

Gegeben seien folgende formale Beweise:

$$(i) \quad \frac{[\neg A \vee \neg B]^4 \quad \frac{\frac{[\neg A]^3 \quad \frac{[A \wedge B]^1}{A} (\wedge B_1)}{\perp} (\neg E)^1}{\neg(A \wedge B)} (\neg E)^2}{} \quad \frac{[\neg B]^3 \quad \frac{[A \wedge B]^2}{B} (\wedge B_2)}{\perp} (\neg E)^2}{\neg(A \wedge B)} (\vee B)^3}{\frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)} (\rightarrow E)^4} (\rightarrow E)^4$$

$$(ii) \quad \frac{[\neg B]^3 \quad \frac{[A \rightarrow B]^4 \quad [A]^1}{B} (\rightarrow B)}{A \rightarrow B} (\rightarrow E)^1}{B} (\neg B) \quad [A]^2 (\rightarrow B)}{\frac{\frac{\perp}{\neg A} (\neg E)^2}{\neg B \rightarrow \neg A} (\rightarrow E)^3}{(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)} (\rightarrow E)^4} (\rightarrow E)^4$$

**Aufgabe 1**

- a) Untersuchen Sie die gegebenen formalen Beweise auf maximale Formelvorkommen und kontrahieren Sie bei Bedarf geeignet bzw. geben Sie jeweils kurz an, warum das Vorkommen einer Formel nicht maximal ist.
- b) Wandeln Sie jeden der gegebenen formalen Beweise so um, daß alle Vorkommen von Formeln  $\neg\phi$  darin als  $\phi \rightarrow \perp$  ausgedrückt sind.

**Aufgabe 2**

- a) Zeigen Sie:  $\vdash_{NK} (\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A)$ .  
HINWEIS: Orientieren Sie sich an der Struktur des (ggf. normalisierten) formalen Beweises (ii).
- b) Zeigen Sie:  $\vdash_{NK} \neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$ .  
HINWEIS: Kombinieren Sie den formalen Beweis aus Teilaufgabe a) auf geeignete Weise mit dem formalen Beweis der Formel  $\neg\neg A \rightarrow A$  von Seite 83 des Skriptes.
- c) Untersuchen Sie den formalen Beweis aus Teilaufgabe b) auf neue maximale Formelvorkommen und kontrahieren Sie bei Bedarf geeignet.

**Aufgabe 3**

Geben Sie, basierend auf der Kontraktion für maximale implikative Formeln, eine Kontraktion für maximale negierte Formeln an.