wellen nicht überholen. Ein Beobachter kann versuchen sich so schnell wie möglich zu bewegen, dennoch läuft ihm das Licht in seinem mitgeführten Koordinatensystem immer noch mit Lichtgeschwindigkeit davon. Das bedeutet aber für einen zuschauenden, ruhenden Beobachter, dass die Geschwindigkeit des laufenden Beobachters immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein muss. Dies bedeutet, dass kein Beobachter und damit natürlich auch kein Massenpunkt eine Geschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit erreichen kann.

Dieser letzte Punkt soll an einem Experiment verifiziert werden. Dazu betrachten wir die Beschleunigung von Elektronen durch eine Spannung U_0 . Sind die Elektronen an der Kathode dieser Beschleunigungsspannung, U_0 in Ruhe so ist ihre Energie allein durch die potenzielle Energie gegeben. Auf dem Weg zur Anode wird diese potenzielle Energie $|eU_0|$ (mit e der Ladung des Elektrons) vollkommen in kinetische Energie umgesetzt. Nach den Gesetzen der nicht-relativistischen Mechanik sollte also gelten

$$\frac{m}{2}v^2 = |eU_0|.$$

Das Elektron mit der Masse m sollte also am Ende der Beschleunigungsstrecke eine Geschwindigkeit v besitzen, für die gilt

$$v^2 = \frac{2|eU_0|}{m}. \quad (7.11)$$

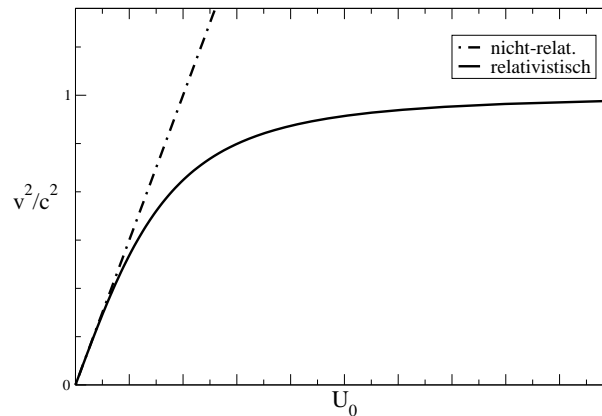


Abbildung 7.5: *Geschwindigkeit eines Elektrons zum Quadrat (v^2) als Funktion der Beschleunigungsspannung U_0 . Dargestellt sind die Vorhersagen der nicht-relativistischen Abschätzung von Gl.(7.11) und der Relativitätstheorie, die mit dem Experiment übereinstimmt*

Misst man aber diese Geschwindigkeit der Elektronen als Funktion der Beschleunigungsspannung U_0 , so ergibt sich nicht dieser lineare Zusammenhang zwischen v^2 und $|U_0|$ aus Gl.(7.11) (gestrichelte Kurve in 7.5) sondern die Werte der durchgezogenen Linie. Man sieht, dass die gemessenen Geschwindigkeiten unterhalb der Lichtgeschwindigkeit c bleiben auch für beliebig große Beschleunigungsspannungen U_0 . Die analytische Form dieser Funktion werden wir einige Abschnitte später herleiten.

7.2 Der 4-dimensionale Raum

Jeder Ereignispunkt wird durch 4 Koordinaten, 3 für die Position im Raum wo das Ereignis stattfindet und eine für die Zeit, wann das Ereignis stattfindet, festgelegt. Damit auch die Zeitkoordinate in den gleichen Einheiten definiert werden kann wie die Raumkoordinaten, nämlich z.B. in Metern, multipliziert man die Zeitkoordinate mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c und definiert so einen Ereignispunkt durch einen Vektor der Dimension 4, z.B. als Spaltenvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (7.12)$$

wobei x, y, z die Raumkoordinaten des Ereignispunktes in einem kartesischen Koordinatensystem bezeichnen und t für die Zeit in diesem Koordinatensystem steht. In einem Koordinatensystem K' wird der gleiche Ereignispunkt durch einen anderen Vektor definiert

$$\vec{r} \quad \Longrightarrow \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (7.13)$$

wobei wir berücksichtigt haben, dass bei einer Koordinatentransformation von K nach K' eventuell auch die gemessene Zeit transformiert werden muss (siehe Diskussion im vorhergehenden Abschnitt). Die Transformation der Koordinaten des gleichen Ereignispunktes soll dabei so gestaltet werden, dass gilt

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2. \quad (7.14)$$

Durch diese Forderung ist gewährleistet, dass ein Ereignispunkt, der den Empfang eines Lichtsignals (ausgehend vom Koordinatenursprung zur Zeit $t = 0$) beschreibt, in beiden Koordinatensystemen durch die jeweils richtige Beziehung zwischen Ort und Zeit beschrieben wird. Die Forderung (7.14) spiegelt also die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Koordinatensystemen wider.

Um diese Forderung etwas präziser zu formulieren definieren wir den **Minkowski Raum** als den 4-dimensionalen Vektorraum von Raumzeitpunkten, in dem das Betragsquadrat eines Vektors in einem bestimmten Koordinatensystem definiert ist durch

$$|\vec{r}|^2 := c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (7.15)$$

Die Suche nach Koordinatentransformationen, die (7.14) erfüllen, entspricht also der Suche nach Transformationen in der Basis des Minkowski Raumes, die die in (7.15) definierte Länge des Vierervektors invariant lassen.

Für die weitere Diskussion ist es hilfreich weitere Bezeichnungen und Definitionen einzuführen. So definieren wir z.B. einen Ereignispunkt \vec{r} durch einen Spaltenvektor, den wir als **kontravarianten Vektor** bezeichnen, durch die Darstellung

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

Die nullte Komponente dieses kontravarianten Vektors x^μ , $x^0 = ct$, bezeichnet also die zeitartige Koordinate des Ereignispunktes, die erste bis dritte Komponente die 3 raumartigen nach der Vereinbarung $x^1 = x$, $x^2 = y$ und $x^3 = z$. Der gleiche Raumzeitpunkt wird auch durch einen **kovarianten Vektor** x_μ (beachte, der Index steht hier unten) charakterisiert in der Form

$$x_\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

Damit berechnet sich das Betragsquadrat des Raumzeitpunktes \vec{r} im Minkowski Raum als das Skalarprodukt des zugehörigen kontravarianten Spaltenvektors mit dem entsprechenden kovarianten Spaltenvektor. Es gilt ja

$$\begin{aligned} |\vec{r}|^2 &= \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 \\ &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Bei der Bezeichnung dieses Skalarproduktes verzichtet man im Allgemeinen auf das Summenzeichen und definiert das Produkt von 2 Vierer Vektoren x und y

$$x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu := x^0 y_0 + x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3. \quad (7.19)$$

Als ein weiteres Beispiel für die Anwendung dieser Nomenklatur betrachten wir die Transformation des kontravarianten Spaltenvektors x in den zugehörigen kovarianten Spaltenvektor

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu := \sum_{\nu=0}^4 g_{\mu\nu} x^\nu. \quad (7.20)$$

Auch in dieser Gleichung implizieren die gleichlautenden Indizes ν auf der rechten Seite der Gleichung eine Summation über diesen Index, was an dieser Stelle auch noch einmal explizit angegeben wird. Die Verbindung zwischen kontravariantem und kovarianten Vektor wird durch die 16 Zahlen $g_{\mu\nu}$ definiert, die aber in diesem Fall einfach gegeben sind durch

$$g_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \mu = \nu = 0 \\ -1 & \mu = \nu = i \in (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} \quad (7.21)$$

Die Transformationsgleichung (7.20) kann man natürlich auch durch Multiplikation einer Matrix g mit dem Spaltenvektor x^ν darstellen in der Form

$$x_\mu = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Man bezeichnet diese Transformationsmatrix g bzw. $g_{\mu\nu}$ als metrischen Tensor, da mit diesem Tensor das Skalarprodukt zweier Vektoren definiert ist gemäß

$$\vec{x} \vec{y} = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu.$$

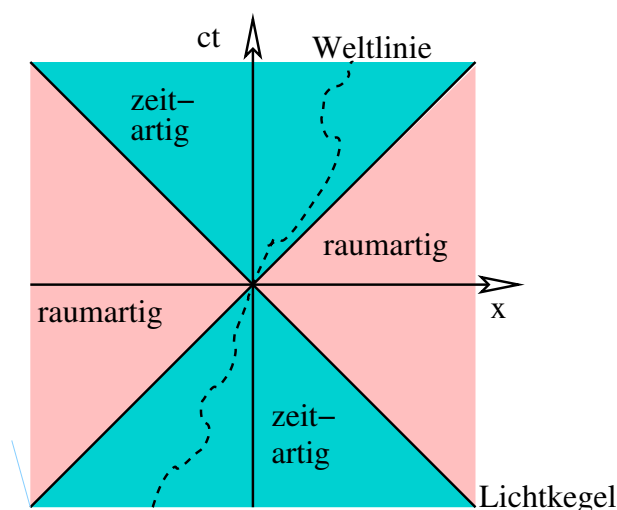


Abbildung 7.6: Weltlinie im Minkowski Raum

Einzelne Ereignispunkte \vec{r} sind also durch einen Vierervektor, ein Element des Minkowski Raumes definiert. Eine Abfolge von Ereignispunkten, also z.B. die Bewegung eines Teilchens, wird damit durch eine Trajektorie im Minkowski Raum dargestellt. Man spricht von der Weltlinie des betroffenen Teilchens. Zur Darstellung einer solchen Weltlinie wurde in Abb. 7.6 auf die Darstellung der y und z Koordinaten verzichtet und eine solche Weltlinie als Funktion einer Raumkoordinate x und der Zeitkoordinate ct dargestellt.

In dieser Figur sind außerdem die Linien eingezeichnet für die gilt (beachte, wir beschränken die Abbildung auf $y = z = 0$)

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0. \quad (7.22)$$

Diese Punkte definieren den Lichtkegel. Zur Bedeutung dieses Namens, muss man sich z.B. für $z = 0$ die Punkte vorstellen, die diese Gleichung erfüllen. Diese Punkte liegen auf den Kegeln, die ihre Achse auf der Zeitachse haben und deren Spitzen sich im Koordinatenursprung berühren. Alle Vektoren, die (7.22) erfüllen haben die Länge Null in der Metrik des Minkowski Raumes. Die zugehörigen Ereignispunkte haben also vom Koordinatenursprung den Abstand Null, gemessen mit der Metrik des Minkowski Raumes.

Physikalisch sind diese Punkte auf dem Lichtkegel mit dem Koordinatenursprung über das Gesetz der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen verbunden. Punkte, die auf dem Zukunfts-Lichtkegel liegen, das sind solche, für die $t > 0$ gilt, werden einen Lichtblitz empfangen, der zur Zeit $t = 0$ im Koordinatenursprung gezündet wird. Punkte auf dem Vergangenheits-Lichtkegel $t < 0$ sind Punkte, von denen ein Empfänger im Koordinatenursprung zur Zeit $t = 0$ ein Lichtsignal empfangen kann. So liegt also für uns hier z.B. in Tübingen als Koordinatenursprung, zur jetzigen Zeit $t = 0$ das Ereignis, dass die Sonne zur Zeit $t = -8$ Minuten Licht ausgesandt hat, das wir genau jetzt hier empfangen, auf dem Vergangenheits - Lichtkegel.

Alle Punkte, die vom Koordinatenursprung einen negativen Minkowski Abstand haben, also

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 < 0,$$

bezeichnet man als raumartige Punkte: der raumartige Abstand $x^2 + y^2 + z^2$ ist größer als der zeitartige c^2t^2 . Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass man stets eine Transformation von Koordinaten finden kann, so dass ein Ereignispunkt im raumartigen Bereich die Zeit $t' = 0$ in diesem Koordinatensystem besitzt. Dieser Ereignispunkt ist gleichzeitig zum Koordinatenursprung. Man kann allgemein für raumartige Punkte nicht sagen ob sie eine Zeit $t > 0$ oder $t < 0$ haben, ob sie relativ zum Koordinatenursprung in der Zukunft oder in der Vergangenheit liegen. Dies hängt vom jeweiligen Koordinatensystem ab. Deshalb kann natürlich ein Ereignis im Koordinatenursprung keinen Einfluss nehmen auf ein Ereignispunkt im raumartigen Bereich. Bei entsprechender Wahl des Koordinatensystems würde dieser Ereignispunkt ja in die Vergangenheit transformiert und ein Einfluss auf einen Ereignispunkt der Vergangenheit verletzt natürlich die Kausalität.

Andererseits kann aber auch ein Ereignis auf einem raumartigen Ereignispunkt keinen Einfluss auf den Koordinatenursprung nehmen. Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems würde der Ereignispunkt in der Zukunft liegen und ein Einfluss der Zukunft auf die Gegenwart verletzt natürlich auch die Kausalität. Diese Feststellungen ist nur eine alternative Art um zum Ausdruck zu bringen, dass Information, bzw. Einfluss nehmen auf einen Ereignispunkt, maximal mit Lichtgeschwindigkeit übertragen werden kann. Dies schliesst eine Einflussnahme eines Ereignisses im Koordinatenursprung auf Raumzeitpunkte im raumartigen Bereich aus.

Alle Punkte, die vom Koordinatenursprung einen positiven Minkowski Abstand haben, also

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0,$$

gehören zum zeitartigen Bereich. Für diese Punkte ist eindeutig definiert ob sie bezogen auf den Koordinatenursprung in der Vergangenheit oder in der Zukunft liegen. Diese Punkte können den Koordinatenursprung erreichen ($t < 0$) oder können vom Koordinatenursprung aus erreicht werden ($t > 0$). Deshalb liegt die Weltlinie, die in Abb. 7.6 skizziert ist und durch den Koordinatenursprung verläuft, ausschließlich im zeitartigen Bereich.

7.3 Lorentz Transformation

In diesem Abschnitt sollen die Transformationen im 4-dimensionalen Minkowski Raum betrachtet werden. Dabei wollen wir uns auf solche Transformationen des Koordinatensystems $K \rightarrow K'$ beschränken, bei denen der Koordinatenursprung, das heißt der Raumzeitpunkt $\vec{r} = 0$ und $t = 0$, beibehalten wird. Außerdem soll bei der Transformation der Koordinaten der Betrag des Vektors gemäß der Minkowski Norm konstant gehalten werden. Im einfachen 3-dimensionalen Raum entsprechen solche Transformationen z.B. den Drehungen des Koordinatensystems. In diesem Fall bleibt der Koordinatenursprung identisch, die Länge der räumlichen Vektoren bleibt erhalten.

Ein Beispiel für eine Koordinatentransformation, die über eine einfache Drehung hinausgeht und die Transformation der Koordinate Zeit mit einbezieht, ist die Transformation auf ein Koordinatensystem K' , das sich aus der Sicht des Koordinatensystems K mit einer Geschwindigkeit $\vec{v} = v\hat{e}_x$, also parallel zur x -Achse bewegt. Dabei soll zunächst einmal angenommen werden, dass die Achsen des raumartigen Koordinatensystems K' parallel zu denen des Systems K stehen, wie das auch in Abb. 7.7 skizziert ist. Diese Transformation ist ein Spezialfall der allgemeinen **Lorentz Transformation**, den wir in den folgenden Diskussionen häufig als Beispiel heranziehen werden.

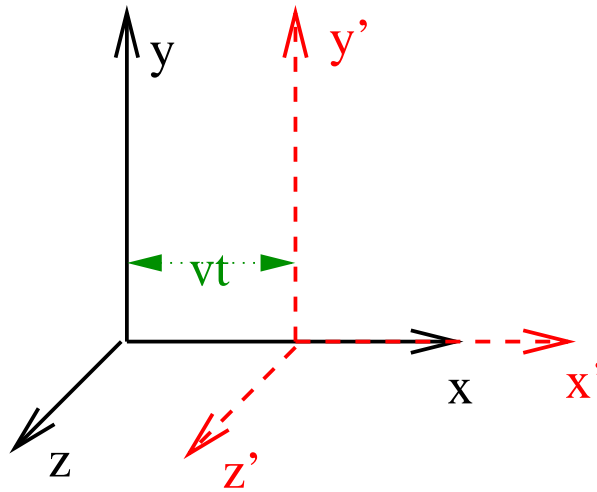


Abbildung 7.7: Standard Beispiel für eine Lorentz Transformation

Ein Raumzeitpunkt werde im Koordinatensystem K durch die Koordinaten des zugehörigen kontravarianten Vektors x^μ definiert. Die Koordinaten des gleichen Raumzeitpunktes im Koordinatensystem K' ergeben sich durch die lineare Transformationsgleichung

$$\begin{aligned}
 x'^0 &= ct' = a^0_0 ct + a^0_1 x + a^0_2 y + a^0_3 z \\
 x'^1 &= x' = a^1_0 ct + a^1_1 x + a^1_2 y + a^1_3 z \\
 x'^2 &= y' = a^2_0 ct + a^2_1 x + a^2_2 y + a^2_3 z \\
 x'^3 &= z' = a^3_0 ct + a^3_1 x + a^3_2 y + a^3_3 z
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

In der kompakten Schreibweise, die wir im vorigen Abschnitt eingeführt haben, reduzieren sich diese Gleichungen auf

$$x'^\nu = a^\nu_\mu x^\mu. \tag{7.24}$$

Natürlich kann man die Koeffizienten a^ν_μ auch als Elemente einer 4×4 Matrix A auffassen, wobei der erste Index ν sich auf die Zeile und der zweite Index μ auf die Spalte bezieht, womit die Transformation (7.23) sich als Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor schreiben lässt

$$x' = Ax. \quad (7.25)$$

Die Lorentz Transformation für das Standardbeispiel eines **Boostes des Koordinatensystem K' in x -Richtung** mit einer Geschwindigkeit v (siehe auch Abb. 7.7) wird durch die Transformationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (7.26)$$

beschrieben. Dies bedeutet, dass ein Ereignispunkt, der im Koordinatensystem K durch die Koordinaten $x^\mu = (ct, x, y, z)$ dargestellt ist im geboosteten Koordinatensystem K' die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ct-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{-\beta ct+x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (7.27)$$

besitzt.

Zum Nachweis, dass diese Transformation (7.26) die richtige Lorentz Transformation ist, machen wir die folgenden Bemerkungen:

- Bei der Koordinatentransformation (7.27) bleibt der Betrag des Vektors im Sinne der Metrik des Minkowski Raumes erhalten. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= \frac{1}{1-\beta^2} [(ct-\beta x)^2 - (x-\beta ct)^2] - y^2 - z^2 \\ &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \end{aligned}$$

- Im Koordinatensystem K werden die Ereignispunkte, die die aktuelle Position des räumlichen Koordinatenursprungs des geboosteten Systems beschreiben durch die Koordinaten $x^0 = ct$ und $x^1 = x = vt$, $x^2 = y = 0$, $x^3 = z = 0$ erfasst. Mit der Transformation (7.27) ergibt sich für diese Ereignispunkte im geboosteten System

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ct-\beta vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{-\beta ct+vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct\sqrt{1-\beta^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

was natürlich genau dem räumlichen Koordinatenursprung entspricht. Die Zeit $t' = t\sqrt{1-\beta^2}$ ist die Zeit, die von einem Messknecht gemessen wird, der sich mit dem Koordinatenursprung von K' mitbewegt.

- Für Geschwindigkeiten des Boostes v , die sehr klein sind verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit c sollte die Lorentz Transformation (7.27) natürlich die Ergebnisse der entsprechenden nicht-relativistischen Galilei Transformation liefern. In diesem Fall ist $\beta = v/c$ sehr klein verglichen mit 1 und wir können berechnen

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= (x - vt) \left[1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \dots \right] \\ &\rightarrow (x - vt). \end{aligned}$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile wurde die Taylorentwicklung benutzt, die für sehr kleine Werte von β natürlich sehr rasch konvergiert, so dass im nicht-relativistischen Grenzfall $\beta \rightarrow 0$ der Übergang zur dritten Zeile und damit zum Ergebnis der Galilei Transformation legitimiert ist.

Die Umkehrttransformation zu (7.27) lautet

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ct'+\beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta ct'+x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (7.28)$$

Dies kann man durch Ausrechnen betätigen oder durch die Überlegung, dass ja das Koordinatensystem K aus der Sicht von K' mit der Geschwindigkeit $-v$ in x Richtung geboostet wird. Die Umkehrtransformation ergibt sich also aus (7.27) einfach dadurch, dass $v \rightarrow -v$ bzw. $\beta \rightarrow -\beta$ gesetzt wird.

Mit (7.27) haben wir die Lorentz Transformation für den einfachen Boost in x -Richtung kennen gelernt. Als nächstes Beispiel wollen wir nun die Transformation betrachten, die in Abb. 7.8 skizziert ist. Das System K' bewegt sich auch in diesem Beispiel mit einer Geschwindigkeit v in Richtung der x -Achse von K ist aber außerdem noch um einen Winkel ϕ gedreht.

Diese Koordinatentransformation behandeln wir in zwei Schritten:

1. Im ersten Schritt transformieren wir auf das Koordinatensystem K'' , was durch die Boost-Transformation (7.24) geschieht

$$x''^\alpha = a^\alpha{}_\mu x^\mu, \quad (7.29)$$

wobei die Koeffizienten $a^\alpha{}_\mu$ durch die Elemente der Matrix A in (7.26) definiert sind.

2. Im zweiten Schritt berechnen wir die Koordinaten eines Ereignispunktes aus den Koordinaten des Systems K'' in die des Systems K' um. Bei dieser Transformation ruht der Koordinatenursprung, es erfolgt lediglich eine Drehung um die z'' Achse mit dem Winkel $-\phi$. Diese Transformation berechnet sich gemäß

$$x'^\nu = b^\nu{}_\alpha x''^\alpha, \quad (7.30)$$

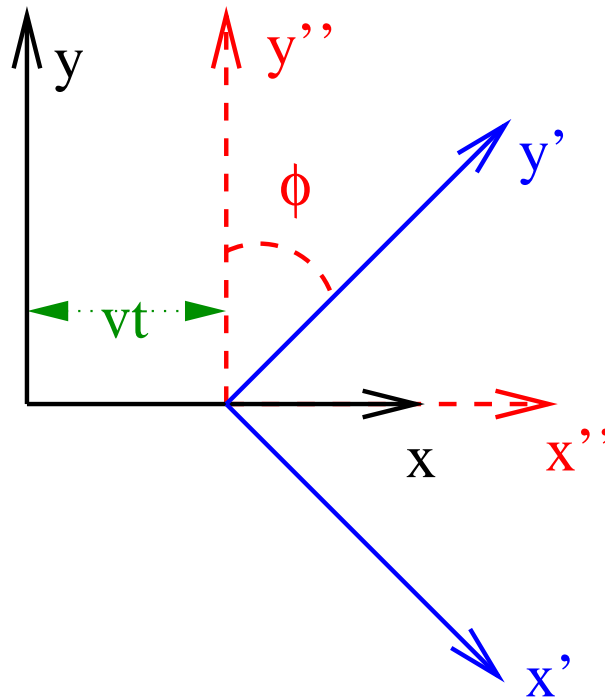


Abbildung 7.8: Beispiel für eine Lorentz Transformation mit Drehung. Die z -Achsen sind hier nicht dargestellt um die Abbildung übersichtlicher zu gestalten.

mit

$$b^\nu{}_\alpha \equiv B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

Insgesamt ergibt sich also die Transformation zu

$$x'^\nu = b^\nu{}_\alpha a^\alpha{}_\mu x^\mu = c^\nu{}_\mu x^\mu \quad (7.32)$$

mit

$$c^\nu{}_\mu = b^\nu{}_\alpha a^\alpha{}_\mu,$$

was auch bedeutet, dass sich die Transformationmatrix $C \equiv c^\nu{}_\mu$ als Produkt der Matrizen A mit B ergibt (Achtung: das Ergebnis hängt von der Reihenfolge der Faktoren A und B ab).

Ein weiteres Beispiel ist in Abb. 7.9 skizziert. In diesem Fall wird das Koordinatensystem K' in eine beliebige Richtung (nicht parallel zur x -Achse) geboostet. Die zugehörige Transformation kann in 3 Schritte zerlegt werden:

1. Transformation $K \rightarrow K''$ was einer Drehung um die z -Achse um den Winkel ϕ entspricht, in Matrixschreibweise:

$$x'' = B^{-1} x$$

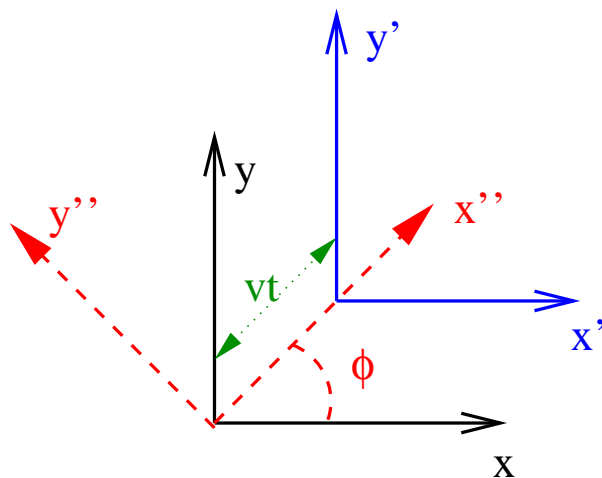


Abbildung 7.9: Boost in beliebige Richtung

2. Boost eines Koordinatensystems K''' in Richtung der x -Achse des Koordinatensystems K'' (dieses System ist in Abb. 7.9 nicht dargestellt). Dies entspricht der einfachen Boost Transformation von (7.25) also

$$x''' = Ax''$$

3. Das Koordinatensystem K' ergibt sich aus K''' durch Drehung um die z -Achse um den Winkel $-\phi$, also

$$x' = B x''' = B A x'' = B A B^{-1} x$$

Allgemeine Lorentz Transformationen können nun nach dem Schema dieser Beispiele durch Drehungen und Boost Transformationen generiert werden.

7.4 Einige Konsequenzen aus der Lorentz Transformation

Um zu sehen welche Konsequenzen sich aus der Lorentz Transformation und damit ja eigentlich aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ergeben, betrachten wir zunächst einmal zwei Ereignispunkte \vec{r}_1 und \vec{r}_2 , die einen zeitartigen Abstand voneinander haben. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass \vec{r}_1 dem Koordinatenursprung (in Raum und Zeit) entspricht, so dass $\vec{r}_2 = \vec{r}$ Koordinaten ct, x, y, z besitzt für die gilt:

$$\Delta x^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0. \quad (7.33)$$

Wir wollen uns weiter auf die Ebene mit $y = z = 0$ beschränken und diesen Raumzeitpunkt in geboosteten Koordinatensystemen betrachten, die sich mit der Geschwindigkeit v in x Richtung bewegen. Nach unseren Überlegungen aus dem vorigen Abschnitt misst man in diesen geboosteten Koordinatensystemen für den Ereignispunkt, der im System K die Koordinaten ct und x besitzt, die Koordinaten

$$\begin{aligned} ct' &= \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (7.34)$$

und

$$c^2 t'^2 - x'^2 = \Delta x^2$$

beziehungsweise

$$\frac{c^2 t'^2 - x'^2}{\Delta x^2} = 1. \quad (7.35)$$

Die Koordinaten ct' und x' , die den gleichen Ereignispunkt beschreiben liegen also im Fall eines zeitartigen Punktes auf einer Hyperbel (siehe auch Abb. 7.10), die durch die Gleichung (7.35) definiert ist.

Greifen wir das Koordinatensystem heraus, in dem dieser Ereignispunkt durch die Koordinaten beschrieben wird, die durch die Markierung angedeutet sind. Ein Koordinatensystem K' , was sich zu diesem mit einer Geschwindigkeit $v > 0$ parallel zur x -Achse bewegt, wird einen entsprechend kleineren Wert für x' liefern. Insbesondere existiert natürlich auch ein Koordinatensystem, in dem der Ereignispunkt die Koordinate $x = 0$ besitzt. Das erscheint in diesem Fall trivial zu sein, handelt es sich ja um das Koordinatensystem, das sich gerade so schnell bewegt, dass sich sein räumlicher Koordinatenursprung zur Zeit t an der Stelle mit der Koordinate x befindet.

Wir betrachten nun einen Ereignispunkt, der bezogen auf den Koordinatenursprung einen raumartigen Abstand besitzt. In diesem Fall gilt also

$$-\Delta x^2 = x^2 - c^2 t^2 > 0$$

und die Koordinaten des gleichen Ereignispunktes in geboosteten Koordinatensystemen K' erfüllen die Gleichung

$$\frac{x'^2 - c^2 t'^2}{|\Delta x^2|} = 1. \quad (7.36)$$

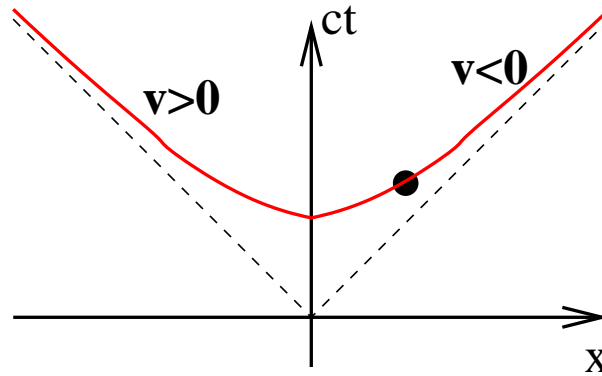


Abbildung 7.10: Koordinaten, die in verschiedenen Lorentzsystemen den gleichen zeitartigen Ereignispunkt beschreiben. Diese erfüllen die Gleichung (7.35).

Die entsprechende Hyperbel ist in Abb. 7.11 dargestellt. Insbesondere sehen wir in diesem Fall, dass es für einen raumartigen Ereignispunkt stets ein Koordinatensystem K' gibt, in dem dieser Ereignispunkt zeitgleich mit dem Koordinatenursprung ist. Dazu muss gelten

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0,$$

beziehungsweise

$$ct - \frac{v}{c}x = 0.$$

Damit diese Gleichung erfüllt wird muss sich also das Koordinatensystem K' mit der Geschwindigkeit

$$v = c \frac{ct}{x},$$

bewegen. Da x und ct die Koordinaten des raumartigen Punktes in K sind, ist diese Geschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Für raumartige Punkte hängt es also vom Koordinatensystem ab, ob sie bezogen auf den Koordinatenursprung in der Zukunft, gleichzeitig oder in der Vergangenheit sind. Wie wir bereits vorher diskutiert haben bedeutet dies, dass 2 Ereignispunkte, die einen raumartigen Abstand zueinander haben, sich nicht gegenseitig beeinflussen können, beziehungsweise keine Information austauschen können. Information kann maximal mit Lichtgeschwindigkeit verbreitet werden.

Wir werden uns nun davon überzeugen, dass die Frage, wie lang ist ein Körper in einer bestimmten Raumrichtung, davon abhängt, in welchem Koordinatensystem diese Länge vermessen wird. Dieses Phänomen bezeichnet man auch als **Längenkontraktion**. Es lässt sich formulieren in der Form:

Misst man die Länge eines Körpers in verschiedenen Koordinatensystemen, die sich mit Geschwindigkeiten v relativ zueinander bewegen, so misst man eine maximale Länge l_0 dieses Körpers in dem Koordinatensystem, in dem der Körper ruht. Bewegt sich das Koordinatensystem in dem die Messung vorgenommen wird mit einer Geschwindigkeit v relativ zum Ruhesystem des Körpers und zwar parallel zur Richtung der zu vermessenden Länge, so wird die Messung in diesem bewegten Koordinatensystem ein Ergebnis

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (7.37)$$

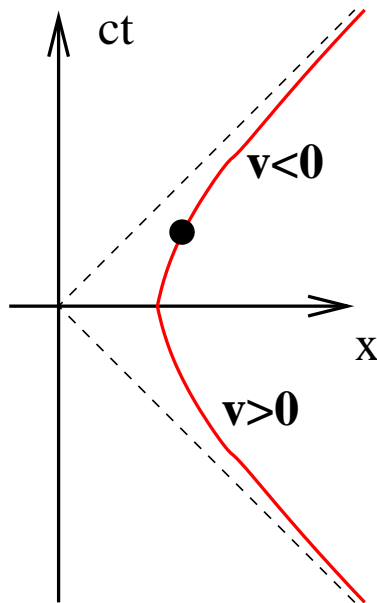


Abbildung 7.11: Koordinaten, die in verschiedenen Lorentzsystemen den gleichen raumartigen Ereignisort beschreiben. Diese erfüllen die Gleichung (7.36).

ergeben. Messungen von Längen senkrecht zur Bewegungsrichtung werden durch die Bewegung des Koordinatensystems nicht beeinflusst.

Zum Beweis dieser Längenkontraktion müssen wir uns zunächst einmal Klarheit darüber verschaffen, was wir unter einer Längenmessung zu verstehen haben. Bei einer solchen Längenmessung, etwa der Ausdehnung eines Körpers in x Richtung, müssen die beiden Ereignispunkte bestimmt werden, an denen sich das eine Ende zur Zeit t an der Stelle x_1 befindet, während das andere Ende sich zur gleichen Zeit t an der Stelle x_2 befindet. Die Länge oder Ausdehnung des Körpers ergibt sich dann als Differenz $l = |x_2 - x_1|$.

Wir betrachten zunächst die Messung der Länge im Koordinatensystem K' , das sich mit dem Körper mitbewegt. Dabei sei der räumliche Koordinatenursprung an der Stelle $x'_1 = 0$. Da sich das Koordinatensystem mit dem Körper mitbewegt gilt diese Fixierung für alle Zeiten t' und das andere Ende des Körpers befindet sich stets an der Stelle $x'_2 = l_0$ wobei l_0 die Länge des Körpers im mitbewegten System ist. Aus der Lorentz Transformation für Koordinatensysteme K und K' bei denen K' aus der Sicht von K mit der Geschwindigkeit v in x -Richtung geboostet ist entnehmen wir

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 0 \\ x'_2 &= \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = l_0. \end{aligned} \tag{7.38}$$

Diese Beziehung gilt für alle Zeiten t_1 und t_2 , wobei x_1 und x_2 die zugehörigen Raumkoordinaten sind. Für eine Längenmessung in K können wir nun die Gleichzeitigkeit der Ereignispunkte in K fordern $t_1 = t_2 = 0$ und erhalten so aus (7.38)

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \sqrt{1 - \beta^2} l_0. \end{aligned} \tag{7.39}$$

Die Längenmessung $l = x_2 - x_1$ in K liefert also das Resultat von (7.37).

Wir können uns also die paradoxe Situation überlegen, dass jemand eine Leiter der Länge $l_0 = 10$ Meter in einem Aufzug befördern möchte, der aber nur 9 Meter lang ist. Er überlegt sich also, dass er nur mit einer Geschwindigkeit von $v = 0.5c$ in den Aufzug laufen muss. Dadurch hat die Leiter aus der Sicht des Aufzugs nur die Länge $l = l_0\sqrt{1-0.25} = 10 \cdot 0.866$ m und sollte also in den Aufzug passen. Andererseits hat aber der Aufzug aus der Sicht des Leiterträgers nur eine Länge von $9 \cdot 0.866$ m, ist also deutlich kürzer als die Leiter, die ja in diesem Koordinatensystem, das sich mit der Leiter mitbewegt die Länge $l_0 = 10$ m besitzt. Die Frage erhebt sich also: Passt die Leiter in den Aufzug oder nicht?

Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir uns zunächst einmal überlegen, wie wir die Feststellung, die Leiter passt in den Aufzug, definieren wollen. Es soll hier nicht auf die verschiedenen Möglichkeiten eingegangen werden. Es sei aber erwähnt, dass diese Definition natürlich mit der Frage zusammenhängt in welchem Koordinatensystem wir diese Frage beantworten wollen, in welchem Koordinatensystem sollen das vordere und das hintere Ende der Leiter **gleichzeitig** im Aufzug sein.

Ein anderes Phänomen, das für uns, die wir mit der relativistischen Kinematik im Alltag nicht vertraut sind, zunächst paradox erscheint, ist die sogenannte **Zeitdilatation**: Eine Uhr ruhe im Koordinatensystem K' und misst für die Zeitdifferenz zweier Ereignispunkte, deren Ortskoordinate sich relativ zur Uhr nicht verändert, die Zeitdifferenz $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Ein Beobachter, der sich relativ zu diesem Raumpunkt mit einer Geschwindigkeit v bewegt, misst hingegen eine längere Zeitdifferenz

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (7.40)$$

Zum Beweis betrachten wir die Lorentz Transformation von K' nach K für die beiden Ereignispunkte $i = 1, 2$:

$$ct_i = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{v}{c} x_i' + ct_i' \right). \quad (7.41)$$

Draus ergibt sich für die Zeitdifferenz

$$c(t_2 - t_1) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[\frac{v}{c} \underbrace{(x_2' - x_1')}_{=0} + c(t_2' - t_1') \right] = \frac{c\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (7.42)$$

womit (7.40) bewiesen ist. Die Uhren im mitbewegten System gehen langsamer.

Stellen wir uns also vor, dass ein Zwillingbruder mit einem Raumschiff mit einer Geschwindigkeit $v = \sqrt{0.99}c$ zu einem fernen Planeten fliegt dort umkehrt und mit gleicher Geschwindigkeit zur Erde zurück kommt. Auf seiner Borduhr seien dabei für Hin- und Rückflug jeweils 1 Jahr vergangen und so eine Gesamtflugzeit von $\Delta t'$ von 2 Jahren verstrichen. Bei $v = \sqrt{0.99}c$ ist der Faktor $\sqrt{1-\beta^2}$ gerade 0.1. Für den Zwillingbruder, der auf der Erde zurückgeblieben ist, liegen zwischen Abflug und Rückkehr 20 Jahre, was sich natürlich auch beim Altersvergleich der Zwillinge bemerkbar machen wird. Der zu Haus Gebliebene ist um 18 Jahre älter.

Dies erscheint uns paradox, wird aber durch Experimente bestätigt. Als Beispiel betrachten wir den Zerfall der Müonen aus der Höhenstrahlung. Auf die Erde treffen ständig

Teilchen und Photonen mit sehr hoher Energie. Treffen diese Teilchen auf die ersten Atomkerne in der Ionosphäre, also etwa 20 km oberhalb der Erdoberfläche, so werden durch die Wechselwirkung dieser hochenergetischen Teilchen mit diesen Atomkernen Pionen, das sind die leichtesten Hadronen (Teilchen die die starke nukleare Wechselwirkung spüren). Diese Pionen leben im Mittel etwa 2×10^{-8} Sekunden. Nach unseren Maßstäben ist das fast nichts, auf den Zeitskalen der Hadronen (10^{-20} Sekunden) ist das aber so lang, dass man Pionen als stabile Teilchen auffasst. Ein Pion, z.B. ein π^- , das sind negativ geladene Teilchen von diesem Typ, zerfällt dann mit großer Wahrscheinlichkeit in ein Müon (μ^-) und ein müonisches Antineutrino $\bar{\nu}_\mu$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu.$$

Das Müon bezeichnet man häufig als den schweren Bruder (oder Schwester) des Elektrons. Es ist ebenfalls ein Lepton allerdings mit einer Masse, die 207 mal so groß ist, wie die des Elektrons. (Das dritte Lepton, das sogenannte τ Lepton ist noch schwerer mit einer Masse die etwa 3750 mal so groß wie die des Elektrons ist.) Auch das Müon lebt nur eine begrenzte Zeit (mittlere Lebensdauer etwa $\tau_0 = 2.2 \times 10^{-6}$ Sekunden) und zerfällt dann nach dem Schema

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

in ein Elektron, ein müonisches Neutrino und ein elektronisches Antineutrino. In der Ionosphäre werden also sehr viele Müonen erzeugt mit einer Dichte N_0 . Bei einer mittleren Lebensdauer τ_0 überleben von diesen N_0 erzeugten Müonen eine Zeitdifferenz Δt

$$N(\Delta t) = N_0 \exp(-\Delta t/\tau_0). \quad (7.43)$$

Nimmt man an, dass sich die erzeugten Müonen mit Lichtgeschwindigkeit, also mit der maximal möglichen Geschwindigkeit, auf den Erdboden zubewegen, so sollten nur etwa 6.9×10^{-14} der erzeugten Müonen diese Flugstrecke überleben. Das Experiment zeigt aber, dass etwa 3 Prozent der erzeugten Müonen auch auf die Erdoberfläche gelangen. Die Erklärung liefert die Zeitdilatation. Wegen der hohen Geschwindigkeit der Müonen tickt deren mitgeführte Uhr, die natürlich für die Lebensdauer verantwortlich ist, sehr viel langsamer als die ruhende Uhr des erdfesten Beobachters, und das Müon kann eine entsprechend größere Strecke zurücklegen.

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir diese Zeit, die von einer mitbewegten Uhr gemessen wird noch mit einem speziellen Namen belegen, die **Eigenzeit**. Für zwei Ereignispunkte (ct_1, x_1, y_1, z_1) und (ct_2, x_2, y_2, z_2) , die zeitartigen Abstand voneinander haben, d.h.

$$\Delta s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 > 0, \quad (7.44)$$

definieren wir die Eigenzeit durch

$$\tau_{12} = \frac{1}{c} \sqrt{\Delta s_{12}^2}. \quad (7.45)$$

Für die so definierte Eigenzeit gilt:

- Die Eigenzeit ist unabhängig von dem Koordinatensystem, in dem sie berechnet wird. Da der Abstand Δs_{12}^2 bei einer Lorentz Transformation unverändert bleibt, gilt dies auch für die Zeit τ_{12} . Man sagt die Eigenzeit transformiert sich wie ein Skalar unter einer Lorentz Transformation, sie ist ein **Lorentz Skalar**.

- Die Eigenzeit wird von einer Uhr im mitbewegten System ($\vec{r}_1' = \vec{r}_2'$) gemessen.
- Die Eigenzeit ist die kürzeste Zeit, die zwischen den beiden Ereignispunkten gemessen werden kann.
- Nach (7.40) gilt für die Zeitdifferenz t_{12} , gemessen zwischen den beiden Ereignispunkten in einem Koordinatensystem, das sich mit Geschwindigkeit v relativ zum mitbewegten System bewegt

$$\tau_{12} = t_{12} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (7.46)$$

7.5 Relativistische Bewegungsgleichung

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, die Bewegungsgleichung der Klassischen Mechanik an die relativistische Kinematik anzupassen. Ausgangspunkt ist dazu die nicht-relativistische Bewegungsgleichung, die wir ja mit dem dritten Newtonschen Axiom formuliert haben in der Form

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} m \vec{v}, \quad (7.47)$$

mit \vec{F} der Kraft, die auf ein Partikelchen der Masse m und der Geschwindigkeit \vec{v} wirkt. Auf beiden Seiten dieser Gleichung steht ein Vektor des dreidimensionalen Raumes der Ortsvektoren, der durch Koordinaten in x , y und z Richtung eines gewählten kartesischen Koordinatensystems definiert ist.

Will man diese Bewegungsgleichung in einem anderen Koordinatensystem darstellen, das z.B. im Vergleich zum ersten durch eine Drehung erzeugt ist, so werden die Vektoren für die Kraft und die Geschwindigkeit durch neue Koordinaten, bezogen auf die gedrehten Koordinatenachsen, definiert. Diese Koordinatentransformation wird durch eine 3×3 Matrix A_D beschrieben, wobei die Darstellung des Vektors \vec{F} in dem gedrehten System durch die Matrixmultiplikation

$$\vec{F}' = A_D \vec{F}$$

berechnet werden kann. Multiplizieren wir also die linke und rechte Seite der Gl.(7.47) mit der Matrix A_D , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{F}' = A_D \vec{F} &= A_D \frac{d}{dt} m \vec{v} \\ &= \frac{d}{dt} m A_D \vec{v} \\ &= \frac{d}{dt} m \vec{v}'. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Die Newtonsche Bewegungsgleichung gilt also auch für die Vektoren \vec{F}' und \vec{v}' , die Darstellung der Kraft und der Geschwindigkeit im gedrehten Koordinatensystem. Man sagt die Newtonschen Bewegungsgleichung ist kovariant unter einer orthogonalen Transformation, sie ändert ihre Form nicht, ganz gleich ob ich sie im ursprünglichen oder im gedrehten Koordinatensystem formuliere. Dies erscheint uns selbstverständlich, denn sonst müsste man ja das Koordinatensystem angeben, in dem die Bewegungsgleichung gültig ist.

Man beachte aber, dass der Übergang von der ersten zur zweiten Zeile in (7.48) nur deshalb gültig ist, weil die Masse des betrachteten Teilchens, m , und die Variable Zeit, t , skalare Größen sind, sich bei einer Rotation nicht ändern. Diese Kovarianz der Newtonschen Bewegungsgleichung gilt also nur unter der Voraussetzung, dass Masse und Zeit skalare Größen sind. Damit sehen wir aber auch sofort, dass die Newtonsche Bewegungsgleichung in der Form (7.47) nicht kovariant unter einer Lorentz Transformation ist. Bei einer solchen Lorentz Transformation muss ja im allgemeinen Fall auch die Zeit transformiert werden, sodass die Rechnung (7.48) nicht mehr möglich ist.

Um also die Bewegungsgleichung in eine Form zu bringen, die auch unter Lorentz Transformationen kovariant ist, müssen wir zunächst einmal Vektoren im 4-dimensionalen Minkowski Raum definieren, die die Funktion der Kraft und der Geschwindigkeit übernehmen.

Für den Fall der Geschwindigkeit ist dies relativ einfach. Wir definieren eine Geschwindigkeit als Vektor im Minkowski Raum dadurch, dass wir den Vektor x^α eines Raumzeitpunktes nach einer zeitartigen Größe ableiten. Damit das Ergebnis das Transformationsverhalten eines Vektors aufweist, muss die Größe nach der wir ableiten selbst ein Skalar unter Lorentz Transformation sein. Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben besitzt die Eigenzeit

$$\tau = t\sqrt{1 - \beta^2} \quad (7.49)$$

gerade diese Eigenschaft. Dabei ist τ die Zeit, die im mitbewegten Koordinatensystem bestimmt wird und t die Zeit, die in einem Koordinatensystem gemessen wird, das sich relativ zum mitbewegten System mit einer Geschwindigkeit vom Betrag v bewegt und $\beta = v/c$. Damit ist der kontravariante Lorentz Vektor für die Geschwindigkeit gegeben durch

$$\begin{aligned} u^\alpha &= \frac{d}{d\tau} x^\alpha \\ &= \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} x^\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{d}{dt} x^\alpha. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Übertragen auf die explizite Darstellung durch Spaltenvektoren bedeutet dies

$$\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (7.51)$$

mit

$$\beta^2 = \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}.$$

Durch Multiplikation dieses kontravarianten Vierer Vektors u^α mit der skalaren Größe Masse m erhalten wir den Vierer Vektor des Impulses

$$p^\alpha = m u^\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \begin{pmatrix} mc \\ m\vec{v} \end{pmatrix}, \quad (7.52)$$

wobei wir im letzten Teil dieser Gleichung eine Notation gewählt haben, bei der der raumartige Anteil des 4-dimensionalen Vektors durch $m\vec{v}$ dargestellt ist.

Nach dem gleichen Rezept (leite Vierer Vektoren nach der skalaren Größe Eigenzeit ab) können wir nun diesen Vierer Impuls p^α nach der Eigenzeit ableiten und erhalten in Anlehnung an die Newtonsche Bewegungsgleichung (7.47) eine Definition für einen kontravarianten Kraftvektor K^α im Minkowski Raum

$$K^\alpha = \frac{d}{d\tau} m u^\alpha = \frac{d}{d\tau} p^\alpha. \quad (7.53)$$

Durch diese Gleichung wird K^α , die sogenannte Minkowski Kraft definiert. Um die Bedeutung dieser Minkowski Kraft besser einzuschätzen, betrachten wir die linke Seite dieser

Gleichung und berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} m u^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m \frac{d}{dt} u^\alpha \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[\frac{\vec{v}}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\vec{v}}{dt} \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{m}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} + \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\vec{v}}{dt} \end{pmatrix}. \tag{7.54}
\end{aligned}$$

Beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile haben wir berücksichtigt, dass die Geschwindigkeit \vec{v} von der Zeit abhängt und deshalb bei der Zeitableitung berücksichtigt werden muss.

Betrachten wir also diese Minkowski Kraft in dem Koordinatensystem, in dem das betrachtete Teilchen sich augenblicklich in Ruhe befindet, d.h. in diesem Koordinatensystem gilt $\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = 0$, so reduziert sich die Definitionsgleichung für die Minkowski Kraft in diesem Koordinatensystem auf

$$m \frac{du^{\alpha'}}{d\tau} = K^{\alpha'} = \begin{pmatrix} K^{0'} \\ \vec{K}' \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\vec{v}'}{dt'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F} \end{pmatrix}. \tag{7.55}$$

Dies ist aber für die raumartigen Komponenten die übliche Newtonsche Bewegungsgleichung und für die zeitartige Komponenten gilt $K^{0'} = 0$. Bei Geschwindigkeiten weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit, insbesondere bei dem Koordinatensystem, bei dem das Teilchen augenblicklich in Ruhe ist, reduziert sich (7.53) also wieder auf die klassische Newtonsche Bewegungsgleichung (7.47).

Wie sieht dies Bewegungsgleichung aber aus der Sicht eines Beobachters aus, der sich relativ zum augenblicklichen Ruhesystem z.B. in x -Richtung mit der Geschwindigkeit $-\vec{v}$ bewegt, so dass sich das Teilchen aus seiner Sicht mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt. Die Komponenten der Minkowski Kraft in diesem Koordinatensystem erhalten wir aus der des augenblicklichen Ruhesystems durch die Lorentz Transformation für diesen Boost in x -Richtung

$$\begin{aligned}
K^0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (K^{0'} + \frac{v}{c} K^{1'}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c} F_x \\
K^1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (K^{1'} + \frac{v}{c} K^{0'}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} F_x \\
K^2 &= K^{2'} = F_y \\
K^3 &= K^{3'} = F_z
\end{aligned} \tag{7.56}$$

wobei \vec{F} die Kraft ist, die im augenblicklichen Ruhesystem auf das Teilchen wirkt.

Für eine allgemeine Richtung der Geschwindigkeit des Teilchens \vec{v} berechnet sich die Minkowski Kraft

$$\begin{pmatrix} K^0 \\ \vec{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c} \\ \vec{F} - \frac{\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{F})}{v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{F})}{v^2} \end{pmatrix}. \quad (7.57)$$

Entsprechend ihrer Konstruktion ist die Minkowski Kraft K^α ein kontravarianter Vierer Vektor mit einem Betrag

$$K^\alpha K_\alpha = (K^0)^2 - \vec{K}^2 = -\vec{F}^2, \quad (7.58)$$

der invariant unter einer Lorentz Transformation ist.

Nachdem wir in (7.57) die Komponenten der Minkowski Kraft in einem Bezugssystem berechnet haben, in dem sich das Teilchen mit einer Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, wollen wir nun die zeitartige Komponente der Bewegungsgleichung (7.53) in diesem Bezugssystem betrachten. Diese können wir schreiben

$$\begin{aligned} K^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c} \\ &= \frac{d}{d\tau} m u^0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right). \end{aligned} \quad (7.59)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, so ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (7.60)$$

Aus der rechten Seite sehen wir, dass die Seiten dieser Gleichung beschreiben, welche Energieänderung das Teilchen erfährt, wenn an ihm in der infinitesimalen Zeit dt eine Kraft \vec{F} auf seiner Bewegung entlang des Wegstückes $d\vec{r}$ wirkt. Danach muss auch die linke Seite der Gleichung diese Energieänderung beschreiben und wir können

$$E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (7.61)$$

mit der Energie des Teilchens als Funktion seiner Geschwindigkeit (v) identifizieren. Um diesen Ausdruck besser zu verstehen, betrachten wir ihn im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten, d.h. $v \ll c$. In diesem Fall ist also der Quotient $\beta = v/c \ll 1$ und wir können die Wurzel im Nenner in einer Taylorreihe entwickeln zu

$$\begin{aligned} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right] \\ &\approx mc^2 + \frac{1}{2} mv^2. \end{aligned} \quad (7.62)$$

In diesem (nicht-relativistischen) Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten geht der Ausdruck für die Energie also gerade über in die nicht-relativistische kinetische Energie des Teilchens plus eine Ruheenergie von $E = mc^2$. Man könnte nun versucht sein, diese Ruheenergie als eine uninteressante Konstante zu ignorieren. Tatsache ist aber, dass diese Beziehung zwischen der Masse eines Teilchens und seiner Ruheenergie eine zentrale Beziehung darstellt, die so wichtig ist, dass sie jeder (auch wenn er gar nichts von ihrer Bedeutung versteht) schon häufig gesehen hat.

Als Beispiel für die Bedeutung dieser Beziehung führen wir die Bindungsenergie von Nukleonen in einem Atomkern an. Die Masse eines Protons beträgt

$$m_{Prot} = 938.27 \frac{\text{MeV}}{c^2},$$

(beachte, dass die Masse in Form einer Energie (MeV) dividiert durch die Lichtgeschwindigkeit zum Quadrat angegeben wird), die eines Neutrons

$$m_{Neut} = 939.56 \frac{\text{MeV}}{c^2}.$$

Damit sollte also die Masse eines ${}^4\text{He}$ Kerns, das α Teilchen, das aus 2 Protonen und 2 Neutronen besteht, eine Masse von

$$2 m_{Prot} + 2 m_{Neut} = 3755.66 \frac{\text{MeV}}{c^2} = 6.6968 \cdot 10^{-27} \text{ kg},$$

besitzen. In Wirklichkeit ist aber der ${}^4\text{He}$ Kerns um $28.3 \text{ MeV}/c^2$ "leichter". Dieser **Mas-sendefekt** des ${}^4\text{He}$ multipliziert mit c^2 entspricht gerade der Bindungsenergie des ${}^4\text{He}$. In der Sonne verschmelzen Protonen und Neutronen zu ${}^4\text{He}$. Die bei dieser Fusion frei werdende Energie ist die Energiequelle der Sonne.

Damit können wir also den Vierervektor für den Impuls eines freien Teilchens schreiben (siehe (7.52))

$$p^\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} mc \\ m\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad (7.63)$$

mit

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Für den Betrag dieses Vierervektors gilt:

$$\begin{aligned} p^\alpha p_\alpha &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (m^2 c^2 - m^2 \vec{v}^2) \\ &= m^2 c^2 \\ &= \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Daraus ergibt sich die relativistische Beziehung zwischen Energie und Impuls eines freien Teilchens der Masse m

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2. \quad (7.65)$$

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir die raumartige Komponente der relativistischen Bewegungsgleichung betrachten. Zur Vereinfachung der Nomenklatur nehmen wir an, dass $v_y = v_z = 0$ und auch für die beschleunigende Kraft $F_y = F_z = 0$ gilt. Damit ergibt sich für die x -Komponente der Bewegungsgleichung (7.53)

$$\begin{aligned} K^1 &= m \frac{d}{d\tau} u^1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} F_x &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} m \frac{d}{dt} u^1 \\ F_x &= \frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Ist die Kraft F_x zeitlich konstant, so können wir die letzte dieser Gleichung einfach integrieren und erhalten

$$\int_0^T F_x dt = F_x T = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (7.67)$$

wobei auf der rechten Seite dieser Gleichung die Geschwindigkeit des Teilchens $v(T)$ steht, die es erreicht hat, wenn es über den Zeitraum T von dieser konstanten Kraft beschleunigt wird. Man sieht also, dass man sich selbst im Grenzfall unendlich langer Beschleunigung der Geschwindigkeit $v \rightarrow c$ nur asymptotisch nähern kann. Dabei geht natürlich die Energie (7.61) mit $v \rightarrow c$ asymptotisch gegen den Wert $E \rightarrow \infty$.

Vielfach versucht man sich diesen Sachverhalt, dass Teilchen bei einer Beschleunigung nur asymptotisch die Lichtgeschwindigkeit erreichen können, dadurch zu veranschaulichen, dass man eine geschwindigkeitsabhängige Masse

$$\tilde{m}(\beta) = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

eingführt. Die Beschleunigung des Teilchens wird dann immer schwieriger, da diese Masse mit zunehmender Geschwindigkeit immer größer wird. Dies mag zur Veranschaulichung hilfreich sein. Diese geschwindigkeitsabhängige Masse hängt dann aber natürlich vom Koordinatensystem des Beobachters ab, \tilde{m} ist kein Skalar unter Lorentz Transformation. In der Diskussion hier bezeichnet m stets die Ruhemasse des Teilchens.

7.6 Relativitätstheorie und Elektrodynamik

Für eine Beschreibung von Kenngrößen in der Natur, die mit der speziellen Relativitätstheorie verträglich ist, ist es wichtig, dass man weiss, wie sich diese Kenngrößen unter einer Lorentz Transformation verhalten. Als Beispiele führen wir die Ruhemasse eines Teilchens an, die ein Lorentz Skalar ist und deshalb in jedem Bezugssystem den gleichen Wert besitzt. Ein anderes Beispiel sind kontravariante Vektoren im Minkowski Raum, das sind Vektoren mit 4 Komponenten, die sich bei einer Lorentz Transformation von einem Koordinatensystem K in ein anderes K' genau so transformieren wie der kontravariante Vektor x^μ eines Ereignispunktes. Ein Spaltenvektor aus 4 Elementen Y^0, Y^1, Y^2, Y^3 bildet also genau dann einen kontravarianten Vierervektor Y^μ wenn bei einer Lorentz Transformation des Koordinatensystems gilt, dass dieser Vektor in dem neuen Koordinatensystem K' durch Komponenten Y'^μ definiert ist, die sich aus den ursprünglichen berechnen nach

$$Y'^\mu = a^\mu{}_\nu Y^\nu . \quad (7.68)$$

Dabei bezeichnet $a^\mu{}_\nu$ die Elemente der Transformationsmatrix für die Lorentz Transformation von Ereignispunkten x^μ und ist z.B. für den Boost des Koordinatensystems K' in x -Richtung mit der Geschwindigkeit v gegeben durch (vergleiche Abschnitt 7.3)

$$a^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (7.69)$$

Zu jedem kontravarianten Vektor können wir den zugehörigen kovarianten Vektor definieren, dadurch dass wir die nullte Komponente übernehmen und die raumartigen Komponenten mit einem Minuszeichen versehen. Etwas abstrakter formuliert: Wir erhalten den kovarianten Vektor Y_μ aus dem kontravarianten Vektor Y^μ durch Multiplikation mit dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$

$$Y_\mu = g_{\mu\nu} Y^\nu , \quad (7.70)$$

mit der Matrixdarstellung (erster Index entspricht dem Zeilenindex, der zweite dem Spaltenindex)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (7.71)$$

Bei einer Lorentz Transformation des Koordinatensystems transformiert sich ein kovarianter Vektor gemäß

$$Y'_\mu = a_\mu{}^\nu Y_\nu , \quad (7.72)$$

mit

$$a_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha} a^\alpha{}_\beta g^{\beta\nu} \quad \text{wobei} \quad g^{\beta\nu} = g_{\beta\nu} . \quad (7.73)$$

Den Beweis dieses Transformationsverhaltens von kovarianten Vektoren ((7.72) mit(7.73)) erhält man leicht durch Anwenden von (7.68) und (7.70) mit

$$Y'_\mu = g_{\mu\alpha} Y'^\alpha = g_{\mu\alpha} a^\alpha{}_\beta Y^\beta = g_{\mu\alpha} a^\alpha{}_\beta g^{\beta\nu} Y_\nu .$$

Dies bedeutet also, dass sich die Transformationsmatrix für kovariante Vektoren bei dem Boost des Koordinatensystem K' mit Geschwindigkeit v in x Richtung berechnet zu

$$a_{\mu}{}^{\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & +\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ +\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.74)$$

Nach diesen einführenden Bemerkungen wollen wir uns nun davon überzeugen, dass der Vektor

$$\partial_{\mu} := \frac{d}{dx^{\mu}}, \quad (7.75)$$

gebildet aus den Ableitungen nach den Komponenten des kontravarianten Vektors für einen Ereignispunkt, sich wie ein kovarianter Vektor verhält. (Deshalb haben wir auch bereits den Index μ als unteren Index angebracht.) An Stelle eines Beweises betrachten wir den Spezialfall der Lorentz Transformation für den Boost in x Richtung. In diesem Fall gilt ja für die Komponenten des kontravarianten Vektors eines Ereignispunktes:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x^0 - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}x^1 \\ x'^1 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x^1 - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}x^0, \end{aligned} \quad (7.76)$$

beziehungsweise für die Umkehrtransformation

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x'^0 + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}x'^1 \\ x^1 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x'^1 + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}x'^0, \end{aligned} \quad (7.77)$$

Damit berechnet sich

$$\begin{aligned} \partial'_0 &= \frac{d}{dx'^0} = \frac{dx^0}{dx'^0} \frac{d}{dx^0} + \frac{dx^1}{dx'^0} \frac{d}{dx^1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dx^0} + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dx^1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \partial_0 + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \partial_1. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Der Vergleich mit (7.74) zeigt, dass dies genau das Transformationverhalten für die nullte Komponente eines kovarianten Vektors bei Boost des Koordinatensystems in x -Richtung ist. Entsprechendes gilt für ∂_1 .

Analog kann man auch zeigen, dass

$$\partial^{\mu} := \frac{d}{dx_{\mu}} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d(ct)} \\ \frac{d}{d(-x)} \\ \frac{d}{d(-y)} \\ \frac{d}{d(-z)} \end{pmatrix}, \quad (7.79)$$

ein kontravarianter Lorentz Vektor ist.

Als nächstes betrachten wir den 4-komponentigen Vektor

$$J^\mu := \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}, \quad (7.80)$$

mit der zeitartigen Komponente Ladungsdichte ρ multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit und der zugehörigen Stromdichte \vec{j} in den raumartigen Komponenten. Zum Beweis, dass es sich bei dem so definierten Lorentz Strom Vektor J^μ um einen kontravarianten Vektor handelt, multiplizieren wir ihn mit dem kovarianten Vektor ∂_μ

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= \partial_0 J^0 + \partial_1 J^1 + \partial_2 J^2 + \partial_3 J^3 \\ &= \frac{d}{dct} c\rho + \frac{d}{dx} j_x + \frac{d}{dy} j_y + \frac{d}{dz} j_z \\ &= \frac{d}{dt} \rho + \operatorname{div} \vec{j} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (7.81)$$

Bei dem Übergang zur letzten Zeile haben wir die Kontinuitätsgleichung, die ja die Ladungserhaltung repräsentiert, benutzt. Das Ergebnis dieses Produktes, die Zahl 0 ist offensichtlich ein Lorentz Skalar. Da ∂_μ ein kovarianter Vektor ist, das Produkt dieses kovarianten Vektors mit J^μ einen Skalar liefert, muss also J^μ ein kontravarianter Vektor sein, was die Schreibweise mit dem oberen Index μ im Nachhinein rechtfertigt.

Wenn wir also in einem Koordinatensystem K eine Ladungsverteilung haben, die zeitlich konstant ist und keine Ströme vorhanden sind, so hat J^μ in diesem Koordinatensystem nur die zeitartige Komponente $J^0 = c\rho$. In dem geboosteten Koordinatensystem gilt aber

$$\begin{aligned} J'^0 &= c\rho' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} c\rho \\ J'^1 &= j'_x = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} c\rho, \end{aligned}$$

für den vorbeifliegenden Beobachter ergibt sich also auch ein Strom in x -Richtung j'_x .

Wir wissen also bereits, wie bei einer Lorentz Transformation Ladungen und Ströme zu transformieren sind. Des weiteren erinnern wir uns daran, dass aus den beiden homogenen Maxwell Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{d\vec{B}}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (7.82)$$

folgte, dass die elektromagnetischen Felder durch ein Vektor Potenzial \vec{A} und ein skalares Potenzial Φ definierbar sind über die Beziehungen

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad} \Phi - \frac{d\vec{A}}{dt}. \end{aligned} \quad (7.83)$$

Dabei sind diese Potentiale noch nicht eindeutig definiert; wir können z.B. die Lorentz Eichung fordern wonach gilt

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi}{dt} + \operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi}{dt} + \operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (7.84)$$

Durch Umeichen der Form

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &= \Phi - \frac{d}{dt} \Lambda \\ \vec{\tilde{A}} &= \vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda, \end{aligned} \quad (7.85)$$

mit einem beliebigen skalaren Feld $\Lambda(\vec{r}, t)$ erhalten wir andere Potentiale $\tilde{\Phi}$ und $\vec{\tilde{A}}$, die aber eingesetzt in (7.83) die gleichen elektromagnetische Felder \vec{E} und \vec{B} liefern, wie die Potentiale ϕ und \vec{A} .

Wir werden uns nun davon überzeugen, dass

$$A^\alpha := \begin{pmatrix} \Phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix}, \quad (7.86)$$

ein kontravarianter Lorentzvektor ist. Analog zu (7.81) berechnen wir

$$\begin{aligned} \partial_\alpha A^\alpha &= \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi}{dt} + \operatorname{div} \vec{A} \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei der Übergang zur letzten Zeile für Potentiale in Lorentzeichung gilt (siehe (7.84)). Also haben wir durch diese Gleichung gezeigt, dass der Potenzialvektor A^α ein kontravarianter Lorentzvektor ist, wenn die definierenden Potentiale Φ und \vec{A} die Lorentzeichung erfüllen. Andere Potentiale werden aus diesen durch Umeichung erzeugt. Diese Umeichung in (7.85) können wir aber auch schreiben

$$\tilde{A}^\alpha = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}/c \\ \vec{\tilde{A}} \end{pmatrix} = A^\alpha - \partial^\alpha \Lambda.$$

Da A^α ein kontravarianter Vektor ist und ebenso $\partial^\alpha \Lambda$ gilt dies auch für die Differenz also auch für \tilde{A}^α .

Damit wissen wir jetzt wie sich die Potentiale bei einer Lorentz Transformation verhalten, aber immer noch nichts über die elektromagnetischen Felder. Dazu definieren wir den sogenannten **antisymmetrischen Feldstärketensor**

$$F^{\alpha\beta} := \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha, \quad (7.87)$$

und diskutieren einige Eigenschaften:

- Dieses Objekt heisst antisymmetrisch, weil bei der Vertauschung der beiden hochgestellten Indizes offensichtlich gilt:

$$F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}. \quad (7.88)$$

Insbesondere gilt also, dass

$$F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0, \quad (7.89)$$

und von den ursprünglich 4×4 , also 16 Elementen dieses Objektes sind nur 6 Elemente unabhängig voneinander.

- Wir berechnen als erstes das Element

$$\begin{aligned}
 F^{01} &= \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 \\
 &= \frac{d}{d(ct)} A_x - \frac{d}{d(-x)} \frac{\Phi}{c} \\
 &= \frac{1}{c} \left(\frac{d\vec{A}}{dt} + \text{grad}\Phi \right)_x \\
 &= -\frac{E_x}{c} = -F^{10},
 \end{aligned} \tag{7.90}$$

(siehe (7.83)). Entsprechend gilt auch

$$\begin{aligned}
 F^{02} &= -\frac{E_y}{c} = -F^{20} \\
 F^{03} &= -\frac{E_z}{c} = -F^{30}.
 \end{aligned} \tag{7.91}$$

- Als ein weiteres Beispiel betrachten wir

$$\begin{aligned}
 F^{12} &= \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 \\
 &= -\frac{d}{dx} A_y + \frac{d}{dy} A_x \\
 &= -B_z = -F^{21}.
 \end{aligned} \tag{7.92}$$

Für die anderen Elemente gilt:

$$\begin{aligned}
 F^{23} &= -B_x = -F^{32} \\
 F^{13} &= B_y = -F^{31}.
 \end{aligned} \tag{7.93}$$

- Stellen wir also den antisymmetrischen Feldstärketensor als Matrix dar, wobei der erste Index in $F^{\alpha\beta}$ sich auf die Zeile und der zweite sich auf die Spalte bezieht, so ergibt sich aus (7.90)-(7.93):

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.94}$$

Die Matrixelemente sind also durch die elektromagnetischen Felder definiert. Dies rechtfertigt natürlich auch den Namen **Feldstärketensor**.

- Der antisymmetrische Feldstärketensor ist schliesslich ein Tensor, weil er sich bei einer Lorentz Transformation wie ein Tensor zweiter Stufe transformiert:

$$F'^{\alpha\beta} = a^\alpha{}_\nu a^\beta{}_\mu F^{\mu\nu}. \tag{7.95}$$

Dabei stehen $F^{\mu\nu}$ für die Elemente des Feldstärketensors im ursprünglichen Koordinatensystem, $F'^{\alpha\beta}$ für die entsprechenden Elementen im transformierten Koordinatensystem und $a^\alpha{}_\nu$ repräsentiert die Transformationsmatrix für kontravariante Vektoren (Index oben) vom Koordinatensystem K nach K' .

Mit der Transformation (7.95) und dem Zusammenhang zwischen $F^{\alpha\beta}$ und den elektromagnetischen Feldern in (7.94) haben wir nun auch das Ziel erreicht und kennen die Transformation der elektromagnetischen Felder von einem ins andere Koordinatensystem.

Als ein Beispiel für eine solche Transformation wollen wir eine Punktladung q betrachten, die im Koordinatenursprung des Koordinatensystems K ruht. Wir wissen also, dass in diesem Koordinatensystem ein statisches elektrisches Feld der Form

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

vorliegt und das magnetische Feld identisch null, $\vec{B} = 0$ ist.

Aus der Sicht eines Beobachters, der sich relativ zu diesem Koordinatensystem (wie üblich in x -Richtung mit Geschwindigkeit v) bewegt, wird aus dieser stationären Punktladung eine bewegte Punktladung und ein entsprechender Strom (siehe Diskussion von (7.82)). Dieser Beobachter sollte also auch ein zugehöriges Magnetfeld beobachten. So ergibt sich also z.B.

$$\begin{aligned} -B'_z = F'^{12} &= a^1{}_{\mu} a^2{}_{\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \sum_{i=1}^3 (a^1{}_0 a^2{}_i F^{0i} + a^1{}_i a^2{}_0 F^{i0}) \\ &= \sum_{i=1}^3 (a^1{}_0 a^2{}_i - a^1{}_i a^2{}_0) \frac{-E_i}{c} \\ &= \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{-E_2}{c} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{v}{c^2} E_y. \end{aligned} \tag{7.96}$$

Bei dem Übergang zur zweiten Zeile wurde ausgenutzt, dass der Feldstärketensor in unserem Beispiel nur in der ersten Zeile und in der ersten Spalte von Null verschiedenen Einträge hat. Bei dem Übergang zur zweitletzten Zeile wurden die Eigenschaften der Transformationsmatrix a für den Boost in x -Richtung benutzt.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir die Maxwell Gleichungen in dieser Nomenklatur des Feldstärketensors, die ja die Lorentz Struktur der elektromagnetischen Phänomene verdeutlicht, darstellen.

Wir werden uns zunächst davon überzeugen, dass die homogenen Maxwell Gleichungen (7.82) einer einfachen Symmetrie des Feldstärketensors entsprechen nämlich der sogenannten **Jakobi Identität**. Diese Jakobi Identität besagt, dass

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0, \tag{7.97}$$

dabei sind α, β und γ eine beliebige Kombination der Indizes (0,1,2,3) ist, die bei den drei Summanden in (7.97) zyklisch durchgetauscht werden. Den Beweis dieser Jakobi Identität erhält man durch Einsetzen der Definition von F und sturem Ausrechnen, wobei man benutzt, dass z.B.

$$\partial^\alpha \partial^\beta A^\gamma = \partial^\beta \partial^\alpha A^\gamma.$$

Betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{B} &= -\partial^1 B_x - \partial^2 B_y - \partial^3 B_z \\ &= -\partial^1 F^{32} - \partial^2 F^{13} - \partial^3 F^{21} \\ &= 0.\end{aligned}\tag{7.98}$$

Die Null in der letzten Zeile ergibt sich durch die Anwendung der Jakobi Identität (7.97) für $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 3, 2)$.

Andererseits gilt aber auch für die x -Komponente der zweiten homogenen Maxwell Gleichung

$$\begin{aligned}\left(\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{d\vec{B}}{dt}\right)_x &= c \left[\frac{d(E_z/c)}{dy} - \frac{d(E_y/c)}{dz} + \frac{dB_x}{d(ct)} \right] \\ &= c [-\partial^2(-F^{03}) + \partial^3(-F^{02}) + \partial^0 F^{32}] \\ &= c [\partial^2 F^{03} + \partial^3 F^{20} + \partial^0 F^{32}] \\ &= 0\end{aligned}\tag{7.99}$$

Die Null ergibt sich also hier durch die Jakobi Identität für $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 0, 3)$. Entsprechendes gilt für die y und z Komponenten der zweiten homogenen Maxwell Gleichung.

Man könnte also an dieser Stelle den Eindruck bekommen, dass die homogenen Maxwell Gleichungen gar keine physikalische Information enthalten sondern eben eine einfache mathematische Eigenschaft des Feldstärketensors sind. Dies ist aber nicht richtig. Wir haben ja genau die homogenen Maxwellgleichungen benutzt, um die elektromagnetischen Felder durch die Potentiale zu definieren. Erst diese Reduktion der elektromagnetischen Felder auf die Potentiale ermöglichte ja die kompakte Definition des Feldstärketensors.

Die inhomogenen Maxwell Gleichungen

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{D} &= \rho & \text{mit} & & \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} \\ \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{d\vec{D}}{dt} &= \vec{j} & \text{mit} & & \vec{B} &= \mu_0 \vec{H},\end{aligned}\tag{7.100}$$

können in der kompakten Form

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta,\tag{7.101}$$

dargestellt werden. Dies zeigt, dass die Maxwell Gleichungen kovariant unter Lorentz Transformationen sind.

Zum Beweis dieser kompakten Darstellung betrachten wir zunächst einmal die erste der beiden Gleichungen in (7.100) und multiplizieren diese mit $c\mu_0$

$$\begin{aligned}\mu_0 c \rho = \mu_0 J^0 &= \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{=1/c^2} c \operatorname{div} \vec{E} \\ &= \frac{d E_x}{dx} \frac{1}{c} + \frac{d E_y}{dy} \frac{1}{c} + \frac{d E_z}{dz} \frac{1}{c} \\ &= \partial_0 \underbrace{F^{00}}_{=0} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} \\ \mu_0 J^0 &= \partial_\alpha F^{\alpha 0}.\end{aligned}$$

Zum Beweis der raumartigen Komponenten der Darstellung (7.101) betrachten wir die x -Komponente der zweiten inhomogenen Maxwell Gleichung in (7.100) und multiplizieren diese mit μ_0

$$\begin{aligned}
 \mu_0 j_x = \mu_0 J^1 &= \left(\operatorname{rot} \vec{B} \right)_x - \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{=1/c^2} \frac{dE_x}{dt} \\
 &= \frac{dB_z}{dy} - \frac{dB_y}{dz} - \frac{d(E_x/c)}{d(ct)} \\
 &= \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} + \partial_1 \underbrace{F^{11}}_{=0} \\
 \mu_0 J^1 &= \partial_\alpha F^{\alpha 1}.
 \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für die y - und z -Komponente, so dass die Darstellung (7.101) bewiesen ist.